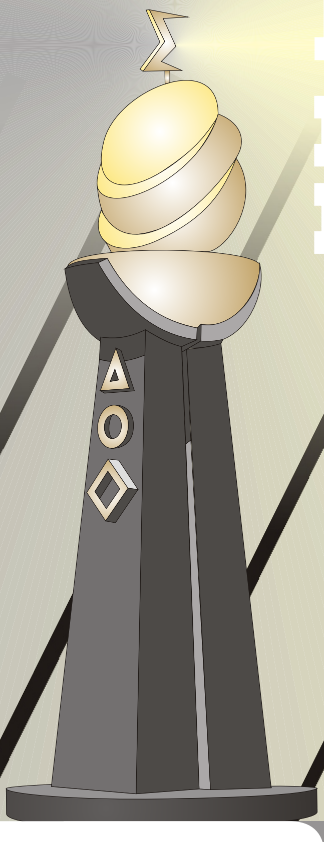
SMP

BERMUTU

Better Education Through Reformed Management and
Universal Teacher Upgrading

KAPITA SELEKTA
PEMBELAJARAN BILANGAN
DI KELAS VII DAN IX SMP



DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK
DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK
DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

Modul Matematika SMP Program BERMUTU

KAPITA SELEKTA PEMBELAJARAN BILANGAN DI KELAS VII DAN IX SMP

Penulis:
Adi Wijaya
Wiworo

Penilai:
Moch Chotim
Muh. Isnaeni

Editor:
Agus Dwi Wibawa

Lay out:
Victor Deddy Kurniawan

Departemen Pendidikan Nasional
Direktorat Jenderal Peningkatan Mutu Pendidik dan Tenaga Kependidikan
Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika
2009

KATA PENGANTAR

Puji syukur kita panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa karena atas bimbingan-Nya akhirnya PPPPTK Matematika dapat mewujudkan dua puluh judul modul mata pelajaran matematika SD (sembilan judul) dan SMP (sebelas judul) untuk program BERMUTU. Modul ini akan dimanfaatkan oleh para guru dalam kegiatan di KKG dan MGMP. Kami mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada semua pihak yang telah membantu terwujudnya modul-modul tersebut.

Penyusunan modul melibatkan beberapa unsur yaitu dari PPPPTK Matematika, LPTK, Guru SD dan Guru Matematika SMP. Proses penyusunan modul diawali dengan *workshop* yang menghasilkan kesepakatan tentang judul, penulis, penekanan isi (tema) modul, sistematika penulisan, garis besar isi atau muatan tiap bab, dan garis besar isi saran cara pemanfaatan tiap judul modul di KKG dan MGMP. Selanjutnya *workshop* dilanjutkan dengan rapat kerja teknis penulisan dan penilaian *draft* modul yang kemudian diakhiri dengan rapat kerja teknis finalisasi modul yang fokus pada *editing* dan *layouting* modul.

Semoga dua puluh judul modul tersebut dapat bermanfaat secara optimal dalam memfasilitasi kegiatan para guru SD dan SMP di KKG dan MGMP, khususnya KKG dan MGMP yang mengikuti program BERMUTU sehingga dapat meningkatkan kinerja para guru dan kualitas pengelolaan pembelajaran matematika di SD dan SMP.

Tidak ada gading yang tak retak. Saran dan kritik yang membangun terkait modul dapat disampaikan ke PPPPTK Matematika dengan alamat p4tkmatematika@yahoo.com atau alamat surat: PPPPTK Matematika, Jalan Kaliurang Km 6 Condongcatur, Depok, Sleman, D.I. Yogyakarta 55281, atau Kotak Pos 31 Yk-Bs, atau Telpon (0274) 881717, 885725 atau nomor faksimili: (0274) 885752.

Sleman, Oktober 2009

a.n. Kepala PPPPTK Matematika

Kepala Bidang Program dan Informasi

Winarno, M.Sc.

NIP 195404081978101001

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Standar isi mata pelajaran matematika untuk jenjang SMP/MTs memuat 17 standar kompetensi dan 59 kompetensi dasar. Dari 17 standar kompetensi tersebut tiga di antaranya termasuk dalam ruang lingkup bilangan yang dijabarkan lagi dalam sembilan kompetensi dasar. Dua kompetensi dasar diberikan di kelas VII semester 1 yaitu tentang operasi hitung bilangan bulat dan pecahan sedangkan tujuh kompetensi dasar lagi diberikan di kelas IX semester 2 yaitu tentang bilangan berpangkat, bentuk akar, barisan bilangan dan deret bilangan.

Dari data hasil analisis ujian nasional tahun 2005 dan 2006 untuk pelajaran matematika SMP terlihat bahwa penguasaan siswa secara nasional terhadap materi yang berkaitan dengan ruang lingkup bilangan masih kurang memuaskan. Data persentase penguasaan materi soal matematika pada ujian nasional tahun 2005 dan 2006 adalah sebagai berikut:

TAHUN	KEMAMPUAN YANG DIUJI	PERSENTASE
2005 Bahan Ujian Paket No: 01, 02, 03	Menyelesaikan soal dengan operasi hitung bilangan bulat	58,97
	Menentukan KPK atau FPB	42,31
	Menyelesaikan soal cerita dengan menggunakan FPB	50,20
	Menentukan suku ke-*n* dari barisan bilangan	56,29
	Menyelesaikan soal cerita yang berkaitan dengan barisan bilangan	57,31
2005 Bahan Ujian Paket No: 11, 12	Menggunakan operasi hitung bilangan bulat	72,10
	Menyelesaikan operasi bilangan pecahan	72,68
	Menggunakan operasi hitung bilangan pecahan	52,45

TAHUN	KEMAMPUAN YANG DIUJI	PERSENTASE
	Menyelesaikan soal cerita dengan operasi hitung bilangan	56,39
	Menentukan unsur-unsur dalam pola bilangan	81,22
	Menyelesaikan soal cerita dengan menggunakan deret aritmetika	78,52
2006 Bahan Ujian Paket No. 01	Menentukan hasil operasi hitung bilangan pecahan	79,15
	Menghitung kuadrat dan akar kuadrat dari suatu bilangan	71,16
	Menyelesaikan soal tentang pola bilangan	68,68
Tahun Ajaran 2007/2008	Hasil penjumlahan/pengurangan kuadrat dan akar pangkat tiga suatu bilangan	72,59
	Menyelesaikan soal cerita dengan operasi hitung bilangan	70.97
	Mengurutkan bilangan pecahan dari kecil ke besar dan sebaliknya	66,89
	Menentukan hasil operasi hitung bilangan pecahan	75,94
	Mampu menentukan pola bilangan berikutnya dari pola yang diketahui	81,47
	Menentukan suku ke–*n* dari suatu barisan bilangan	79,03

Sumber: CD analisis hasil UN tahun 2005, 2006, dan 2008

Melihat kenyataan dari data tersebut, maka sebagai seorang guru perlu merefleksi kembali berdasarkan pengalamannya kira-kira apa yang telah terjadi di kelas selama ini. Beberapa pertanyaan yang mungkin dapat dipergunakan sebagai bahan renungan kembali adalah: Bagaimana cara/teknik penyampaian materi pada ruang lingkup bilangan yang selama ini telah diberikan ke siswa? Bagaimana cara memotivasi (membuat siswa senang) dalam belajar pada ruang lingkup bilangan? Bagaimana dengan kemampuan/input siswanya? Bagaimana dengan sarana (media) yang selama ini digunakan? dan sebagainya.

Meskipun banyak faktor yang dimungkinkan dapat mempengaruhi keberhasilan belajar siswa (prestasi belajar), dalam modul ini hanya akan difokuskan pada beberapa teknik atau cara penyampaian materi pada kompetensi dasar yang berkaitan dengan ruang lingkup bilangan kelas VII dan IX yang masih sering menjadi permasalahan di lapangan saja. Untuk permasalahan pembelajaran bilangan pada kelas VII diambil dari modul Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika dengan judul Permasalahan Pembelajaran Bilangan Kelas VII SMP/MTs dan Alternatif Pemecahannya. Adapun permasalahan pembelajaran bilangan pada kelas IX sebagian diambil dari modul Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika dengan judul Teknik Penentuan Rumus Suku ke-*n* Barisan Bilangan Polinom Kelas IX SMP. Hal ini dikarenakan permasalahan-permasalahan tersebut yang selama ini paling sering ditanyakan oleh para guru peserta diklat.

B. Tujuan

Modul ini disusun sebagai salah satu bahan referensi bagi para guru matematika SMP dalam kegiatan di MGMP Matematika pada ruang lingkup bilangan kelas VII dan IX. Di samping itu modul ini juga dapat digunakan sebagai salah satu bahan untuk pengembangan selanjutnya setelah selesai mengikuti kegiatan. Sehingga diharapkan dapat lebih meningkatkan kompetensi guru dalam membelajarkan matematika khususnya pada ruang lingkup bilangan.

C. Ruang Lingkup

Permasalahan pembelajaran bilangan yang diuraikan dalam modul ini akan difokuskan pada bagaimana guru memfasilitasi anak agar mampu menyelesaikan permasalahan yang sering muncul pada standar kompetensi yang tertuang dalam standar isi dalam ruang lingkup bilangan kelas VII dan IX. Standar kompetensi tersebut adalah: (1) memahami sifat-sifat operasi hitung bilangan dan penggunaannya dalam pemecahan masalah yang tertuang dalam dua kompetensi dasar yaitu (a) melakukan operasi hitung bilangan bulat dan pecahan dan (b) menggunakan sifat-sifat operasi hitung bilangan bulat dan pecahan dalam pemecahan masalah; (2) memahami sifat-sifat bilangan berpangkat dan bentuk akar serta penggunaannya dalam pemecahan masalah sederhana yang tertuang dalam tiga kompetensi dasar yaitu: (a) sifat-sifat bilangan berpangkat dan bentuk akar, (b) melakukan operasi aljabar yang melibatkan bilangan berpangkat bulat dan bentuk akar, dan (c) memecahkan masalah sederhana yang berkaitan dengan bilangan berpangkat dan bentuk akar; (3) memahami barisan dan deret bilangan serta penggunaannya dalam pemecahan masalah yang tertuang dalam empat kompetensi dasar yaitu: (a) menentukan pola barisan bilangan sederhana, (b) menentukan suku ke-n barisan aritmetika dan barisan geometri, (d) menentukan jumlah n suku pertama deret aritmetika dan deret geometri, dan (e) memecahkan masalah yang berkaitan dengan barisan dan deret.

D. Cara Pemanfaatan Modul

Modul ini digunakan pada kegiatan MGMP sebagai salah satu bahan referensi bagi para guru matematika SMP dalam berdiskusi tentang permasalahan pembelajaran bilangan di kelas VII dan IX. Modul ini diperkirakan dapat selesai dipelajari secara kelompok di MGMP dalam waktu 7 jam tatap muka @ 45 menit. Apa yang telah dituliskan dalam modul ini hanyalah beberapa contoh alternatif penyelesaian permasalahan yang ada sehingga diharapkan Bapak/Ibu guru dapat menemukan alternatif lain atau mengembangkannya sendiri.

Alternatif cara memanfaatkan modul ini di MGMP sebagai berikut.

1. Bacalah masing-masing kegiatan belajar dengan seksama agar dapat menyelesaikan tugas-tugas dalam modul dengan baik. Pada setiap kegiatan belajar diawali dengan pertanyaan dan dilanjutkan dengan uraian materi.
2. Sebelum membaca uraian materi pada tiap kegiatan belajar, Anda diharapkan terlebih dahulu mencermati dan mencoba untuk merenungkan atau mendiskusikan jawaban dari pertanyaan-pertanyaan yang terdapat pada awal kegiatan belajar. Selanjutnya barulah Anda membaca uraian materi sebagai tambahan referensi dalam memperoleh jawaban.
3. Setelah Anda merasa cukup paham isi uraian materi, jawablah atau selesaikan tugas yang ada pada akhir bab sebagai latihan.
4. Untuk mengetahui pencapaian pemahaman Anda terhadap uraian pada masing-masing kegiatan belajar, Anda dapat mencocokkan tugas yang diberikan dengan kunci jawaban.

5. Bila Anda masih merasa perlu melakukan klarifikasi terhadap isi modul ini, berdiskusilah dengan teman seprofesi di sekolah atau di MGMP, atau berkonsultasi dengan nara sumber, misalnya kepala sekolah dan pengawas Anda atau instruktur/guru inti di MGMP Anda.
6. Bila timbul permasalahan yang perlu dibicarakan lebih lanjut dengan penulis atau dengan PPPTK Matematika berkait isi modul ini, silahkan hubungi alamat email PPPPTK Matematika: *p4tkmatematika@yahoo.com* atau alamat surat: PPPPTK Matematika, Kotak Pos 31 Yk-Bs, Jalan Kaliurang Km 6 Condongcatur, Depok, Sleman, Yogyakarta 55281, Telpon (0274) 881717, 885725, 885752 pesawat 253. Alamat faksimili: (0274) 885752 atau alamat email penulis: *adisleman@yahoo.com* dan *percussionline@yahoo.com*

BAB II
PERMASALAHAN PEMBELAJARAN PADA RUANG LINGKUP BILANGAN KELAS VII

Pada standar isi untuk mata pelajaran matematika SMP/MTs, memahami sifat-sifat operasi hitung bilangan dan penggunaannya dalam pemecahan masalah merupakan standar kompetensi pertama kali yang diberikan kepada siswa SMP Kelas VII semester 1. Di akhir kegiatan pembelajaran pada standar kompetensi ini siswa harus menguasai dua kompetensi dasar yaitu (1) melakukan operasi hitung bilangan bulat dan pecahan, dan (2) menggunakan sifat-sifat operasi hitung bilangan bulat dan pecahan dalam pemecahan masalah.

Permasalahan pembelajaran bilangan di sekolah dan alternatif pemecahannya untuk standar kompetensi tersebut di atas akan disajikan dalam bentuk tanya jawab. Beberapa permasalahan yang dibahas akan difokuskan pada permasalahan yang sering disampaikan oleh para peserta diklat. Jawaban dari masing-masing permasalahan hanya akan ditawarkan salah satu model alternatifnya saja, Anda diharapkan dapat mengembangkan atau mendiskusikan alternatif jawaban lainnya.

Permasalahan pembelajaran bilangan yang diuraikan dalam bab ini akan difokuskan pada bagaimana guru memfasilitasi anak agar mampu menyelesaikan permasalahan yang sering muncul pada standar kompetensi yang tertuang dalam standar isi dalam ruang lingkup bilangan kelas VII. Standar kompetensi tersebut adalah memahami sifat-sifat operasi hitung bilangan dan penggunaannya dalam pemecahan masalah yang tertuang dalam dua kompetensi dasar yaitu (a) melakukan operasi hitung bilangan bulat dan pecahan dan (b) menggunakan sifat-sifat operasi hitung bilangan bulat dan pecahan dalam pemecahan masalah.

Setelah mempelajari Bab II ini, Anda diharapkan mampu memberikan beberapa alternatif pembelajaran berkaitan dengan kompetensi dasar: (i) melakukan operasi hitung bilangan bulat dan pecahan, dan (ii) menggunakan sifat-sifat operasi hitung bilangan bulat dan pecahan dalam pemecahan masalah. Untuk membantu Anda agar menguasai kemampuan tersebut, dalam bab ini disajikan pembahasan yang dikemas dalam dua kegiatan belajar (KB) yang diikuti tugas sebagai latihan.

Kegiatan Belajar 1 **:** Melakukan Operasi Hitung Bilangan Bulat dan Pecahan.

Kegiatan Belajar 2 : Menggunakan Sifat-Sifat Operasi Hitung Bilangan Bulat dan Pecahan Dalam Pemecahan Masalah.

Cermati uraian pada masing-masing kegiatan belajar dan kemudian selesaikan latihan yang ada di akhir bab ini. Bila Anda masih ragu terhadap jawaban latihan Anda atau ada hal yang perlu diklarifikasi, berdiskusilah dengan peserta lain atau narasumber/instruktur Anda. Setelah itu lakukan refleksi terkait pemahaman Anda terhadap permasalahan pembelajaran bilangan kelas VII.

A. Kegiatan Belajar 1: Melakukan Operasi Hitung Bilangan Bulat dan Pecahan

1. Bagaimana cara mengatasi siswa yang masih sering keliru (kurang paham) dalam menyelesaikan soal operasi penjumlahan dan pengurangan khususnya jika kedua bilangannya berbeda tanda (bilangan positif dan negatif)?

   Kalau dilihat dari subtansi pertanyaannya, sebetulnya materi ini sudah diberikan kepada siswa sejak di bangku SD. Namun demikian, pertanyaan ini hampir setiap saat disampaikan oleh peserta diklat matematika SMP. Siswa yang masih sering salah dalam melakukan soal operasi penjumlahan dan pengurangan khususnya jika kedua bilangannya berbeda tanda. Salah satu penyebabnya dimungkinkan karena pemahaman konsepnya masih lemah. Oleh karena itu ada baiknya guru perlu mengulang kembali konsep tersebut terutama untuk yang berbeda tanda.

   Salah satu alternatif yang dapat digunakan dalam membelajarkan konsep penjumlahan dan pengurangan tersebut adalah dengan menggunakan pendekatan pola bilangan, pendekatan garis bilangan, dan pendekatan muatan.

a. Operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat dengan menggunakan pendekatan pola bilangan.

Konsep operasi penjumlahan dan pengurangan yang barangkali dimiliki dan masih melekat dalam ingatan siswa kelas VII paling tidak ada dua hal. Pertama, operasi penjumlahan dua buah suku adalah menambahkan atau menggabungkan bilangan suku ke-2 ke suku ke-1. Kedua, operasi pengurangan dua buah suku adalah mengurangi atau mengambil bilangan suku ke-1 dengan suku ke-2. Kedua hal tersebut biasanya tidak bermasalah bagi siswa jika kedua suku yang dijumlahkan adalah bilangan bulat positif dan untuk operasi pengurangan selain bilangan positif juga suku ke-1 lebih besar dari suku ke-2. Namun demikian, jika suku ke-1 dan suku ke-2 berbeda tanda siswa sudah sering mengalami kendala.

Untuk membantu mengatasi dalam menangani siswa yang masih mempunyai kendala seperti tersebut di atas, salah satu alternatif yang dapat dicobakan adalah dengan menggunakan pendekatan pola bilangan. Sebagai contoh, perhatikan pola bilangan yang terbentuk dari hasil operasi penjumlahan dan pengurangan di bawah ini:

	...	...		...	...
(a)	$4 + 5$	$= 9$	(i)	$4 - 3$	$= 1$
(b)	$4 + 4$	$= 8$	(ii)	$4 - 2$	$= 2$
(c)	$4 + 3$	$= 7$	(iii)	$4 - 1$	$= 3$
(d)	$4 + 2$	$= 6$	(iv)	$4 - 0$	$= 4$
(e)	$4 + 1$	$= 5$	(v)	$4 - (-1)$	$= 5$
(f)	$4 + 0$	$= 4$	(vi)	$4 - (-2)$	$= 6$
(g)	$4 + (-1)$	$= 3$	(vii)	$4 - (-3)$	$= 7$
(h)	$4 + (-2)$	$= 2$	(viii)	$4 - (-4)$	$= 8$
(i)	$4 + (-3)$	$= 1$	(ix)	$4 - (-5)$	$= 9$
	...	...		...	...

Dari fakta yang baru saja diperoleh, ditemukan suatu pola. Siswa diminta memperhatikan/mengamati hubungan antara soal (a) dengan (ix), (b) dengan (viii), (c) dengan (vii), (d) dengan (vi), dan seterusnya. Dari hasil pengamatan tersebut diharapkan dapat membantu siswa dalam mengatasi pertanyaan yang sering timbul, yaitu mengapa pengurangan dengan bilangan negatif teknis pengerjaannya sama saja dengan dijumlahkan saja. Disamping itu, pola di atas juga dapat digunakan untuk mengantarkan/menunjukkan ke siswa bahwa operasi pengurangan teknis pengerjaannya dapat diganti dengan operasi penjumlahan dengan lawannya.

b. Operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat dengan menggunakan pendekatan garis bilangan.

Ada dua model pendekatan garis bilangan yang sering digunakan di lapangan. Kedua model tersebut adalah sebagai berikut:

1) Pendekatan Garis Bilangan Model 1 (maju-mundur)

Pendekatan ini dipergunakan dengan terlebih dahulu menggunakan aturan kesepakatan sebagai berikut:

a. Bilangan bulat
- positif → maju
- nol → diam
- negatif → mundur

b. Operasi
- tambah → terus
- kurang → balik arah

c. Posisi peraga : menghadap ke kanan

Karena menggunakan istilah maju, mundur, terus, dan berbalik arah, maka alat peraga yang sering digunakan dapat berupa boneka/wayang, orang sungguhan (siswa) atau peraga lainnya.

Contoh penggunaan dari pendekatan ini adalah sebagai berikut:
Pada pendekatan ini menggunakan kesepakatan bahwa suku pertama sebagai titik awal posisi peraga dan peraga yang digunakan menghadap ke kanan.

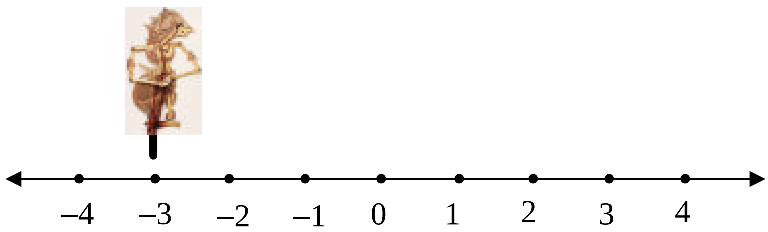
Contoh: $-3 - (-5) = ...$

Kesepakatan:

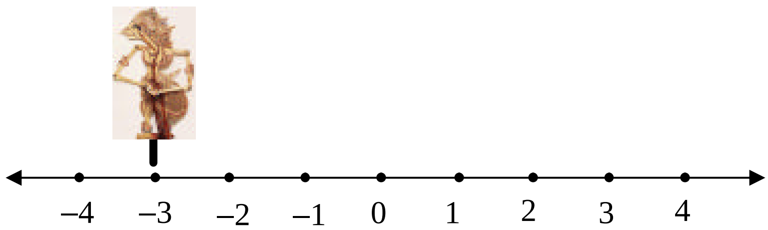
$-3 - (-5)$ artinya:
(i) posisi awal di titik -3 , menghadap ke kanan
(ii) $-$ (dikurangi) $\Rightarrow$ balik arah
(iii) -5 $\Rightarrow$ mundur lima langkah

Ilustrasi peragaan pertahap sebagai berikut:

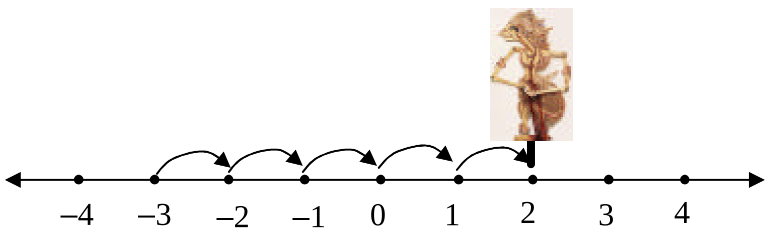
(i) posisi awal di titik -3 , menghadap ke kanan



(ii) $-$ (dikurangi) $\Rightarrow$ balik arah



(iii) -5 $\Rightarrow$ mundur lima langkah



Posisi akhir wayang ada pada bilangan 2. Jadi $-3 - (-5) = 2$.

Dari contoh di atas, kelebihan dan kelemahannya diantaranya adalah sebagai berikut:

Kelebihan: (i) dapat digunakan secara langsung untuk menunjukkan (mengkonkretkan) operasi pengurangan dengan bilangan negatif, (ii) dapat melibatkan siswa untuk diajak praktek langsung (siswa sekaligus sebagai peraganya) sehingga siswa menjadi lebih senang karena terlibat aktif dan pelajarannya menjadi menarik.

Kelemahan: permasalahan yang dimungkinkan terjadi adalah terbaliknya dalam menggunakan kesepakatan antara bilangan negatif dengan operasi pengurangan. Dengan kata lain, siswa dimungkinkan terbalik (bingung) dalam menentukan mundur atau berbalik arah untuk yang bertanda negatif (baik itu bilangan negatif atau tanda operasi pengurangan). Hal ini tentu saja secara psikologis akan menambah beban siswa karena sewaktu akan menyelesaikan operasi penjumlahan atau pengurangan, juga harus mengingat-ingat kesepakatannya agar tidak terbalik (khususnya mundur dengan balik arah).

2) Pendekatan Garis Bilangan Model 2 (anak panah)

Pendekatan garis bilangan ini menggunakan kesepakatan bahwa:

a) Operasi yang digunakan adalah operasi penjumlahan. Jika ditemui operasi pengurangan maka teknisnya harus diubah terlebih dulu menjadi operasi penjumlahan dengan lawannya. Operasi penjumlahan artinya dilanjutkan.
b) Suku pertama merupakan titik yang pertama kali diletakkan pada garis bilangan (sebagai titik pangkal anak panah) kemudian baru dilanjutkan dengan suku kedua sesuai dengan jenis bilangannya. Jika suku kedua bilangan positif, gambar anak panah ke kanan sejauh besaran bilangannya. Jika suku kedua bilangan negatif, gambar anak panah ke kiri sejauh besaran bilangannya.
c) Hasil akhir dari operasi dapat dilihat dari bilangan yang tepat di bawah ujung mata panah tersebut.

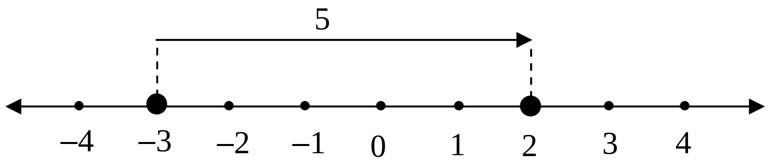
Contoh:

(1) $-3 + 5 = ...$

Penyelesaian:

(a) -3 sebagai suku pertama sehingga sebagai titik awal (titik pangkal panah),

(b) ditambah 5, artinya dilanjutkan ke arah kanan sejauh 5 satuan,



(c) dari garis bilangan di atas tampak bahwa bilangan yang tepat di bawah ujung mata panah adalah 2.

Sehingga $-3 + 5 = 2$.

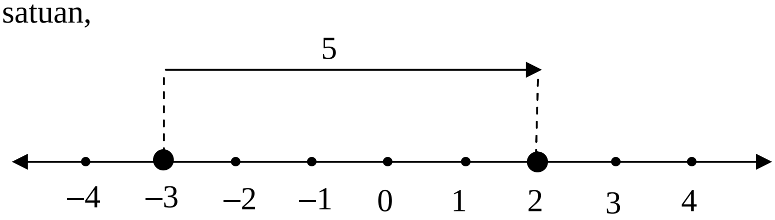
(2) $-3 - (-5) = ...$

Penyelesaian:

Karena operasinya pengurangan maka perlu diubah dulu menjadi penjumlahan dengan lawannya, sehingga soal menjadi $-3 + 5 = ...$

(a) -3 sebagai suku pertama sehingga sebagai titik awal (titik pangkal panah),

(b) ditambah 5, artinya dilanjutkan ke arah kanan sejauh 5 satuan,



(c) dari garis bilangan di atas tampak bahwa bilangan yang tepat di bawah ujung mata panah adalah 2.

Jadi $-3 - (-5) = -3 + 5 = 2$.

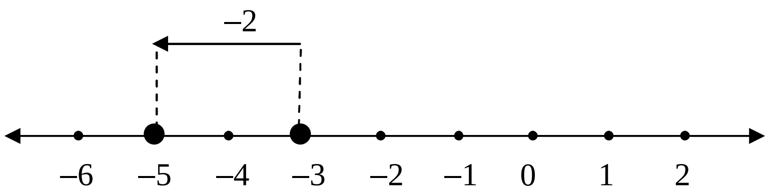
(3) –3 – 2 = ...

Penyelesaian:

Karena operasinya pengurangan maka perlu diubah dulu menjadi penjumlahan dengan lawannya, sehingga soal menjadi –3 + (–2) = ...

(a) –3 sebagai suku pertama sehingga sebagai titik awal (titik pangkal panah),

(b) ditambah (–2), artinya dilanjutkan ke arah kiri sejauh 2 satuan,



(c) dari garis bilangan di atas tampak bahwa bilangan yang tepat di bawah ujung mata panah adalah –5 sehingga –3 – 2
= –3 + (–2)
= –5.

Dari contoh (1), (2), dan (3) di atas beberapa kelebihan dan kelemahannya diantaranya adalah sebagai berikut:

Kelebihan: (1) secara psikologis tidak akan menambah beban siswa karena sewaktu akan menyelesaikan operasi penjumlahan atau pengurangan tidak perlu mengingat-ingat kesepakatannya agar tidak terbalik seperti kalau menggunakan model maju mundur, (2) media (peraga) yang dipergunakan lebih sederhana.

Kelemahan: (1) tidak dapat digunakan secara langsung untuk menunjukkan (mengkonkritkan) operasi pengurangan dengan bilangan negatif seperti pada model maju mundur, hal ini dikarenakan siswa harus mengubah terlebih dahulu operasi pengurangan menjadi operasi penjumlahan dengan lawannya, (2) tidak dapat melibatkan siswa untuk diajak praktik langsung (siswa sekaligus sebagai peraganya).

Penggunaan pendekatan garis bilangan pada operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat pada prinsipnya adalah penggunaan media, yang dimaksudkan sebagai jembatan dalam membantu memudahkan siswa memahami konsep penjumlahan dan pengurangan. Untuk butir ini model garis bilangan dengan anak panah mungkin lebih tepat karena disamping lebih sederhana (simpel) juga tidak terlalu membebani siswa dalam mengingat aturan penggunaannya. Disamping itu penggunaan pendekatan garis bilangan sebagai media juga perlu memperhatikan kembali bahwa salah satu fungsi media adalah memudahkan sesuatu yang abstrak (sulit ditangkap siswa) menjadi lebih konkrit (mudah ditangkap siswa). Untuk butir ini model garis bilangan maju-mundur mungkin lebih tepat karena dapat dipergunakan untuk menunjukkan (mengkonkritkan) operasi pengurangan dengan bilangan negatif.

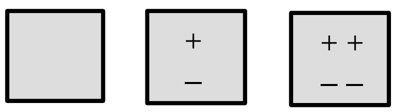
c. Operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan bulat dengan pendekatan muatan.

Pendekatan muatan ini menggunakan kesepakatan sebagai berikut.

1) Bilangan nol

Diwakili dengan muatan yang kosong atau muatan yang banyaknya unsur positif sama dengan banyaknya unsur negatif.

Contoh:

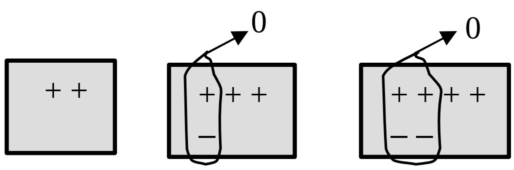


Ketiga muatan di atas mewakili bilangan 0.

2) Bilangan positif

Diwakili dengan muatan positif sebanyak bilangannya.

Contoh:

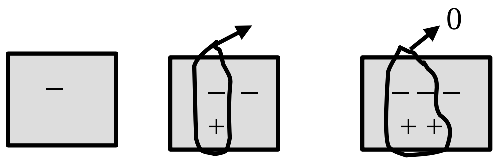


Ketiga muatan di atas mewakili bilangan 2.

3) Bilangan negatif

   Diwakili dengan muatan negatif sebanyak bilangannya

   Contoh:



   Ketiga muatan di atas mewakili bilangan –1.

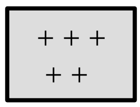
4) Operasi yang digunakan adalah operasi penjumlahan. Jika ditemui operasi pengurangan maka harus diubah terlebih dulu menjadi operasi penjumlahan dengan lawannya.
5) Operasi penjumlahan artinya muatan yang diwakili pada suku pertama ditambah/digabung dengan muatan pada suku kedua.
6) Hasil akhir dari operasi penjumlahan maupun pengurangan dapat dilihat dari banyaknya muatan hasil penjumlahan/penggabungan.

Contoh 1:

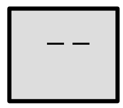
5 + (– 2) = ...

Penyelesaian:

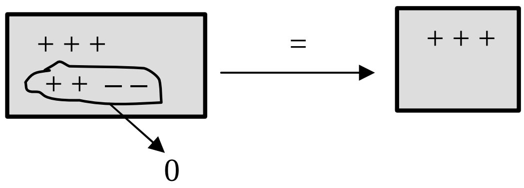
5 + (–2) artinya



ditambah/digabung dengan



hasilnya menjadi



Dari ilustrasi di atas diperoleh fakta 5 + (–2) = 3.

Contoh 2:

3 – 5 = ...

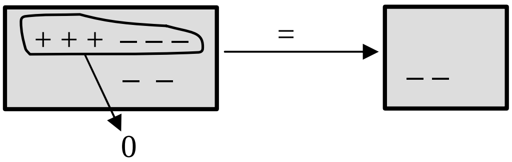
Penyelesaian:

Karena operasinya pengurangan maka perlu diubah dulu menjadi penjumlahan dengan lawannya, sehingga soal menjadi:

3 – 5 = 3 + (–5)

3 + (–5) artinya : $\boxed{+\ +\ +}$ ditambah/digabung dengan $\boxed{-\ -\ -\ \ -\ -}$

hasilnya menjadi



Dari ilustrasi di atas diperoleh fakta 3 – 5 = –2.

Di lapangan, model pendekatan muatan ini ada juga yang sering menggunakan dengan ilustrasi seperti hutang-piutang ataupun laki-laki – perempuan.

Ketiga model pendekatan yang telah diuraikan di atas merupakan alternatif-alternatif dalam membantu penanaman konsep ke siswa terhadap operasi penjumlahan dan pengurangan. Beberapa alternatif yang lain tentunya masih perlu terus dicari atau dikembangkan dalam rangka membantu pemahaman anak terhadap konsep penjumlahan dan pengurangan. Disamping itu, ketiga model pendekatan di atas dapat digunakan sebagai bahan referensi Anda dalam memilih, mengembangkan, dan menciptakan media yang akan digunakan. Sehingga diharapkan penggunaan media yang dipilih dapat membantu memperjelas/mempermudah siswa, dan seminimal mungkin siswa mengalami kendala/masalah dalam menggunakannya.

2. Bagaimana cara menjelaskan yang paling mudah ke siswa (dalam memberikan pemahaman) tentang sifat-sifat perkalian atau pembagian dua buah bilangan bulat?

   Pertanyaan di atas sering muncul pada waktu identifikasi permasalahan pembelajaran di kelas, yang dimaksud adalah kaitannya dengan mengapa bilangan positif dikalikan atau dibagi dengan bilangan negatif hasilnya menjadi bilangan negatif. Begitu juga untuk bilangan negatif dikalikan atau dibagi dengan bilangan negatif hasilnya menjadi bilangan positif. Beberapa alternatif yang dapat dipergunakan untuk menunjukkan sifat di atas diantaranya adalah:

a. Menggunakan pola bilangan

Langkah pertama kali yang dapat dilakukan untuk menghantarkan pemahaman siswa adalah diawali dengan memberikan perkalian dua buah bilangan positif kemudian mengajak siswa untuk mengamati pola yang terbentuk.

Contoh:

	...	...	
(i)	4×5	$= 20$	turun 4
(ii)	4×4	$= 16$	turun 4
(iii)	4×3	$= 12$	turun 4
(iv)	4×2	$= 8$	turun 4
(v)	4×1	$= 4$	$\vdots$
(vi)	4×0	$= 0$	
(vii)	$4 \times (-1)$	$= -4$	
(viii)	$4 \times (-2)$	$= -8$	
(ix)	$4 \times (-3)$	$= -12$	
	$\vdots$		

	...	...	
(i)	4×5	$= 20$	turun 5
(ii)	3×5	$= 15$	turun 5
(iii)	2×5	$= 10$	turun 5
(iv)	1×5	$= 5$	turun 5
(v)	0×5	$= 0$	$\vdots$
(vi)	-1×5	$= -5$	
(vii)	-2×5	$= -10$	
(viii)	-3×5	$= -15$	
(ix)	-4×5	$= -20$	
	$\vdots$		

Dari contoh di atas, dengan melihat hasil perkaliannya siswa kemudian diajak untuk mengamati polanya. Dengan melihat polanya siswa diharapkan dapat menyimpulkan bahwa:

1) bilangan positif $\times$ bilangan positif = bilangan positif,
2) bilangan positif $\times$ bilangan negatif = bilangan negatif, dan
3) bilangan negatif $\times$ bilangan positif = bilangan negatif.

Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa bilangan negatif dikalikan dengan bilangan negatif hasilnya adalah bilangan positif, siswa diminta untuk mengamati pola hasil perkalian dari beberapa perkalian bilangan yang diberikan.

Contoh:

$$\begin{array}{rrll}
 & \ldots & \ldots & \\
\text{(i)} & 4 \times (-2) & = -8 & \\
 & & & \text{naik } 2 \\
\text{(ii)} & 3 \times (-2) & = -6 & \\
 & & & \text{naik } 2 \\
\text{(iii)} & 2 \times (-2) & = -4 & \\
 & & & \text{naik } 2 \\
\text{(iv)} & 1 \times (-2) & = -2 & \\
 & & & \text{naik } 2 \\
\text{(v)} & 0 \times (-2) & = 0 & \vdots \\
\text{(vi)} & (-1) \times (-2) & = 2 & \\
\text{(vii)} & (-2) \times (-2) & = 4 & \\
\text{(viii)} & (-3) \times (-2) & = 6 & \\
\text{(ix)} & (-4) \times (-2) & = 8 & \\
 & \vdots & &
\end{array}$$

Dengan melihat polanya siswa diharapkan dapat menyimpulkan bahwa:

bilangan negatif × bilangan negatif = bilangan positif.

b. Menggunakan tabel perkalian

Langkah pertama yang dilakukan untuk mengantarkan pemahaman siswa adalah diawali dengan memberikan tabel perkalian bilangan bulat yang masih kosong dan diminta siswa yang melengkapi isiannya. Dalam melengkapi tabel perkalian tersebut, siswa diarahkan untuk memulai mengisi dari bagian kanan atas yang diharapkan tidak akan mengalami kendala karena merupakan perkalian dua buah bilangan positif. Selanjutnya siswa diminta untuk meneruskan isiannya ke arah kiri dan ke bawah dengan mengikuti/melihat polanya. Dari hasil isian seluruh tabel tersebut kemudian siswa diajak untuk mengamati pola yang terbentuk.

Salah satu contoh bentuk tabel perkalian yang masih kosong adalah sebagai berikut:

×	...	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
4	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	
3	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
–1	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
–2	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
–3	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
–4	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Kotak pertama yang disarankan untuk diisi siswa

Siswa diharapkan dapat mengisi sendiri tabel di atas sehingga menjadi:

´	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
4	...	–16	–12	–8	–4	0	4	8	12	16	...
3	...	–12	–9	–6	–3	0	3	6	9	12	...
2	...	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	8	...
1	...	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	...
0	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
-1	...	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4	...
-2	...	8	6	4	2	0	–2	–4	–6	–8	...
-3	...	12	9	6	3	0	–3	–6	–9	–12	...
-4	...	16	12	8	4	0	–4	–8	–12	–16	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Semua hasilnya bilangan negatif

Semua hasilnya bilangan positif

Semua hasilnya bilangan positif

Semua hasilnya bilangan negatif

Dari contoh di atas, dengan melihat tabel perkaliannya siswa kemudian diajak untuk mengamati polanya. Dengan melihat polanya siswa diharapkan dapat menyimpulkan bahwa hasil kali bilangan bertanda sama hasilnya positif dan jika tandanya berbeda hasilnya negatif.

3. Bagaimana dengan permasalahan pembagian yang melibatkan nol?

Permasalahan pembagian dengan nol yang masih sering dimunculkan adalah menentukan jawabannya antara tak tentu atau tak terdefinisi, dengan kata lain bagaimana rasional dari jawaban tersebut. Untuk menjawab permasalahan seperti ini sebaiknya perlu dijelaskan lagi bahwa untuk $b \neq 0, \frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = b \times c$. Dari hal ini dapat diturunkan menjadi beberapa hal antara lain:

a) Untuk setiap $b \neq 0$, maka $\frac{0}{b} = 0$.

Rasionalnya: $\frac{0}{b} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \times b$ merupakan pernyataan benar.

Sebagai contoh, siswa diminta untuk memilih sembarang bilangan b yang bukan nol, sebagai contoh b = 6. Jelas $\frac{0}{6} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \times 6$ merupakan pernyataan benar.

b) Perhatikan tampilan berikut.

$$\frac{0}{0} = c \Leftrightarrow 0 = 0 \times c$$

Karena $0 \times c = 0$ untuk setiap c, maka c dapat bernilai bilangan apa saja. Oleh karena itu c atau $\frac{0}{0}$ dapat dikatakan tidak tertentu karena dapat diganti dengan bilangan 0, 1, 2, –2, $\frac{1}{3}, -\frac{3}{7}$, dan lain-lainnya.

c) Untuk $a \neq 0$, bentuk $\frac{a}{0}$ tidak terdefinisi.

Andaikata terdefinisi atau ada nilai yang memenuhi misalnya c sehingga $\frac{a}{0} = c \Leftrightarrow a = c \times 0$. Di sini guru sebelum mengatakan bahwa $\frac{a}{0}$ tidak terdefinisi atau tidak ada terlebih dahulu dapat meminta siswa untuk mencari nilai c yang memenuhi persamaan $a = c \times 0$. Setelah ditunggu beberapa saat dan ternyata tidak ada siswa yang dapat menemukan nilai c tersebut baru guru mengarahkan untuk menyimpulkannya. Karena untuk $a \neq 0$ tidak mungkin ada nilai c yang memenuhi persamaan $a = c \times 0$ maka pengandaian tadi bertentangan sehingga harus diubah menjadi untuk $a \neq 0$, bentuk $\frac{a}{0}$ tidak terdefinisi atau tidak ada.

4. Bagaimana melatih keterampilan operasi hitung yang menyenangkan?

Salah satu cara agar siswa terampil melakukan operasi hitung adalah dengan memberikan latihan operasi hitung sesering mungkin. Hal ini perlu dilakukan agar siswa benar-benar terampil terhadap cara melakukan operasi hitung bilangan itu sendiri. Permasalahannya adalah bagaimana memberikan latihan sesering mungkin yang tidak terlalu membebani secara psikologis bagi siswa. Dengan kata lain memberikan latihan-latihan operasi hitung yang menyenangkan bagi siswa. Beberapa cara yang sering dilakukan adalah dengan memberikan berbagai macam permainan atau teka-teki matematika.

Contoh permainan untuk melatih keterampilan operasi hitung diantaranya adalah segitiga ajaib, segilima ajaib, persegi ajaib, dan kartu bilangan. Sedangkan teka-teki matematika biasanya berkaitan dengan menebak bilangan yang dipikirkan ataupun menebak hasilnya. Salah satu contoh teka-teki matematika adalah teka-teki menebak hasil akhir pengoperasian bilangan. Misalnya akan menggunakan operasi hitung dengan urutan penggunaan mulai dari perkalian, penjumlahan, pembagian, dan pengurangan maka langkah membuat teka-teki dan kuncinya adalah sebagai berikut:

Langkah	Teka-teki (kalimat yang disampaikan)	Cara mendapatkan kunci
Buat kalimat perintah untuk membayangkan sebuah bilangan	Bayangkan sebuah bilangan bulat	Dimisalkan bilangan itu n
Buat kalimat perintah menggunakan operasi perkalian dengan suatu bilangan tertentu	Kalikan dengan 4	$n \times 4$
Buat kalimat perintah menggunakan operasi penjumlahan dengan suatu bilangan tertentu	Hasilnya ditambah dengan 8	$(n \times 4) + 8$
Buat kalimat perintah menggunakan operasi pembagian dengan suatu bilangan tertentu	Hasilnya dibagi dengan 2	$\frac{(n \times 4)+8}{2} = 2n + 4$
Buat kalimat perintah menggunakan operasi pengurangan dengan suatu bilangan tertentu	Hasilnya dikurangi dengan dua kali bilangan yang dibayangkan semula	$(2n + 4) - 2n = 4$

5. Bagaimana cara menarik akar pangkat dua dari suatu bilangan tanpa menggunakan kalkulator (alat bantu hitung)?

   Teknik menarik akar pangkat dua dari suatu bilangan tanpa menggunakan kalkulator atau alat bantu hitung lainnya sangat diperlukan untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan di kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan menarik akar pangkat dua. Contoh seperti menghitung keliling suatu bangun yang berbentuk persegi yang diketahui luasnya (misalnya lantai ruangan). Salah satu teknik menarik akar pangkat dua adalah dengan menggunakan teknik Calandra. Teknik tersebut ditemukan oleh seorang matematikawan yang berasal dari India yaitu Calandra pada tahun 1491 (Marsudi, 2006).

Penggunaan teknik Calandra adalah sebagai berikut:

Contoh: Tentukan $\sqrt{104976}$

Cara menyelesaikan:

a. Dengan bantuan memisahkan dua angka-dua angka dari belakang

Langkah-langkah yang diperlukan sebagai berikut:

(i)	$\sqrt{10 \mid 49 \mid 76}$	Pisahkan angka-angkanya dua angka-dua angka dari belakang.
(ii)	$\sqrt{10 \mid 49 \mid 76}$	Lihat angka terdepan setelah dilakukan pemisahan (dalam contoh ini 10)
(iii)	$\sqrt{10 \mid 49 \mid 76}\ \big(\ 3$ $\boxed{3^2=9} \rightarrow 9$	Cari bilangan bulat terbesar yang jika dikuadratkan hasilnya sama atau kurang dari bilangan terdepan. Untuk contoh ini didapat 3, kemudian tuliskan bilangan yang didapat sebagai hasilnya (3) dan kuadrat bilangannya (9) sebagai pengurang.
(iv)	$\sqrt{10 \mid 49 \mid 76}\ \big(\ 3$ $\boxed{3^2=9} \rightarrow 9$ $1\ 4\ 9$	Kurangkan 10 (angka-angka pertama) dengan 9 (hasil menguadratkan). Tuliskan hasil pengurangan (1) dan turunkan dua bilangan sekaligus (49) untuk proses berikutnya.
(v)	$\sqrt{10 \mid 49 \mid 76}\ \big(\ 3$ 9 $1\ 4\ 9$ $\boxed{3 \times 2 = 6} \rightarrow 6...$	Bilangan yang didapat pada langkah (iii) dikalikan 2 $\Rightarrow$ ($3 \times 2 = 6$). Hasilnya sebagai angka puluhan suatu ”bilangan dua angka” yaitu 6...
(vi)	$\sqrt{10 \mid 49 \mid 76}\ \big(\ 3$ 9 $1\ 4\ 9$ $6... \times ...$	Cari angka pengganti ”...” yang jika dikalikan 6... hasilnya adalah bilangan bulat terbesar yang sama dengan atau kurang dari 149.

(vii)	$\sqrt{10\|49\|76}$ (3 2 9 1 4 9 $6\underset{\dots}{2} \times \underset{\dots}{2}$ = 1 2 4	Bilangan yang didapat adalah 2. Tuliskan bilangan yang didapat di sebelah kanan hasil.
(vii)	$\sqrt{10\|49\|76}$ (3 2 9 1 4 9 $6\underset{\dots}{2} \times \underset{\dots}{2}$ = 1 2 4 2 5 7 6	Kurangkan dan tuliskan sisa hasil pengurangan kemudian turunkan lagi dua bilangan sekaligus lagi untuk proses berikutnya.
(viii)	$\sqrt{10\|49\|76}$ (3 2 9 1 4 9 $\boxed{32 \times 2 = 64}$ 1 2 4 2 5 7 6 64...	Hasil sementara yang sudah di dapat pada langkah (vii) dikalikan dengan 2 $\Rightarrow$ (32 × 2 = 64) dan hasilnya sebagai angka depan suatu bilangan baru lagi sehingga menjadi 64 ....
(ix)	$\sqrt{10\|49\|76}$ (3 2 9 1 4 9 1 2 4 2 5 7 6 64... × ...	Cari angka pengganti ”...” yang jika dikalikan 64... hasilnya adalah bilangan bulat terbesar yang sama dengan atau kurang dari 2576.

(x)	$\sqrt{10\,\vert\,49\,\vert\,76}$ (3 2 4 9 1 4 9 1 2 4 2 5 7 6 $64\underset{...}{4} \times \underset{...}{4}$ = 2 5 7 6	Bilangan yang didapat adalah 4. Tuliskan bilangan yang didapat di sebelah kanan hasil.
(x)	$\sqrt{10\,\vert\,49\,\vert\,76}$ (3 2 4 9 1 4 9 1 2 4 2 5 7 6 $64\underset{...}{4} \times \underset{...}{4}$ = 2 5 7 6 0	Kurangkan lagi dan jika hasilnya sudah sama dengan 0 maka langkah pencarian akar pangkat dua sudah selesai. Hasil akhir yang didapat pada contoh ini adalah 324. Jadi $\sqrt{104976}$ = 324

b. Tanpa bantuan memisahkan dua angka-dua angka dari belakang

$\sqrt{104976}$ = ...

Langkah-langkah yang diperlukan sebagai berikut:

(i)	$\sqrt{104976}$ (300 $\boxed{300^2}$ → 90000	Cari bilangan bulat terbesar yang jika dikuadratkan hasilnya sama atau kurang dari bilangan yang akan dicari akar pangkat duanya. Untuk contoh ini didapat 300. Tuliskan bilangan yang didapat sebagai hasilnya (300) dan kuadrat bilangannya (90000) sebagai pengurang.
(ii)	$\sqrt{104976}$ (300 90000 14976	Kurangkan 104976 (angka yang dicari) dengan 90000 (hasil menguadratkan). Tuliskan hasil pengurangan (14976) .

(iii)	$\sqrt{104976}$ (300 90000 14976 $(2\times300 + \ldots)\times\ldots$	Bilangan yang didapat pada langkah (i) dikalikan 2 ⇒ (2 × 300 = 600). Kemudian cari suatu bilangan (misalnya *m*) yang jika ditambahkan dengan 600 kemudian hasilnya dikalikan dengan bilangan *m* sendiri menghasilkan bilangan bulat terbesar yang sama dengan atau kurang dari 14976.
(iv)	$\sqrt{104976}$ ($300 + 20$ 90000 14976 12400 $(2\times300 + \overset{20}{\ldots})\times\overset{20}{\ldots}$	Bilangan yang didapat adalah 20 dengan hasil 12400. Tambahkan bilangan yang didapat di sebelah kanan hasil yang pertama (300 + 20) = 320
(v)	$\sqrt{104976}$ (320 90000 14976 12400 2576	Kurangkan dan tuliskan sisa hasil pengurangan (2576).
(vi)	$\sqrt{104976}$ (320 90000 14976 12400 2576 $(2\times320 + \ldots)\times\ldots$	Hasil sementara yang sudah di dapat pada langkah (iv) dikalikan dengan 2 ⇒ (2 × 320 = 640). Kemudian cari suatu bilangan lagi (misalnya *n*) yang jika ditambahkan dengan 640 kemudian hasilnya dikalikan dengan bilangan *n* sendiri menghasilkan bilangan bulat terbesar yang sama dengan atau kurang dari 2576.

(vii)	$\sqrt{104976}$ ($320 + 4$ 90000 14976 12400 2576 2576 $(2\times 320 + \overset{4}{\ldots}) \times \overset{4}{\ldots}$	Bilangan yang didapat adalah 4 dengan hasil 2576. Tambahkan bilangan yang didapat di sebelah kanan hasil yang pertama (320 + 4)= 324
(viii)	$\sqrt{104976}$ ($320 + 4$ 90000 14976 12400 2576 2576 0	Kurangkan lagi dan jika sisa hasilnya sudah sama dengan 0 maka langkah pencarian akar pangkat dua sudah selesai. Hasil akhir yang didapat pada contoh ini adalah 324. Jadi $\sqrt{104976} = 324$

Jika dicermati, teknik di atas sebetulnya menggunakan konsep bentuk pangkat dua dari $(a + b)^2$.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\quad\quad = a^2 + (2a + b) \times b$

Perhatikan contoh berikut:

Teknik mencari $\sqrt{625}$

$\sqrt{625}$ ($20 + 5$ $\boxed{20^2} \rightarrow 400$ 225 $\underbrace{(2\times 20 + \overset{5}{\ldots}) \times \overset{5}{\ldots}}$ $\quad 225$ 0	$(a + b)^2 = a^2 + (2a + b) \times b$ $25^2 = a^2 + (2a + b) \times b$ $= 20^2 + \underbrace{(2\times 20 + 5) \times 5}$ Pada contoh ini $a = 20$ dan $b = 5$

Pada contoh di atas adalah salah satu teknik menarik akar pangkat dua dari suatu bilangan yang kebetulan berbentuk bilangan kuadrat sempurna. Coba diskusikan bagaimana tekniknya untuk penarikan akar pangkat dua yang bukan bilangan kuadrat sempurna seperti $\sqrt{7}$, $\sqrt{0{,}4}$ dan $\sqrt{120}$.

6. Bagaimana teknik menarik akar pangkat tiga dari suatu bilangan tanpa menggunakan kalkulator (alat bantu hitung)?

   Teknik menarik akar pangkat tiga diperlukan jika menghadapi perhitungan-perhitungan yang tidak dimungkinkan adanya alat bantu hitung seperti kalkulator. Al. Krismanto dalam file *powerpoint*-nya menuliskan salah satu teknik yang dapat digunakan adalah menggunakan konsep bentuk pangkat tiga $(a + b)^3$ dengan prinsip seperti pada teknik menarik akar pangkat dua di atas.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2) \times b$$

Perhatikan contoh berikut:

Tentukan $\sqrt[3]{17576}$.

Cara menyelesaikan:

$$\sqrt[3]{17576} = 20 + 6 = 26$$

$$\begin{array}{rrl} 20^3 = & 8000 & - \\ & 9576 & \\ (3\times 20^2 + 3\times 20\times ..\mathbf{6} + ..\mathbf{6}^2) \times ..\mathbf{6} = & 9576 & - \\ & 0 & \end{array}$$

Jadi $\sqrt[3]{17576} = 26$

Dalam contoh ini $a = 20$ dan $b = 6$

Penjelasan lebih lanjut dari teknis di atas adalah seperti pada penarikan akar pangkat dua sebagai berikut:

(i)	$\sqrt[3]{17576}$ 20 $\boxed{20^3}$ → 8000	Cari bilangan bulat terbesar yang jika dipangkatkan 3 hasilnya sama atau kurang dari bilangan yang akan dicari akar pangkat tiganya. Untuk contoh ini didapat 20. Tuliskan bilangan yang didapat sebagai hasil sementaranya (20) dan pangkat tiga bilangannya (8000) sebagai pengurang.
(ii)	$\sqrt[3]{17576}$ (20 8000 ――― 9576	Kurangkan 17576 dengan 8000 dan tuliskan hasil pengurangan (9576) .
(iii)	$\sqrt[3]{17576}$ (20 + 6 8000 ――― 9576 $(3\times 20^2 + 3\times 20\times ... + ...^2) \times ...$	Kemudian cari suatu bilangan (misalnya m) yang memenuhi persamaan : $(3\times 20^2 + 3\times 20\times m + m^2) \times m = k$, dimana k adalah bilangan bulat terbesar yang sama dengan atau kurang dari 9576.
(iv)	$\sqrt[3]{17576}$ (20 + 6 8000 ――― 9576 **6 =** 9576 $(3\times 20^2 + 3\times 20\times \mathbf{6} + \mathbf{6}^2) \times ...$	Bilangan yang didapat adalah 6 dengan hasil 9576. Tambahkan bilangan yang didapat di sebelah kanan hasil yang pertama (20 + 6)= 26
(v)	$\sqrt[3]{17576}$ (20 + 6 8000 ――― 9576 9576 ――― 0 Hasilnya 20 + 6 = 26	Kurangkan lagi dan karena sisa hasilnya sudah sama dengan 0 maka langkah pencarian akar pangkat tiga sudah selesai. Hasil akhir yang didapat pada contoh ini adalah 26. Jadi $\sqrt[3]{17576} = 26$

Teknik lain mencari akar pangkat tiga yang juga sangat membantu terutama untuk bilangan kubik di bawah 1.000.000 banyak ditemukan pada buku-buku pelajaran matematika untuk Sekolah Dasar. Namun demikian teknik ini hanya dapat dipergunakan jika bilangan yang akan dicari akar pangkat tiganya merupakan bilangan bulat dan merupakan bilangan kubik di bawah 1.000.000. Langkah-langkah untuk mencari akar pangkat tiga tersebut adalah sebagai berikut:

Contoh: Tentukan $\sqrt[3]{17576}$.

Cara menentukan:

(i)	$\sqrt[3]{17\,\vert\,576}$	Pisahkan angka-angkanya, tiga angka-tiga angka dari belakang.
	$\sqrt[3]{\underbrace{17}_{\boxed{\text{Kel. depan}}}\,\vert\,\underbrace{576}_{\boxed{\text{Kel. belakang}}}}$	Lihat angka kelompok depan setelah dilakukan pemisahan (dalam contoh ini angka kelompok depan adalah 17)
	Bilangan kelompok depan = 17 $2^3 = 2 \times 2 \times 2 < 17$ $\sqrt[3]{17576} = 2...$	Cari bilangan bulat terbesar yang jika dipangkatkan tiga hasilnya sama atau kurang dari bilangan kelompok depan. Untuk contoh ini didapat 2, kemudian tuliskan bilangan yang didapat sebagai puluhannya
	Bilangan kelompok belakang = 5 7 6 $6^3 = 216$ $\sqrt[3]{17576} = 26$	Lihat angka satuan pada bilangan kelompok belakang, kemudian pangkatkan tiga. Setelah ditemukan hasilnya, lihat angka satuannya dan tuliskan sebagai satuannya.

Jadi $\sqrt[3]{17576} = 26$

7. Masalah penjumlahan dan pengurangan dalam pecahan.

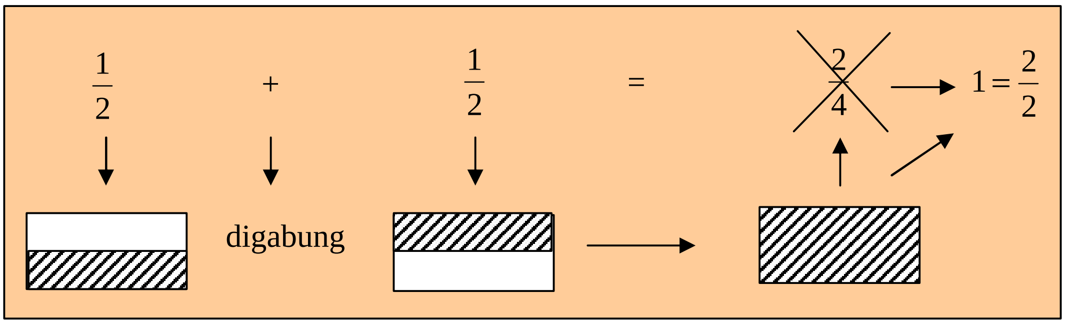
   Penjumlahan dan pengurangan dalam pecahan yang sering dikeluhkan oleh para peserta diklat adalah masih sering kelirunya siswa dalam mengerjakan soal. Kekeliruan terjadi karena dalam mengerjakan penjumlahan dan pengurangan pecahan siswa sering melakukan dengan cara pembilang dioperasikan dengan pembilang dan penyebut dioperasikan dengan penyebut. Hal ini dimungkinkan terjadi pada siswa yang menyamakan proses pengerjaannya dengan operasi perkalian pada pecahan.

   Untuk mengatasi permasalahan tersebut di atas, salah satu alternatifnya adalah pertama kali dengan menunjukkan secara langsung menggunakan peraga gambar bahwa cara yang dilakukan siswa salah, kemudian baru diingatkan kembali cara pengerjaan yang benar. Hal ini perlu dilakukan agar siswa mengalami sendiri secara langsung (melihat sendiri) bahwa proses pengerjaannya salah. Ilustrasinya adalah sebagai berikut:

   Tuliskan kembali cara pengerjaan siswa yang salah, misal:

   a. penyebut sama

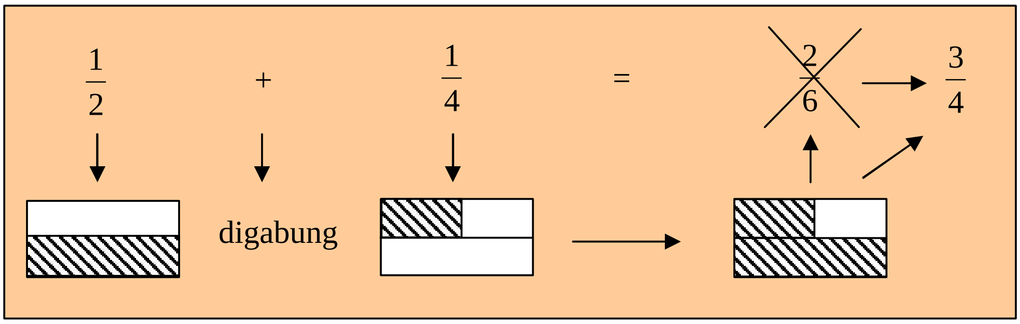
      $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4} \Rightarrow$ tunjukkan dengan peraga gambar kemudian siswa diminta menyimpulkan kembali apakah hasil yang telah diperoleh sebelumnya benar atau salah.



      Dari proses peragaan diharapkan siswa sendiri yang menyimpulkan bahwa jawaban $\frac{2}{4}$ adalah jawaban salah. Selanjutnya baru diingatkan kembali pada proses penjumlahan pecahan yang benar.

b. penyebut berbeda

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{6}$ $\Rightarrow$ tunjukkan dengan peraga gambar kemudian siswa diminta menyimpulkan kembali apakah hasil yang telah diperoleh sebelumnya benar atau salah.



Dari proses peragaan diharapkan siswa sendiri yang menyimpulkan bahwa jawaban $\frac{2}{6}$ adalah jawaban salah. Selanjutnya baru diingatkan kembali pada proses penjumlahan pecahan yang benar.

8. Masalah pembagian dengan pecahan

Untuk pembagian dengan pecahan, permasalahan yang sering muncul berkaitan dengan teknik pengerjaannya yaitu mengapa harus diubah terlebih dahulu menjadi perkalian dengan membalik penyebutnya.

Contoh:

$\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=\dots$ pengerjaannya menjadi $\frac{3}{4}\times\frac{2}{1}=\dots$

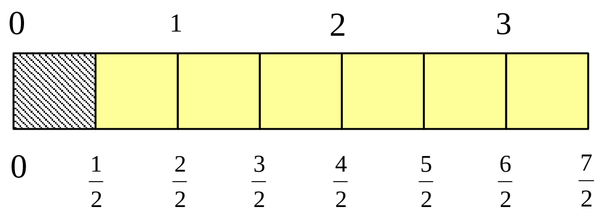
Agar siswa memahami alasan mengapa teknik pengerjaannya diubah seperti di atas, maka dalam menyampaikan materi pembagian dengan pecahan sebaiknya tidak langsung diberikan tekniknya melainkan melalui konsep pembagian. Diawali dengan melalui pemberian contoh pembagian bilangan bulat dengan pecahan sebagai berikut:

Tentukan $3 : \frac{1}{2}$.

a. Apa pesan dalam ungkapan $3 : \frac{1}{2}$?

   Jawab: “ada berapa $\frac{1}{2}$-ankah 3”.

b. Pilih alat peraga “pita $\frac{1}{2}$-an”.



   Fakta: “dalam 3 ada 6 setengahan.

   Jadi $3 : \frac{1}{2} = 6$.

c. Manipulasi hasil:

   4) Hitunglah $3 \times \frac{2}{1}$.

   5) Bandingkan dengan $3 : \frac{1}{2}$.

d. Ditemukan teknik menghitung: $3 : \frac{1}{2} = 3 \times \frac{2}{1} = \frac{3 \times 2}{1} = \frac{6}{1} = 6$.

   Selanjutnya baru dibawa ke bentuk umumnya sebagai berikut:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \Rightarrow = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \times 1 \Rightarrow = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \times \frac{\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}} \Rightarrow = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}} \Rightarrow = \frac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{1}$$

   Dari proses pengerjaan ini siswa diharapkan dapat menyimpulkan bahwa $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ sehingga mengetahui sendiri bahwa pembagian dengan pecahan teknik pengerjaannya sama dengan perkalian dengan membalik penyebutnya.

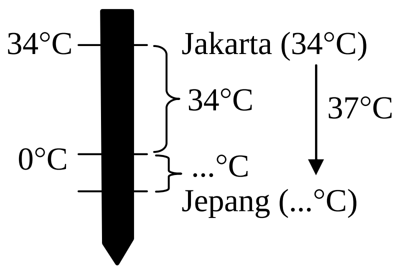
B. Kegiatan Belajar 2: Menggunakan Sifat-Sifat Operasi Hitung Bilangan Bulat dan Pecahan Dalam Pemecahan Masalah.

Masalah berkaitan dengan menggunakan sifat-sifat operasi hitung bilangan bulat dan pecahan dalam pemecahan masalah.

Soal-soal yang berkaitan dengan pemecahan masalah pada semua ruang lingkup matematika pada umumnya masih menjadi kendala tersendiri bagi sebagian besar siswa. Untuk membantu mengatasi hal ini, khususnya soal-soal pemecahan masalah pada ruang lingkup bilangan, salah satu cara yang dapat ditempuh adalah dengan menggunakan bantuan skema/gambar. Hal ini perlu dilakukan/dimodelkan agar permasalahan yang terlihat abstrak/kompleks menjadi terlihat semi-konkrit/sederhana. Di bawah ini diberikan beberapa contoh soal pemecahan masalah yang berkaitan dengan operasi hitung bilangan bulat dan pecahan.

1. Soal yang berkaitan dengan suhu (operasi pengurangan).

   Contoh:
   Suhu di Jakarta pada termometer menunjukkan 34° C (di atas 0°). Pada saat itu suhu di Jepang ternyata 37° C di bawah suhu Jakarta. Berapa derajat suhu di Jepang ? (soal ujian nasional tahun 2005).
   Penyelesaian:
   a) Menggunakan konsep pengurangan:
      suhu Jakarta 34°C ;
      suhu Jepang 37°C di bawah Jakarta yang berarti: $34 - 37 = -3$, sehingga suhu di Jepang adalah -3°C
   b) Menggunakan bantuan gambar/sketsa:
      Sketsa/tulis apa saja yang diketahui dari soal tersebut.



Dari sketsa diharapkan siswa akan lebih mudah melihat bahwa suhu di Jepang adalah 3° di bawah 0° yang dapat ditulis –3° C.

2. Soal yang berkaitan dengan masalah waktu, jarak, dan kecepatan (kelipatan).

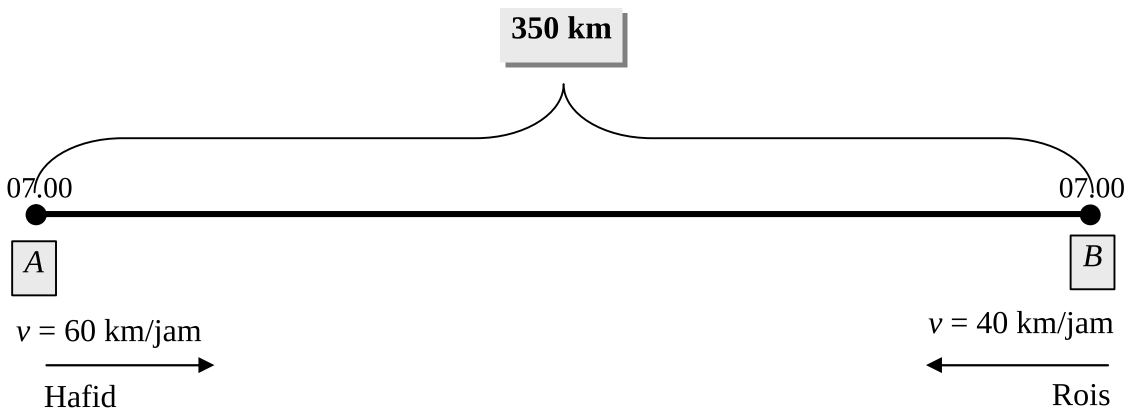
   Contoh:

   Hafid naik mobil berangkat pukul 07.00 dari kota *A* ke kota *B* dengan kecepatan rata-rata 60 km/jam. Rois naik motor berangkat pukul 07.00 dari kota *B* ke kota *A* dengan kecepatan rata-rata 40 km/jam. Jika jarak kota *A* dan *B* 350 km, maka Hafid dan Rois akan bertemu pada pukul … (soal ujian nasional tahun 2003).

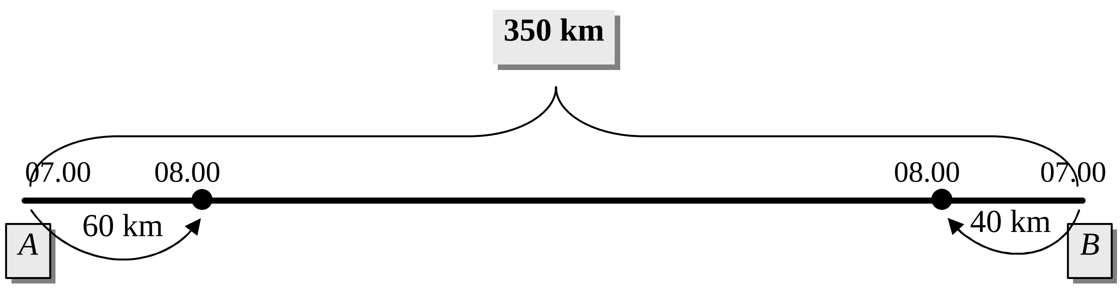
   Penyelesaian:

   Sketsa/tulis apa saja yang diketahui dari soal tersebut.

   a. Posisi awal (pukul 07.00).

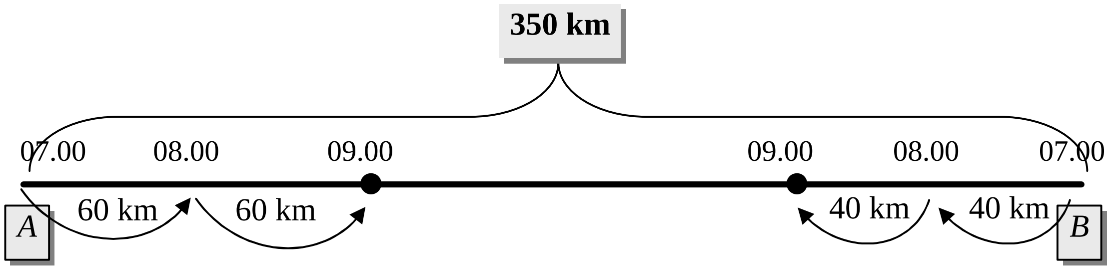


   b. Posisi setelah 1 jam perjalanan (pukul 08.00).



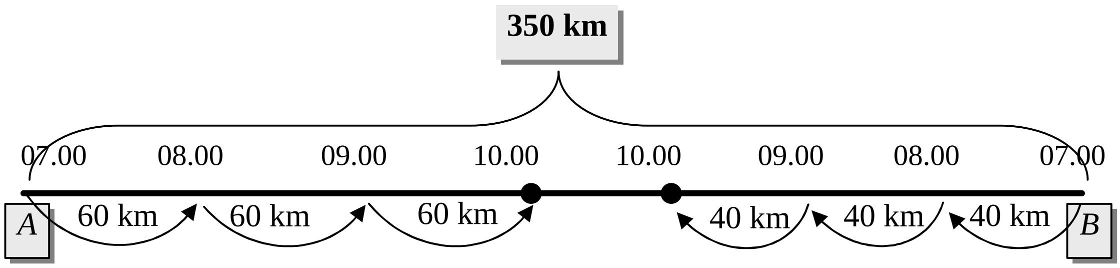
   Perjalanan yang sudah ditempuh oleh Hafid dan Rois selama 1 jam adalah: (60 + 40) = 100 km.

c. Posisi setelah 2 jam perjalanan (pukul 09.00).



Perjalanan yang sudah ditempuh oleh Hafid dan Rois selama 2 jam adalah: (60+60+40+40) = 200 km.

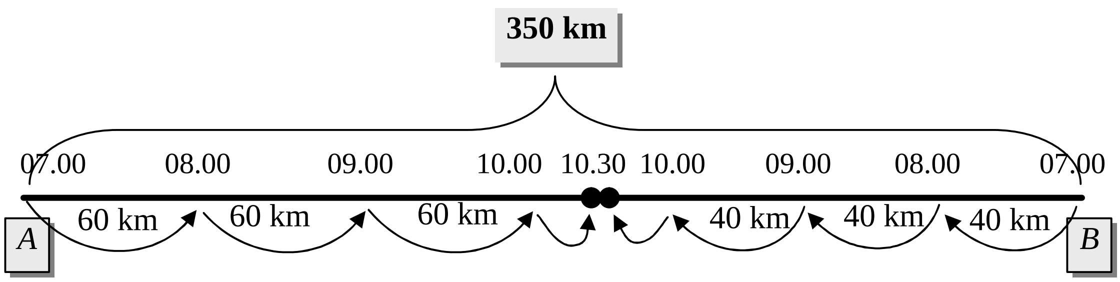
d. Posisi setelah 3 jam perjalanan (pukul 10.00).



Perjalanan yang sudah ditempuh oleh Hafid dan Rois selama 3 jam adalah: (60+60+60+40+40+40) = 300 km.

Dari sketsa terlihat bahwa jarak Hafid dan Rois setelah menempuh perjalanan selama tiga jam tinggal 50 km lagi, padahal setiap satu jam mereka menempuh jarak 100 km, sehingga mereka akan bertemu setelah menempuh perjalanan setengah jam lagi.

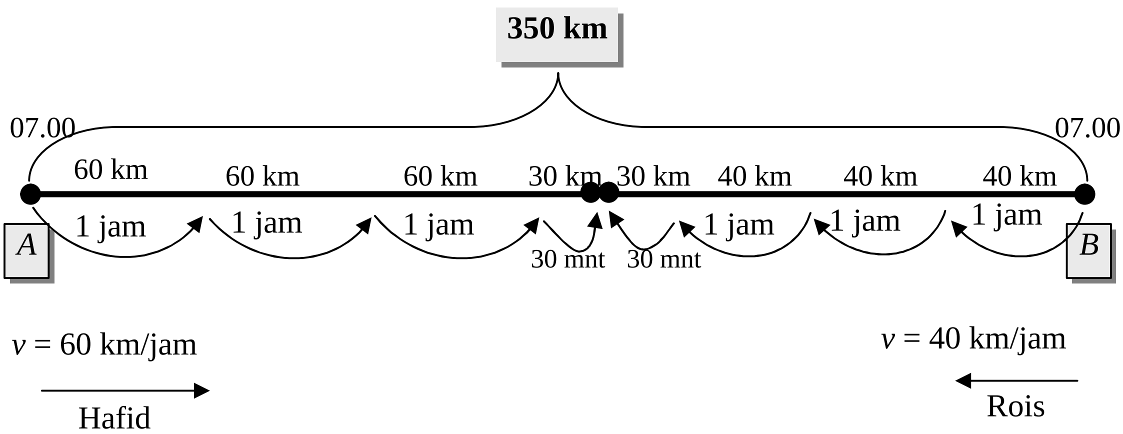
e. Posisi setelah 3,5 jam perjalanan (pukul 10.30).



Perjalanan yang sudah ditempuh oleh Hafid dan Rois selama 3,5 jam adalah: (60+60+60+30+40+40+40+20) = 350 km.

Karena setelah menempuh perjalanan selama 3,5 jam, jarak yang sudah ditempuh oleh Hafid dan Rois sudah sama dengan jarak kota A dan B maka dapat dikatakan bahwa Hafid dan Rois bertemu setelah menempuh perjalanan selama 3,5 jam dari jam 07.00. Dengan kata lain mereka bertemu pada pukul 10.30.

Agar siswa lebih jelas memahaminya, langkah-langkah di atas dalam praktik pembelajarannya di kelas dibuat dalam satu sketsa saja (tidak setiap jam dibuatkan sketsa tersendiri). Dalam modul ini, langkah-langkah di atas ditulis pertahap dengan maksud mempermudah ilustrasi penyampaian pertahapnya. Bentuk akhir penyelesaian yang hanya satu sketsa adalah sebagai berikut:



Dari sketsa tampak bahwa mereka bertemu setelah masing-masing berjalan selama tiga jam 30 menit, sehingga mereka bertemu pukul 10.30.

3. Soal yang berkaitan dengan pecahan.

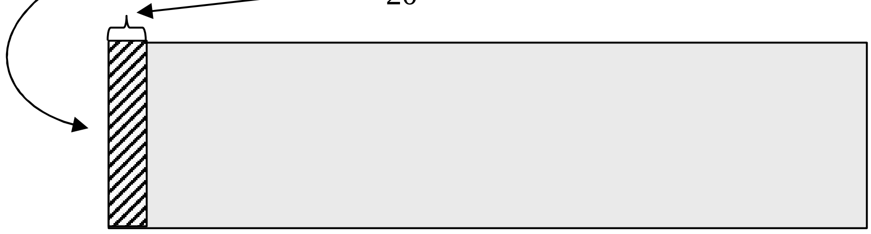
   Contoh:

   Seekor kambing dapat menghabiskan rumput di suatu ladang dalam waktu 20 hari, sedangkan seekor sapi dapat menghabiskan rumput di suatu ladang dalam waktu lima hari. Jika seekor kambing dan seekor sapi tersebut berada dalam satu ladang yang sama, berapa hari rumput di ladang tersebut akan habis?

Penyelesaian:

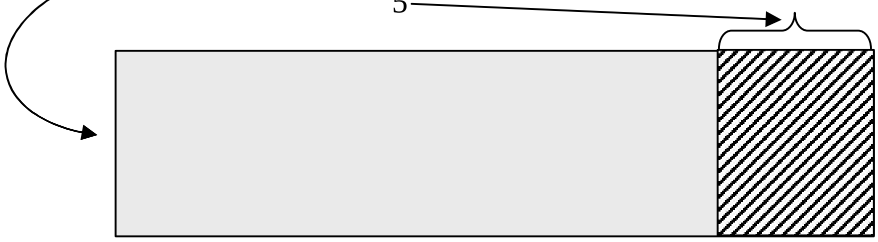
Kambing: 20 hari $\Rightarrow$ 1 ladang rumput habis

1 hari $\Rightarrow$ $\frac{1}{20}$ ladang rumput habis

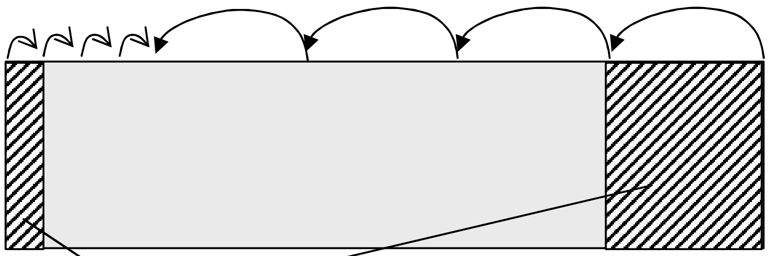


Sapi: 5 hari $\Rightarrow$ 1 ladang rumput habis

1 hari $\Rightarrow$ $\frac{1}{5}$ ladang rumput habis



Kambing + sapi bersama-sama:



1 hari $\Rightarrow$ $\frac{1}{20}+\frac{1}{5}=\frac{1}{20}+\frac{4}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

1 hari $\Rightarrow$ $\frac{1}{4}$ ladang rumput

Dari gambar tampak bahwa ladang rumput akan habis dalam waktu 4 hari.

Dari soal a, b, dan c tampak bahwa melalui sketsa/gambar soal akan terlihat lebih mudah (mensemi-konkritkan) untuk diselesaikan.

LATIHAN BAB II

1. $-5 - (-4) = ...$.

   Kerjakan soal di atas menggunakan peraga garis bilangan model maju-mundur, model panah dan pendekatan muatan. Diskusikan mana yang lebih mudah bagi siswa.
2. Buatlah beberapa contoh permainan dan teka-teki matematika untuk melatih keterampilan operasi hitung bilangan bulat dan pecahan.
3. Tanpa menggunakan alat bantu hitung, tentukan:
   a. $\sqrt{59049} = ...$.
   b. $\sqrt[3]{46656} = ...$.
4. Buatlah beberapa soal yang cara pengerjaannya berkaitan dengan melakukan operasi hitung bilangan bulat dan pecahan dalam pemecahan masalah.

BAB III
PERMASALAHAN PEMBELAJARAN PADA RUANG LINGKUP BILANGAN KELAS IX

Pada standar isi untuk mata pelajaran matematika SMP/MTs, memahami sifat-sifat bilangan berpangkat dan bentuk akar serta penggunaannya dalam pemecahan masalah sederhana serta memahami barisan dan deret bilangan serta penggunaannya dalam pemecahan masalah merupakan standar kompetensi yang diberikan kepada siswa SMP Kelas IX. Di akhir kegiatan pembelajaran pada standar kompetensi memahami sifat-sifat bilangan berpangkat dan bentuk akar serta penggunaannya dalam pemecahan masalah sederhana, siswa harus menguasai tiga kompetensi dasar yaitu (a) memahami sifat-sifat bilangan berpangkat dan bentuk akar, (b) melakukan operasi aljabar yang melibatkan bilangan berpangkat bulat dan bentuk akar, dan (c) memecahkan masalah sederhana yang berkaitan dengan bilangan berpangkat dan bentuk akar. Adapun pada standar kompetensi memahami barisan dan deret bilangan serta penggunaannya dalam pemecahan masalah, siswa harus menguasai empat kompetensi dasar yaitu: (a) menentukan pola barisan bilangan sederhana, (b) menentukan suku ke-n barisan aritmetika dan barisan geometri, (d) menentukan jumlah n suku pertama deret aritmetika dan deret geometri, dan (e) memecahkan masalah yang berkaitan dengan barisan dan deret.

Permasalahan pembelajaran bilangan yang diuraikan dalam bab ini akan difokuskan pada bagaimana guru memfasilitasi anak agar mampu menyelesaikan permasalahan yang sering muncul pada standar kompetensi yang tertuang dalam standar isi dalam ruang lingkup bilangan kelas IX.

Setelah mempelajari Bab III ini, Anda diharapkan mampu memberikan beberapa alternatif pembelajaran berkaitan dengan beberapa permasalahan yang sering muncul pada standar kompetensi nomor 5 dan 6. Standar kompetensi nomor 5 yaitu memahami sifat-sifat bilangan berpangkat dan bentuk akar serta penggunaannya dalam pemecahan masalah sederhana. Sedangkan standar kompetensi nomor 6 yaitu memahami barisan dan deret bilangan serta penggunaannya dalam pemecahan masalah. Untuk membantu Anda agar menguasai kemampuan tersebut, dalam bab ini disajikan pembahasan yang dikemas dalam dua kegiatan belajar (KB) yang diikuti tugas sebagai latihan.

Kegiatan Belajar 1: Memahami Sifat-sifat Bilangan Berpangkat dan Bentuk Akar serta Penggunaannya Dalam Pemecahan Masalah Sederhana.

Kegiatan Belajar 2: Memahami Barisan dan Deret Bilangan serta Penggunaannya dalam Pemecahan Masalah.

Cermati uraian pada masing-masing kegiatan belajar dan kemudian selesaikan latihan yang ada di akhir bab ini. Bila Anda masih ragu terhadap jawaban latihan Anda atau ada hal yang perlu diklarifikasi, berdiskusilah dengan peserta lain atau nara sumber/instruktur Anda. Setelah itu lakukan refleksi terkait pemahaman Anda terhadap permasalahan pembelajaran bilangan kelas IX.

Permasalahan pembelajaran bilangan berpangkat, bentuk akar, barisan bilangan dan deret bilangan serta penggunaannya dalam pemecahan masalah sederhana berikut alternatif pemecahannya untuk kedua standar kompetensi tersebut di atas akan disajikan dalam bentuk tanya jawab. Beberapa permasalahan yang dibahas akan difokuskan pada permasalahan yang sering disampaikan oleh para peserta diklat. Jawaban dari masing-masing permasalahan hanya akan ditawarkan salah satu alternatifnya saja, Anda diharapkan dapat mengembangkan atau mendiskusikan alternatif jawaban lainnya.

A. Kegiatan Belajar 1: Memahami Sifat-Sifat Bilangan Berpangkat dan Bentuk Akar serta Penggunaannya dalam Pemecahan Masalah Sederhana.

Mengapa pangkat negatif berubah menjadi pangkat positif ketika dipindahkan di bawah tanda pembagian, dan sebaliknya ($a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ atau $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$, dengan syarat $a \neq 0$)?

Bagaimana menjelaskannya?

Kalau dilihat dari substansi pertanyaannya, masalah yang muncul dapat dikaitkan dengan bilangan berpangkat dan sifat-sifatnya. Agar siswa tidak hanya sekedar menghafal rumusnya saja, maka siswa perlu diajak untuk benar-benar memahami definisi bilangan berpangkat dan sifat-sifatnya. Salah satu penjelasan mengapa pangkat negatif berubah menjadi positif ketika dipindahkan di bawah tanda pembagian ($a^{-n} = \frac{1}{a^n}$) dapat ditunjukkan dengan dua cara, yaitu dengan menggunakan pola bilangan dan dengan menggunakan sifat-sifat bilangan berpangkat.

1. Menggunakan pola bilangan

   Alternatif penyelesaian permasalahan dengan menggunakan pola bilangan adalah sebagai berikut:

   a. Pertama kali siswa diminta untuk menentukan hasil dari beberapa bilangan berpangkat yang besar pangkatnya berurutan turun sampai dengan pangkat terkecil 1 seperti contoh berikut.

2^6 = ...
2^5 = ...
2^4 = ...
2^3 = ...
2^2 = ...
2^1 = ...

... = ...
... = ...
... = ...

b. Selanjutnya siswa diminta mengamati pola dari hasil jawabannya yang sekaligus dikaitkan dengan pangkatnya. Dengan panduan guru, diharapkan siswa dapat menemukan pola seperti berikut:

$$
\begin{array}{rcl}
 & 2^6 = 64 & \\
\text{Pangkat turun 1} & & \text{dibagi 2} \\
 & 2^5 = 32 & \\
\text{Pangkat turun 1} & & \text{dibagi 2} \\
 & 2^4 = 16 & \\
\text{Pangkat turun 1} & & \text{dibagi 2} \\
 & 2^3 = 8 & \\
\text{Pangkat turun 1} & & \text{dibagi 2} \\
 & 2^2 = 4 & \\
\text{Pangkat turun 1} & & \text{dibagi 2} \\
 & 2^1 = 2 & \\
\hline
 & \ldots = \ldots & \\
 & \ldots = \ldots & \\
 & \ldots = \ldots &
\end{array}
$$

c. Dengan memperhatikan pola yang terjadi di atas, siswa diharapkan dapat meneruskan bentuk polanya sampai beberapa bilangan berikutnya dan akhirnya ke bentuk rumus umum.

$$
\begin{array}{ccc}
2^6 = 64 & & \\
2^5 = 32 & & \\
2^4 = 16 & & \\
2^3 = 8 & & \\
2^2 = 4 & & \\
2^1 = 2 & & \\
\hline
2^0 = 1 & & \\
2^{-1} = \frac{1}{2} & \longrightarrow & \frac{1}{2^1} \\
2^{-2} = \frac{1}{4} & \longrightarrow & \frac{1}{2^2} \\
\downarrow & & \downarrow \\
a^{-n} & & \frac{1}{a^n}
\end{array}
$$

Dari contoh kasus di atas diharapkan siswa dapat memahami rasionalitas mengapa pangkat negatif berubah menjadi positif ketika dipindahkan di bawah tanda pembagian $\left(a^{-n} = \frac{1}{a^n} \right)$, dengan syarat $a \neq 0$.

2. Menggunakan sifat-sifat bilangan berpangkat

Alternatif penyelesaian permasalahan dengan menggunakan sifat-sifat bilangan berpangkat dapat dilakukan sebagai berikut:

a. Pertama kita ingatkan kembali bentuk $a^m = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{m\,kali}$ dan

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{n\,kali}$$

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{m\,\text{kali}} \times \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{n\,\text{kali}}$$

$$= \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{m+n\,\text{kali}}$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

b. Berdasarkan sifat di atas, bentuk $a^m \times a^{(-n)}$ menjadi

$$a^m \times a^{(-n)} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$$

c. Misalkan diambil m = 2 dan n = 1, maka bentuk $a^m \times a^{(-n)}$ kita dapatkan:

$$a^2 \times a^{(-1)} = a^{2-1} = a^1 = a$$

Jika kedua ruas dibagi dengan a^2 maka didapatkan:

$$\frac{a^2 \times a^{(-1)}}{a^2} = \frac{a}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow a^{(-1)} = \frac{1}{a}$$

d. Misalkan diambil $m = n = 1$, maka bentuk $a^m \times a^{(-n)}$ kita dapatkan:

$$a^1 \times a^{(-1)} = a^{1-1} = a^0$$

e. Karena $a^1 \times a^{(-1)} = a \times \frac{1}{a} = 1$ maka $a^0 = 1$

f. Misalkan diambil $m = n$, maka bentuk $a^m \times a^{(-n)}$ kita dapatkan:

$$a^n \times a^{(-n)} = a^{(n-n)} = a^0 = 1$$

g. Jika kedua ruas dibagi dengan a^n maka didapatkan:

$$\frac{a^n \times a^{(-n)}}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\Leftrightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Dari uraian langkah di atas diharapkan siswa dapat memahami rasionalitas mengapa pangkat negatif berubah menjadi positif ketika dipindahkan dibawah tanda pembagian ($a^{-n} = \frac{1}{a^n}$), dengan syarat $a \neq 0$.

B. Kegiatan Belajar 2: Memahami Barisan dan Deret Bilangan serta Penggunaannya dalam Pemecahan Masalah.

Bagaimana Cara Menentukan Rumus Suku ke-*n* dari Suatu Barisan Bilangan.

Menemukan Rumus Suku Umum Barisan Bilangan.

Untuk menentukan rumus suku umum dari suatu barisan bilangan dapat dilakukan dengan dua cara, yakni dengan *tuntunan pola* dan *tanpa tuntunan pola*. Dengan tuntunan pola maksudnya adalah polanya ditunjukkan (yang sebenarnya/sesuai fakta) sehingga dengan melihat polanya siswa dapat menemukan rumus suku ke-*n*. Sedangkan cara yang kedua yakni tanpa tuntunan pola dilakukan dengan menyelidiki selisih tetapnya dicapai hingga tingkat penyelidikan ke berapa.

1. Menemukan Rumus Dengan Tuntunan Pola

   Misalkan kita diberikan pertanyaan ”Tentukan rumus suku ke-*n* dari barisan bilangan 0 , 1 , 3 , 6 , 10 , 15 , . . .”

   Tuntunan yang dimaksud adalah siswa diberikan sebuah LK (lembar kerja) berisi *isian* yang *sengaja dibuat tidak lengkap* dan dari isian yang tidak/belum lengkap itulah siswa diminta melengkapinya. Agar materi pelajaran dapat bersifat menantang (siswa merasa belum tahu pemecahannya tetapi mereka merasa mampu untuk memecahkannya jika diberi kesempatan dan waktu yang cukup), dan keterlibatan siswa dapat dibuat maksimal, berilah mereka kesempatan untuk bekerja secara kelompok. Dalam membentuk kelompok guru mengatur supaya anggota setiap kelompok heterogen, yaitu terdiri dari siswa pandai, sedang, dan kurang sehingga kemampuan antar kelompok relatif seimbang. Berikut adalah bentuk isian LK menemukan rumus umum suku ke-*n* dengan tuntunan pola.

Petunjuk: Isilah kotak yang tersedia dengan suatu bilangan sehingga menjadi pernyataan yang benar!

Banyaknya ruas garis yang pangkalnya berimpit	Banyaknya sudut yang dibentuk
1	$0 = \dfrac{\square(\square - 1)}{2}$
2	$1 = \dfrac{\square(\square - 1)}{2}$
3	$3 = \dfrac{\square(\square - 1)}{2}$
4	$6 = \dfrac{\square(\square - 1)}{2}$
5	$10 = \dfrac{\square(\square - 1)}{2}$
6	$15 = \dfrac{\square(\square - 1)}{2}$
n	$u_n = \dfrac{\square(\square - 1)}{2}$

Dengan tuntunan pemecahan seperti di atas siswa diharapkan dapat menemukan bentuk umum yakni rumus suku ke-*n* dari barisan 0, 1, 3 , 6, 10, 15 , . . .

Rumus yang dimaksud adalah $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

2. Menemukan Rumus tanpa Tuntunan Pola

Cara kedua yakni tanpa tuntunan pola, dilakukan dengan langkah sebagai berikut:

a. Selidiki sampai berapa tingkat dicapai selisih tetapnya.
b. Jika selisih tetapnya dicapai pada tingkat penyelidikan yang kedua, maka dipastikan barisan bilangannya berderajat dua. Jika selisih tetapnya dicapai pada tingkat penyelidikan yang ketiga, maka dipastikan barisan bilangannya berderajat tiga, demikianlah seterusnya.
c. Setelah derajat barisan bilangannya diketahui, langkah berikutnya adalah menuliskan:

   $u_n = an + b$ .... jika barisan bilangannya berderajat 1
   $u_n = an^2 + bn + c$ .... jika barisan bilangannya berderajat 2
   $u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ .... jika barisan bilangannya berderajat 3
   $u_n = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$... jika barisan bilangannya berderajat 4
   $\vdots$
   $u_n = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + a_{k-2}n^{k-2} + \ . \ . \ . + a_1 n + a_0$ ... jika barisan bilangannya berderajat k

d. Selidiki nilai-nilai sukunya dari suku pertama minimal hingga suku keempat. Mengapa? Sebab suatu barisan bilangan akan tertentu secara tunggal jika suku-suku yang diketahui minimal hingga empat suku.
e. Selanjutnya dengan menghubungkan komponen-komponen yang bersesuaian pada masing-masing tingkat penyelidikan akan diperoleh SPL (sistem persamaan linear) yang banyaknya sesuai dengan banyak variabel (peubah)-nya. Dari penyelesaian SPL tersebut maka rumus umum suku ke-n dari barisan bilangan yang dimaksud akan dapat ditentukan secara tunggal. Terakhir kita dapat menentukan suku sembarang yang ditanyakan berdasar rumus yang telah ditemukan tersebut.

Misalkan kita diberikan pertanyaan ”Tentukan rumus suku ke-*n* dari barisan bilangan 0 , 1 , 3 , 6 , 10 , 15 , . . .”

Penyelesaian

Cara menentukan selisih tetap barisan bilangan tersebut adalah:

Barisan bilangan $\longrightarrow$ 0 , 1 , 3 , 6 , 10 , 15 , . . .

Selisih penyelidikan tingkat 1 $\longrightarrow$ 1 2 3 4 5

Selisih penyelidikan tingkat 2 $\longrightarrow$ 1 1 1 1

Hasil penyelidikan di atas memperlihatkan bahwa barisan bilangan 0, 1, 3, 6, 10, 15, . . . adalah barisan bilangan berderajat 2, sebab selisih tetapnya diperoleh hingga penyelidikan tingkat 2. Selanjutnya karena barisan bilangannya berderajat 2, maka pemisalan suku ke-*n* dari barisan bilangan tersebut adalah $u_n = an^2 + bn + c$

Karena $u_n = an^2 + bn + c$, maka $u_1 = a(1)^2 + b(1) + c = a + b + c$

$u_2 = a(2)^2 + b(2) + c = 4a + 2b + c$

$u_3 = a(3)^2 + b(3) + c = 9a + 3b + c$

$u_4 = a(4)^2 + b(4) + c = 16a + 4b + c$

$u_5 = a(5)^2 + b(5) + c = 25a + 5b + c$

$u_6 = a(6)^2 + b(6) + c = 36a + 6b + c$.

$$\overbrace{a+b+c}^{u_1},\ \overbrace{4a+2b+c}^{u_2},\ \overbrace{9a+3b+c}^{u_3},\ \overbrace{16a+4b+c}^{u_4},\ \overbrace{25a+5b+c}^{u_5},\ \overbrace{36a+6b+c}^{u_6},\ . . .$$

$$b_1 = 3a + b \quad b_2 = 5a + b \quad b_3 = 7a + b \quad b_4 = 9a + b \quad b_5 = 11a + b$$

$$b'_1 = 2a \quad b'_2 = 2a \quad b'_3 = 2a \quad b'_4 = 2a$$

Bentuk terakhir di atas ini kemudian kita hubungkan dengan penyelidikan sebelumnya. Perhatikan korespondensinya.

(1) $\underbrace{a + b + c}_{u_1}$, $\underbrace{4a + 2b + c}_{u_2}$, $\underbrace{9a + 3b + c}_{u_3}$, $\underbrace{16a + 4b + c}_{u_4}$, $\underbrace{25a + 5b + c}_{u_5}$, $\underbrace{36a + 6b + c}_{u_6}$, . .

(2) $b_1 = 3a + b$ $\quad b_2 = 5a + b$ $\quad b_3 = 7a + b$ $\quad b_4 = 9a + b$ $\quad b_5 = 11a + b$

(3) $b_1' = 2a$ $\quad b_2' = 2a$ $\quad b_3' = 2a$ $\quad b_4' = 2a$

(1) 0 , 1 , 3 , 6 , 10 , 15 , . . .

(2) 1 2 3 4 5

(3) 1 1 1 1

Dari korespondensi antara kedua bentuk penyelidikan di atas akan diperoleh tiga persamaan linear dengan tiga variabel seperti berikut.

$a + b + c = 0$	(*)
$3a + b = 1$	(**)
$2a = 1$	(***)

Perhatikan bahwa suku-suku yang digunakan untuk mengadakan korespondensi adalah

(a) Suku pertamanya yaitu $u_1 = a + b + c = 0$

(b) Beda pertama suku pada tingkat penyelidikan yang pertama, yakni

$$b_1 = 3a + b = 1, \text{ dan}$$

(c) Beda pertama suku pada tingkat penyelidikan yang kedua, yakni

$$b_1' = 2a = 1$$

Penyelesaian tercepat akan diperoleh jika dimulai dari (***).

(***) $2a = 1$

$a = \frac{1}{2}$? (**) $3a + b = 1$

$\Leftrightarrow \quad 3(\frac{1}{2}) + b = 1$

$\Leftrightarrow \quad 1\frac{1}{2} + b = 1$

$\Leftrightarrow \quad b = 1 - 1\frac{1}{2}$.

$$\Leftrightarrow \quad b = -\tfrac{1}{2} \quad ? \quad (*) \quad a + b + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\tfrac{1}{2}) + (-\tfrac{1}{2}) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad c = 0$$

Dengan memasukkan nilai $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, dan $c = 0$ ke barisan bilangan berderajat dua yang kita misalkan maka akan kita peroleh rumus suku ke-n yang kita cari.

$a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, dan $c = 0$? $u_n = an^2 + bn + c$

$$\Leftrightarrow u_n = (\tfrac{1}{2})n^2 + (-\tfrac{1}{2})n + 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_n = \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \tfrac{1}{2}n(n - 1)$$

Jadi rumus umum suku ke-n untuk barisan bilangan 0, 1, 3, 6, 10, 15, . . adalah $u_n = \frac{1}{2}n(n - 1)$

3. Menggunakan Rumus Untuk Menentukan Nilai Suku Urutan Besar

Kini kita telah mengetahui bagaimana cara menurunkan rumus suku ke-n dari suatu barisan bilangan yakni dengan tuntunan pola (menggunakan LK) maupun tanpa tuntunan pola (tanpa LK). Tanpa LK sifatnya lebih menantang, tetapi tanpa tuntunan penemuan rumus suku ke-n secara jelas maka tujuan penemuan rumus itu akan sulit untuk dilakukan. Syarat penting untuk menurunkan rumus suku ke-n dari suatu barisan dengan tuntunan pola adalah ”guru terlebih dahulu harus mengetahui kunci jawabannya”. Kunci jawaban yang dimaksudkan adalah ”rumus suku ke-n dari barisan bilangan yang diketahui itu”.

Selanjutnya cara yang kedua yakni dapat menemukan rumus suku ke-n barisan bilangannya tanpa menggunakan LK sehingga masing-masing guru/siswa dapat mengekplorasi secara bebas. Untuk dapat mengeksplorasi secara bebas guru harus mengetahui ”bagaimana teknik mengeksplorasi”. Setelah siswa mengetahui teknik tersebut diharapkan dapat menemukan rumus umum tersebut secara mandiri maupun berkelompok.

Setelah rumus umum suku ke-*n* ditemukan, kegiatan selanjutnya adalah menentukan nilai-nilai dari suku dengan urutan tertentu. Misal berapakah suku yang ke-50 dan berapakah suku yang ke-2008, pemecahannya adalah seperti berikut.

0 , 1 , 3, 6 , 10, 15 , 21 , . . . , $u_n = \frac{1}{2}n(n - 1)$.

Maka suku ke-50 diperoleh dengan mengganti nilai *n* dengan bilangan 50, sehingga dari $u_n = \frac{1}{2}n(n - 1)$? $u_{50} = \frac{1}{2}(50)(50 - 1)$

$= 25\,(50 - 1)$

$= 25(50) - 25(1)$

$= 1250 - 25$

$= 1225$

Untuk $n = 2008$? $u_{2008} = \frac{1}{2}(2008)(2008 - 1)$

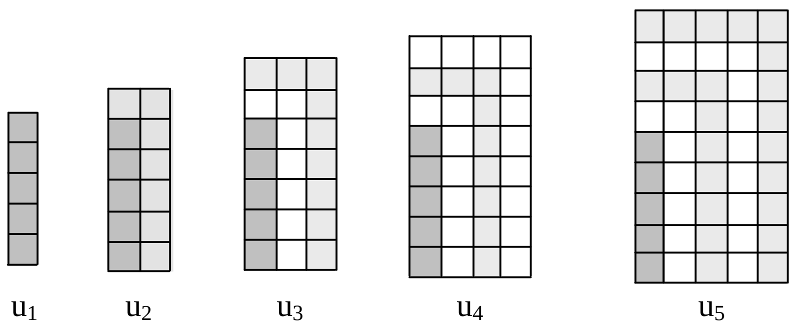
$= 1004(2007)$

$= 2015028$

Jadi nilai suku ke-50 adalah 1225 dan nilai suku ke-2008 adalah 2015028.

Contoh lain

Tentukan suku yang ke-2008 dari barisan bilangan berikut:



Penyelesaian

Cara 1

Menemukan rumus tanpa tuntunan pola

Jika kita amati berdasarkan banyaknya petak persegi yang dimuat oleh masing-masing gambar maka

	Banyak Kotak Kecil
u_1 = 5 (warna hitam)	5
u_2 = 5 + 7 (warna hitam dan putih)	12
u_3 = 5 + 7 + 9 (warna hitam, putih, dan hitam)	21
u_4 = 5 + 7 + 9 + 11 (warna hitam, putih, hitam, dan putih)	32
u_5 = 5 + 7 + 9 + 11 + 13 (warna hitam, putih, hitam, putih dan hitam)	45

Berarti yang ditanyakan adalah u_{2008} yaitu suku ke-2008 dari barisan bilangan 5 , 12 , 21, 32 , 45 , ...

Sekarang kita selidiki selisih tetapnya. Perhatikan:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \boxed{5}\ ,\ 12\ ,\ 21\ ,\ 32\ ,\ 45\ , . \\
(2) & \boxed{7}\quad 9\quad 11\quad 12\quad \ldots \\
(3) & \boxed{2}\quad 2\quad 2\quad 2
\end{array}
$$

setelah diselidiki ternyata selisih tetapnya diperoleh setelah dua tingkat penyelidikan, dengan demikian barisan bilangannya adalah barisan bilangan berderajat 2. Pemisalan rumus umum untuk suku ke-n barisan bilangan tersebut adalah

$$u_n = an^2 + bn + c$$

Pada pembahasan sebelumnya penyelidikan selisih tetapnya untuk barisan berderajat dua adalah sebagai berikut

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \overbrace{\boxed{a+b+c}}^{u_1},\ \overbrace{4a+2b+c}^{u_2},\ \overbrace{9a+3b+c}^{u_3},\ \overbrace{16a+4b+c}^{u_4},\ \overbrace{25a+5b+c}^{u_5},\ \overbrace{36a+6b+c}^{u_6}, \ldots \\
(2) & b_1 = \boxed{3a+b}\quad b_2 = 5a+b\quad b_3 = 7a+b\quad b_4 = 9a+b\quad b_5 = 11a+b \\
(3) & b_1' = \boxed{2a}\quad b_2' = 2a\quad b_3' = 2a\quad b_4' = 2a
\end{array}
$$

Unsur-unsur yang diperhatikan untuk membentuk sistem persamaan linear pada barisan berderajat dua di atas adalah:

1. Suku pertamanya yaitu $u_1 = a + b + c$
2. Beda pertama suku pada tingkat penyelidikan yang pertama, yakni $b_1 = 3a + b$
3. Beda pertama suku pada tingkat penyelidikan yang kedua, yakni $b'_1 = 2a$

Dengan demikian maka korespondensi untuk membentuk sistem persamaan linear yang diperlukan dalam mencari rumus suku ke-n barisan bilangan

(1) 5 , 12 , 21 , 32 , 45 , . . .

(2) 7 9 11 12 …

(3) 2 2 2 2

adalah $u_1 = a + b + c = 5$, $b_1 = 3a + b = 7$ dan $b'_1 = 2a = 2$.

Dengan demikian sistem persamaan linear yang kita peroleh adalah

$a + b + c = 5$	(*)
$3a + b = 7$	(**)
$2a = 2$	(***)

Selesaikan mulai dari persamaan (***)hingga persamaan (*).

(***) $2a = 2$

$a = 1$? (**) $3a + b = 7$

$\Leftrightarrow$ $3(1) + b = 7$

$\Leftrightarrow$ $3 + b = 7$

$\Leftrightarrow$ $b = 7 - 3.$

$\Leftrightarrow$ $b = 4$? (*) $a + b + c = 5$

$\Leftrightarrow$ $(1) + (4) + c = 5$

$\Leftrightarrow \quad 5 + c = 5$

$\Leftrightarrow \quad c = 5 - 5$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{c = 0}$

Dengan memasukkan nilai $a = 1$, $b = 4$, dan $c = 0$ ke rumus umum barisan bilangan berderajat dua yang kita misalkan maka akan kita peroleh rumus suku ke-n yang dicari.

$a = 1$, $b = 4$, dan $c = 0$? $u_n = an^2 + bn + c$

$\Leftrightarrow \quad u_n = (1)n^2 + (4)n + 0$

$\Leftrightarrow \quad u_n = n^2 + 4n$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{u_n = n(n + 4)}$

Untuk $n = 2008$ maka $u_{2008} = 2008(2008 + 4)$

$= 2008(2012)$

$= 4040096$

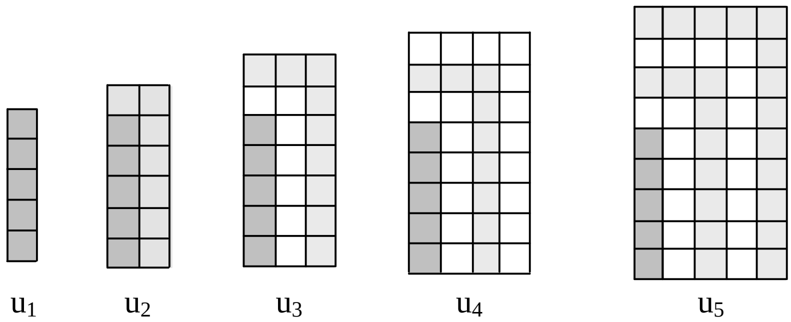
Jadi nilai suku ke-2008 adalah 4040096 artinya banyaknya satuan persegi yang digunakan untuk membentuk persegipanjang yang ke-2008 adalah sebanyak 4040096 buah.

Perhatikan bahwa persegipanjang yang dimaksud itu berdasarkan pola gambarnya adalah persegipanjang yang alasnya = 2008 satuan, dan tingginya = 2008 + 4 = 2012 satuan.

Cara 2

Menemukan rumus dengan mengamati pola bilangannya.

Dari pola gambar yang diketahui



Bila kita amati, pola yang ditunjukkan oleh ukuran sisi-sisinya adalah

u_1 = 5 petak ? alas = 1, tinggi = 5

? alas × tinggi = 1 × 5 = 5 ? 1 × (1 + 4) = 5

u_2 = 12 petak? alas = 2, tinggi = 6

? alas × tinggi = 2 × 6 = 12? 2 × (2 + 4) = 12

u_3 = 21 petak ? alas = 3, tinggi = 7

? alas × tinggi = 3 × 7 = 21? 3 × (3 + 4) = 21

u_4 = 32 petak? alas = 4, tinggi = 8

? alas × tinggi = 4 × 8 = 32? 4 × (4 + 4) = 32

u_5 = 45 petak? alas = 5, tinggi = 9

? alas × tinggi = 5 × 9 = 45? 5 × (5 + 4) = 45

.
.
.

Ternyata alas dan tingginya selalu berselisih 4, maka

$u_{2008} \longrightarrow 2008 \times (2008 + 4)$

$u_n \longrightarrow u_n = n \times (n + 4)$, atau

$$\boxed{u_n = n(n + 4)}$$

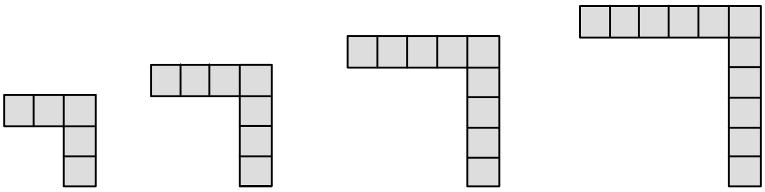
Catatan

1. Pola bilangan yang gambarnya diketahui seperti di atas menjadikan permasalahannya lebih mudah untuk dibayangkan dan polanya lebih mudah terlihat sehingga rumus umum untuk suku ke-*n* lebih cepat diperoleh.
2. Kesulitan utama dalam menemukan rumus suku ke-*n* secara cepat adalah karena kita tidak dapat segera menemukan polanya.
3. Namun meskipun kita kesulitan bahkan secara perasaan kita tidak dapat menemukan polanya dalam waktu lama, tujuan kita menemukan rumus umum suku ke-*n* masih dapat dilakukan yakni dengan menyelidiki selisih tetapnya dicapai pada berapa tingkat penyelidikan. Selanjutnya kita dapat menyelesaikannya yakni menemukan rumus umum suku ke-*n* yang merupakan tujuan utama kerja kita.

4. Penemuan rumus suku ke-n dengan tuntunan pola, semata-mata untuk memudahkan dan mempercepat dalam mencapai tujuan. Namun siswa dalam hati sebenarnya masih bertanya-tanya ”bagaimana cara menemukan rumus suku ke-n suatu barisan bilangan jika tuntunan menemukan polanya tidak ada/tidak diberikan”.
5. Satu-satunya cara menemukan rumus suku ke-n tanpa tuntunan pola hanyalah menyelidiki selisih tetapnya dicapai pada berapa tingkat penyelidikan. Jika selisih tetapnya dicapai dalam satu tingkat penyelidikan, maka barisan bilangannya berderajat satu dan pemisalan rumus suku ke-n adalah $u_n = an + b$. Jika selisih tetapnya diperoleh dalam dua tingkat penyelidikan, maka barisan bilangannya berderajat dua dan pemisalan rumus untuk suku ke-n adalah $u_n = an^2 + bn + c$. Jika selisih tetapnya diperoleh dalam tiga tingkat penyelidikan, maka barisan bilangannya berderajat tiga dan pemisalan rumus untuk suku ke-n adalah $u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$, demikianlah seterusnya.

LATIHAN BAB III

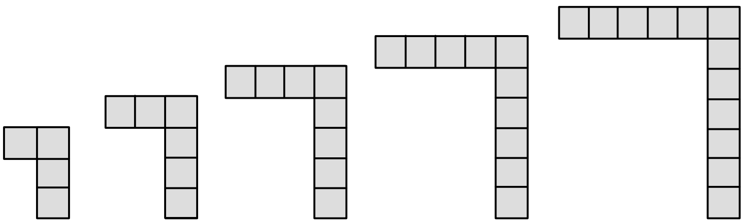
1. Tentukan nilai dari 3^{-4} ! Jelaskan cara pengerjaan soal di atas dengan menggunakan pola bilangan dan dengan menggunakan sifat-sifat bilangan berpangkat. Diskusikan dengan teman-teman Anda, mana yang lebih mudah dan bermakna bagi siswa.
2. Bagaimana langkah-langkah Anda dalam memberikan contoh penyelesaian soal berbentuk a^{-n} kepada siswa?
3. Bagaimana langkah-langkah Anda dalam memberikan contoh penyelesaian soal berbentuk $\frac{1}{a^{-n}}$ kepada siswa?
4. Tentukan rumus suku ke-n dari barisan bilangan yang terbentuk dari banyaknya persegi satuan pada gambar berikut. Tentukan pula suku ke-100.



u_1 u_2 u_3 u_4 $\longrightarrow$ u_n?

$u_{100} = \dots$?

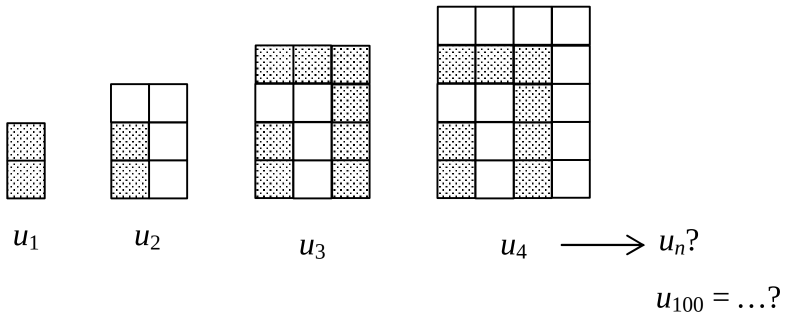
5. Tentukan rumus suku ke-n dari barisan bilangan yang terbentuk dari banyaknya persegi satuan pada gambar berikut. Tentukan pula suku ke-100.



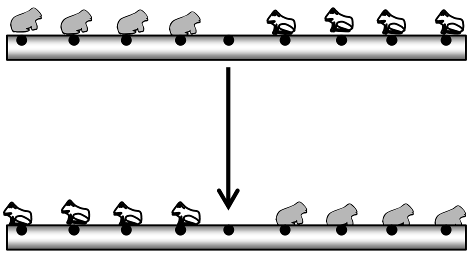
u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 $\longrightarrow$ u_n?

$u_{100} = \dots$?

6. Tentukan rumus suku ke-*n* dari barisan bilangan yang terbentuk dari banyaknya persegi satuan pada gambar berikut. Tentukan pula suku ke-100.



7. Pada permainan loncat katak, banyaknya langkah untuk menukar letak pasangan kelompok katak hitam dengan katak putih tergantung dari banyaknya pasangan. Data jumlah pasangan dan banyaknya langkah pemindahan dapat dilihat pada sajian berikut.



Katak tidak dapat bergerak mundur. Banyaknya langkah untuk saling loncat sehingga posisi kelompoknya berubah untuk empat pasang ada 24.

Banyaknya pasangan	Banyaknya langkah pemindahan
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35
•	•
•	•
•	•
n	?

Tentukan rumus suku ke-*n*, dan tentukan banyaknya langkah pemindahan jika banyaknya pasangan enam. Bagaimana jika banyaknya pasangan 100?

Data pada sajian diatas diperoleh sesuai dengan aturan Permainan Loncat Katak, yaitu:

> "Tempatkan dua kelompok katak, kelompok katak hitam dan putih yang dipisahkan oleh sebuah titik pemisah. Jumlah masing-masing kelompok katak sama. Gerakan katak dilakukan dengan cara **geser satu langkah atau melompati satu katak, serta tidak dapat melompat/bergerak mundur**".

a. Praktekkan bagaimana Anda dapat menukar letak kelompok katak hitam dengan kelompok katak putih sehingga kelompok katak hitam dan putih dapat bertukar posisi saling membelakangi (seperti gambar di atas)?

b. Mulailah dari sepasang (satu hitam dan satu putih) terlebih dahulu. Jika sepasang Anda sukses, tingkatkan kataknya menjadi dua pasang, tiga pasang dan seterusnya.

c. Setelah Anda menemukan teknik memindahkannya, amatilah berapa langkah pemindahan minimal yang dapat dilakukan untuk memindahkan satu pasang katak, dua pasang katak, tiga pasang katak, empat pasang katak, dan lima pasang katak. Samakah banyaknya pasangan dan banyaknya langkah penukaran letak dengan data yang ada pada tabel di atas? Yakni banyaknya langkah pemindahan yang diperlukan jika banyaknya katak *n* pasang.

d. Berapakah banyaknya langkah yang diperlukan untuk memindahkan posisi dua kelompok katak yang masing-masing kelompoknya berjumlah sepuluh?

8. Tentukan rumus suku ke-*n* dan berapakah nilai dari urutan suku yang ditanyakan? (berderajat 1)
   a. 1, 6, 11, 16, 21, ... u_{21} = ...?
   b. 4, 11, 18, 25, 32, ... u_{41} = ...?
   c. 2, 6, 10, 14, 22, ... u_{11} = ...?
   d. 5, 14, 23, 32, 41, ... u_{101} = ...?
   e. 3, 8, 13, 18, 23, ... u_{26} = ...?

9. Tentukan rumus suku ke-*n* dan berapakah nilai dari urutan suku yang ditanyakan? (berderajat 2)
   a. 1, 2, 4, 7, 11, ... u_{10} = ...?
   b. 2, 6, 12, 20, 30, ... u_{40} = ...?
   c. 1, 6, 15, 28, 45, ... u_{100} = ...?
   d. 3, 6, 12, 30, 45, ... u_{19} = ...?
   e. 1, 5, 12, 22, 35, ... u_{20} = ...?

BAB IV
PENUTUP

Bilangan merupakan salah satu ruang lingkup pada mata pelajaran matematika SMP. Ruang lingkup ini memuat tiga standar kompetensi yang dijabarkan lagi ke dalam sembilan kompetensi dasar. Satu standar kompetensi diberikan pada kelas VII semester 1 dan dua standar kompetensi lagi diberikan pada kelas IX semester 2.

Para guru perlu terus menerus mengembangkan berbagai strategi agar standar kompetensi ini dengan mudah dan menyenangkan dapat dipelajari oleh siswa. Berbagai permasalahan pembelajaran yang masih ditemui di lapangan diharapkan dapat segera dicarikan berbagai alternatif solusinya. Baik itu melalui diskusi-diskusi pada forum MGMP maupun membaca berbagai referensi yang relevan.

DAFTAR PUSTAKA

Adi Wijaya. 2008. *Permasalahan Pembelajaran Bilangan Kelas VII SMP/MTs dan Alternatif Pemecahannya*. Yogyakarta: PPPPTK Matematika

Al. Krismanto. 2007. *Aritmetika*. Makalah Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SMP Jenjang Dasar. Yogyakarta: PPPPTK Matematika

Jacobs, RF. 1993. *Holt Introductory Algebra 2*. Florida: Holt Rinehart and Winston

Marsudi Rahardjo. 2007. *Bilangan Asli, Cacah, dan Bulat*. Makalah Diklat Guru Pemandu SD Jenjang Dasar. Yogyakarta: PPPPTK Matematika

Marsudi Raharjo. 2008. *Teknik Penentuan Rumus Suku ke-n Barisan Bilangan Polinom Kelas IX SMP*. Yogyakarta: PPPPTK Matematika

LAMPIRAN

KUNCI LATIHAN BAB II

1. $-5 - (-4) = ...$
   a. dengan garis bilangan model maju-mundur

   Kesepakatan:

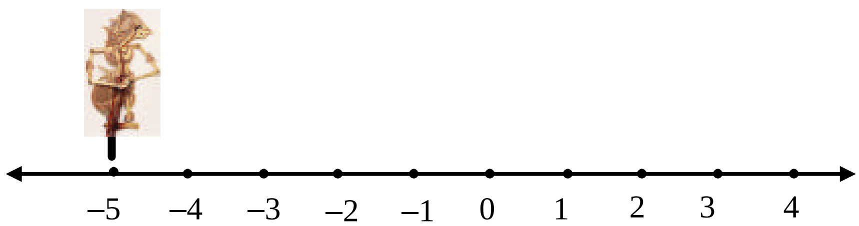
   $-5 - (-4)$ artinya: (i) posisi awal di titik -5 , menghadap ke kanan

   (ii) $-$ (dikurangi) $\Rightarrow$ balik arah

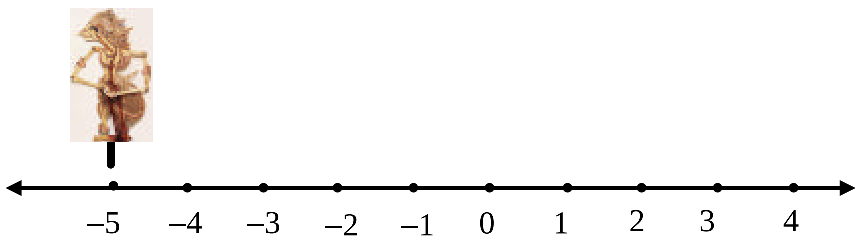
   (iii) -4 $\Rightarrow$ mundur empat langkah

   Ilustrasi peragaan pertahap sebagai berikut:

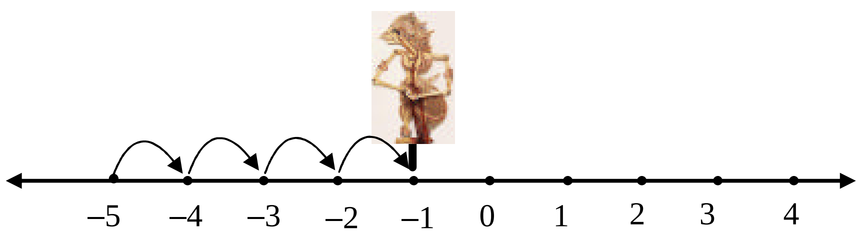
   (i) posisi awal di titik -5 , menghadap ke kanan



   (ii) $-$ (dikurangi) $\Rightarrow$ balik arah



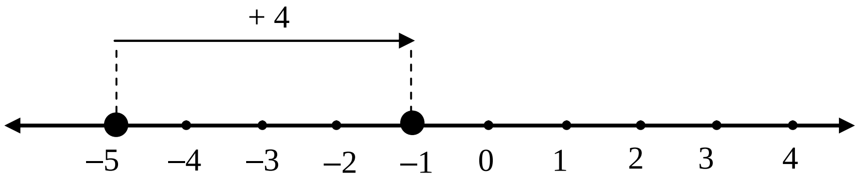
   (iii) -4 $\Rightarrow$ mundur empat langkah



Posisi akhir wayang ada pada bilangan 1 sehingga dari peragaan tampak bahwa: –5 – (–4) = –1

b. dengan garis bilangan model panah

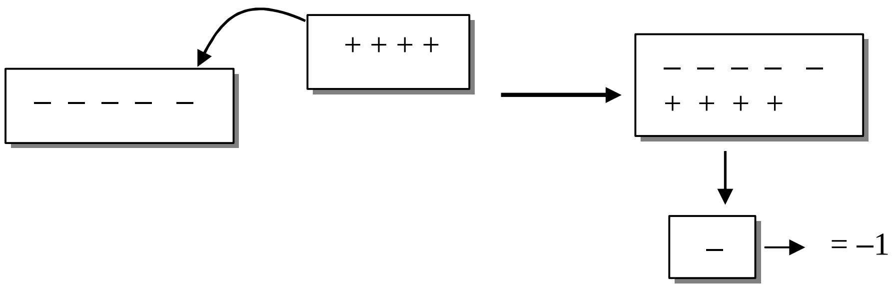
–5 – (–4) = –5 + 4



Bilangan yang tepat di bawah ujung mata panah adalah –1, sehingga –5 –(–4) = –1

c. dengan pendekatan muatan

–5 – (–4) = –5 + 4

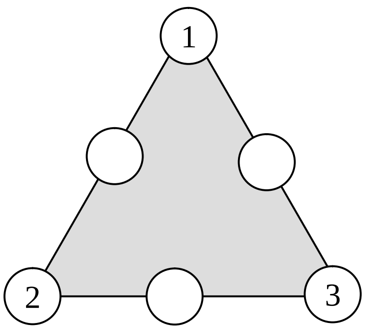


Hasil terakhir terlihat bahwa –5 – (–4) = –1

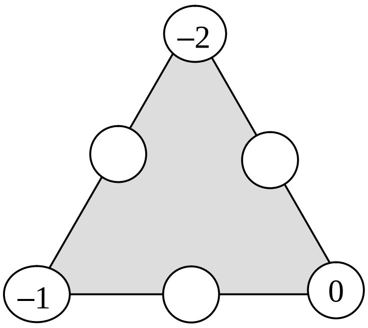
2. Beberapa contoh permainan dan teka-teki matematika untuk melatih keterampilan operasi hitung/memecahkan masalah bilangan bulat dan pecahan.

a. Permainan melatih keterampilan operasi hitung

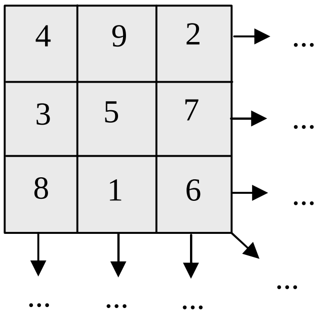
Segitiga Ajaib



Perintah:
1. Letakkan bilangan-bilangan 4, 5, dan 6 pada sisi-sisi segitiga di samping sehingga pada setiap sisi segitiga tersebut berjumlah sama, yaitu 9.
2. Letakkan bilangan 1, 2, dan 3 pada sisi-sisi segitiga di samping sehingga pada setiap sisi segitiga tersebut berjumlah sama, yaitu 0.



Persegi Ajaib

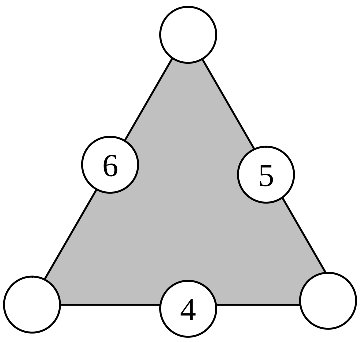


Perintah:
1. Hitunglah jumlah bilangan pada setiap baris, kolom, dan diagonal.
2. Amati hasilnya. Apakah diperoleh bilangan yang sama atau berbeda?

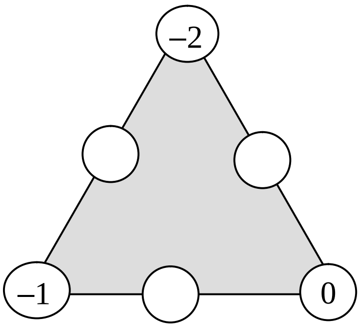
Keterangan:

Bilangan yang diletakkan pada persegi ajaib tersebut dapat dipilih bilangan positif semua, negatif semua, atau campuran tergantung dari tujuannya. Pertanyaan juga dapat dikembangkan lebih lanjut, yang penting masih dalam rangka melatih keterampilan operasi hitung.

b. Permainan melatih kemampuan memecahkan masalah berkaitan dengan operasi hitung



Perintah:
1. Letakkan bilangan-bilangan 1, 2, dan 3 pada sisi-sisi segitiga di samping sehingga pada setiap sisi segitiga tersebut berjumlah sama, yaitu 9.
2. Letakkan bilangan-bilangan –2, –1, 0, 1, 2, dan 3 pada sisi-sisi segitiga di samping sehingga pada setiap sisi segitiga tersebut berjumlah sama, yaitu 0.



Persegi Ajaib

...	...	...
...	...	...
...	...	...

Perintah:

Letakkan bilangan-bilangan –4, –2, 0, 2, 4, 6, 8, 10 dan 12 pada titik-titik kotak di samping sehingga jumlah bilangan pada setiap baris, kolom dan diagonal adalah sama.

Keterangan:

Jika dilihat sepintas, permainan pada butir b ini hampir sama dengan permainan pada butir a. Namun demikian, jika dicermati lebih lanjut, permainan pada butir b ini disamping membutuhkan keterampilan operasi hitung siswa juga membutuhkan kemampuan siswa dalam memilih bilangan yang tepat/sesuai sehingga dapat menjawab permasalahan yang diberikan.

c. Teka-teki matematika untuk melatih keterampilan operasi hitung

Contoh:

Teka-teki menebak hasil pengoperasian bilangan

(penggunaan operasi +, –, ×, :)

Perintah:

1. Bayangkan sebuah bilangan bulat
2. Kalikan dengan 2
3. Hasilnya ditambah dengan 6

4. Hasilnya dibagi dengan 2
5. Hasilnya dikurangi dengan bilangan yang dibayangkan semula

3. Keterangan: Apapun bilangan yang dibayangkan hasil terakhir adalah 3.

   Teka-teki menebak bilangan

   (penggunaan operasi +, –, ×, :)

   Perintah:

   1. Bayangkan sebuah bilangan bulat
   2. Kalikan dengan 2
   3. Hasilnya ditambah dengan 6
   4. Hasilnya dibagi dengan 2
   5. Hasilnya dikurangi dengan bilangan –1

   Keterangan: bilangan yang dibayangkan adalah hasil terakhir dikurang 4.

4. Tanpa menggunakan alat bantu hitung, tentukan:

   a. $\sqrt{59049}$ = ...

$$\begin{array}{lcrl}
 & & \sqrt{59049} & \left(200 + \underbrace{40 + 3}\right. \\
200^2 & \longrightarrow & 40000 & - \\
 & & 19049 & \\
(2 \times 200 + \underset{.....}{40}) \times \underset{...}{40} & \longrightarrow & 17600 & - \\
 & & 1449 & \\
(2 \times 240 + \underset{.....}{3}) \times \underset{...}{3} & \longrightarrow & 1449 & - \\
 & & 0 &
\end{array}$$

$\sqrt{59049}$ = 243

b. $\sqrt[3]{46656} = \ldots$

$\sqrt[3]{4\,6\,6\,5\,6} = 3\,6$

$3^3 = 3\times3\times3 = 27 < 46$

$6^3 = 6\times6\times6 = 216$

5. Salah satu strategi pembuatan soal yang berkaitan dengan melakukan operasi hitung bilangan bulat dan pecahan dalam pemecahan masalah.
   a. Soal dapat disajikan dalam bentuk teks (narasi), diagram, grafik, tabel, atau kombinasi
   b. Soal tidak secara langsung dapat dikerjakan hanya dengan prosedur rutin (tidak langsung hanya menggunakan rumus)
   c. Pengerjaan soal masih menggunakan konsep melakukan operasi hitung bilangan bulat dan pecahan

KUNCI LATIHAN BAB III

1. Menggunakan pola bilangan dapat dimulai dari menghitung hasil 3^4, 3^3. 3^2, 3^1, dan seterusnya. Perhatikan pola yang terjadi. Menggunakan sifat-sifat bilangan berpangkat perhatikan hubungan $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
2. Alternatif penyelesaian**:**
   a. Anak yang belum menjawab benar terhadap soal berbentuk a^{-n} salah satu kemungkinannya adalah anak tersebut tidak tahu bahwa $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, sehingga perlu ditanyakan terlebih dahulu.
   b. Jika anak sudah tahu tetapi masih belum dapat menjawab dengan benar, ada kemungkinan anak tersebut masih lemah dalam pemahaman terhadap bilangan berpangkat bilangan bulat positip sehingga perlu dilakukan perbaikan lagi (remedial tentang bilangan berpangkat bulat positip)

c. Jika anak memang belum tahu bahwa $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ maka perlu dijelaskan kembali dengan menggunakan model pola bilangan.

d. Ambil sembarang contoh (misalnya 3^{-4})

e. Agar bermakna bagi siswa tentunya tidak sekedar diberikan "pengumuman" kepada siswa bahwa soal berbentuk a^{-n} cara penyelesaiannya dengan mengubah menjadi bentuk $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ sehingga menjadi $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$, tetapi terlebih dahulu siswa diminta melihat penyelesaian soal berpola seperti yang telah diuraikan pada kegiatan belajar dibagian depan.

3. Usahakan soal yang dibuat bertipe investigasi sehingga anak akan dapat menemukan sendiri pengetahuannya.
4. $u_n = 2n + 3$; $u_{100} = 203$
5. $u_n = 2n + 2$; $u_{100} = 202$
6. $u_n = n(n + 1)$; $u_{100} = 10.100$
7. $u_n = n(n + 2)$; $u_6 = 48$; $u_{10} = 120$; $u_{100} = 10.200$
8. Kunci:

a. $u_n = 5n - 4$; $u_{21} = 101$

b. $u_n = 7n - 3$; $u_{41} = 284$

c. $u_n = 4n - 2$; $u_{11} = 42$

d. $u_n = 9n - 4$; $u_{101} = 905$

e. $u_n = 5n - 2$; $u_{26} = 128$

9. Kunci:

a. $u_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}$; $u_{10} = 46$

b. $u_n = n(n + 1)$; $u_{40} = 1.640$

c. $u_n = n(2n - 1)$; $u_{100} = 19.900$

d. $u_n = \frac{3n(n+1)}{2}$; $u_{19} = 570$

e. $u_n = \frac{n(3n-1)}{2}$; $u_{20} = 590$

Jalan Kaliurang Km 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, Yogyakarta
Kotak Pos 31 YKBS YOGYAKARTA 55281
Telepon (0274) 885725, 881717, Faksimili 885752
Web site p4tkmatematika.com
E-mail p4tkmatematika@yahoo.com