SMP

PROGRAM BERMUTU

Better Education through Reformed Management and Universal Teacher Upgrading

PEMBELAJARAN KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH BANGUN DATAR DI SMP

KEMENTERIAN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

Modul Matematika SMP Program BERMUTU

PEMBELAJARAN KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH BANGUN DATAR DI SMP

Penulis:
Al. Krismanto
Agus Dwi Wibawa

Penilai:
Muchtar Abdul Karim
Atmini Dhoruri

Editor:
Fadjar Shadiq

Layouter:
Titik Sutanti

Kementerian Pendidikan Nasional
Direktorat Jenderal Peningkatan Mutu Pendidik dan Tenaga Kependidikan
Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika
2010

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas karunia, petunjuk, dan bimbingan-Nya sehingga Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika dapat mewujudkan modul pengelolaan pembelajaran matematika untuk guru SD dan SMP. Pada penyusunan modul untuk tahun 2010 telah tersusun sebanyak dua puluh judul, terdiri dari sepuluh judul untuk guru SD dan sepuluh judul lainnya untuk guru SMP.

Modul-modul ini disusun dalam rangka memfasilitasi peningkatan kompetensi guru SD dan SMP di forum Kelompok Kerja Guru (KKG) dan Musyawarah Guru Mata Pelajaran (MGMP), khususnya KKG dan MGMP yang dikelola melalui program *Better Education through Reformed Management and Universal Teacher Upgrading* (BERMUTU). Modul yang telah tersusun, selain didistribusikan dalam jumlah terbatas ke KKG dan MGMP, juga dapat diakses melalui *website* PPPPTK Matematika dengan alamat www.p4tkmatematika.com.

Penyusunan modul diawali dengan kegiatan *workshop* yang menghasilkan kesepakatan tentang daftar judul modul, sistematika penulisan modul, dan garis besar (*outline*) isi tiap judul modul. Selanjutnya secara berturut-turut dilakukan kegiatan penulisan, penilaian (telaah), *editing*, dan *layouting* modul.

Penyusunan modul melibatkan beberapa unsur, meliputi Widyaiswara dan staf PPPPTK Matematika, Dosen Lembaga Pendidikan Tenaga Kependidikan (LPTK), Widyaiswara Lembaga Penjaminan Mutu Pendidikan (LPMP), Guru SD dan Guru Matematika SMP dari berbagai propinsi. Untuk itu, kami sampaikan penghargaan dan terima kasih yang tak terhingga kepada semua pihak yang telah membantu terwujudnya penyusunan modul tersebut.

Mudah-mudahan dua puluh modul tersebut dapat bermanfaat optimal dalam peningkatan kompetensi para guru SD dan SMP dalam mengelola pembelajaran matematika, sehingga dapat meningkatkan kualitas dan kuantitas hasil belajar matematika siswa SD dan SMP di seluruh Indonesia.

Kami sangat mengharapkan masukan dari para pembaca untuk menyempurnakan modul-modul ini, demi peningkatan mutu layanan kita dalam upaya peningkatan mutu pendidikan matematika di Indonesia.

Akhirnya, kami ucapkan selamat membaca dan menggunakan modul ini dalam mengelola pembelajaran matematika di sekolah.

Yogyakarta, Maret 2010
Kepala PPPPTK Matematika

Herry Sukarman, M.Sc.Ed.
NIP.195006081975031002

DAFTAR ISI

PENDAHULUAN

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Standar Isi Mata pelajaran matematika SMP menyatakan bahwa mata pelajaran matematika diberikan dengan tujuan antara lain agar peserta didik memiliki kemampuan memecahkan masalah dan mengomunikasikannya. Hal ini sesuai dengan fokus pembelajaran matematika adalah pemecahan masalah sebagaimana dituntut Permendiknas No. 22 Tahun 2006. Kemampuan tersebut tidak lepas dari tujuan lain yang mendasarinya, yaitu (1) memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antarkonsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma, dalam pemecahan masalah dan (2) menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika.

Namun kenyataan menunjukkan, banyak guru masih mengalami kesulitan menyelenggarakan pembelajaran agar siswa memiliki kemampuan memecahkan masalah seperti tuntutan yang dikemukakan di atas. Siswa pun banyak yang mengalami kesulitan dalam memecahkan masalah matematika.

Salah satu program BERMUTU dalam menunjang ketercapaian keberhasilannya adalah dengan menyelenggarakan kegiatan penyusunan modul terkait dengan pembelajaran matematika SMP. Untuk keperluan tersebut pada Tahun 2009 telah disusun 11 modul suplemen untuk melengkapi Bahan Belajar Mandiri (BBM) yang disusun Direktorat Jenderal Peningkatan Mutu Pendidik dan Tenaga Kependidikan. Di dalam 11 modul tersebut sesungguhnya telah tersedia cukup banyak bahan yang memuat soal dan contoh pemecahan masalah, tetapi kurang dalam hal penyajian pembelajaran pemecahan masalah. Modul ini diharapkan dapat digunakan untuk mengatasi kekurangan-kekurangan tersebut.

Di samping itu, PPPPTK Matematika pernah menerbitkan beberapa judul Paket Penggemar Matematika (PPM) yang banyak terkait dengan pemecahan masalah. Salah satu paket yang ditulis pada tahun 2004 tersebut, dan ditulis oleh Al. Krismanto, banyak digunakan dalam penyusunan modul ini. Di samping itu, satu di antara modul BERMUTU Matematika yang disusun pada tahun 2009 yaitu ‘Model-model Pembelajaran Matematika SMP,’ dapat digunakan karena sangat relevan dengan tujuan disusunnya modul ini. Sedangkan dua modul Suplemen Matematika Program BERMUTU yang telah diterbitkan dan terkait bahan ajar matematika merupakan bahan yang perlu dibaca kembali karena materinya banyak digunakan dalam modul ini, dan pembahasannya tidak akan diulang. Kedua buku/modul tersebut adalah Kapita Selekta Pembelajaran Geometri Datar Kelas VII di SMP dan Kapita Selekta Pembelajaran Geometri Datar Kelas VIII dan IX di SMP.

B. Tujuan

Penulisan modul yang berjudul “Pembelajaran Kemampuan Pemecahan Masalah Bangun Datar di SMP” ini mempunyai beberapa tujuan, yaitu memfasilitasi Guru Matematika SMP, khususnya yang tergabung dalam MGMP Matematika SMP untuk:

1. lebih memahami pemecahan masalah matematika SMP pada umumnya dan khususnya pada kajian bangun datar dan pembelajarannya;
2. dapat menyiapkan bahan-bahan pemecahan masalah bangun datar SMP yang sesuai dengan siswa SMP;
3. menyelenggarakan pembelajaran pemecahan masalah bangun datar kepada siswa SMP agar siswa memiliki kemampuan memecahkan masalah bangun datar; dan
4. meningkatkan kemampuan menyelenggarakan pembelajaran pemecahan masalah bangun datar di SMP.

C. Peta Kompetensi

1. Lebih memahami pemecahan masalah matematika SMP pada umumnya dan khususnya pada kajian bangun datar dan pembelajarannya.
2. Mampu menggunakan matematisasi horizontal dan vertikal untuk memecahkan masalah matematika dan masalah dalam dunia nyata utamanya yang terkait dengan bangun datar.

3. Mampu menggunakan pengetahuan konseptual, prosedural, dan keterkaitan keduanya dalam pemecahan masalah matematika, serta penerapannya dalam kehidupan sehari-hari.
4. Mampu memecahkan masalah matematika khususnya dalam bangun datar.
5. Mampu membelajarkan siswanya agar memiliki kemampuan memecahkan masalah matematika, khususnya pada bangun datar dan melakukan penilaian keberhasilannya.

D. Ruang Lingkup

Penulisan modul ini dimaksudkan untuk memberikan gambaran bagi guru matematika SMP tentang pemecahan masalah, strategi penyelesaian masalah dan alternatif pembelajaran. Modul ini memuat topik berikut.

1. Pemecahan masalah dalam pembelajaran matematika.

   Bagian ini lebih berupa ringkasan dan menekankan bagian utama dari Modul berjudul *Pembelajaran Kemampuan Memecahkan Masalah Matematika di SMP* (diterbitkan bersama-sama dengan buku/modul ini oleh PPPPTK Matematika dalam rangka program BERMUTU).

2. Pemecahan masalah dan pembelajarannya yang terkait dengan pengukuran (luas dan keliling) Bangun Datar.
3. Pemecahan masalah dan pembelajarannya yang terkait dengan Teorema Pythagoras.
4. Pemecahan masalah dan pembelajarannya yang terkait dengan lingkaran.
5. Pemecahan masalah dan pembelajarannya yang terkait dengan kesebangunan dan kekongruenan.

Empat bahan terakhir juga memberikan gambaran dan saran-saran kegiatan agar siswa berani memulai dan mengembangkan strategi untuk memecahkan masalah geometri khususnya dan masalah matematika pada umumnya.

E. Saran Cara Penggunaan Modul di MGMP/Sekolah

Saat mempelajari modul ini, disarankan agar sesama anggota MGMP berdiskusi lebih dahulu mengenai permasalahan pemecahan masalah dan pembelajaran bangun datar di SMP sehingga anggota MGMP mengetahui permasalahan secara umum. Untuk dapat membelajarkan siswa dalam pemecahan masalah matematika, dengan sendirinya guru perlu memiliki kompetensi dalam pemecahan masalah matematika. Berdasar pengalaman dan saran-saran dari para pakar pendidikan matematika dalam pemecahan masalah, misalnya Polya dan Bell yang dikemukakan dalam modul ini, guru diharapkan dapat mengembangkan kemampuan siswanya untuk mengembangkan strategi pemecahan masalah matematika, khususnya dalam bangun datar. Seperti dikemukakan beberapa ahli, strategi dapat muncul karena pengalaman, bukan sekedar sama dengan pengalaman terdahulu, tetapi berkembang sesuai keberanian memulai menghadapi tantangan dalam pemecahan masalah. Dengan demikian pula guru perlu menghargai berbagai variasi yang mungkin muncul secara unik dari langkah strategi yang dipilih siswa.

Modul ini disusun berdasarkan masalah yang mungkin dihadapi oleh para guru dan para siswa. Oleh karena itu, dalam memanfaatkan modul ini sebaiknya bapak/ibu guru menjawab lebih dulu masalah-masalah yang dikemukakan pada bagian pendahuluan setiap bab atau Kegiatan Belajar (KB). Pengalaman bapak/ibu guru saat menjawab masalah-masalah pendahuluan tersebut diharapkan ikut memotivasi bapak/ibu untuk mempelajari modul dan diharapkan bapak/ibu guru juga menyadari pentingnya materi yang akan dibahas.

Selanjutnya bapak/ibu guru membaca dan memahami uraian atau pembahasan materi dalam KB. Uraian dalam KB merupakan salah satu pendekatan dalam menjawab masalah yang dihadapi. Pendekatan ini berkaitan dengan cara pembahasan. Teori-teori matematika yang disampaikan telah diusahakan sesuai dengan kaidah yang benar dalam matematika. Pelajari dan pahami materi KB yang disampaikan, bila perlu bapak/ibu guru dapat membaca berulang-ulang agar lebih memahami.

Perkiraan waktu untuk mempelajari Modul 1 adalah 2 jam, sedangkan setiap modul lainnya 4 jam. Setelah bapak/ibu guru mengikuti KB yang bersangkutan, bapak/ibu guru diharapkan menjawab latihan yang berupa soal-soal yang bersesuaian dengan KB yang telah diikuti. Soal-soal tersebut hendaknya dijawab sendiri oleh bapak/ibu guru agar dapat diketahui seberapa jauh pemahaman bapak/ibu guru setelah mengikuti KB terhadap materi yang berkaitan dengan masalah pada KB. Untuk dapat mengetahui hal ini, silahkan bapak/ibu guru membandingkannya dengan kunci atau petunjuk jawaban yang disiapkan dalam modul ini. Sebaiknya bapak/ibu guru guru jangan melihat kunci/petunjuk yang dilampirkan sebelum berusaha menjawab latihan terlebih dahulu. Andaikan bapak/ibu melihat kunci sebelum menjawab latihan maka dapat diindikasikan bahwa bapak/ibu guru belum memahami sepenuhnya KB yang berkaitan. Gunakan salah satu cara penilaian yang dikemukakan pada Kegiatan Belajar 3 Modul 1 sebagai acuan. Tingkat keberhasilan Anda dapat Anda nilai sendiri, atau Anda dapat bekerjasama dengan teman Anda di MGMP untuk saling menilai.

Jika para pengguna modul ini mengalami kesulitan, membutuhkan klarifikasi, maupun memiliki saran perbaikan, sudi kiranya menyampaikan kepada kami lewat lembaga PPPPTK Matematika melalui e-mail: p4tkmatematika@yahoo.com atau alamat PPPPTK Matematika Jl. Kaliurang Km 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, DIY, Kotak Pos 31 Yk-Bs Yogyakarta 55281. Juga dapat berkorespondensi langsung dengan penulis melalui e-mail: kristemulawak@yahoo.co.id atau agusdw70@yahoo.com

MODUL 1
PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA, STRATEGI, DAN PEMBELAJARANNYA

MODUL 1
PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA, STRATEGI, DAN PEMBELAJARANNYA

Perhatikanlah pembelajaran matematika SMP di tiga kelas yang masing-masing pembelajarannya diberi tugas untuk mengerjakan soal berikut ini.

Di Kelas A

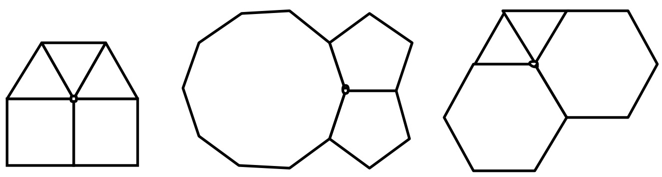
Pada ΔABC, titik D pada $\overline{AB}$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. Jika $AD = 5$ cm, $DB = 9$ cm, dan $AC = 12$ cm, hitunglah luas segitiga ABC.

Di Kelas B

Pada suatu lingkaran dipilih n titik sebarang. Kemudian ditarik semua talibusur melalui titik-titik tersebut. Berapakah sebanyak-banyaknya daerah bagian lingkaran yang terjadi?

Di Kelas C

Pengubinan di sekeliling sebuah titik T dapat dilakukan dengan mempersekutukan masing-masing sebuah titik sudut dari dua persegi kongruen dan tiga segitiga sama sisi kongruen bersisi sama panjang dengan panjang sisi persegi. Pengubinan sekeliling T juga dapat dilakukan dengan menempatkan sebuah segi sepuluh dan dua segi lima beraturan kongruen. Dapat juga dilakukan dengan menempatkan dua segienam beraturan kongruen dan dua segitiga samasisi. Berapa banyaknya variasi segibanyak beraturan yang dapat mengubin di sekeliling titik T? Untuk memahami masalahnya, informasi di atas dapat digambarkan sebagai berikut**:**



Gambar 1.1

Manakah di antara ketiga soal di atas merupakan masalah? Apa alasannya?

Ketiga soal di atas mengantar Anda untuk mempelajari hakikat pemecahan masalah dalam matematika dan strategi pemecahan masalah matematika, dengan tujuan:

1. lebih memahami hakikat pemecahan masalah dalam matematika, dan
2. lebih memahami berbagai strategi dalam pemecahan masalah sebagai dasar untuk memahami modul berikutnya.

Untuk membantu Anda menguasai kemampuan tersebut, pembahasan bab ini dikemas dalam 3 (tiga) kegiatan belajar (KB) sebagai berikut.

KB 1: Memahami Pemecahan Masalah dalam Matematika

KB 2: Memahami Strategi Memecahkan Masalah dalam Pembelajaran Matematika.

KB 3: Membelajarkan Siswa Memecahkan Masalah

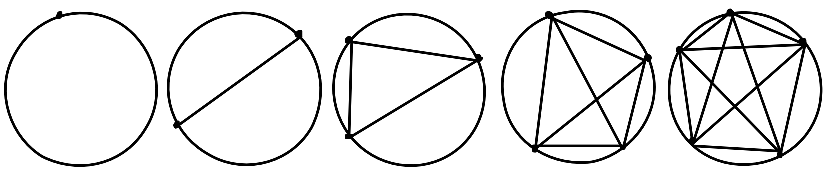
Uraian dalam ketiga KB tidak terlalu luas, sebab uraian tersebut utamanya bertujuan untuk mendasari bahasan dalam Modul 2 - 5 dalam buku ini. Uraian lebih lengkap tentang masalah, pemecahan masalah dan pembelajarannya silahkan mempelajari Modul *Pembelajaran Kemampuan Memecahkan Masalah Matematika di SMP* (diterbitkan bersama-sama dengan buku/modul ini oleh PPPPTK Matematika dalam rangka program BERMUTU).

A. Kegiatan Belajar 1: Memahami Pemecahan Masalah dalam Matematika

1. Masalah

Sesuai dengan pengertian masalah, maka bagi siswa yang telah memahami Teorema Pythagoras, soal di Kelas A yang dikemukakan pada awal modul ini bukan lagi merupakan masalah. Ada algoritma tertentu yang dapat digunakan untuk menentukan panjang garis tinggi $\overline{CD}$ sehingga luas ΔABC segera dapat dihitung.

Untuk soal di kelas B, ilustrasi masalah tersebut dapat diurai sebagai berikut.



Gambar 1.2

Kecenderungan penyelesaiannya biasanya menggunakan pola bilangan, sehingga soal tersebut dapat dipecahkan sebagai berikut.

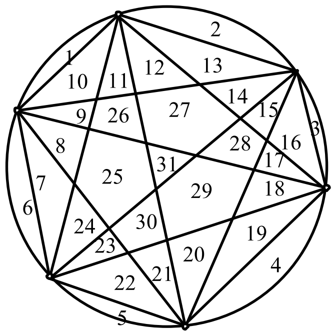
Jika ada 1 titik, maka maksimum terdapat 1 daerah, dapat ditulis 2^{1-1} daerah.

Jika ada 2 titik, maka maksimum terdapat 2 daerah dapat ditulis 2^{2-1} daerah.

Jika ada 3 titik, maka maksimum terdapat 4 daerah dapat ditulis 2^{3-1} daerah.

Dugaan atau konjekturnya ialah**:** Jika ada n titik maka maksimum terdapat 2^{n-1} daerah.

Ternyata, jika ada 6 titik, maksimum hanya terdapat 31 dan **bukan** $2^{6-1} = 32$ daerah seperti yang diduga.



Gambar 1.3

Selanjutnya jika $n = 7$ maksimum daerahnya bukan $2^{7-1} = 64$, tetapi 57. Hal ini menunjukkan bahwa dugaan secara induktif dengan pola pikir seperti itu tidak benar pada kasus tersebut. Di sini ada dua hal yang dapat dipetik: (1) Bernalar induktif tidak menjamin kebenaran perkiraan, dan (2) soal di Kelas B itu merupakan masalah.

Adapun soal di Kelas C jelas merupakan masalah, bahkan bagi guru sendiri jika prosedur penyelesaiannya belum tersedia atau belum diketahui guru tersebut. Akibatnya perlu dicari strategi tertentu atau alternatif strategi untuk memecahkannya.

Dalam matematika, suatu pertanyaan/soal akan menjadi masalah hanya jika pertanyaan itu menunjukkan adanya suatu tantangan yang tidak dapat dipecahkan dengan suatu prosedur rutin yang sudah diketahui pelaku. Dengan demikian masalah matematika yang dihadapi tersebut berbeda dengan soal-soal latihan atau aplikasi prinsip/konsep yang sudah jelas algoritmanya.

2. Jenis Masalah

Menurut Polya (1975), ada dua macam masalah yaitu (1) menemukan (bilangan, lukisan, dan sebagainya) dan (2) membuktikan. Soal di Kelas B dan Kelas C pada awal modul ini dapat dikategorikan sebagai masalah menemukan. Tetapi masalah di Kelas B dapat diubah menjadi masalah pembuktian bahwa maksimum banyak daerah bagian lingkaran yang terjadi adalah $d_n = \dfrac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}$; dengan d_n adalah maksimum banyak daerah yang terjadi dan n adalah banyak titik pada lingkaran.

Pertanyaan yang dapat dikembangkan adalah mengapa yang ditanyakan adalah maksimum banyak daerah yang terjadi? Adakah minimumnya? Bagaimana situasinya? Berapa minimumnya itu?

B. Kegiatan Belajar 2: Memahami Strategi dalam Pemecahan Masalah

Dalam memecahkan masalah, Polya (1957) menyarankan empat langkah utama ini.

1. Memahami Masalah

Apa yang ditanyakan? Apa datanya (yang diketahui)? Apa syarat-syaratnya? Apakah datanya cukup untuk mememecahkan masalah itu? Atau tidak cukup? Atau bahkan berlebih sehingga harus ada yang diabaikan? Atau bertentangan? Jika perlu, dapat dibuat diagram yang menggambarkan situasinya. Pisah-pisahkan syarat-syaratnya jika ada. Dapatkah masalahnya ditulis kembali dengan lebih sederhana sesuai yang diperoleh di atas?

2. Menyusun Rencana Memecahkan Masalah

   Menghubungkan antara yang diketahui dan yang ditanyakan.

Pernahkah Anda menghadapi masalah tersebut? Atau yang serupa dengan masalah tersebut? Tahukah Anda masalah (lain) yang terkait dengan masalah itu? Adakah teorema yang bermanfaat untuk digunakan? Jika Anda pernah menghadapi masalah serupa, dapatkah strategi atau bagian cara memecahkannya digunakan di sini? Atau, dapatkah hasilnya digunakan di sini? Dapatkah metodenya yang digunakan? Perlukah Anda mengenalkan elemen baru terkait yang dapat memungkinkan untuk menyelesaikannya? (Dalam geometri, misalnya, adakah garis atau titik yang tak muncul, kemudian dimunculkan untuk membuat pertolongan?) Dapatkah masalahnya dinyatakan kembali dengan lebih sederhana dan jelas? Dapatkah dinyatakan dengan cara berbeda? Apakah kita perlu kembali ke beberapa definisi? Jika Anda tidak segera dapat menyelesaikan masalah tersebut, cobalah memecahkan masalah serupa yang lebih sederhana. Dapatkah kemudian dipikirkan masalah lain yang lebih dekat dengan masalah yang sedang dipecahkan? Adakah masalah yang lebih spesifik? Adakah masalah yang analog? Masalah yang lebih umum? Dapatkah Anda memecahkan sebagian dari masalahnya? Misal, pilihlah hanya sebagian syaratnya (jika ada), abaikan sementara syarat lainnya; seberapa jauh yang akan dicari itu dapat ditentukan, seberapa bervariasinya? Dapatkah Anda menarik sesuatu gagasan dari data yang tersedia? Dapatkah Anda pikirkan data lain yang bertalian dengan yang dicari pemecahannya? Dapatkah Anda mengubah yang ditanyakan atau yang diketahui, atau kedua-duanya, sedemikian hingga data baru dan “yang tak diketahui yang baru” semakin dekat? Apakah semua data telah Anda gunakan? Apakah semua syarat telah Anda gunakan? Apakah Anda telah memasukkan sesuatu hal lain yang penting dalam memecahkan masalah itu?

Seringkali pemecahan masalah bangun datar juga memerlukan kompetensi yang terkait aljabar, bahkan dalam awal belajar memecahkan masalah. Dalam hal ini, Arya dan Lardner (1981:63), dan Auviel dan Poluga (1984:115), menyarankan langkah-langkah dasar menyelesaikan masalah verbal dengan (1) memilih suatu variabel, (2) membuat diagram jika diperlukan, (3) menyusun bentuk-bentuk aljabar, (4) menyusun model matematika berupa kalimat terbuka atau pun relasi fungsional, (5) menyelesaikan kalimat terbuka atau model matematikanya, (6) menyatakan jawabnya sesuai yang ditanyakan pada masalah itu, dan (7) memeriksa kebenaran jawabannya dengan “mengembalikannya” ke persoalan awal.

Dari hal di atas beberapa strategi yang sering digunakan untuk memulai memecahkan masalah, di antaranya adalah yang disarankan oleh Arya dan Lardner (1981:63), dan Auvil dan Poluga (1984:115), yaitu:

a. Membuat diagram.
b. Mencobakan pada soal yang lebih sederhana.
c. Membuat tabel.
d. Menemukan pola.
e. Memecah tujuan.
f. Memperhitungkan setiap kemungkinan.
g. Berpikir logis.
h. Bergerak dari belakang.
i. Mengabaikan hal yang tidak mungkin.
j. Mencoba-coba.

3. Melaksanakan Rencana

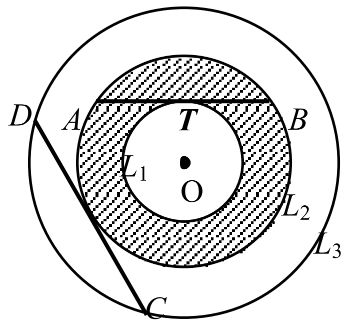
Melaksanakan rencana pemecahan masalah dengan setiap kali mengecek kebenaran di setiap langkah. Dapatkah Anda peroleh bahwa setiap langkah telah benar? Dapatkah Anda buktikan bahwa sungguh benar?

4. Menguji Kembali atau Verifikasi

Cek-lah hasilnya. Periksa juga alasan atau argumennya. Apakah hasilnya berbeda? Apakah secara sepintas dapat dilihat? Dapatkah Anda gunakan hasil atau metodenya untuk menyelesaikan masalah lain?

Contoh

Perhatikan Gambar 1.4. Tiga lingkaran konsentris membentuk "cincin" yang diarsir. Ruas garis $\overline{AB}$ yang panjangnya 10 satuan adalah tali busur lingkaran L_2 dan $\overline{AB}$ menyinggung lingkaran L_1. Ruas garis $\overline{CD}$ yang panjangnya 12 satuan adalah tali busur lingkaran L_3 dan $\overline{CD}$ menyinggung lingkaran L_2. Hitung luas daerah "cincin" (yang berarsir).



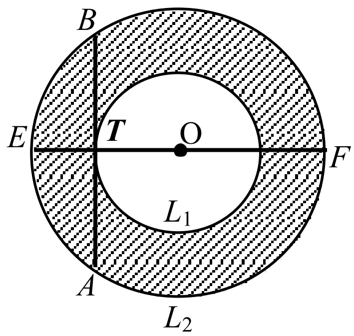
Gambar 1.4

Langkah 1: Memahami masalah

Masalahnya jelas tampak pada gambar yang tersedia. Ada tiga lingkaran konsentris dengan talibusur-talibusur pada masing-masing lingkaran yang diketahui ukurannya. Ruas garis $\overline{AB}$ adalah talibusur pada L_2 menyinggung lingkaran L_1. $AB = 10$ satuan. Ruas garis $\overline{CD}$ adalah tali busur lingkaran L_3 dan $\overline{CD}$ menyinggung lingkaran L_2. CD = 12 satuan.

Langkah 2: Menyusun rencana atau strategi

Sepintas dapat diduga bahwa masalahnya menyangkut selisih luas lingkaran. Tetapi jari-jari ketiga lingkaran tersebut belum diketahui. Dari gambar yang ada tidak jelas hubungan antara ruas garis $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$. Menghubungkan tiga lingkaran lebih sulit dari pada menghubungkan masalahnya pada dua lingkaran. Maka salah satu strategi adalah menyederhanakan masalah itu, berfokus pada hubungan yang mungkin diperoleh dari mengaitkan dua lingkaran. Perhatikan Gambar 1.5.



Gambar 1.5

Misalkan panjang jari-jari lingkaran L_1, L_2, dan L_3 berturut-turut R_1, R_2, dan R_3.

Luas yang diarsir = luas L_2 – luas L_1 = $\pi R_2^2 - \pi R_1^2 = \pi(R_2^2 - R_1^2)$. Nilai R_1 dan R_2 tidak diketahui. Jika ditarik garis tengah $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ di T, maka akan didapat hubungan bahwa $BT^2 = ET \times TF = (R_2 - R_1)(R_2 + R_1)$. Karena diketahui $AB = 10$, sehingga $BT = 5$ dan diperoleh hubungan $5^2 = (R_2^2 - R_1^2)$. Jadi luas yang diarsir diperoleh dari $\pi(R_2^2 - R_1^2) = 25\pi$.

Langkah 3: Melaksanakan rencana

Pelaksanaan rencana dilakukan dengan mengomunikasikannya dalam bentuk yang lebih sederhana dari "gagasan-gagasan" yang dikemukakan pada langkah ketiga. Misalnya pada bagian penyelesaiannya sebagai berikut.

Penyelesaian: Tarik garis tengah $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ di T

$$\begin{aligned}
\text{Luas yang diarsir} &= \text{luas } L_2 - \text{luas } L_1 \\
&= \pi R_2^{\,2} - \pi R_1^{\,2} \\
&= \pi(R_2^{\,2} - R_1^{\,2}) \text{ .... (1)} \\
BT^2 &= ET \times TF \\
\left(\tfrac{1}{2}AB\right)^2 &= (R_2 - R_1)(R_2 + R_1) \\
5^2 &= (R_2^{\,2} - R_1^{\,2}) \\
\Leftrightarrow (R_2^{\,2} - R_1^{\,2}) &= 25 \qquad \text{.................................(2)}
\end{aligned}$$

Dari (1) dan (2) diperoleh:

$$\begin{aligned}
\text{Luas yang diarsir} &= \text{luas } L_2 - \text{luas } L_1 \\
&= \pi(R_2^{\,2} - R_1^{\,2})\,. \\
&= 25\pi.
\end{aligned}$$

Langkah 4: Menguji Kembali atau Verifikasi

Dari pengerjaan sebagian soal, nampak bahwa kita dapat mengabaikan sebagian informasi yang berlebihan pada masalahnya, seperti yang dikemukakan Polya di atas. Hal itu dapat diperiksa misalnya kita dapat menggambar lingkaran lain yang lebih besar dari L_3, dengan talibusur menyinggung L_2 tetapi panjang talibusur itu lebih dari 12 cm. Hal ini menandakan bahwa keberadaan lingkaran yang lebih besar dari pada lingkaran kedua tidak mempengaruhi strategi dan hasil pemecahan masalah.

C. Kegiatan Belajar 3: Membelajarkan Memecahkan Masalah

Bell (1978) dalam *Teaching and Learning Mathematics* memberikan saran kepada para guru dalam membelajarkan siswanya yang intinya sebagai berikut.

1. Doronglah siswa untuk menggunakan strategi mereka sendiri.
2. Doronglah siswa berpikir divergen.
3. Hendaknya ada keseimbangan kegiatan pemecahan masalah secara berkelompok dan secara individual.
4. Berilah siswa cukup banyak bahan latihan pemecahan masalah (dari sederhana ke yang kompleks).
5. Doronglah siswa menggunakan pertanyaan, pertanyaan, dan lebih banyak pertanyaan.
6. Yakinkan, bahwa siswa telah memiliki pengetahuan prasyarat yang cukup dalam hal fakta, konsep, prinsip, dan keterampilan yang diperlukan untuk menyelesaikan masalah yang Anda sampaikan.
7. Doronglah siswa untuk mendapatkan sendiri masalah-masalah matematika dan memecahkannya.
8. Doronglah siswa untuk menggunakan intuisi, kreativitas, dan analisis logis.
9. Ciptakan suasana santai/rileks, dalam suasana yang tidak kaku selama kegiatan pemecahan masalah.
10. Ketika siswa mengalami "kemacetan" atau "keberatan beban," berilah jalan keluar dengan kerendahan hati/lemah lembut.
11. Lontarkan pertanyaan yang secara umum cukup memadai untuk memecahkan variasi berbagai jenis masalah sehingga dapat dipertimbangkan dalam memecahkan masalah yang sedang dihadapi.
12. Hindari menawarkan saran yang langsung mengarah kepada pemecahan masalahnya.
13. Ajukan pertanyaan dan tawarkan saran atas langkah yang telah digunakan sendiri oleh siswa.
14. Berilah pujian atas penggunaan strategi yang bagus maupun atas penyelesaian yang benar.

Berikut ini beberapa hal yang perlu dilakukan guru dalam memberikan dorongan kepada siswa untuk mulai menyelesaikan masalah bangun datar.

1. Jika sedang membahas topik tertentu, gambarlah situasinya dengan cermat dan gambarlah pula garis atau garis-garis pertolongan menuju kepada terbentuknya bangun datar atau sifat bangun datar terkait teorema yang sedang dan sudah pernah dipelajari.
2. Teorema Pythagoras senantiasa digunakan dalam masalah-masalah yang menyangkut ketegaklurusan.
3. Kesejajaran sering melibatkan sifat-sifat kesebandingan dan kesebangunan, serta kekongruenan.

Berikut ini beberapa *tips* dalam memfasilitasi pembelajaran pemecahan masalah.

1. Mulailah dengan soal yang sederhana-menarik-proporsional sesuai dengan taraf kemampuan siswa
2. Berhati-hatilah terhadap soal yang tidak tepat
3. Mintalah siswa mengemukakan kembali masalah dengan kata-kata sendiri
4. Sesekali pergunakanlah soal yang tak-lengkap
5. Pergunakanlah soal dengan jawaban atau cara penyelesaian yang tidak tunggal
6. Berilah kesempatan kepada siswa dengan membantu seperlunya saja
7. Pergunakanlah model diskusi
8. Pertimbangkan bantuan alat peraga matematika
9. Pergunakanlah kegiatan di luar jam pelajaran
10. Pertimbangkan untuk menggunakan pendekatan langsung
11. Kembangkanlah sisi afektif pembelajaran
12. Ubahlah paradigma berpikir kita ke cara pandang problem solving
13. Berilah penekanan pada proses, bukan pada hasil
14. Setelah menyelesaikan masalah, mintalah siswa untuk merefleksi
15. Kenalilah cara penilaian soal pemecahan masalah

Contoh penyekoran berikut disadur oleh Sumardyono (2007) dan dapat digunakan sebagai pertimbangan dalam melakukan penyekoran pembelajaran pemecahan masalah

Penyekoran secara holistik (disadur dari Lester, F. & Kroll, D. (1991:276-283)).

Skor	Indikator	Keterangan
4	Semua yang berikut dipenuhi: • Jawaban yang diperoleh benar. • Penjelasan jelas dan lengkap. • Perhitungan matematis dilakukan dengan benar.	respon yang patut dicontoh
3	Hanya terjadi salah satu dari yang berikut: • Jawaban salah karena sedikit kesalahan perhitungan. • Penjelasan kurang jelas. • Penjelasan kurang lengkap.	respon yang baik
2	Terjadi 2 dari 3 hal pada skor 3 di atas. Atau, salah satu atau lebih ciri-ciri berikut terjadi: • Jawaban tidak benar, namun disebabkan kesalahan analisis (bukan kesalahan perhitungan) • Penjelasan tidak jelas atau membingungkan • Ada kesalahan penerapan strategi penyelesaian.	respon yang kurang tepat
1	Jawaban tidak benar, dan Penjelasan (jika ada) dengan alasan yang tidak benar, dan Strategi yang diterapkan tidak benar atau membingungkan.	respon yang kurang
0	Kertas jawaban dalam keadaan kosong atau berisi catatan yang tidak relevan untuk menjawab masalah	tidak ada respon

Contoh penyekoran secara analitik (disadur dari Charles, Lester & O`Daffer (1987:10), dalam Sumardyono, 2007).

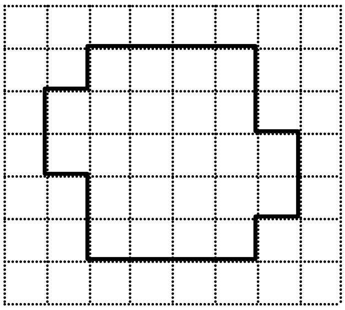
Aspek dan skor	Indikator
Pemahaman	
Skor 3	Siswa menunjukkan pemahaman yang lengkap baik pada langkah penyelesaian maupun pada penafsiran/penjelasan terhadap jawaban.
Skor 2	Siswa menunjukkan pemahaman yang baik. Sedikit kesalahan mungkin terjadi pada pemahaman masalah atau pada pengembangan strategi penyelesaian atau pada penafsiran jawaban.
Skor 1	Siswa menunjukkan pemahaman yang minimal. Pernyataan masalah mungkin kurang jelas bagi siswa. Strategi yang digunakan atau penafsiran jawaban kurang cocok dengan masalahnya.
Skor 0	Siswa tidak menunjukkan pemahaman terhadap masalah. Strategi yang digunakan dan jawaban yang diperoleh tidak cocok dengan masalah.
Perencanaan	
Skor 3	Rencana dikemukakan dengan jelas dan mengarah pada jawaban atau penyelesaian yang benar.
Skor 2	Rencana dikemukakan dengan cukup beralasan dan benar atau mungkin ada kesalahan kecil berdasarkan intepretasi yang benar terhadap masalah.
Skor 1	Rencana tidak jelas atau hanya sebagian rencana yang benar berdasarkan intepretasi yang sedikit keliru terhadap masalah.
Skor 0	Tidak ada rencana penyelesaian sama sekali atau keseluruhan rencana tidak ada yang benar.
Penyelesaian /jawaban	
Skor 3	Jawaban benar dan dinyatakan secara jelas atau meskipun jawaban tidak benar namun hanya dikarenakan kesalahan yang tidak esensi bukan karena kesalahan implementasi/ prosedur.
Skor 2	Jawaban salah karena sedikit kesalahan pada implementasi/ prosedur atau jawaban dikemukakan secara tidak jelas
Skor 1	Jawaban salah karena kesalahan yang esensi pada implementasi/prosedur.
Skor 0	Tidak ada jawaban yang diberikan.
Penampilan	
Skor 1	Keseluruhan tampilan di atas kertas rapi/cermat dan mudah dibaca. Informasi yang berguna/penting dapat dengan mudah ditemukan.
Skor 0	Kertas jawaban sulit untuk dibaca atau informasi yang berguna/penting sulit untuk ditemukan.

D. Ringkasan

1. Suatu soal dikatakan masalah jika soal itu sesuai dengan tingkat kemampuan siswa, tidak segera dapat diselesaikan dengan algoritma atau prosedur rutin, dan menantang untuk mengerjakannya.
2. Empat langkah utama memecahkan masalah menurut Polya:
   a. Memahami masalah: Memahami yang diketahui dan yang ditanyakan.
   b. Membuat rencana strategi pemecahan masalahnya.
   c. Melaksanakan rencana
   d. Memeriksa kembali jawaban yang diperoleh
3. Membelajarkan siswa memecahkan masalah perlu dilakukan sesuai tingkat kemampuan siswa, mendorong/memotivasi siswa untuk tidak patah semangat, memberikan bimbingan dengan mengembangkan teknik bertanya untuk mengembangkan alternatif strategi.

E. Latihan/Tugas

1. Kepada siswa di suatu kelas diberikan soal sebagai berikut.



Bagilah bangun pada papan berpetak ini menjadi 4 (empat) bangun kongruen dengan menggambar ruas-ruas garis batasnya.

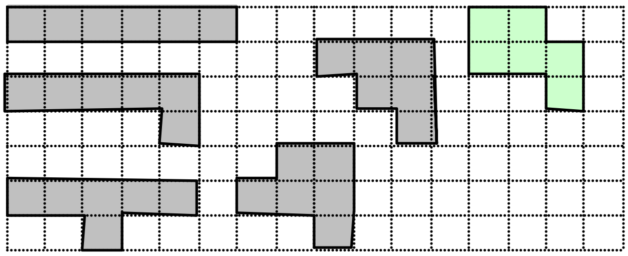
Apakah soal di atas merupakan soal pemecahan masalah?

Berikan penjelasannya!

2. Dalam ruang lingkup yang sama, tulislah dua soal; satu soal penerapan bukan pemecahan masalah, dan satu soal yang lain merupakan masalah (memuat unsur-unsur masalah)!
3. Berikan penjelasan ciri-cirinya masing-masing, bahwa soal yang Anda buat merupakan soal pemecahan masalah atau bukan!

Selesaikan sendiri soal di atas lebih dahulu. Ukur kemampuan Anda dalam memecahkan masalah.

Strategi untuk No. 1 di antaranya: Dengan luas bangun = 24 kotak satuan dibagi 4 sehingga luas masing-masing 6 satuan. Dicari bangun yang mungkin. Sebagian alternatif bangun yang luasnya 6 satuan adalah sebagai berikut.



Dengan menghilangkan gambar "yang tidak mungkin merupakan bagian" dan meletakkan pilihan bangun yang mungkin akan diperoleh penyelesaiannya.

Untuk No. 2 dan 3, hendaknya Anda bekerja sama dengan rekan Anda, dengan saling memeriksa hasil jawaban rekan.

Gunakan salah satu tabel penyekoran pada modul ini untuk menyekor pemahaman Anda. Jika Anda telah memperoleh 75% atau lebih dari skor maksimum, silahkan Anda pelajari modul selanjutnya. Jika belum, periksa bagian mana yang belum Anda kuasai dan pelajari kembali.

Daftar Pustaka

Arya,J. C. dan Lardner, R. W. 1981. *Mathematical Analysis for Business and Economs.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Auvil, D. L. dan Poluga, C.P. 1984. *Elementary Algebra, Second Edition.* Reading, Massachusetts: Addison Wesley Publishing Company.

Bell, F.H. 1978 *Teaching and Learning Mathematics (In Secondary Schools)*. .Dobuque, Iowa: Win C, Brown Company

Polya, G 1957. *How to Solve It? (Second edition)* New York: Doubleday Anchor Books. (Originally published 1945)

Sumardyono. 2007. *Model Pembelajaran Matematika dengan Pendekatan Berbasis Masalah,* Paket Pembinaan Penataran. Yogyakarta: PPPG Matematika.

MODUL 2
PEMBELAJARAN PEMECAHAN MASALAH PENGUKURAN BANGUN DATAR

MODUL 2
PEMBELAJARAN PEMECAHAN MASALAH PENGUKURAN BANGUN DATAR

Anda pasti mengenal lebah atau *tawon* (dalam bahasa Jawa). Mengapa lebah membangun rumahnya berbentuk *hexagon* atau segienam beraturan? Apakah hubungannya dengan luas dan keliling bangun datar yang akan Anda pelajari pada Modul ini? Dalam Latihan/Tugas di akhir modul ini Anda diberi kesempatan untuk membandingkan luas dan keliling bangun pengubinan beraturan (*reguler*).

Modul ini disusun dengan tujuan agar pengguna modul dapat memecahkan masalah terkait dengan pengukuran (luas daerah dan keliling) bangun datar serta dapat membelajarkannya kepada siswa. Untuk keperluan tersebut modul ini disusun menjadi 2 (dua) Kegiatan Belajar (KB), yaitu:

Kegiatan Belajar 1: Beberapa Konsep, Teorema dan Rumus Bangun Datar

Kegiatan Belajar 2: Pemecahan Masalah Pengukuran (Luas dan keliling) Bangun Datar serta Pembelajarannya

A. Kegiatan Belajar 1: Beberapa Konsep, Teorema dan Rumus Penting tentang Bangun Datar

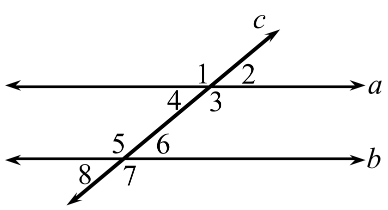
Untuk menyelesaikan masalah matematika, baik dalam penyusunan strategi maupun dalam melaksanakannya senantiasa diperlukan pengetahuan dan keterampilan matematika yang memadai. Strategi apa yang akan dipilih dapat ditemukan dari mencari jawab atas pertanyaan: “jembatan mana yang dapat menghubungkan antara yang diketahui dan yang ditanyakan atau yang diminta untuk dibuktikan?” Jembatan itu memunculkan strategi, dan sekaligus juga diawali dengan konsep atau teorema atau rumus yang mendasari pemilihan jembatan tersebut. Kemudian rumus-rumus yang terkait dengan teorema itu merupakan alat pemecah masalah. Namun juga kadang-kadang bentuk soal atau masalahnya mengingatkan adanya rumus yang terkait dengan permasalahannya.

Berikut ini disajikan konsep, teorema, dan rumus yang sering digunakan dalam pemecahan masalah geometri, khususnya materi luas dan keliling bangun datar. Karena luasnya cakupan materi tersebut, maka konsep, teorema, dan rumus yang disajikan hanya yang sangat mendasar. Banyak dari bagian ini telah ditulis dan diterbitkan PPPPTK Matematika sebelumnya, sehingga bukti-bukti kebenaran teorema atau dalil tidak disertakan di sini. Silahkan dibaca, misalnya dalam *Paket Penggemar Matematika Strategi Pemecahan Masalah Geometri SMP*. (Krismanto, Al. 2004)

Berikut ini beberapa konsep, teorema/dalil dan rumus dalam geometri datar.

1. Sudut dan Kesejajaran Garis

   Jika garis $a \parallel b$ dipotong oleh garis c maka:



Gambar 2.1

   a. sudut sehadap sama besar:

      $u\angle 5 = u\angle 1$; $u\angle 6 = u\angle 2$; $u\angle 7 = u\angle 3$; $u\angle 8 = u\angle 4$;

   b. sudut berseberangan luar sama besar: $u\angle 7 = u\angle 1$; $u\angle 8 = u\angle 2$

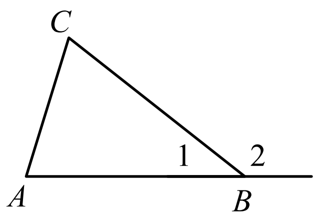
   c. sudut berseberangan dalam sama besar: $u\angle 5 = u\angle 3$; $u\angle 6 = u\angle 4$

   d. Akibat: $u\angle 1 = u\angle 3 = u\angle 5 = u\angle 7$ dan $u\angle 2 = u\angle 4 = u\angle 6 = u\angle 8$

2. Berdasar sifat kesejajaran tersebut beberapa sifat diturunkan:

   a. Jumlah besar sudut suatu segitiga 180^{o}.

   b. Besar satu sudut luar suatu segitiga sama dengan jumlah besar dua sudut lainnya: $u\angle B_2 = u\angle A + u\angle C$

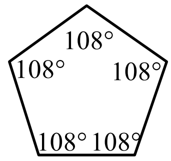


Gambar 2.2

c. Dari butir a dapat diturunkan antara lain:

1) Jumlah besar sudut suatu segi-n = $(n-2)\times 180^{\circ}$.

2) Besar satu sudut segi-n (poligon) beraturan = $\frac{n-2}{n}\times 180^{\circ}$.



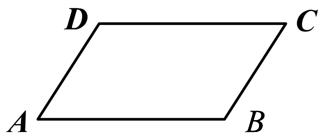
Gambar 2.3

Segi-n beraturan adalah segibanyak (poligon) yang semua sisinya sama panjang dan semua sudutnya sama besar. Contohnya, besar setiap sudut pada segi-5 beraturan = $\frac{5-2}{5}\times 180^{\circ} = 108^{\circ}$.

d. Pada setiap jajargenjang berlaku:

1) Jumlah besar sudut yang bersisian 180°.

2) kedua sudut yang berhadapan sama besar.

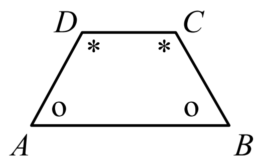


Gambar 2.4

e. Pada trapesium samakaki berlaku:

1) Jumlah besar dua sudut pada kaki yang sama 180°.

2) dapat dibuat lingkaran luar



Gambar 2.5

3. Segitiga

a. Ketidaksamaan dalam Segitiga

Dalam ΔABC dengan $AB = c$ satuan, $BC = a$ satuan, dan $CA = b$ satuan:

1) Jumlah panjang dua sisi lebih dari panjang sebuah sisi lainnya: $a + b > c$; $a + c > b$; $c + b > a$.

2) selisih panjang dua sisi kurang dari panjang sisi lainnya: $|a - b| < c$, $|b - c| < a$, $|a - c| < b$.

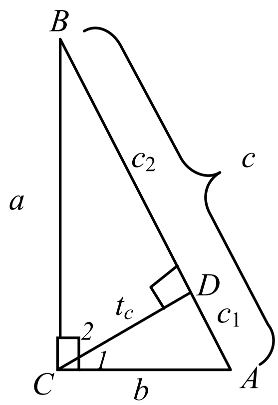
b. Segitiga siku-siku

1) Rumus Pythagoras dalam ΔABC yang siku-siku di C: $c^2 = a^2 + b^2$

2) Jika $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, maka:

a. $u\angle C_2 = u\angle A$ dan $u\angle C_1 = u\angle B$

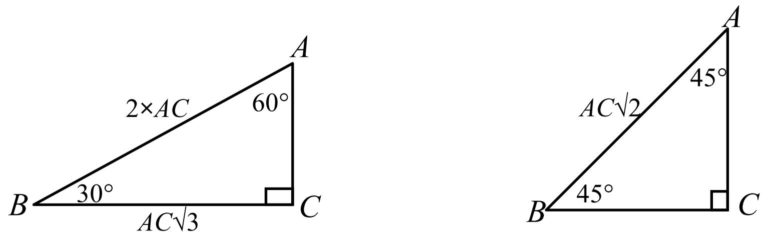
b. $CD^2 = AD \times BD$



Gambar 2.6

3) Jika $u\angle A = 60^\circ$, maka $u\angle B = 30^\circ$; $AB = 2 \times AC$ dan $BC = AC\sqrt{3}$.

4) Jika $u\angle A = 45^\circ$, maka $u\angle B = 45^\circ$; $BC = AC$ dan $AB = AC\sqrt{2}$.



Gambar 2.7

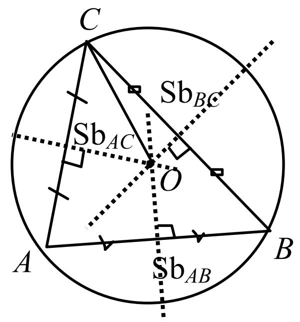
c. Sumbu sisi dan lingkaran luar

1) Sumbu-sumbu sisi (garis tegak lurus sisi dan membagi sisi menjadi dua bagian sama panjang) berpotongan pada suatu titik. Titik itu merupakan pusat lingkaran luar segitiga.

2) Lingkaran luar poligon adalah lingkaran yang melalui semua titik sudut poligon tersebut.

3) $R = \dfrac{abc}{4L}$; a, b, c, panjang sisi-sisi segitiga dan L luas segitiga

R = panjang jari-jari lingkaran luar ΔABC.



Gambar 2.8

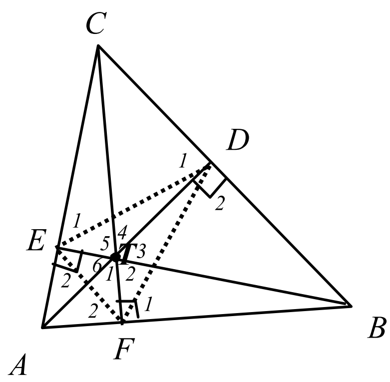
d. Ruas Garis tinggi

1) $\overline{AD} \perp \overline{BC}$; $\overline{BE} \perp \overline{AC}$; $\overline{CF} \perp \overline{AB}$.

2) $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, dan $\overline{CF}$ adalah ruas garis-garis tinggi pada ΔABC. Ketiga garis tinggi berpotongan pada satu titik, yaitu titik T yang disebut titik tinggi.

3) Titik D, E, dan F disebut titik-titik kaki garis-garis tinggi tersebut.

4) $u\angle T_1 = u\angle T_4 = u\angle E_1 = u\angle E_2 = u\angle B$;



Gambar 2.9

5) $u\angle T_2 = u\angle T_5 = u\angle D_1 = u\angle D_2 = u\angle A$;

6) $u\angle T_3 = u\angle T_6 = u\angle F_1 = u\angle F_2 = u\angle C$;

7) $\overline{DE}$ merupakan antiparalel terhadap $\overline{AB}$. Juga $\overline{EF}$ terhadap $\overline{BC}$, dan $\overline{DF}$ terhadap $\overline{AC}$. (Bandingkan kedudukan sudut yang sama dengan kedudukan garis yang sejajar atau paralel terhadap sisi segitiga).

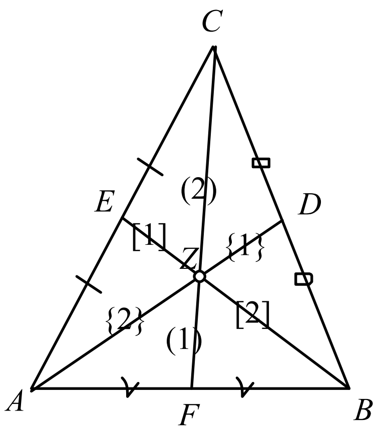
8) Jika panjang ruas garis-garis tinggi dari A, B, dan C berturut-turut t_a, t_b, t_c, dan luas segitiga = L, maka:

   a) $t_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; dengan $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

   b) $L_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \times t_a = \frac{1}{2}b \times t_b = \frac{1}{2}c \times t_c$,

   c) $t_a : t_b = b : a$; $t_c : t_a = a : c$; dan $t_b : t_c = c : b$.

e. Ruas Garis berat (median)



Gambar 2.10

1) Titik-titik D, E, dan F berturut-turut titik-titik tengah sisi $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, dan $\overline{AB}$; maka $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, dan $\overline{CF}$ adalah ruas garis-garis berat.

2) ketiga ruas garis berat berpotongan di sebuah titik (= titik berat; Z) dengan perbandingan 1 : 2.

3) $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$, $\overline{EF} \parallel \overline{CB}$, $\overline{FD} \parallel \overline{AC}$

4) $ED = \frac{1}{2}AB$; $EF = \frac{1}{2}CB$; $FD = \frac{1}{2}AC$

5) $CF^2 = \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}BC^2 - \frac{1}{4}AB^2$, atau: $m_c{}^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$;

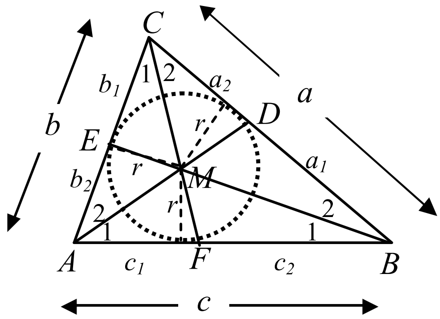
   m_c = panjang ruas garis berat dari titiksudut C.

f. Ruas Garis bagi

1) Besar $\angle A_1 = \angle A_2$; $\angle B_1 = \angle B_2$; $\angle C_1 = \angle C_2$

2) $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, dan $\overline{CF}$ adalah ruas garis-garis bagi dalam ΔABC.

3) Ketiga ruas garis bagi berpotongan pada satu titik, yaitu titik M yang merupakan pusat lingkaran dalam segitiga tersebut.



Gambar 2.11

4) Lingkaran dalam bangun datar adalah lingkaran yang menyinggung semua sisi bangun datar tersebut.

5) $c_1 : c_2 = b : a$; $b_1 : b_2 = a : c$; $a_1 : a_2 = b : c$

6) Jika d_a adalah panjang garis bagi sudut A, maka $d_a^2 = bc - a_1a_2$.

7) $r = \dfrac{L}{s}$; r = panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC di mana:

L = luas segitiga, dan $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

4. Segi-4

a. Beberapa jenis segi-4 yang memiliki sifat khusus berikut.

1) Jajargenjang adalah segi-4 yang sisi-sisi berhadapannya saling sejajar.
2) Persegipanjang adalah jajargenjang yang sudutnya siku-siku.
3) Persegi adalah persegipanjang yang semua sisinya sama panjang.
4) Belah ketupat adalah segi-4 yang semua sisinya sama panjang.
5) Trapesium adalah segiempat yang mempunyai tepat sepasang sisi sejajar.
6) Layang-layang adalah segiempat yang masing-masing dua pasang sisi bersisian berlainnan sama panjang.

b. Tinggi jajargenjang (2 macam) dan trapesium adalah jarak antara kedua sisi sejajarnya.

c. Jika L menyatakan luas, t menyatakan tinggi, maka

$L_{\text{persegi}} = s^2$; s = panjang sisi persegi

$L_{\text{persegipanjang}} = a \times b$; a *dan* b panjang sisi-sisinya.

$L_{\text{trapesium}} = \frac{1}{2}(a + b) \times t$; a dan b panjang sisi-sisi sejajar.

$L_{\text{segi-4 berdiagonal saling tegaklurus}} = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$; d_1 dan d_2 panjang diagonal-diagonal (termasuk layang-layang, belah ketupat, persegi)

B. Kegiatan Belajar 2: Pemecahan Masalah Pengukuran (Luas dan Keliling) Bangun Datar dan Pembelajarannya

Pada bagian ini akan dibahas pemecahan masalah pengukuran, khususnya tentang luas dan keliling bangun datar serta pembelajarannya. Agar Anda dapat memahami dengan baik pembahasan pada bagian ini, disyaratkan Anda sudah memahami dengan baik KB 1. Karena adanya keterbatasan waktu dalam penyusunan modul ini, hanya sebagian kecil pembelajaran mengenai luas dan keliling bangun datar dapat dibahas di sini. Pembahasan diprioritaskan pada materi-materi yang sederhana tetapi masih perlu untuk dicermati, khususnya yang menyangkut pemecahan masalah luas dan keliling bangun datar. Pemecahan masalah yang memuat konsep-konsep tentang Pythagoras, kesebangunan dan kongruensi, serta lingkaran akan dibahas pada modul selanjutnya. Berikut ini diberikan beberapa contoh pemecahan masalah luas dan keliling bangun datar serta pembelajarannya.

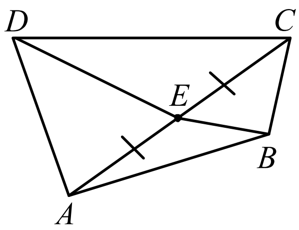
Contoh 1

Pada segiempat *ABCD, E* merupakan titik tengah diagonal $\overline{AC}$. Ditarik ruas garis $\overline{DE}$ dan $\overline{BE}$. Buktikan bahwa luas segiempat *ABED* sama dengan luas segiempat *BCDE.*

Langkah-langkah pemecahan masalah dan pembelajarannya adalah sebagai berikut.

Langkah 1: Memahami yang diketahui dan yang ditanyakan.

Untuk memahami masalahnya, keterangan pada soal digambar. Lihat Gambar 2.12. Yang diketahui ialah: Pada segiempat *ABCD, E* merupakan titik tengah dari diagonal $\overline{AC}$. Akibatnya $AE = EC$; pada gambar kedua ruas garis ditandai sama. Ditarik $\overline{DE}$ dan $\overline{BE}$.



Gambar 2.12

Masalah atau yang ditanyakan adalah: bukti bahwa bahwa luas segiempat *ABED* sama dengan luas segiempat *BCDE.* Sehingga dapat ditulis sebagai berikut.

Diketahui: Segi empat *ABCD* (lihat gambar).

AE = EC

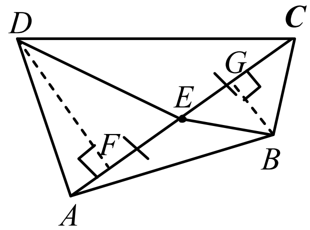
Buktikan: $\text{Luas}_{ABED} = \text{Luas}_{BCDE}$

Langkah 2: Membuat rencana strategi pemecahan masalah

Kedua segiempat, segiempat *ABED* dan segiempat *BCDE* masing masing merupakan gabungan dua segitiga. Segiempat *ABED* merupakan gabungan dari ΔABE dan ΔAED, sedangkan segiempat *BCDE* merupakan gabungan dari ΔBCE dan ΔCED. Segitiga *AED* dan ΔCED mempunyai alas yang panjangnya sama dan terletak segaris, yaitu pada $\overline{AC}$. Kedua segitiga tersebut juga mempunyai titik puncak yang sama yaitu titik *D.* Demikian juga dua segitiga yang lainnya, yaitu ΔAEB dan ΔECB mempunyai alas yang panjangnya sama dan terletak segaris, yaitu pada $\overline{AC}$. Kedua segitiga tersebut juga mempunyai titik puncak yang sama yaitu titik *B*. Untuk membuktikan bahwa kedua pasang segitiga di atas masing-masing pasang mempunyai luas yang sama, perlu digambarkan dua ruas garis bantuan, yaitu $\overline{DF}$ dan $\overline{BG}$. *DF* dan *BG* berturut-turut adalah tinggi dari dua pasang segitiga tersebut. Dengan membuktikan bahwa luas ΔAED = luas ΔCED dan luas ΔAEB = luas ΔCEB berarti membuktikan bahwa luas segiempat *ABED* sama dengan luas segiempat *BCDE.*

Langkah 3: Melaksanakan rencana

Tambahkan keterangan-keterangan pada Gambar 2.12, sehingga menjadi seperti pada gambar 2.13.



Gambar 2.13

$$\text{Luas } \Delta AED = \frac{1}{2} AE \times DF$$

$$= \frac{1}{2} EC \times DF \text{ (karena } AE = EC\text{)}$$

$$= \text{Luas } \Delta ECD$$

$$\text{Luas } \Delta AEB = \frac{1}{2} AE \times BG$$

$$= \frac{1}{2} EC \times BG \text{ (karena } AE = EC\text{)}$$

$$= \text{Luas } \Delta ECB$$

Luas segiempat $ABED$ = Luas ΔAED + Luas ΔAEB

$= L_{\Delta ECD} + L_{\Delta ECB}$. (karena $L_{\Delta AEB} = L_{\Delta ECD}$ dan $L_{\Delta AEB} = L_{\Delta ECB}$)

= Luas segiempat $BCDE$. ■

Langkah 4: Memeriksa kembali jawaban yang diperoleh

Dengan memeriksa kembali jawaban yang diperoleh, Anda dapat mengetahui: Apakah terdapat kesalahan argumen atau penalarannya? Apakah terdapat kesalahan pada proses pengerjaannya? Apakah jawaban yang diperoleh sudah benar? Apakah hasil atau metodenya dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah lain?

Contoh 2

Persegi *ABCD* mempunyai luas 81 cm^2. Titik-titik *E*, *F*, *G*, dan *H* berturut-turut terletak pada $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, dan $\overline{DA}$. Perbandingan $AE : EB = BF : FC = CG : GD = DH : HA = 2 : 1$. Titik-titik I ,J , K, dan L berturut-turut merupakan perpotongan $\overline{AG}$ dan $\overline{BH}$, $\overline{BH}$ dan $\overline{CE}$, $\overline{CE}$ dan $\overline{FD}$, dan $\overline{FD}$ dan $\overline{AG}$. Berapakah keliling bangun *IJKL*?

Langkah-langkah pemecahan masalah dan pembelajarannya sebagai berikut.

Langkah 1: Memahami yang diketahui dan yang ditanyakan

Penyajian permasalahan di atas berbentuk uraian atau cerita. Agar lebih mudah menghubungkan yang diketahui dan ditanyakan, perlu disiapkan gambar untuk membantu menyelesaikan masalah (lihat Gambar 2.14.(i)).

Masalahnya adalah ada sebuah persegi *ABCD,* luasnya 81 cm^2. Titik-titik *E*, *F*, *G*, dan *H* berturut-turut terletak pada $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, dan $\overline{DA}$. Perbandingan $AE : EB = BF : FC = CG : GD = DH : HA = 2 : 1$. Titik-titik *I, J, K,* dan *L* berturut-turut merupakan perpotongan $\overline{AG}$ dan $\overline{BH}$, $\overline{BH}$ dan $\overline{CE}$, $\overline{CE}$ dan $\overline{FD}$, dan $\overline{FD}$ dan $\overline{AG}$.

Yang ditanyakan adalah keliling bangun *IJKL*.

Kita tulis:

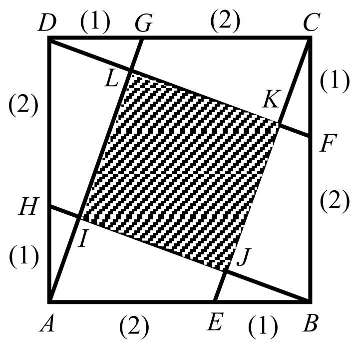
Diketahui: Persegi *ABCD*. Luasnya = 81 cm^2.

Lihat gambar 2.14 (i).

Titik-titik *E*, *F*, *G*, dan *H* berturut-turut terletak pada $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, dan $\overline{DA}$.

$AE : EB = BF : FC = CG : GD = DH : HA = 2 : 1$

Hitung (Ditanyakan): Keliling bangun *IJKL*.



Gambar 2.14 (i)

Langkah 2: Membuat rencana strategi pemecahan masalah

Yang ditanyakan adalah keliling *IJKL* yang bangunnya belum diketahui. Untuk memudahkan perhitungan tentu perlu diketahui panjang sisi-sisinya. Atau jika bentuk dan luasnya diketahui maka keliling dapat ditentukan. Untuk itu perlu dicari hal lain agar dapat membantu dalam menyelesaikan masalah, yaitu: Bangun apakah *IJKL*? Berapakah luasnya? Berapakah panjang sisi-sisinya?

Dengan memperhatikan gambarnya, Anda mengetahui bahwa bangun *IJKL* merupakan bangun persegi (mengapa?).

Membuat garis bantu berupa garis-garis sejajar $\overline{DF}$ dengan jarak antargaris sama dengan GL. Membuat garis-garis bantu yang lain sejajar $\overline{AG}$ dengan jarak antargaris sama dengan DL, seperti terlihat pada gambar 2.14(ii). Dalam ΔCDF terdapat 4 buah "segitiga kecil" yang kongruen dengan ΔDLG dan juga terdapat 3 buah "persegipanjang kecil". Panjang dan lebar persegipanjang kecil sama dengan DL dan GL. Dengan demikian luas satu persegipanjang kecil sama dengan dua kali luas ΔDLG. Dengan demikian luas ΔCDF sama dengan 10 kali luas ΔDLG. Luas Persegi $IJKL$ = Luas Persegi $ABCD - (4 \times L_{\Delta CDF}) + (4 \times L_{\Delta DLG})$. Keliling Persegi $IJKL$ = 4 kali akar kuadrat dari luas persegi *IJKL*.

Langkah 3: Melaksanakan rencana.

Perhatikan Gambar 2.14 (ii)

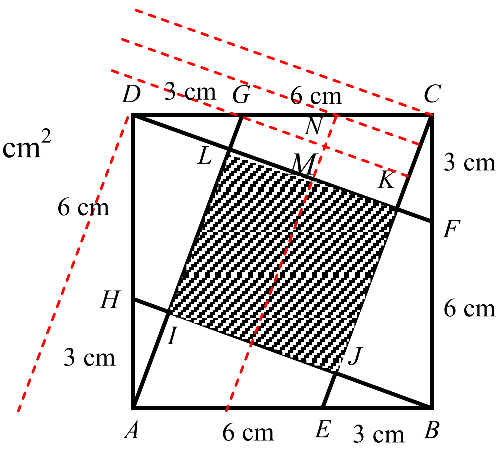
$$\text{Luas } \Delta CDF = \frac{1}{2} \times 3 \text{ cm} \times 9 \text{ cm} = 13\frac{1}{2} \text{ cm}^2$$

$$\text{Luas } \Delta CDF = 10 \times \text{Luas } \Delta DLG$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas } \Delta DLG = \frac{1}{10} \times \text{Luas } \Delta CDF$$

$$= \frac{1}{10} \times 13{,}5 \text{ cm}^2$$

$$= 1{,}35 \text{ cm}^2$$



Gambar 2.14 (ii)

Luas Persegi $IJKL$ = Luas Persegi $ABCD$−(4×Luas ΔCDF)+(4×Luas ΔDLG)

$= (81 - (4 \times 13{,}5) + (4 \times 1{,}35))\ \text{cm}^2$

$= (81 - 54 + 5{,}4)\ \text{cm}^2$

$= 32{,}4\ \text{cm}^2$

Panjang sisi persegi $IJKL$ $= \sqrt{32{,}4\ \text{cm}^2} = 1{,}8\sqrt{10}\ \text{cm}$

Keliling persegi $IJKL$ $= 4 \times 1{,}8\sqrt{10}\ \text{cm} = 7{,}2.\sqrt{10}\ \text{cm}$

Langkah 4: Memeriksa kembali jawaban yang diperoleh

Dengan memeriksa kembali jawaban yang diperoleh, Anda dapat mengetahui beberapa hal penting sebagai berikut: Apakah terdapat kesalahan argumennya? Apakah terdapat kesalahan pada proses pengerjaannya? Apakah jawaban yang diperoleh sudah benar atau sama? Apakah hasil atau metodenya dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah lain? Adakah cara/strategi lain?

C. Ringkasan

1. Sudut dan Kesejajaran Garis

   Jika garis $a \parallel b$ dipotong oleh garis c maka:

   a. sudut sehadap sama besar,

   b. sudut luar berseberangan sama besar, dan

   c. sudut dalam berseberangan sama besar

2. Berdasar sifat kesejajaran tersebut beberapa sifat diturunkan:

   a. Jumlah besar sudut suatu segitiga 180°, dapat diturunkan antara lain:

      1) Jumlah besar sudut suatu segi-n = $(n - 2) \times 180^\circ$.

      2) Besar satu sudut segi-n (poligon) beraturan = $\frac{n-2}{n} \times 180^\circ$.

      Segi-n beraturan adalah segibanyak (poligon) yang semua sisinya sama panjang dan semua sudutnya sama besar.

   b. Besar sudut luar suatu segitiga sama dengan jumlah besar dua sudut lainnya.

c. Pada setiap jajargenjang
   1) jumlah besar sudut yang bersisian 180^o.
   2) kedua sudut yang berhadapan sama besar.

d. Pada trapesium samakaki:
   1) jumlah besar dua sudut pada suatu kaki adalah 180^o.
   2) dapat dibuat lingkaran luar (trapesium sama-kaki pasti segiempat talibusur).

3. Segi-4
   a. Beberapa jenis segi-4 yang memiliki sifat khusus:
      1) jajargenjang adalah segi-4 yang sisi-sisi berhadapannya saling sejajar.
      2) persegipanjang adalah jajargenjang yang sudutnya siku-siku.
      3) persegi adalah persegipanjang yang semua sisinya sama panjang.
      4) belah ketupat adalah segi-4 yang semua sisinya sama panjang.
      5) trapesium adalah segiempat yang mempunyai tepat sepasang sisi sejajar.
      6) layang-layang adalah segiempat yang masing-masing dua pasang sisi bersisian berlainan sama panjang.
   b. Tinggi jajargenjang (2 macam) dan trapesium adalah jarak antara kedua sisi sejajarnya.
   c. Jika L menyatakan luas, t menyatakan tinggi, maka

      $L_{\text{persegi}} = s^2$; s = panjang sisi persegi

      $L_{\text{persegipanjang}} = a \times b$; a *dan* b panjang sisi-sisinya.

      $L_{\text{trapesium}} = \frac{1}{2}(a + b) \times t$; a dan b panjang sisi-sisi sejajar.

      $L_{\text{segi-4 berdiagonal saling tegaklurus}} = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$; d_1 dan d_2 panjang diagonal-diagonal (termasuk layang-layang, belah ketupat, persegi)

D. Latihan/Tugas

1. Diberikan suatu jajargenjang $ABCD$. Suatu titik P berada di dalam daerah jajargenjang. Buktikan bahwa $L_{\Delta ABP} + L_{\Delta CDP} = L_{\Delta ADP} + L_{\Delta BCP}$.

2. Bandingkan luas dan keliling bangun-bangun *pengubinan reguler*, yaitu bangun segitiga sama sisi, persegi, dan *hexagon* atau segienam beraturan. Di

antara ketiga bangun tersebut, bangun apakah yang memiliki luas terbesar jika kelilingnya sama? Apa argumentasi Anda tentang mengapa bentuk rumah lebah adalah segienam beraturan?

Selesaikan sendiri soal di atas lebih dahulu. Untuk soal nomor 1 di atas, tarik garis g melalui titik P memotong tegaklurus $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ di titik R dan S.

RS = tinggi jajargenjang, RP = tinggi ΔABP, SP = tinggi ΔDCB dan $RS = RP + PS$. Bandingkan jumlah luas ΔABP dan ΔCDP dengan luas jajargenjang $ABCD$

Untuk soal nomor 2. Luas segienam beraturan > Luas persegi > Luas segitiga samasisi. Alternatif argumentasinya adalah: Dengan rumah lebah berbentuk segienam beraturan, lebah/anak lebah mendapatkan ruang yang lebih lapang jika dibandingkan dengan seandainya rumah lebah berbentuk persegi atau segitiga samasisi, walaupun banyak bahan yang digunakan untuk membangun rumah lebah tersebut sama.

Gunakan salah satu tabel penyekoran pada modul ini untuk menyekor pemahaman Anda. Ada baiknya Anda bekerjasama dengan rekan Anda dalam MGMP untuk saling memberikan sekor hasil pekerjaan tugas Anda. Jika Anda telah memperoleh 75% atau lebih dari skor maksimum, silahkan Anda pelajari modul selanjutnya. Jika belum, periksa bagian mana yang belum kuasai dan pelajari kembali.

Anda ingin membelajarkan siswa Anda? Tentu Anda pun perlu berlatih memecahkan masalah dengan berbagai variasi strategi. Cobalah!

Daftar Pustaka

Clemens, S.R., O'Daffer, P.G. & Cooney, T.J. 1984. *Geometry with Applications and Problem Solving*. Menlo Park, California: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Krismanto, Al. 2004. *Paket Penggemar Matematika Strategi Pemecahan Masalah Geometri SMP*. Yogyakarta: PPPG Matematika.

Rich, B. 1963. *Plane Geometry with Coordinate Geometry*. New York City: McGraw-Hill,Inc.

MODUL 3
PEMBELAJARAN PEMECAHAN MASALAH TEOREMA PYTHAGORAS

MODUL 3
PEMBELAJARAN PEMECAHAN MASALAH TEOREMA PYTHAGORAS

P adalah titik di dalam persegipanjang *ABCD*. Jarak *P* ke titik-titik sudut *A*, *B*, dan *C* berturut-turut 16 mm, 56 mm, dan 63 mm. Dapatkah ditentukan jarak antara titik *P* dan *D*? Jika dapat, berapa jaraknya? Jika tidak, mengapa?

Teorema Pythagoras dapat digunakan untuk menyelesaikan atau menentukan jarak antara titik *P* dan *D*, meskipun sama sekali tidak diketahui panjang sisi-sisi persegipanjang tersebut. Teorema Pythagoras memang merupakan salah satu teorema yang banyak digunakan dalam berbagai bagian kajian geometri, baik pada bangun ruang maupun bangun datar.

Modul ini disusun dengan tujuan agar pengguna modul

1. lebih memiliki kemampuan memecahkan masalah terkait Teorema Pythagoras
2. memahami strategi membelajarkan siswa untuk memiliki kemampuan memecahkan masalah terkait Teorema Pythagoras.
3. dapat memecahkan masalah terkait Pythagoras dan membelajarkan siswa untuk memiliki kemampuan memecahkan masalah terkait Teorema Pythagoras.

Untuk keperluan tersebut modul ini disusun menjadi 3 (tiga) Kegiatan Belajar (KB), yaitu:

Kegiatan Belajar 1: Memahami Teorema Pythagoras.

Kegiatan Belajar 2: Memecahkan Masalah Terkait Teorema Pythagoras

Kegiatan Belajar 3: Membelajarkan Siswa Memecahkan Masalah Terkait Teorema Pythagoras

A. Kegiatan Belajar 1: Memahami Teorema Pythagoras

Salah satu hal yang perlu dipahami kembali tentang Teorema Pythagoras adalah pemahaman atas adanya perbedaan antara Teorema Pythagoras dan Rumus Pythagoras. Hal ini dan bahan Teorema Pythagoras telah diuraikan secara luas dalam modul *Kapita Selekta Pembelajaran Geometri Datar Kelas VIII & IX di SMP* (Krismanto, Al. dan Sumardyono, 2009:4-19). Oleh karena itu di sini bahasan tersebut hanya akan disampaikan ringkasannya saja.

1. Teorema Pythagoras: "Pada sebarang segitiga siku-siku, kuadrat panjang sisi miring (hipotenusa) sama dengan jumlah kuadrat panjang sisi-sisi yang lain." Atau: "Jika segitiga ABC dengan C sudut siku-siku dan a, b, c berturut-turut panjang sisi di depan sudut A, B, dan C, maka berlaku $a^2 + b^2 = c^2$"

   Dalam hal ini, Rumus Pythagoras adalah kesamaan: $a^2 + b^2 = c^2$.

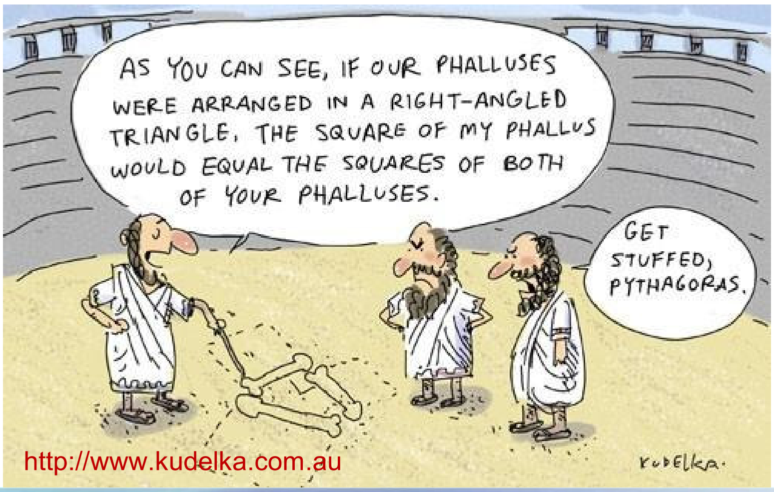
   Contoh: Jika dalam ΔABC sudut C siku-siku, $a = 8$ dan $b = 15$, maka diperoleh $c^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$.

2. Kebalikan Teorema Pythagoras dapat dinyatakan sebagai berikut: "Pada sebarang segitiga *ABC,* bila $a^2 + b^2 = c^2$ maka sudut C siku-siku".

   Contoh: Jika dalam ΔABC $a = 12$, $b = 35$, dan $c = 37$, maka

   $a^2 + b^2 = 12^2 + 35^2 = 144 + 1225 = 1369$ dan $c^2 = 37^2 = 1369$

   Karena $a^2 + b^2 = 1369 = c^2$, maka ΔABC adalah segitiga siku-siku di C.



B. Kegiatan Belajar 2: Memecahkan Masalah Terkait Teorema Pythagoras

Masalah yang disampaikan pada awal modul ini merupakan salah satu masalah yang akan dibahas pada modul ini dengan sedikit revisi. Dalam bahasan berikut hendaknya pembaca mengikutinya sekaligus bertanya, “mengapa langkah penyelesaian itu dipilih, dan adakah alternatif lain yang dapat ditawarkan?”

Masalah 1

P adalah titik di dalam persegipanjang $ABCD$. Jarak P ke titik-titik sudut A, B, dan C berturut-turut 16 mm, 56 mm, dan 63 mm. Dapatkah ditentukan jarak antara titik P dan D? Jika dapat, berapa jaraknya? Jika tidak, mengapa?

Langkah 1: Memahami yang diketahui dan yang ditanyakan

Pada masalah di atas, yang diketahui dan ditanyakan sudah cukup jelas, sehingga dapat dituliskan dengan mudah sebagai berikut.

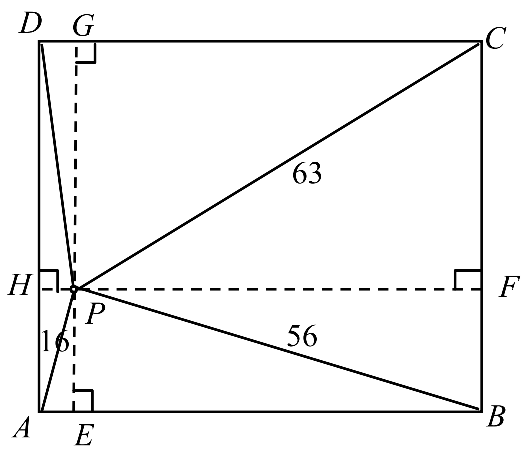
Diketahui: Persegi panjang $ABCD$.

Titik P di dalam $ABCD$

PA = 16 mm, PB = 56 mm, PC = 63 mm.

Hitung: PD

Langkah 2: Membuat rencana strategi pemecahan masalah



Gambar 3.1

Pertimbangan pemilihan langkah adalah sebagai berikut.

Pertama-tama digambar sketsa situasi soalnya. Karena menyangkut jarak dua titik atau panjang ruas garis maka semua ruas garis dari P ke titik-titik sudut digambar seperti pada Gambar 3.1. Soal yang menyangkut suatu persegipanjang merupakan salah satu indikasi kemungkinan terkaitnya dengan Teorema Pythagoras. Penggunaan Teorema Pythagoras juga diindikasikan bahwa masalah itu menyangkut jarak dua titik (meskipun jarak dapat saja terkait dengan teorema lain yang mungkin dapat digunakan). Untuk keperluan tersebut maka dengan kita menggambar ruas-ruas garis tinggi segitiga-segitiga berpuncak di P memberikan ketegasan digunakannya Teorema Pythagoras (akibat: $\overline{PE} \perp \overline{AB}$, $\overline{PF} \perp \overline{BC}$, $\overline{PG} \perp \overline{CD}$, dan $\overline{PH} \perp \overline{AD}$).

Langkah 3: Melaksanakan rencana.

Pemikiran di atas cukup ditulis menjadi sebagai berikut.

Gambarlah ruas garis-garis tinggi segitiga-segitiga PAB, PBC, PCD, dan PDA.

Selanjutnya:

Pada ΔPAE: $PA^2 = PE^2 + AE^2$ *Teorema Pythagoras*

Pada ΔPCG: $PC^2 = GC^2 + PG^2$ *Teorema Pythagoras*

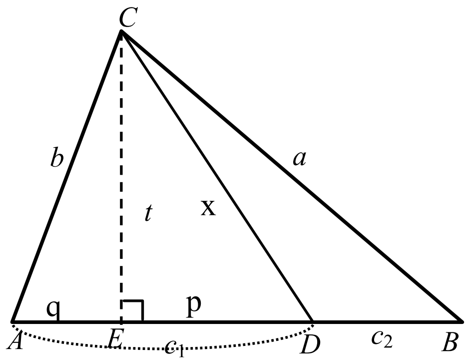
$$
\begin{aligned}
PA^2 + PC^2 &= PE^2 + AE^2 + GC^2 + PG^2 \\
&= PE^2 + GC^2 + AE^2 + PG^2 && \textit{diarahkan ke PA dan PD} \\
&= \underbrace{PE^2 + BE^2} + \underbrace{DG^2 + PG^2} && \textit{GC = BE dan AE = DG} \\
&= PB^2 + PD^2 && \textit{Teorema Pythagoras}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
16^2 + 63^2 &= 56^2 + PD^2 \\
PD^2 &= 16^2 + 63^2 - 56^2 = 256 + 3969 - 3136 = 1089 \\
PD &= \sqrt{1089} = 33
\end{aligned}
$$

Jadi jarak antara P dan D = 33 mm.

Masalah 2

Panjang sisi-sisi $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ dan $\overline{AB}$ pada ΔABC berturut-turut *a, b,* dan *c* satuan. Titik D pada $\overline{AB}$ sehingga $AD = c_1$ satuan dan $DB = c_2$ satuan. Jika $CD = x$ satuan, buktikan bahwa: $x^2c = a^2c_1 + b^2c_2 - c_1c_2c$.



Gambar 3.2

Pembahasan (Langkah 2 pemecahan masalah).

Salah satu indikator bahwa dapat digunakan Teorema Pythagoras adalah adanya kaitan dengan jarak dan tujuan pembuktian memuat bentuk kuadrat dari suatu panjang ruas garis.

Untuk keperluan tersebut maka salah satu langkah yang mungkin adalah menggambar ruas garis tinggi, dalam hal ini dari titik sudut C (= $\overline{CE}$).

Perhatikan bentuk aljabar dari tujuan pembuktian. Bentuknya memuat a^2, b^2 dan x^2 maka Teorema Pythagorasnya diterapkan pada segitiga siku-siku dengan panjang hipotenusa a, b, dan x. Dalam ketiga penerapan, akan muncul variabel t yang tidak muncul dalam tujuan pembuktian. Karena itu pada langkah pelaksanaan strateginya, t perlu dieliminasi, di samping p yang juga tidak ada pada tujuan pembuktian.

Pembuktian dilakukan sebagai berikut.

Pada ΔCDE berlaku: $t^2 = x^2 - p^2$ .... (1)

Pada ΔCBE berlaku: $a^2 = t^2 + (p + c_2)^2$ .... (2)

Pada ΔCAE berlaku: $b^2 = t^2 + (c_1 - p)^2$ .... (3)

Dari (3) dan (1) $b^2 = t^2 + (c_1 - p)^2$

$\Leftrightarrow b^2 = x^2 - p^2 + (c_1 - p)^2$

$\Leftrightarrow b^2 = x^2 - p^2 + c_1{}^2 - 2pc_1 + p^2$

$\Leftrightarrow b^2 = x^2 + c_1{}^2 - 2pc_1$

$2pc_1 = x^2 + c_1{}^2 - b^2$

$2p = (x^2 + c_1{}^2 - b^2)/c_1$ .... (4)

Dari (2) dan (1) $a^2 = x^2 - p^2 + (p + c_2)^2$

$\Leftrightarrow a^2 = x^2 - p^2 + p^2 + 2pc_2 + c_2{}^2$

$\Leftrightarrow a^2 = x^2 + 2pc_2 + c_2{}^2$ .... (5)

Dari (4) dan (5): $a^2 = x^2 + ((x^2 + c_1{}^2 - b^2)/c_1)c_2 + c_2{}^2$

$\Leftrightarrow a^2\, c_1 = x^2\, c_1 + ((x^2 + c_1{}^2 - b^2)c_2 + c_2{}^2 c_1$

$\Leftrightarrow a^2\, c_1 = x^2\, c_1 + x^2\, c_2 + c_1{}^2\, c_2 - b^2 c_2 + c_2{}^2\, c_1$

$\Leftrightarrow a^2\, c_1 = x^2(c_1 + c_2) + c_1{}^2\, c_2 - b^2 c_2 + c_2{}^2\, c_1$

$\Leftrightarrow a^2\, c_1 = x^2 c + c_1{}^2\, c_2 - b^2 c_2 + c_2{}^2\, c_1$ `

$\Leftrightarrow x^2 c = a^2 c_1 + b^2 c_2 - c_1\, c_2\, (c_1 + c_2)$

$\Leftrightarrow x^2 c = a^2 c_1 + b^2 c_2 - c_1 c_2 c$

Catatan: Relasi $x^2c = a^2c_1 + b^2c_2 - c_1c_2c$ tersebut merupakan bentuk aljabar suatu teorema yang disebut Teorema Stewart.

Contoh: Jika pada ΔABC. $\overline{CD}$ adalah ruas garis berat, maka berdasarkan sketsa Gambar 3.2 nilai $c_1 = c_2$, dan x adalah panjang garis berat.

$$x^2c = a^2c_1 + b^2c_2 - c_1c_2c \Rightarrow x^2c = a^2 \times \tfrac{1}{2}c + b^2 \times \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}c \times \tfrac{1}{2}c \times c$$

$$\Leftrightarrow x^2 = a^2 \times \tfrac{1}{2} + b^2 \times \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}c \times \tfrac{1}{2}c$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{4}c^2$$

Dengan demikian jika ruas garis-garis berat ΔABC yang ditarik dari titik-titik sudut A, B, dan C berturut-turut adalah z_A, z_B, dan z_C, maka:

$$z_A{}^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$$

$$z_B{}^2 = \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}b^2$$

$$z_C{}^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$$

C. Kegiatan Belajar 3: Membelajarkan Siswa Memecahkan Masalah Terkait Teorema Pythagoras

Di samping memperhatikan KB 3 pada Modul 1 tentang Pembelajaran Pemecahan Masalah, berikut ini disampaikan beberapa catatan khusus dalam topik Teorema Pythagoras. Dua contoh pemecahan masalah yang dikemukakan di atas memuat hanya sedikit saja dari contoh penggunaan strategi yang dapat digunakan dalam memecahkan masalah yang disarankan pada Modul 1. Memilih alternatif strategi sering tidak dengan segera dapat diputuskan. Bahkan mungkin, mencobakan strategi dari intuisi yang muncul pun kadang dilakukan.

Kedua contoh tersebut juga menggambarkan, bahwa "membuat pertolongan" kadang atau bahkan sering diperlukan untuk membentuk situasi yang mendukung dan mengarah kepada konsep dasar yang hendak digunakan. Dalam lingkup Teorema Pythagoras, pertolongan mengarah ke terbentuknya segitiga siku-siku, jika hal itu belum muncul. Siswa perlu diberikan pemahaman bahwa penggunaan Teorema Pythagoras sering "menelusup" ke berbagai ruang lingkup.

Yang dituliskan dalam pembahasan merupakan alternatif penalaran dari strategi yang dipilih. Alternatif-alternatif itu dapat muncul jika pemecah masalah dapat mengembangkan pertanyaan-pertanyaan terkait dengan masalah yang dihadapi. Hal ini dapat lebih berkembang hanya jika pemecah masalah terbiasa melakukannya. Alternatif itu adalah sebagian bahan yang dapat digunakan guru dalam menyusun lingkup pertanyaannya.

Seperti kedua contoh yang dikemukakan, masalah dapat berjenis menemukan, dan dapat pula membuktikan kebenaran suatu pernyataan. Dalam masalah pembuktian, bergerak dari belakang merupakan salah satu strategi yang perlu dipertimbangkan penggunaannya dan dicoba oleh siswa. Dalam pembuktian "melangkah dari belakang" sering digunakan, karena mengarahkan kepada bentuk atau tujuan yang ingin dicapai. Contoh kedua juga menunjukkan perlu dikuasainya keterampilan memanipulasi bentuk-bentuk aljabar dan teknik-teknik dasar yang biasa digunakan dalam aljabar.

Terkait pembuktian, Bell (1978:304) mengemukakan bahwa: "*Problem proving is difficult to teach and can be frustrating to learn*." Artinya, pemecahan masalah sulit untuk diajarkan dan dapat membuat frustasi. Karena itu, terutama pada awal kegiatan, peran dominan masih pada guru. Ekspositori merupakan salah satu metode: guru sedikit memberikan penjelasan, presentasi konsep/prinsip dan mendemonstrasikan keterampilan yang diperlukan, tanya jawab, pencatatan oleh siswa (Bell, 1978: 203). Dominasi guru bisa dikurangi dengan aktifitas siswa melalui tanya jawab yang efektif. Pencatatan siswa atas argumen yang mendasari langkah pada awal pengenalan mungkin bermanfaat bagi mereka. Bell juga menyatakan bahwa karena tidak ada algoritma dalam pembuktian rumus, guru tidak dapat mengajar metode pembuktian secara umum. Namun demikian guru dapat mendemonstrasikan salah satu dari langkah pembuktian itu.

Teorema Pythagoras mendahului lingkaran, kekongruenan dan kesebangunan. Karena itu, jika digunakan di kelas dalam lingkup Teorema Pythagoras, masalah yang dikemukakan hendaknya tidak memuat kompetensi yang mengikutinya. Masalah yang memuat Teorema Pythagoras bersama lingkaran, kesebangunan dan kekongruenan tidak dibahas di sini, tetapi akan muncul pada modul selanjutnya. Untuk pembelajaran di kelas VII dan VIII Semester 1 masalah tersebut sebaiknya tidak diberikan.

D. Ringkasan

1. Teorema Pythagoras: "Pada sebarang segitiga siku-siku, kuadrat panjang sisi miring (hipotenusa) sama dengan jumlah kuadrat panjang sisi-sisi yang lain."
   Atau: "Jika ΔABC siku-siku di C dan panjang sisi-sisi di hadapan sudut A, B, dan C berturut-turut adalah a, b, dan c, maka $c^2 = a^2 + b^2$."

2. Kebalikan Teorema Pythagoras dapat dinyatakan sebagai berikut: “Pada sebarang segitiga *ABC*, bila $a^2 + b^2 = c^2$ maka sudut C siku-siku.”

3. Pemecahan masalah yang memuat ketegaklurusan atau jarak biasanya terkait dengan penggunaan Teorema Pythagoras.

E. Latihan/Tugas

1. Selesaikan masalah berikut.

   Dari trapesium *ABCD* diketahui bahwa $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $u\angle A = 60°$, $AB = 36$ mm, $CD = 12$ mm, dan $AD = 16$ mm, Hitunglah *BC*.

2. Deskripsikan bagaimana Anda membelajarkan siswa dalam memecahkan masalah di atas sebagai contoh masalah.

Coba selesaikan sendiri soal di atas terlebih dahulu. Jangan terlalu cepat melihat petunjuk berikut. Untuk soal nomor 1, petunjuknya adalah sebagai berikut.

1. Menggambar situasi
2. Dibuat garis pertolongan agar terbentuk segitiga dan terkait dengan yang ditanyakan. Dibuat $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$, sehingga dapat ditentukan *EBCD* jajargenjang atau $DE = CB$.

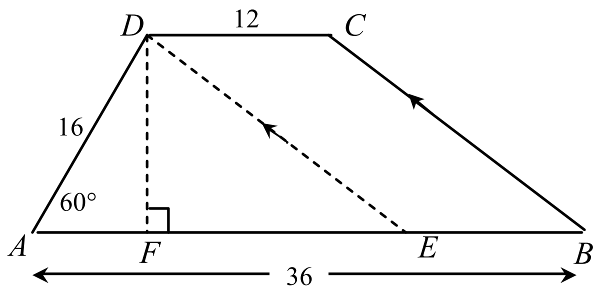
   $AE = AB - EB = AB - DC = (36 - 12)$ mm $= 24$ mm.
3. Teorema Pythagoras memerlukan adanya segitiga siku-siku.

   Tarik garis tinggi $\overline{DF}$ pada ΔAED.

   ΔAFD siku-siku di F dengan $u\angle A = 60° \rightarrow AF = 8$ mm dan $DF = 8\sqrt{3}$ mm.

   Jadi $FE = (24 - 8)$ mm $= 16$ mm.
4. Teorema $DE = \sqrt{DF^2 + FE^2} = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + 16^2} = 8\sqrt{3+4} = 8\sqrt{7}$ mm.

   Karena $BC = DE$ maka panjang $BC = 8\sqrt{7}$ mm



Untuk soal nomor 2, tulis pendapat Anda lalu bandingkan dan diskusikan dengan teman-teman Anda di MGMP.

Seperti pada modul sebelumnya, bekerjasamalah dengan rekan di MGMP tempat kegiatan Anda, untuk saling membantu memeriksa hasil pekerjaan/jawaban. Gunakanlah salah satu model penyekoran yang Anda pelajari pada Modul 1. Sebelum Anda memperoleh paling sedikit 75%, sebaiknya Anda belum berganti mempelajari modul lain. Dengan tekun berlatih kita yakin akan berhasil. Dari contoh di atas juga tampak bahwa dengan memecahkan masalah Rumus terkait Dalil Stewart dapat diperoleh dengan mudah rumus panjang ruas garis berat segitiga. Dengan keberhasilan memecahkan suatu masalah akan diperoleh nilai lebih dari sekedar memecahkan masalah itu.

Daftar Pustaka

Bell, F.H. 1978 *Teaching and Learning Mathematics (In Secondary Schools)*. Dobuque, Iowa: Win C, Brown Company

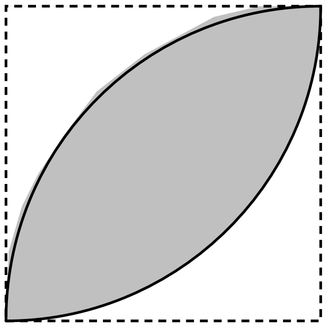
Krismanto, Al. dan Sumardyono. 2009. *Kapita Selekta Pembelajaran Geometri Datar Kelas VIII & IX di SMP*. Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

MODUL 4
PEMBELAJARAN PEMECAHAN MASALAH LINGKARAN

MODUL 4
PEMBELAJARAN PEMECAHAN MASALAH LINGKARAN

Masalah 1

Berapa luas kepingan logam seperti yang diarsir pada Gambar 4.1 jika diketahui panjang persegi di luar kepingan logam tersebut 14 cm, dan semua garis lengkung adalah seperempat lingkaran?


Gambar 4.1

Dalam Modul ini dibahas pemecahan masalah terkait lingkaran, diawali sedikit tentang pemecahan masalah, dan diakhiri dengan bahasan membelajarkan siswa memecahkan masalah dalam ruang lingkup lingkaran. Tetapi karena sebelum mempelajari lingkaran siswa Anda telah memiliki kompetensi dalam ruang lingkup lain, misalnya Teorema Pythagoras, maka ada kemungkinan bahasan akan menyinggung pula kemampuan-kemampuan dasar sebelum mempelajari lingkaran, namun tetap berfokus pada lingkaran.

Modul ini disusun agar para pengguna modul:

1. lebih memiliki kemampuan memecahkan masalah terkait lingkaran; dan
2. memahami strategi membelajarkan siswa untuk memiliki kemampuan memecahkan masalah terkait lingkaran.

Untuk mempelajari pemecahan masalah dan pembelajarannya yang terkait dengan lingkaran, Anda perlu menguasai pengertian lingkaran dan berbagai sifat-sifatnya. Demikian juga siswa Anda nantinya. Untuk keperluan tersebut modul ini disusun dalam 3 (tiga) kegiatan belajar, yaitu:

Kegiatan Belajar 1: Memahami Lingkaran dan Daerah Lingkaran, Sifat-sifat, dan Bagian-bagiannya.

Kegiatan Belajar 2: Pemecahan Masalah Terkait Lingkaran

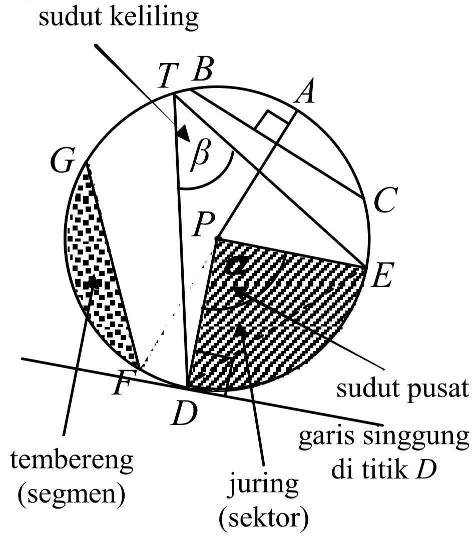
Kegiatan Belajar 3: Membelajarkan Siswa Memecahkan Masalah Terkait Lingkaran

A. Kegiatan Belajar 1: Memahami Lingkaran dan Daerah Lingkaran, Sifat-sifat dan Bagian-bagiannya

Lingkaran, daerah lingkaran, dan bagian-bagiannya, serta sifat-sifat penting terkait lingkaran telah dibahas cukup lengkap pada Modul *Kapita Selekta Pembelajaran Geometri Datar Kelas VIII & IX di SMP* (Krismanto, Al. dan Sumardyono. 2009:20-47) Bagi yang menginginkan memperoleh gambaran lebih lengkap silahkan mempelajari modul tersebut. Berikut ini ringkasannya

Lingkaran dan Daerah Lingkaran

1. Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap titik tertentu. Titik tertentu (P) disebut pusat dan jarak tertentu merupakan panjang jari-jari lingkaran tersebut.



Gambar 4.2

2. Unsur lingkaran dan unsur daerah lingkaran, antara lain: pusat lingkaran, jari-jari, diameter, busur lingkaran (busur kecil, setengah lingkaran, busur besar), tali busur, anak panah, apotema, sudut pusat, sudut keliling, juring atau sektor, tembereng atau segmen lingkaran.
3. Talibusur yang melalui pusat lingkaran disebut diameter, panjangnya $2r$, dengan r = panjang jari-jari lingkaran. Dua titik ujung suatu diameter disebut pasangan titik *diametral*.
4. Setiap sumbu sebuah talibusur melalui pusat lingkaran ($\overline{PA}$ sumbu $\overline{BC}$)
5. Segiempat yang semua titik sudutnya terletak pada suatu lingkaran disebut segiempat siklik atau segiempat talibusur. Semua sisinya adalah talibusur dalam satu lingkaran.
6. Keliling lingkaran (K), $K = \pi d$ atau $K = 2\pi r$, dengan d = diameter, r = jari-jari, dan $\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 95$ ....
7. Luas lingkaran, $L = \pi r^2$

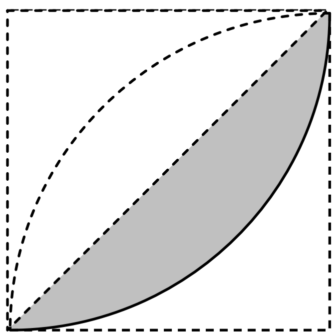
Sifat-sifat

1. Setiap diameter yang tegaklurus sebuah talibusur merupakan sumbu talibusur tersebut.
2. Perbandingan sudut pusat busur sama dengan perbandingan panjang busurnya juga sama dengan perbandingan luas juring yang dibentuk masing-masing busur.
3. Pada suatu lingkaran, besar sudut pusat sama dengan 2 × besar sudut keliling yang menghadap busur yang sama pada lingkaran tersebut.
4. Jika dua lingkaran yang satu di luar yang lain atau keduanya bersinggungan di luar, maka keduanya memiliki dua jenis garis persekutuan yaitu: garis singgung persekutuan dalam, serta garis singgung persekutuan luar. Cara menghitung panjang garis singgung persekutuan adalah dengan menggunakan Rumus Pythagoras.
5. Lingkaran dalam suatu segitiga adalah lingkaran yang menyinggung semua sisi segitiga. Untuk melukis lingkaran dalam pada suatu segitiga diperlukan titik pusat lingkaran tersebut. Titik pusat lingkaran ini merupakan titik potong garis-garis bagi dalam (sudut) segitiga.
6. Lingkaan luar suatu segitiga adalah lingkaran yang melalui ketiga titik sudut segitiga. Untuk melukis lingkaran luar pada suatu segitiga maka diperlukan titik pusat lingkaran tersebut yang merupakan titik potong sumbu-sumbu sisi segitiga.

B. Kegiatan Belajar 2: Pemecahan Masalah Terkait Lingkaran

Contoh 1

Berapa luas kepingan logam Gambar 4.1 jika diketahui panjang persegi di luar kepingan logam tersebut 14 cm, dan semua garis lengkung adalah seperempat lingkaran? (Gunakan $\pi = \frac{22}{7}$).



Gambar 4.3

Penyelesaian

Alternatif 1

Memecah masalah menjadi bagian-bagiannya. Diperhatikan setengah dari bagian yang diarsir. Mengapa? Karena terlihat bahwa daerah yang diarsir pada Gambar 4.3 adalah daerah seperempat lingkaran dpotong bagian setengah persegi.

Luas yang diarsir adalah setengah dari luas seperempat lingkaran berjari-jari 14 cm, dipotong luas setengah persegi dengan panjang sisi 14 cm, maka:

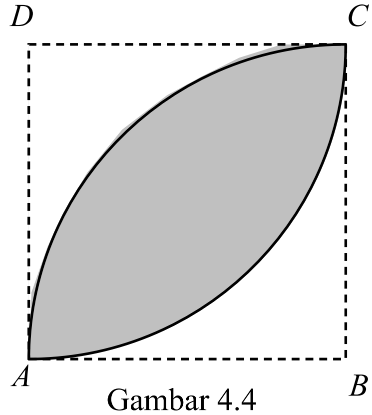
$$L = \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 14^2 - \frac{1}{2} \times 14^2$$

$$= 154 - 98 = 56$$

Luas seluruhnya yang diarsir = 2×56 cm^2 = 112 cm^2.

Alternatif 2

Pengalaman menunjukkan, bahwa Alternatif 1 adalah yang paling sering digunakan. Penyelesaian berikut merupakan pemecahan masalah yang unik, yang pernah dikemukakan siswa tetapi jarang ditemukan. Pemecahan masalah ini menggunakan "pendekatan komplementer" sebagai berikut (panjang sisi persegi = panjang jari-jari lingkaran = r).



Gambar 4.4

Yang dicari pertama adalah separuh (setengah) daerah tidak terarsir, misal seluruh daerah tidak terarsir *ABC* pada Gambar 4.4, yang diperoleh dari luas daerah persegi, dikurangi dengan luas seperempat lingkaran berpusat *D*. Hasilnya adalah $r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2$.

Berarti luas dua bagian yang tak terarsir adalah $2 \times (r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2) = 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2$.

Luas daerah yang diarsir adalah komplemennya, yaitu luas persegi dikurangi yang tidak diarsir = $r^2 - (2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2) = \frac{1}{2}\pi r^2 - r^2$

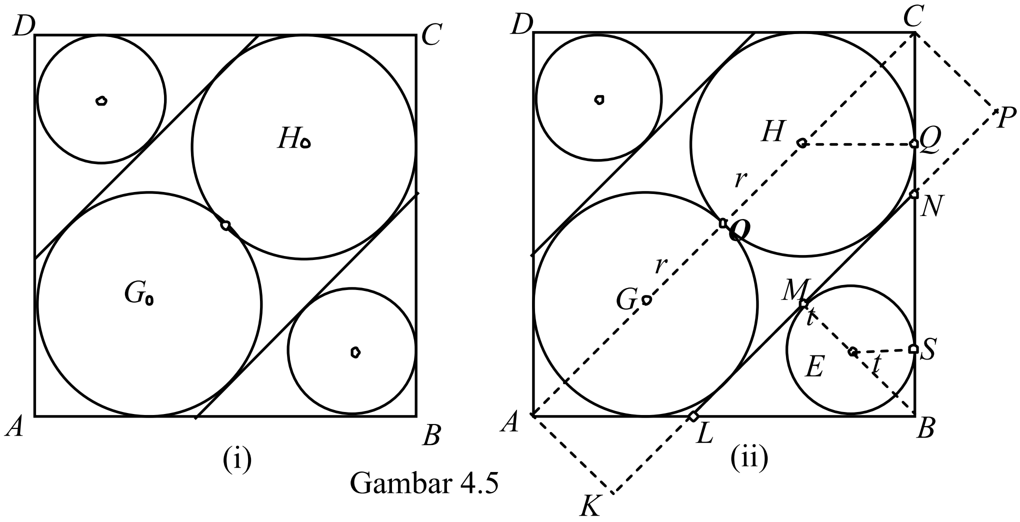
Dengan $r = 14$ cm, maka $L = \frac{1}{2}\pi r^2 - r^2 = \frac{1}{2}\,\frac{22}{7} \times 14^2 - 14^2$

Jadi luas yang diarsir = 112 cm^2

Alternatif 3

Seorang siswa yang "tajam penglihatannya" menemukan bahwa dua kali luas daerah $\frac{1}{4}$ lingkaran adalah sama dengan luas daerah persegi ditambah dengan daerah II (yang terarsir). Luas daerah dua kali seperempat lingkaran adalah $2 \times \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi r^2$. Dengan demikian, jika luas daerah dua kali seperempat lingkaran tersebut (yaitu $\frac{1}{2}\pi r^2$) dikurangi dengan luas persegi akan menghasilkan luas daerah II (yang terarsir yang sedang dicari). Jadi, luas daerah dimaksud = $\frac{1}{2}\pi r^2 - r^2$. Seperti telah dihitung pada Altenatif 2, hasilnya 112 cm^2.

Contoh 2



Gambar 4.5

Pada Gambar 4.5 (i) ditunjukkan dua lingkaran besar masing-masing dengan panjang jari-jari r di dalam suatu persegi. Keduanya saling bersinggungan di pusat persegi. Dua lingkaran lainnya masing-masing dengan panjang jari-jari t menyinggung sisi persegi yang dekat dengan lingkaran itu dan juga menyinggung garis singgung persekutuan luar lingkaran besar. Tentukan t dinyatakan dengan r.

Cara I

Masalahnya antara lain menyangkut garissinggung lingkaran. Yang diketahui hanya panjang jari-jari lingkaran besar. Ukuran perseginya belum diketahui. Untuk mengetahuinya perlu digambar dulu diagonalnya, misalnya $\overline{AC}$. Gambar 4.5.(i) dapat dilengkapi sehingga menjadi Gambar 4.5 (ii), agar hubungannya dengan garissinggung tampak. Dengan memperhatikan ΔHQC, panjang $\overline{HQ}$ dapat ditentukan. Demikian juga $\overline{GA}$ yang sama panjang dengan panjang $\overline{CH}$. Dari diketahuinya panjang $\overline{AC}$ maka dapat diketahui panjang $\overline{KP}$, dengan $KP = AC$.

Panjang $\overline{MB}$ dapat diperoleh dengan cara seperti cara memperoleh panjang $\overline{HC}$. Karena NM dan NS adalah garis-garis singgung dari titik yang sama, tentu panjangnya sama. Dengan mengadakan perhitungan-perhitungan berdasar pembahasan di atas, berikut ini disampaikan langkah-langkah perhitungannya.

Penyelesaian (Tahap melaksanakan rencana)

Perhatikan Gambar 4.5 (ii).

$CQ = HQ = r$. Sehingga $HC = r\sqrt{2}$ (karena ΔQHC siku-siku sama kaki).

Analog diperoleh $AG = r\sqrt{2}$ sehingga $AC = 2HC + GH = 2r\sqrt{2 + 2r}$

Jadi $KP = AC = 2r\sqrt{2} + 2r$.

Pada segitiga siku-siku sama kaki PCN, $CP = r$ sehingga $PN = r$ dan $CN = r\sqrt{2}$

$KL = PN = r$.

$LN = KP - PN - KL = 2r\sqrt{2} + 2r - r - r = 2r\sqrt{2}$,

$$NM = \frac{1}{2}LN = \frac{1}{2} \times 2r\sqrt{2} = r\sqrt{2}.$$

Pada segitiga siku-siku samakaki NBM, $NB = NM \times \sqrt{2} = r\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2r$

$$NS = NB - BS = 2r - t$$

$NS = NM$ ($NSEM$ layang-layang garis singgung)

$2r - t = r\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow t = 2r - r\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow t = r\left(2 - \sqrt{2}\right)$

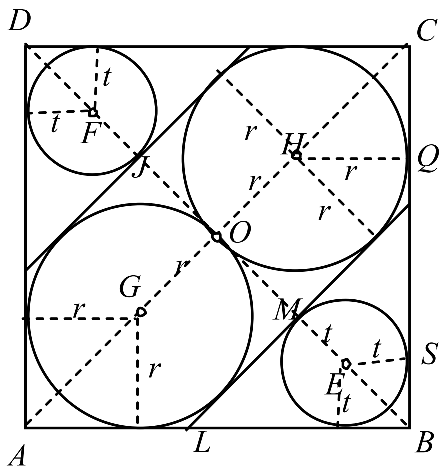
Cara II

Situasi awal masalah dapat digambarkan seperti pada Gambar 4.5 (i). Jika dilengkapi akan diperoleh Gambar 4.6. Gambar tersebut menunjukkan antara lain:

1. munculnya segitiga-segitiga siku-siku sama kaki, di antaranya bersisi siku-siku r dan t yang dengan demikian panjang hipotenusanya berturut-turut $r\sqrt{2}$ dan $t\sqrt{2}$
2. masalahnya termuat dalam hubungan antara t dan r yang dalam gambar tersebut t-nya terkait dengan diagonal $\overline{BD}$ dan r nya terkait dengan diagonal $\overline{AC}$.

Masalah tersebut kiranya dapat diselesaikan berdasar kesamaan panjang kedua diagonal persegi, yaitu $BD = AC$.

Penyelesaian: Perhatikan Gambar 4.6.



Gambar 4.6

$$\begin{aligned} BD &= DF + FJ + JO + OM + ME + EB \\ &= t\sqrt{2} + t + r + r + t + t\sqrt{2} \\ &= 2t\sqrt{2} + 2t + 2r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= AG + GO + OH + HC \\ &= r\sqrt{2} + r + r + r\sqrt{2} \\ &= 2r\sqrt{2} + 2r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BD = AC \quad &\Rightarrow 2t\sqrt{2} + 2t + 2r = 2r + 2r\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow 2t + 2t\sqrt{2} = 2r\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow t\left(1 + \sqrt{2}\right) = r\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \qquad = r \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\Leftrightarrow t = r\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

Jadi $t = r\left(2 - \sqrt{2}\right)$

C. Kegiatan Belajar 3:Membelajarkan Siswa Memecahkan Masalah yang Terkait Lingkaran

Di samping memperhatikan Modul 1 KB 3 tentang Pembelajaran Pemecahan Masalah, berikut ini disampaikan beberapa catatan khusus dalam topik lingkaran. Seperti pada modul sebelumnya, contoh pemecahan masalah yang dikemukakan di atas memuat hanya sedikit saja dari contoh penggunaan strategi yang dapat digunakan dalam memecahkan masalah yang disarankan pada Modul 1.

Contoh-contoh tersebut juga menggambarkan, bahwa dalam memecahkan masalah bangun datar, gambar yang baik akan memberikan arah pemecahan yang lebih jelas. Misalnya pemecahan masalah Contoh 1 Alternatif 3, "intuisi" muncul hanya jika gambarnya mendukung. Sekali lagi, "pertolongan" kadang atau bahkan sering diperlukan untuk membentuk situasi yang mendukung dan mengarah kepada konsep dasar yang hendak digunakan, seperti pada penyelesaian masalah pada Contoh 2.

Tiga alternatif penyelesaian pada masalah Contoh 1 dan dua alternatif penyelesaian pada Contoh 2 KB 1 di atas menunjukkan bahwa strategi untuk menyelesaikan masalah tidaklah tunggal. Contoh 1 menunjukkan juga bahwa manipulasi tidak terjadi hanya pada bentuk-bentuk aljabar, tetapi pada pemecahan masalah geometri, antara lain memecah gambar, baru memadukannya kembali.

Penyelesaian Contoh 2 menunjukkan "pandangan awal" terhadap gambar dapat mengakibatkan perbedaan strategi yang digunakan, meskipun secara umum keduanya memberikan kerumitan manipulasi aljabar yang hampir tidak berbeda. Hal ini sekaligus juga memberikan gambaran bahwa manipulasi aljabar sangat penting dalam memfinalkan penyelesaian.

Khususnya dalam masalah yang terkait lingkaran, jika terkait garis singgung, maka sekaligus Teorema Pythagoras merupakan senjata utama. Di dalam penyelesaian di atas Teorema Pythagoras telah dikemas khusus dalam penggunaan segitiga khusus (siku-siku sama kaki). Hal ini akan banyak ditemukan dalam masalah yang terkait lingkaran dan sifat-sifatnya.

Berdasarkan uraian di atas, untuk membelajarkan siswa agar mampu memiliki kemampuan memecahkan masalah lingkaran, uraian yang ada pada analisis atau pembahasan awal sebelum dituangkan sebagai bentuk pemecahan masalah hendaknya dapat digunakan sebagai bahan alternatif tanya jawab. Tidak tunggalnya alternatif hendaknya menjadi pedoman guru untuk terlebih dahulu memberikan kesempatan kepada siswa apa yang menjadi pemikiran awalnya. Pemikiran awal siswa hendaknya dapat dibantu (dengan pertanyaan lanjutan) agar siswa sendiri mampu memilih langkah berikutnya.

Lingkaran dibahas di Kelas VIII Semester 1. Karena itu jika masalah lingkaran ini merupakan bagian dari pembelajaran di kelas, dalam pemilihan bahan masalah hendaknya kita memilih masalah yang pemecahannya tidak melibatkan kekongruenan atau kesebangunan.

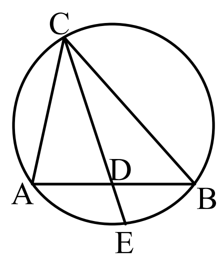
D. Ringkasan

1. Konsep-konsep dan prinsip yang terkait lingkaran sudah diringkas pada KB-1.
2. Selain menyangkut sifat yang terkait lingkaran, pemecahan masalah dalam lingkaran sering menggunakan Teorema Pythagoras dan kemampuan manipulasi bentuk aljabar.

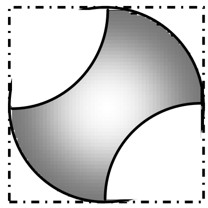
E. Latihan/Tugas

1. Pecahkan/selesaikanlah masalah berikut:

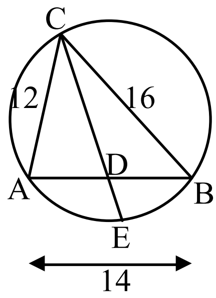
   a. Pada ΔABC, AB = 14 cm, BC = 16 cm, dan CA = 12 cm. *T*alibusur $\overline{CE}$ memotong $\overline{AB}$ di D, dan memotong busur AB sehingga panjang busur AE = panjang busur BE. Hitunglah DE.



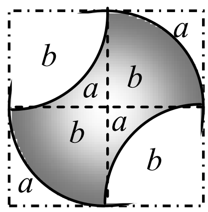
   b. Pada gambar di samping, semua kurva adalah busur seperempat lingkaran. Berapa luas yang diarsir jika panjang sisi persegi di luar yang diarsir tersebut 14 cm?



2. Deskripsikan bagaimana Anda membelajarkan siswa dalam memecahkan masalah dengan salah satu masalah di atas sebagai contoh masalah.



Selesaikan soal di atas sendiri dahulu sebelum membicarakan dengan teman sejawat di MGMP. Untuk soal nomor 1a; panjang busur AE = panjang busur $BE \Rightarrow u\angle ACD = u\angle BCD \Rightarrow \overline{CD}$ garis bagi $\angle ACB. \Rightarrow AD : DB = 3 : 4 \Rightarrow AD = 6$ cm, $BD = 8$ cm. CD dapat dihitung menggunakan rumus panjang garis bagi. Melalui sifat kuasa titik D diperoleh $DE = 4$ cm.



Untuk soal 1b; jika a dan b menyatakan luas suatu daerah, maka luas yang diarsir sama dengan $2a + 2b$, sama dengan luas yang tidak diarsir. Jadi luas yang diarsir = luas yang tidak diarsir = $\frac{1}{2}$ luas persegi sekeliling kepingan. Berarti luas yang diarsir $= \frac{1}{2} \times 28^2 = 392$ cm^2

Untuk soal nomor 2, bahas dan diskusikan jawabannya dengan dengan rekan di MGMP tempat kegiatan Anda, untuk saling membantu memeriksa hasil pekerjaan/jawaban. Gunakanlah salah satu model penyekoran yang Anda pelajari pada Modul 1. Sebelum Anda memperoleh paling sedikit 75%, sebaiknya Anda belum berganti mempelajari modul lain.

Daftar Pustaka

Hidetoshi, Fukagawa and Rothman. 2008. *Japanese Temple Geometry.* Tony Princeton, New Jersey: Princeton University Press

Krismanto, Al. 2004. *Paket Penggemar Matematika. Strategi Pemecahan Masalah Geometri SMP*. Yogyakarta: PPPG Matematika.

Krismanto, Al. dan Sumardyono. 2009. *Kapita Selekta Pembelajaran Geometri Datar Kelas VIII & IX di SMP*. Yogyakarta: PPPPTK Matematika

MODUL 5
PEMBELAJARAN PEMECAHAN MASALAH KEKONGRUENAN DAN KESEBANGUNAN

MODUL 5
PEMBELAJARAN PEMECAHAN MASALAH KEKONGRUENAN DAN KESEBANGUNAN

Bangun-bangun datar beraturan apa saja yang dapat digunakan pada pengubinan? Gabungan bangun-bangun datar beraturan apa saja yang dapat digunakan pada pengubinan? Ada berapa macam gabungan bangun datar yang memenuhi syarat?

Bagaimana menentukan lebar sungai yang cukup lebar tanpa mengukur langsung?

Modul ini akan membahas pemecahan masalah yang terkait atau menggunakan prinsip-prinsip kekongruenan dan kesebangunan.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan:

1. mampu memilih dan mengembangkan strategi, serta menyelesaikan masalah yang terkait kekongruenan (kongruensi) dan kesebangunan bangun datar.
2. mampu membelajarkan siswa menggunakan strategi dalam memecahkan masalah kekongruenan dan kesebangunan bangun datar

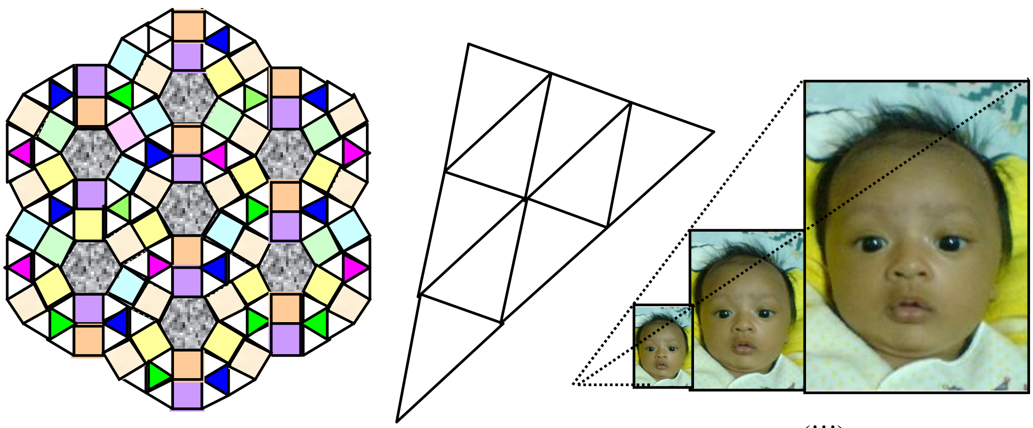
Untuk memecahkan masalah kekongruenan dan kesebangunan bangun datar tentu saja Anda perlu memahami strategi pemecahan masalah matematika secara umum dan menguasai konsep dan prinsip kekongruenan dan kesebangunan. Untuk strategi pemecahan masalah Anda dapat mempelajarinya lagi dari Modul 1 buku ini. Konsep dan prinsip-prinsip dalam kekongruenan dan kesebangunan secara ringkas dibahas dalam modul ini. Untuk menerapkan pemecahan masalah dalam kekongruenan dan kesebangunan diberikan dalam beberapa contoh serta saran membelajarkannya pada siswa. Untuk itu maka ketika Anda mempelajari contoh yang tersedia hendaknya sekaligus mencermati strategi yang digunakan dan mempertimbangkan kemungkinan dilpilihnya strategi lain agar kemampuan pemecahan masalah Anda berkembang. Demikian pulalah kiranya nanti yang perlu Anda sarankan kepada para siswa Anda.

Untuk membantu Anda menguasai kemampuan tersebut, pembahasan modul ini dikemas dalam 3 (tiga) kegiatan belajar (KB) sebagai berikut.

Kegiatan Belajar 1: Memahami Kekongruenan dan Kesebangunan Bangun Datar
Kegiatan Belajar 2: Memecahkan Masalah Terkait Kekongruenan dan Kesebangunan
Kegiatan Belajar 3: Membelajarkan Siswa Memecahkan Masalah Terkait Kekongruenan dan Kesebangunan

A. Kegiatan Belajar 1: Kekongruenan dan Kesebangunan Bangun Datar

Di sekitar kita banyak dijumpai benda-benda atau bagian benda yang bentuknya sama baik dengan ukuran sama maupun berbeda.



(i) (ii) (iii)

Gambar 5.1

Gambar 5.1 (i) dan (ii) memuat kekongruenan yang terkait dengan pengubinan. Gambar 5.1 (i) adalah salah satu bentuk pengubinan pada masalah yang dikemukakan pada awal modul ini. Foto balita pada. Gambar 5.1 (iii) berkaitan dengan perbesaran dan pengecilan foto yang menghasilkan bangun atau gambar sebangun.

Apa ciri-ciri atau syarat-syarat dua bangun kongruen? Apa pula syarat dua bangun sebangun? Adakah sifat-sifat khusus kesebangunan dua segitiga?

Pada bagian ini Anda akan mempelajari kembali tentang kekongruenan dan kesebangunan bangun datar. Tetapi karena hal tersebut telah dibahas dengan luas pada modul *Kapita Selekta Pembelajaran Geometri Datar Kelas VIII & IX di SMP*

(Krismanto, Al. dan Sumardyono. 2009:48-92) yang diterbitkan pada tahun 2009 oleh P4TK Matematika, maka pada Kegiatan Belajar ini hanya akan dibahas secara ringkas.

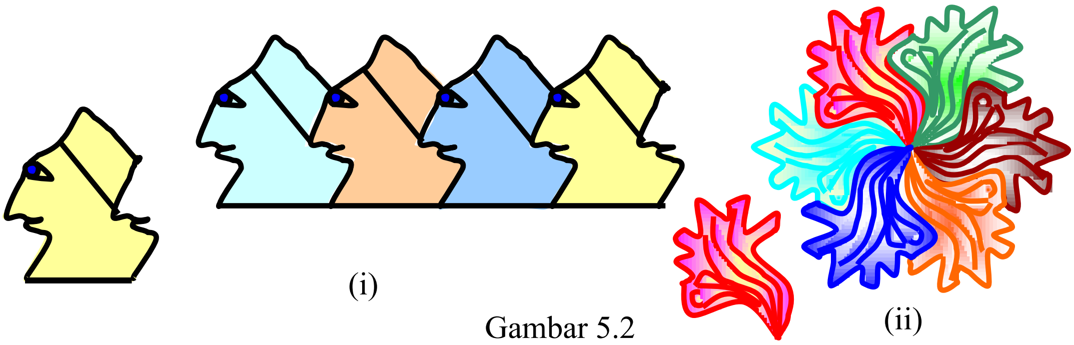
1. Bangun-bangun yang Kongruen dan yang Sebangun

Bangun-bangun Kongruen

Dua bangun datar disebut kongruen jika keduanya mempunyai bentuk dan ukuran yang sama. Kesamaan ukuran tersebut dapat dinyatakan dengan: (1) setiap pasang sisi bersesuaian sama panjang, dan (2) setiap pasang sudut bersesuaian sama besar.

Dari ketentuan di atas dapat dinyatakan pula bahwa bangun kongruen dapat diperoleh dengan transformasi (menggeser, memutar, atau mencerminkan) bangun yang satu sehingga dapat ”menempati” bangun lainnya. Secara singkat: dua bangun disebut kongruen jika bangun yang satu **tepat** dapat saling menempati bangun lainnya.

Contoh 1



(i) (ii)

Gambar 5.2

Anda perhatikan bagian-bagian gambar bangun pada Gambar 5.2 (i) dan (ii), masing-masing dengan bangun ”tunggal”-nya, ada kekongruenan. Bagaimana penjelasannya?

Contoh 2

a. Dua persegi yang mempunyai panjang sisi sama, kongruen (berilah alasan!).
b. Dua lingkaran berjari-jari sama adalah dua bangun kongruen (mengapa?).

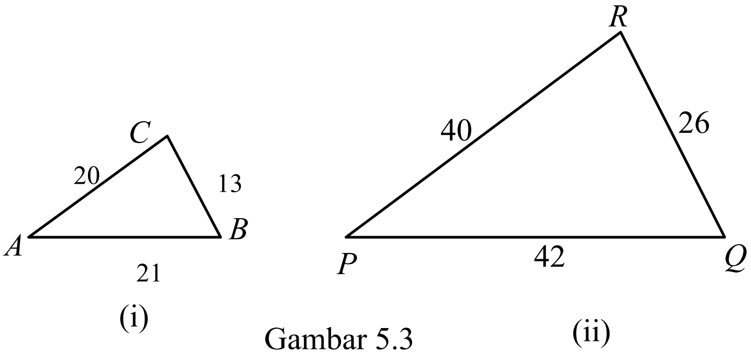
Dua Bangun Sebangun

Pada setiap pasang bangun sebangun, dua syarat berikut dipenuhi:

a. semua pasang sisi bersesuaian sebanding, dan
b. setiap pasang sudut bersesuaian sama besar.

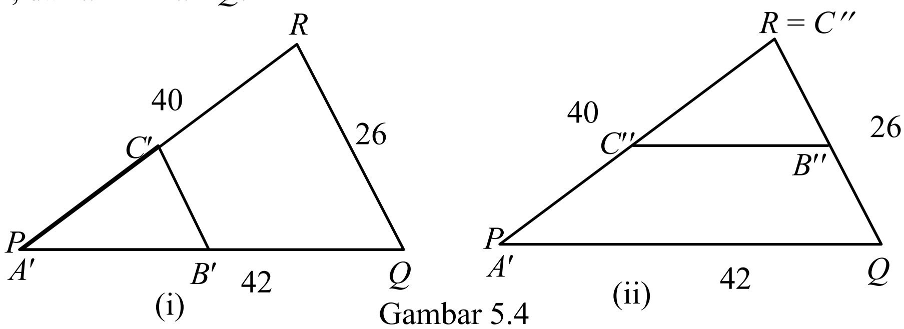
Contoh 3:

Perhatikan pasangan ΔABC dan ΔPQR pada Gambar 5.3 (i) dan (ii).



Gambar 5.3

Penempatan titik sudut A di P (Gambar 5.4 (i)) dan B di sisi $\overline{PQ}$ atau titik sudut C di R dan B di sisi $\overline{QR}$ (Gambar 5.4 (ii)), atau titik sudut B di Q dan C di sisi $\overline{QR}$ (tidak digambar), menunjukkan kesamaan-kesamaan sudut-sudut berikut: $u\angle A = u\angle P$, $u\angle C = u\angle R$, dan $u\angle B = u\angle Q$.



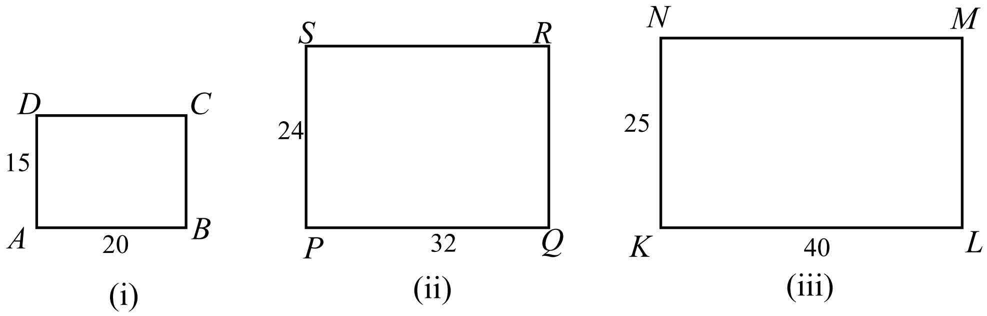
Gambar 5.4

Jika diperhatikan perbandingan panjang sisi-sisinya, dan dengan mengingat bahwa $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, dan $C'A' = CA$ maka:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{21}{42} = \frac{1}{2},\ \frac{BC}{QR} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2},\ \text{dan}\ \frac{CA}{RP} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2},\ \text{atau: } \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}.$$

Contoh 4

Perhatikan persegipanjang-persegipanjang pada Gambar 5.5 (dengan satuan panjang sama).



Gambar 5.5

Ketiga persegipanjang memiliki kesamaan, yaitu besar setiap sudutnya 90^o. Artinya, ketiganya sepasang-sepasang sudutnya sama besar. Namun tentang kesebangunannya masih perlu diteliti.

$$\frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PS} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} \text{ dan } \frac{DC}{SR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8},$$

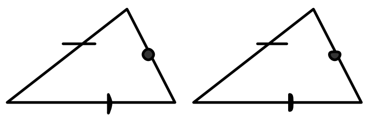
$$\text{tetapi } \frac{AD}{KN} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \text{ dan } \frac{AB}{KL} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

Dikatakan bahwa: persegi panjang *ABCD* sebangun dengan *PQRS* tetapi tidak sebangun dengan persegi panjang *KLMN*.

2. Sifat-sifat Dua Segitiga Kongruen

Seperti telah dijelaskan pada modul *Kapita Selekta Pembelajaran Geometri Datar Kelas VIII & IX di SMP* (Krismanto, Al. dan Sumardyono. 2009:57-58) dua segitiga kongruen jika salah satu dari yang berikut ini dipenuhi:

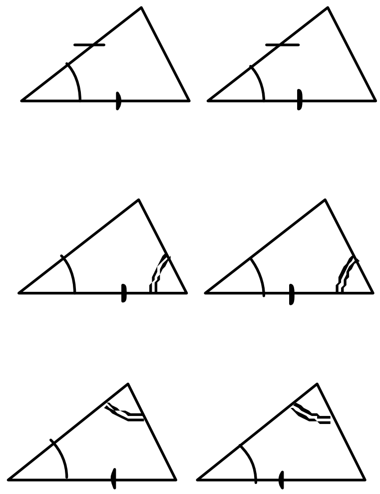
a. setiap pasang dari ketiga pasang sisi bersesuaian sama panjang (*s*, *s*, *s*),



b. setiap pasang dari dua pasang sisi bersesuaian sama panjang dan sudut apitnya sama besar. (s, sd, s),

c. satu pasang sisinya sama panjang dan setiap pasang dari kedua sudut yang berkaki sudut sisi tersebut sama besar (sd, s, sd), atau

d. setiap pasang dari dua sudutnya sama besar dan panjang sisi di hadapan salah satu sudutnya sama besar. (sd, sd, s) dan kedua segitiga sejenis.



Gambar 5.6

Adapun yang keempat (pada d) dapat dikembalikan yang ketiga, karena dengan dua sudut diketahui, maka sudut ketiga dapat ditentukan. Akibatnya, yang keempat dapat dibawa kepada keadaan kongruensi (sd, s, sd).

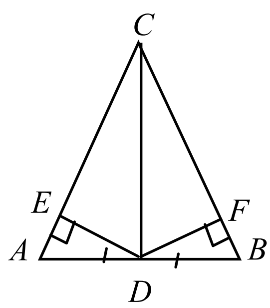
Contoh 5

Pada setiap segitiga samakaki, jarak titik kaki garisberat dari puncak, ke kaki-kaki segitiga adalah sama panjang. Untuk membuktikan pernyataan di atas perhatikan penggunaan sifat kekongruenan berikut.

Diketahui: ΔABC; $AC = BC$, $\overline{CD}$ garis berat.

$$\overline{DE} \perp \overline{AC}\,,\ \overline{DF} \perp \overline{BC}$$

Buktikan: $DE = DF$



Gambar 5.7

Bukti: ΔABC samakaki $\Rightarrow$

Di hadapan kaki yang sama panjang terletak sudut yang sama besar $\Rightarrow u\angle A = u\angle B$.

Perhatikan dua segitiga siku-siku ΔEDA dan ΔFDB

$u\angle E = u\angle F = 90°$.

$u\angle A = u\angle B$

$AD = BD$ (akibat garis berat)

Berarti ΔEDA dan ΔFDB kongruen (dapat ditulis: $\Delta EDA \cong \Delta FDB$). (Mengapa?).

Akibat: $DE = DF$ (terbukti). ■

3. Sifat-sifat Dua Segitiga Sebangun

Dari syarat kesebangunan dua segitiga, dapat diturunkan teorema-teorema terjadinya kesebangunan dua buah segitiga. Berikut ini beberapa teorema berhubungan dengan kesebangunan dua buah segitiga yang selengkapnya telah dibahas pada *Kapita Selekta Pembelajaran Geometri Datar Kelas VIII & IX di SMP* (Krismanto, Al. dan Sumardyono. 2009:61-65) seperti dikemukakan di atas.

Teorema 1: Jika panjang ketiga pasang sisi dua buah segitiga sebanding, maka kedua segitiga sebangun.

Teorema 2: Dua buah segitiga sebangun jika ketiga pasang sudutnya sama besar

Jika dua sudutnya sama besar maka sudut ketiga juga sama besar. Akibatnya ketiga pasang sudut segitiga sama besar. Maka syarat teorema di atas dapat disederhanakan,, sehingga teoremanya menjadi:

Dua buah segitiga sebangun jika panjang ketiga sisi bersesuaian sebanding

Teorema 3: Dua segitiga sebangun jika dua sisi bersesuaian sebanding dan sudut apitnya sama besar

Dari teorema di atas dapat diturunkan banyak teorema. Di antara teorema turunan tersebut yang sering digunakan adalah:

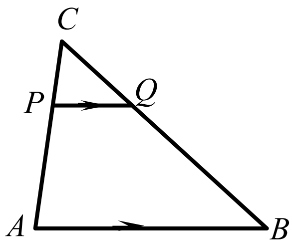
Teorema 4: Jika suatu garis sejajar dengan salah satu sisi segitiga memotong kedua sisi yang lain pada dua titik berbeda, maka garis itu membagi sisi-sisi terpotong itu menjadi bagian-bagian yang panjangnya sebanding.

Berikut ini penjelasannya:

Diketahui: ΔABC

$\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$

Buktikan: $\dfrac{CP}{PA} = \dfrac{CQ}{QB}$



Gambar 5.8

Bukti: $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ dipotong oleh $\overline{BC}$

$\Rightarrow u\angle CQP = u\angle CBA$ (sudut sehadap sama besar)

$\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ dipotong oleh $\overline{AC}$

$\Rightarrow u\angle CPQ = u\angle CAB$ (sudut sehadap sama besar)

sedangkan $u\angle PCQ = u\angle ACB$

Jadi ΔCPQ sebangun dengan ΔCAB (ditulis: $\Delta CPQ \sim \Delta CAB$)

Akibat: $\dfrac{CP}{CA} = \dfrac{CQ}{CB}$ .... (*)

$\Leftrightarrow \dfrac{CP}{CP + PA} = \dfrac{CQ}{CQ + QB}$

$\Leftrightarrow \dfrac{CP + PA}{CP} = \dfrac{CQ + CB}{CQ}$

$\Leftrightarrow 1 + \dfrac{PA}{CP} = 1 + \dfrac{CB}{CQ}$

$\Leftrightarrow \dfrac{PA}{CP} = \dfrac{CB}{CQ}$

$\Leftrightarrow \dfrac{CP}{CA} = \dfrac{CQ}{CB}$ (terbukti) ■

Catatan: (*) dapat diperluas sehingga menjadi $\dfrac{CP}{CA} = \dfrac{CQ}{CB} = \dfrac{PQ}{AB}$, sehingga dapat dinyatakan bahwa:

> Jika dalam ΔABC, P pada $\overline{AC}$ dan Q pada $\overline{BC}$,
>
> dan $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ maka: $\dfrac{CP}{CA} = \dfrac{CQ}{CB} = \dfrac{PQ}{AB}$

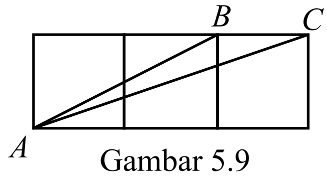
B. Kegiatan Belajar 2: Memecahkan Masalah Terkait Kekongruenan dan Kesebangunan

Pemecahan masalah sering melibatkan berbagai konsep, prinsip dan berbagai keterampilan dasar. Demikian halnya dalam masalah yang terkait dengan kekongruenan dan kesebangunan. Sesuai Standar Isi, kekongruenan dan kesebangunan merupakan bagian akhir dari kajian geometri dan pengukuran. Dengan demikian, maka dapat dimungkinkan pemecahan masalahnya memerlukan berbagai kompetensi yang mendahuluinya. Dalam uraian berikut masalah kekongruenan dan kesebangunan dapat berdiri sendiri tetapi juga dapat bersama-sama menjadi masalah. Masalahnya dapat berasal dari kekongruenan dan atau kesebangunan, tetapi juga mungkin keduanya menjadi alat untuk memecahkan masalah kajian lainnya dalam matematika.

1. Memecahkan Masalah Terkait Kekongruenan

Perhatikan masalah berikut!

Jika ketiga persegi pada Gambar 5.9 adalah persegi-persegi yang kongruen, buktikan bahwa jumlah besar sudut *BAD* dan *CAD* adalah 45^o.



Gambar 5.9

Masalah tersebut merupakan masalah yang berhubungan dengan kekongruenan. Dapat diduga bahwa kekongruenan merupakan salah satu alat yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah tersebut. Tetapi bagaimana jika masalah itu disajikan terlepas tanpa terkait judul apapun? Tentu saja dugaan awal diselesaikannya masalah itu tidak pada masalah kekongruenan. Seperti dijelaskan pada awal KB ini, contoh-contoh berikut dapat saja dipikirkan tidak harus dengan dugaan awal terkait dengan kekongruenan, meskipun masalah ini berada di bawah judul terkait kekongruenan.

Contoh 6.

Lihat masalah yang disajikan berkenaan dengan Gambar 5.9.

Apa yang diketahui? Yang diketahui sudah disajikan dalam bentuk diagram. Akan tetapi datanya rasanya belum cukup untuk mememecahkan masalah itu. Benarkah?

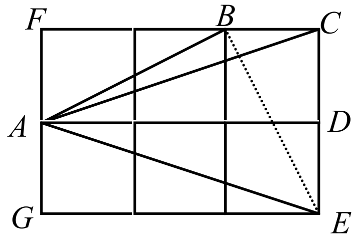
Bagaimana jika “bergerak dari belakang?” Tidak mudah untuk melakukan kegiatan “bergerak dari belakang.” Namun memperhatikan tujuan pembuktian merupakan satu hal sangat penting. Tujuan pembuktian itulah bagian belakangnya. Perhatian pada tujuan dapat membantu mencari jembatan antara yang diketahui dan yang diminta untuk dibuktikan. Pertanyaan pertama muncul:

– Dimana diperoleh sudut 45° seperti yang diinginkan?

+ Salah satu di antaranya adalah pada segitiga siku-siku samakaki.

– Bagaimana dari diagram itu dapat dibentuk sudut 45°?

+ Membuat gambar pertolongan. Langkah membuat garis-garis pertolongan seperti ini sering terjadi dalam memecahkan masalah geometri. Perhatikan Gambar 5.10.



Gambar 5.10

Dengan menarik ruas garis $\overline{BE}$,

$\Delta ABF \cong \Delta BEC$ (dua segitiga siku-siku dengan dua sisi sama panjang), sehingga $AB = EB$ dan $u\angle BAF = u\angle EBC$

Karena $u\angle BAF + u\angle FBA = 90°$, maka $u\angle EBC + u\angle FBA = 90°$

Karena itu $u\angle ABE = 180° - (u\angle EBC + u\angle FBA) = 180° - 90° = 90°$.

Jadi ΔABE adalah segitiga siku-siku samakaki. Berarti $u\angle BAE = 45°$.

– Apakah itu sudah menjawab bahwa $u\angle BAD + u\angle CAD = 45°$?

+ Belum. Perlu ada penjelasan bahwa $u\angle BAE$ merupakan penjumlahan dari $u\angle BAD$ dan $u\angle CAD$

$\Delta CAD \cong \Delta EAD \Rightarrow u\angle CAD = u\angle EAD$.

$u\angle BAD + u\angle CAD = u\angle BAD + u\angle EAD = 45°$ (terbukti).

Penalaran-penalaran yang dikemukakan di atas perlu disusun dalam suatu alur penalaran yang dalam bentuk komunikasi lebih mudah diikuti. Misalnya sebagai berikut.

Bukti: Lihat Gambar 5.10. Cerminkan $ADCF$ terhadap $\overleftrightarrow{AD}$ sebagai cermin. Diperoleh $ADEG$ sebagai bayangannya.

Tarik $\overline{DF}$.

$$\left.\begin{aligned} &BF = EC \\ &\angle BFA = \angle ECB = 90^\circ \\ &FA = CB \end{aligned}\right\} \Delta ABF \cong \Delta BEC. \text{ Jadi } AB = EB,\ u\angle BAF = u\angle EBC$$

$u\angle BAF + u\angle FBA = 90°$, sehingga $u\angle EBC + u\angle FBA = 90°$.

$u\angle ABE = 180° - (u\angle EBC + u\angle FBA) = 180° - 90° = 90°$.

ΔABE adalah segitiga siku-siku samakaki. Berarti $u\angle BAE = 45°$

$$\left.\begin{aligned} &AD = AD \\ &\angle ADC = \angle ADE = 90^\circ \\ &DC = DE \end{aligned}\right\} \Delta CAD \cong \Delta EAD. \text{ Jadi } u\angle CAD = u\angle EAD.$$

$$\begin{aligned} u\angle BAD + u\angle CAD &= u\angle BAD + u\angle EAD. \\ &= u\angle BAE \\ &= 45^\circ. \end{aligned}$$

Catatan: Dalam menunjukkan bahwa $u\angle ABE = 90°$ dapat dilakukan dengan kebalikan Teorema Pythagoras.

Jika panjang sisi persegi satuan adalah a satuan, maka

$$\left.\begin{aligned} &AB^2 = AF^2 + FB^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2 \\ &BE^2 = BC^2 + CE^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2 \end{aligned}\right\} AB^2 + BE^2 = 10a^2.$$

$AE^2 = AG^2 + GE^2 = = a^2 + (3a)^2 = 10a^2$.

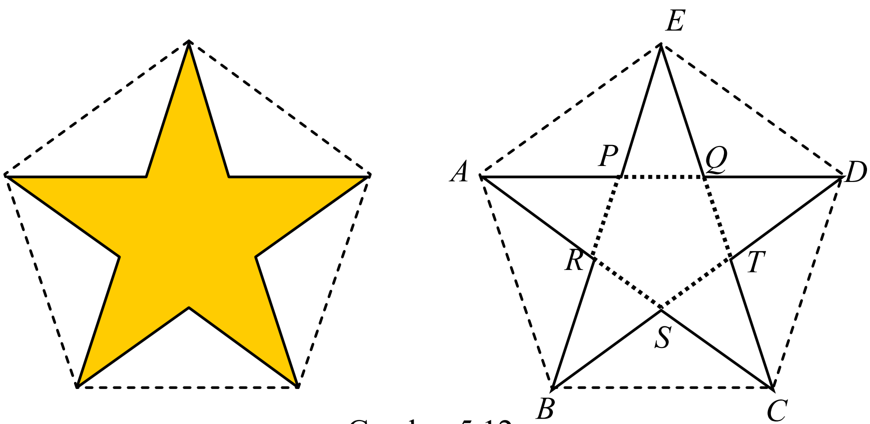
Dalam ΔABE, $AE^2 = AB^2 + BE^2$. Berarti ΔABE siku-siku di B ($u\angle ABE = 90°$).

2. Memecahkan Masalah Terkait Kesebangunan

Masalah 1:

Masalah 2:

Perhatikanlah ”bintang segi-5 beraturan” (Gambar 5.12; titik-titik sudutnya bersekutu dengan titik sudut segilima). Dengan warna keemasan, bintang segi-5 adalah lambang Ketuhanan Yang Maha Esa. Gambar 5.12 (ii) merupakan sketsa yang lengkap dari Gambar 5.12 (i).



Gambar 5.12

(i) (ii)

Buktikanlah bahwa: $\frac{AD}{AQ} = \frac{AQ}{AP} = \frac{AP}{BQ}$.

Kedua masalah di atas dapat dipecahkan menggunakan konsep kesebangunan.

Masalah 1

Dari masalahnya hanya ada pohon dan bayang-bayangnya. Dari gambar juga ada gambar orang dan bayangannya. Tidak ada angka-angka yang menunjukkan ukuran yang dapat digunakan sebagai pembanding. Muncul pertanyaan: Apakah datanya cukup? Dapat dianggap cukup, dengan hasil akhir bukan dalam bentuk angka. Jika ukuran sesungguhnya, maka perlu ada data tambahan yaitu bilangan, misalnya tinggi pengamat dan panjang bayang-bayangnya, atau yang semacam itu.

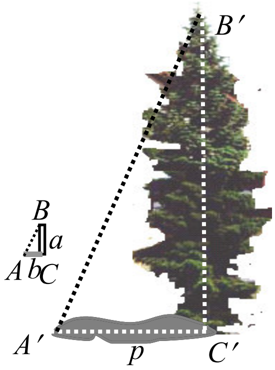
Secara umum:

Misalkan dipasang tegak tongkat sepanjang a meter (a m), panjang bayang-bayangnya b m, dan panjang bayang-bayang pohon = p m.

Lihat gambar: $\Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$

$$\frac{C'B'}{CB} = \frac{C'A'}{CA} \Leftrightarrow \frac{C'B'}{a} = \frac{p}{b}$$

$$\Leftrightarrow C'B' = \frac{pa}{b}$$

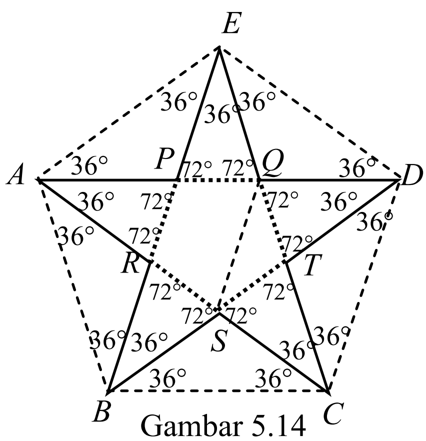


Gambar 5.13

Jadi tinggi pohon = $\frac{pa}{b}$ m

Masalah 2:

Membuktikan bahwa $\frac{AD}{AQ} = \frac{AQ}{AP} = \frac{AP}{BQ}$



Gambar 5.14

Dengan memperhatikan besar sudut-sudut pada Gambar 5.14, akan didapat kesebangunan segitiga-segitiga yang langsung digunakan pada pemecahan masalah ini.

Salah satu strategi adalah memecah masalah menjadi bagian-bagian yang lebih sederhana, yaitu membuktikan bahwa:

$$\frac{AD}{AQ} = \frac{AQ}{AP} \text{ dan } \frac{AQ}{AP} = \frac{AP}{BQ} \text{ atau } \frac{AD}{AQ} = \frac{AP}{BQ}$$

Membuktikan bahwa $\frac{AD}{AQ} = \frac{AQ}{AP}$

$\overline{AD}$, $\overline{AQ}$, dan $\overline{AP}$ terletak pada ΔACD. Pandang ΔACD, tarik $\overline{QS}$

$AQ = AP + PQ = AR + RS = AS$. Jadi $\overline{QS} \parallel \overline{DC}$

$\Rightarrow$ $\Delta ADC \sim \Delta AQS$, sehingga $\frac{AD}{AQ} = \frac{DC}{QS}$ (*)

DC = CD = AQ ($\Delta CQD \cong \Delta AEQ$ dan keduanya segitiga samakaki)

$QS = AP$ karena $\Delta AQS \cong \Delta BAP$ dan keduanya segitiga samakaki.

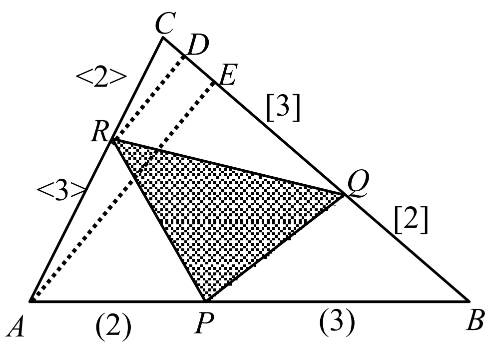
(*) menjadi $\frac{AD}{AQ} = \frac{AQ}{AP}$

Analog: dapat dibuktikan $\frac{AQ}{AP} = \frac{AP}{BQ}$, sehingga $\frac{AD}{AQ} = \frac{AQ}{AP} = \frac{AP}{BQ}$

Masalah 3

Pada ΔABC, titik-titik P, Q, dan R berturut-turut terletak pada sisi $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{AC}$. Diketahui pula bahwa $AP : PB = BQ : QC = CR : RA = 2 : 3$.

Hitunglah perbandingan luas ΔPQR : luas ΔABC.



Gambar 5.15

Jawab: Pertama kali dicari garis-garis bantunya. Karena terkait luas, maka garis-garis bantu itu berupa garis-garis tinggi yang sekaligus mengarah ke terbentuknya bangun-bangun sebangun.

Tarik $\overline{RD} \perp \overline{BC}$ dan $\overline{AE} \perp \overline{BC}$. Dengan demikian maka $\overline{RD} \parallel \overline{AE}$.

Dalam ΔCAE, $\overline{RD} \parallel \overline{AE}$ dan $CR : CA = 2 : 5$.

Jadi $RD : AE = CR : CA = 2 : (2 + 3) = 2 : 5$

$$\frac{\text{Luas}\,\Delta RQC}{\text{Luas}\,\Delta ABC} = \frac{\frac{1}{2}CQ \times RD}{\frac{1}{2}CB \times AE} = \frac{CQ}{CB} \times \frac{RD}{AE} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

Analog: $\frac{\text{Luas}\,\Delta APR}{\text{Luas}\,\Delta ABC} = \frac{6}{25}$ dan $\frac{\text{Luas}\,\Delta PBQ}{Luas\,\Delta ABC} = \frac{6}{25}$

Jadi luas $\Delta PQR = (1 - 3 \times \frac{6}{25}) \times$ Luas $\Delta ABC = \frac{7}{25}$ Luas ΔABC

Atau: LΔPQR : L$\Delta ABC = 7 : 25$.

Catatan.

Bagi mereka yang telah memahami bahwa: Jika dua segitiga mempunyai satu sudut sama besar maka perbandingan luasnya sama dengan perbandingan hasil kali panjang sisi-sisi yang mengapit sudut tersebut, maka pemecahan masalah di atas lebih dapat dipermudah.

Misal: ΔAPR dan ΔABC bersudut sama yaitu sudut A, Karena itu maka

$$\frac{\text{Luas}\,\Delta APR}{\text{Luas}\,\Delta ABC} = \frac{AP \times AR}{AB \times AC} = \frac{AP}{AB} \times \frac{AR}{AC} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}.$$

Hal yang sama dapat dikenakan terhadap segitiga-segitiga lainnya di luar ΔPQR di dalam ΔABC.

C. Kegiatan Belajar 3: Membelajarkan Siswa Memecahkan Masalah Kekongruenan dan Kesebangunan

Di samping memperhatikan Modul 1 KB 3 tentang Pembelajaran Pemecahan Masalah, berikut ini disampaikan beberapa catatan khusus dalam topik kekongruenan dan kesebangunan. Seperti pada modul sebelumnya, contoh pemecahan masalah yang dikemukakan di atas memuat hanya sedikit saja dari contoh penggunaan strategi yang dapat digunakan dalam memecahkan masalah yang disarankan pada Modul 1. Memilih alternatif strategi sering tidak dengan segera dapat diputuskan. Bahkan mungkin, mencobakan strategi dari intuisi yang muncul pun kadang dilakukan.

Contoh-contoh tersebut juga menggambarkan, bahwa "pertolongan" kadang atau bahkan sering diperlukan untuk membentuk situasi yang mendukung dan mengarah kepada konsep dasar yang hendak digunakan. Khususnya dalam kesebangunan, jika unsur kesejajaran belum muncul, pertolongan ke arah kesejajaran merupakan unsur yang penting dipertimbangkan adanya.

Beberapa contoh di atas lebih menekankan kepada penalaran yang digunakan dalam memecahkan masalah khususnya kekongruenan dan kesebangunan. Yang dituliskan dalam penalaran itu tentu saja tidak semua pemikiran alternatif yang dipikirkan. Alternatif-alternatif itu dapat muncul jika pemecah masalah dapat mengembangkan pertanyaan-pertanyaan terkait dengan masalah yang dihadapi. Hal ini dapat lebih berkembang hanya jika pemecah masalah terbiasa melakukannya.

Dalam memilih masalah yang yang terkait kekongruenan dan kesebangunan, sebaiknya dipilih masalah yang hanya memuat satu di antara kekongruenan dan kesebangunan, baru meningkat ke masalah yang memerlukan keduanya. Keterkaitan dengan kompetensi lainnya, dapat pula diberikan dalam masalah-masalah tersebut. Pada sisi lain, masalah kesejajaran dalam bangun datar, lebih khusus dalam segitiga, merupakan salah satu ciri kemungkinan teorema-teorema yang digunakan adalah teorema yang menyangkut kekongruenan dan kesebangunan. Artinya, jika ada kesejajaran dalam segitiga, salah satu alternatif yang dapat dipilih adalah membentuk situasi ada kesebangunan atau mungkin kekongruenan. Hal ini dapat dikemukakan melalui teknik bertanya kepada para siswa, supaya sekaligus siswa diajak untuk mengembangkan penalaran, mengapa dipilih strategi tertentu.

Hendaknya guru telah berhasil menyelesaikan masalahnya, sebelum memberikannya kepada para siswanya. Hendaknya guru juga mempunyai catatan tentang alternatif-alternatif yang mungkin dan menyiapkan pertanyaan-pertanyaan yang tidak langsung kepada penyelesaian, namun memberikan beberapa alternatif, sehingga siswa tidak sekedar mengikuti selera guru.

Kekongruenan dan kesebangunan dipelajari di kelas IX. Dengan demikian masalah yang disajikan di kelas dapat memuat bahan-bahan sebelumnya, seperti lingkaran dan Teorema Pythagoras. Jika fokusnya adalah kekongruenan atau kesebangunan masalah yang dipilih hendaknya tidak didominasi oleh rumitnya manipulasi aljabar.

D. Ringkasan

1. Dua buah bangun datar adalah kongruen jika dipenuhi dua syarat:
   a. setiap pasang sisi bersesuaian sama panjang, dan
   b. setiap pasang sudut bersesuaian sama besar.
2. Dua buah segitiga kongruen jika salah satu dari yang berikut ini dipenuhi:
   a. setiap pasang dari ketiga pasang sisi bersesuaian sama panjang (*s*, *s*, *s*),
   b. setiap pasang dari dua pasang sisi bersesuaian sama panjang dan sudut apitnya sama besar. (*s*, *sd*, *s*),
   c. satu pasang sisinya sama panjang dan setiap pasang dari kedua sudut yang berkaki sudut sisi tersebut sama besar (*sd*, *s*, *sd*), atau
   d. setiap pasang dari dua sudutnya sama besar dan panjang sisi di hadapan salah satu sudutnya sama besar. (*sd*, *sd*, *s*) dan kedua segitiga sejenis.
3. Berikut ini teorema-teorema kesebangunan dua segitiga
   a. Dua segitiga adalah sebangun jika panjang ketiga pasang sisi dua buah segitiga sebanding.
   b. Dua segitiga adalah sebangun jika ketiga pasang sudutnya sama besar
   c. Dua buah segitiga sebangun jika panjang ketiga sisi bersesuaian sebanding

d. Dua segitiga adalah sebangun jika dua sisi bersesuaian sebanding dan sudut apitnya sama besar

Jika dalam ΔABC, P pada $\overline{AC}$ dan Q pada $\overline{BC}$, dan $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ maka:

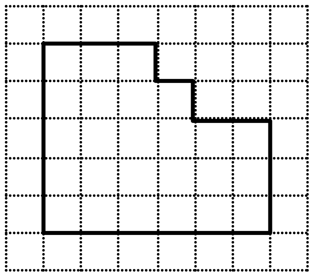
$$\frac{CP}{CA} = \frac{CQ}{CB} = \frac{PQ}{AB}$$

E. Latihan/Tugas

1. Pecahkanlah masalah berikut:
   a. Dua tiang masing-masing berukuran 2 m dan 8 m berdiri tegak di atas tanah datar. Puncak tiang pertama dihubungkan dengan kaki tiang kedua menggunakan seutas tali. Puncak tiang kedua dihubungkan dengan kaki tiang pertama menggunakan seutas tali. Tentukan ketinggian titik potong kedua tali dari permukaan tanah.

   b. Ruas garis $\overline{AB}$ adalah talibusur suatu lingkaran yang salah satu diameternya adalah ruas garis $\overline{BD}$ $(A \neq D)$. Titik E adalah proyeksi titik A pada $\overline{BD}$. Buktikanlah bahwa $BE \times BD = (BA)^2$.

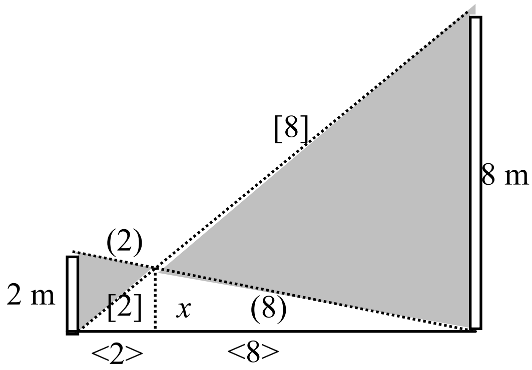
   c. Bagilah bangun pada papan berpetak di samping menjadi 5 (lima) bangun kongruen dengan menggambar ruas-ruas garis batasnya.



2. Deskripsikan bagaimana Anda membelajarkan siswa dalam memecahkan masalah dengan salah satu masalah di atas sebagai contoh masalah.

Selesaikan soal di atas sendiri lebih dahulu. Berikut ini petunjuk soal 1.

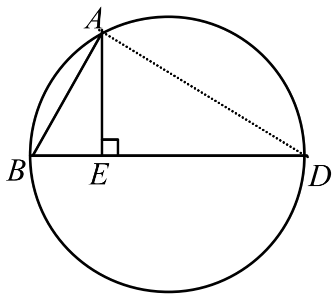
a. Gambarlah situasinya. Jarak antara kedua tiang tidak diberikan. Jadi gambarnya “bebas”



$x = \frac{2}{10} \times 8$ m atau $x = \frac{8}{10} \times 2$ m . Hasil sama, 1,6 m

b. Misal digunakan “ bergerak dari belakang” (dari tujuan pembuktian)

Pembahasan:



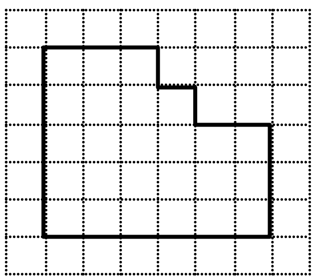
1) $BE \times BD = (BA)^2$ dapat dibuktikan jika dapat ditujukkan bahwa $\frac{BE}{BA} = \frac{BA}{BD}$.

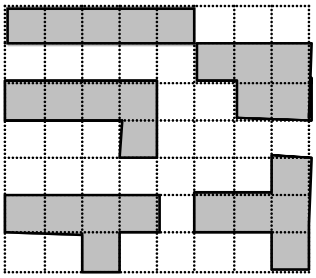
2) $\frac{BE}{BA} = \frac{BA}{BD}$ dapat dibuktikan jika dapat ditnunjukkan bahwa $\Delta BEA \sim \Delta BAD$. Dengan demikian perlu ditarik ruas garis $\overline{AD}$.

3) ΔBEA dapat dibuktikan sebangun dengan ΔBAD jika dapat ditunjukkan bahwa mereka memiliki syarat kesebangunan.

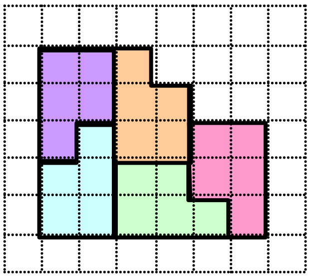
4) Dipenuhi karena $\angle B$ adalah sudut persekutuan dan $\angle BEA = \angle BAD$ keduanya siku-siku. ($\angle BAD = 90°$ karena menghadap busur setengah lingkaran). Kemudian disusun langkah pembuktiannya.

c. Luas bangun = 25 kotak satuan. Dibagi 5 sehingga luas masing-masing bagian adalah 5 satuan. Alternatif bangun yang luasnya 5 satuan adalah





dan beberapa bentuk lainnya. Setelah dipertimbangkan dan dicoba terapkan, alternatif hasilnya: →



Untuk soal 2, seperti pada modul sebelumnya, bekerjasamalah dengan rekan di MGMP tempat kegiatan Anda, untuk saling membantu memeriksa hasil pekerjaan/jawaban. Gunakanlah salah satu model penyekoran yang Anda pelajari pada Modul 1. Sebelum Anda memperoleh paling sedikit 75%, sebaiknya Anda berusaha mencobanya kembali. Dengan ketekunan pasti berhasil.

Daftar Pustaka

Krismanto, Al. 2004. *Paket Penggemar Matematika. Strategi Pemecahan Masalah Geometri SMP*. Yogyakarta: PPPG Matematika.

Krismanto, Al. dan Sumardyono. 2009. *Kapita Selekta Pembelajaran Geometri Datar Kelas VIII & IX di SMP*. Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

PENUTUP

PENUTUP

A. Rangkuman

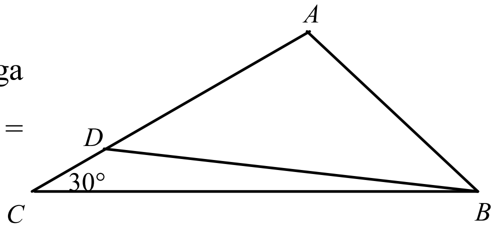
1. Suatu soal dikatakan masalah jika soal itu sesuai dengan tingkat kemampuan siswa, tidak segera dapat diselesaikan dengan algoritma atau prosedur rutin, dan memberikan menantang untuk mengerjakannya.
2. Suatu pertanyaan/soal akan menjadi masalah hanya jika pertanyaan itu menunjukkan adanya suatu tantangan yang tidak dapat dipecahkan dengan suatu prosedur rutin yang sudah diketahui si pelaku.
3. Empat langkah utama memecahkan masalah menurut Polya:
   b. Memahami masalah: Memahami yang diketahui dan yang ditanyakan,
   c. Membuat rencana strategi pemecahan masalahnya,
   d. Melaksanakan rencana, dan
   e. Memeriksa kembali jawaban yang diperoleh.
4. Membelajarkan siswa memecahkan masalah perlu dilakukan sesuai tingkat kemampuan siswa, mendorong/memotivasi siswa untuk tidak patah semangat, memberikan bimbingan dengan mengembangkan teknik bertanya untuk mengembangkan alternatif strategi, hindari dominasi guru, lebih menekankan partisipasi siswa dan mendorong alternatif strategi mereka.

B. Penilaian

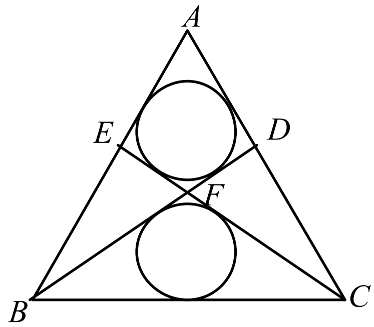
Berikut ini adalah soal akhir yang harus dikerjakan para peserta program BERMUTU di MGMP, sebagai bagian dari proses penilaian untuk mengetahui kemampuan pembaca modul dalam memahami modul ini.

1. Pecahkan masalah berikut

   a. Dalam ΔABC, titik D pada $\overline{AC}$ sehingga $AD = AB$, sedangkan $u\angle ABC - u\angle ACB = 30°$. Tentukanlah $u\angle CBD$



b. Di dalam suatu segitiga sama sisi ABC dengan panjang sisi $2a$, dua ruas garis $\overline{CE}$ dan $\overline{BD}$ menyinggung lingkaran berjari-jari r yang terletak di dalam segitiga. Lihat gambar. Nyatakanlah r dalam a.



2. Bagaimana Anda membelajarkan siswa Anda dalam penyelesaian masalah kedua di atas?

Selesaikan masalah di atas. Setelah itu, minta teman Anda untuk memeriksa dan menilainya. Bagi yang belum memperoleh sekor 75% atau lebih disarankan untuk mengulang kembali bagian-bagian yang dirasa belum dikuasai. Gunakanlah latihan-latihan yang tersedia untuk lebih memahami pemecahan masalah. Tulislah gagasan-gagasan Anda, apapun yang Anda pikirkan ketika mencari alternatif strategi. Jika sudah, periksa kembali, buanglah bagian yang tidak relevan dengan arah tujuan yang ingin dicapai dalam pemecahan masalah tersebut. Jika demikian, maka Anda memiliki banyak alternatif dalam membelajarkan siswa Anda untuk memiliki kemampuan memecahkan masalah.

Jika digunakan cara penyekoran secara holistik (lihat Modul 1), maka alternatif penyekoran terhadap pekerjaan pengguna modul antara lain sebagai berikut.

Untuk Soal 1a.

Sekor 4 diberikan kepada yang menjawab lengkap dan benar, dan telah menandai ruas garis yang sama dan sudut yang sama, meskipun ungkapannya dapat dengan cara selain yang dikemukakan di atas.

Sekor 3 diberikan kepada yang telah menggambar dengan lengkap, tetapi mungkin salah satu dari yang berikut terjadi

(1) gambar tidak dilengkapi dengan menandai ruas garis yang sama panjang dan sudut yang sama besar,
(2) belum selesai substitusi (*) dan (**) atau “slip” dalam substitusi,
(3) sudah substitusi (*) dan (**) tetapi salah
(4) pengerjaannya benar tetapi terlalu meloncat-loncat atau kurang lengkap.

Sekor 2 diberikan kepada yang menjawab dengan satu atau dua kekurangan pada skor 3

Sekor 1 diberikan kepada salah satu dari:

(1) yang hanya sampai menggambar lengkap saja berikut menandai sudut yang sama besar dan ruas garis yang sama panjang

(2) tanpa melengkapi gambar, tetapi sudah memulai pembahasan dengan langkah menuju jawaban benar.

Sekor 0 diberikan kepadayang tidak menjawab atau menulisakan jawaban yang tidak relevan dengan masalahnya.

Untuk Soal 1b.

Sekor 4 diberikan kepada yang menjawab lengkap dan benar, meskipun ungkapannya dapat dengan cara selain yang dikemukakan di atas.

Sekor 3 diberikan kepada yang telah menggambar dengan lengkap, tetapi mungkin salah satu dari yang berikut terjadi

(1) belum selesai menyatakan hubungan unsur-unsurnya.

(2) sudah selesai menyatakan hubungan unsur-unsurnya.tetapi ada sedikit kesalahan

(3) pengerjaannya benar tetapi terlalu meloncat-loncat atau kurang lengkap.

Sekor 2 diberikan kepada yang menjawab dengan 2 kekurangan pada skor 3

Sekor 1 diberikan kepada salah satu dari:

(1) yang hanya sampai menggambar lengkap saja,

(2) tanpa melengkapi gambar, tetapi sudah memulai pembahasan dengan langkah menuju jawaban benar.

Sekor 0 diberikan kepadayang tidak menjawab atau menulisakan jawaban yang tidak relevan dengan masalahnya.

Para pembaca hendaknya memotivasi dirinya sendiri dan siswanya untuk belajar memecahkan masalah matematika dengan tidak merasa tertekan. Mulailah dengan masalah sederhana, karena masalah tidak harus sulit atau berbelit-belit. Memilih soal pun merupakan salah satu masalah bagi yang belum terbiasa. Keberhasilan hanya akan dicapai jika ada kemauan untuk memulai dan mengembangkan. Kemampuan tersebut akan sangat berguna baik di kehidupan sehari-hari maupun di dalam kehidupan kita. Modul ini merupakan pengantar bagi Anda untuk mau berlaltih dan belajar memecahkan masalah. Selamat berlatih.

Berikut ini adalah daftar simbol yang digunakan pada modul ini.

Lambang	Membaca/artinya
$n \in N$	n anggota himpunan bilangan asli (N = himpunan bilangan asli)
$\parallel$	sejajar
#	sama dan sejajar
$\perp$	tegaklurus
$\overline{AB}$	ruas garis AB
$\overrightarrow{AB}$	sinar AB
$\overleftrightarrow{AB}$	garis AB (panjang tak berhingga)
AB	panjang $\overline{AB}$; $AB = 2$ cm maksudnya panjang ruas garis AB 2 cm.
$\angle BAC$	sudut BAC
$u\angle BAC$ $u\angle A$	ukuran (besar) sudut BAC ukuran (besar) sudut A
ΔABC	segitiga ABC
$\neq$	tidak sama dengan
$\cong$	kongruen
$\sim$	sebangun

LAMPIRAN

LAMPIRAN

Petunjuk Penyelesaian Tugas Akhir

1. Memecahkan masalah

   a. $u\angle CBD = u\angle ABC - u\angle ABD$

   Karena $AD = AB \Rightarrow u\angle ABD = u\angle ADB$

   Dengan substitusi diperoleh : $u\angle CBD = u\angle ABC - u\angle ADB$ (*)

   sedangkan $u\angle ADB = u\angle CBD + u\angle C$ (**)

   Dari (*) dan (**) diperoleh: $u\angle CBD = u\angle ABC - (u\angle CBD + u\angle C)$

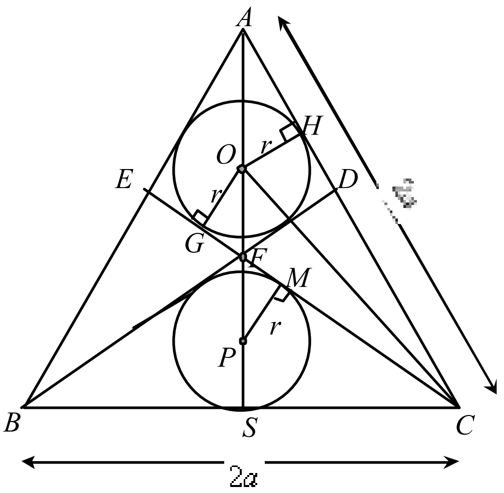
   (lanjutkan) diperoleh $u\angle CBD = 15°$

   b. $FG = FM \Rightarrow L_{\Delta OGF} = L_{\Delta PMF}$

   $L_{\Delta ASC} = L\Delta_{AOH} + (2L_{\Delta COH} - L_{\Delta OGF}) + 2L_{\Delta CPM} + L_{\Delta PMF}$

   $\Leftrightarrow L_{\Delta ASC} = L\Delta_{AOH} + 2L_{\Delta COH} + 2L_{\Delta CPM}$

   Masukkan nilai r dan a kemudian sederhanakan, diperoleh: $r = (\sqrt{3} - \sqrt{2})a$



   Contoh penyelesaian di atas adalah salah satu alternatif. Alternatif lain misalnya menghubungkan panjang $\overline{AS}$ yang dinyatakan dengan r dan dengan a ($AS = a\sqrt{3}$).

2. Untuk soal nomor 2, diskusikan dengan teman Anda di MGMP kriteria kebenaran jawaban yang ada.

PPPPTK MATEMATIKA

Jalan Kaliurang Km. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, Yogyakarta
Kotak Pos 31 YKBS YOGYAKARTA 55281
Telepon (0274) 881717, Faksimili 885752
Web site: p4tkmatematika.com E-mail: p4tkmatematika@yahoo.com