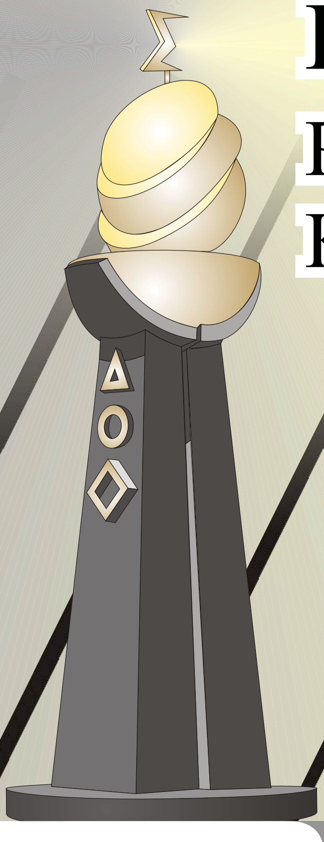
SMP

BERMUTU

Better Education Through Reformed Management and Universal Teacher Upgrading

KAPITA SELEKTA
PEMBELAJARAN ALJABAR
KELAS VIII SMP



DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

Modul Matematika SMP Program BERMUTU

KAPITA SELEKTA PEMBELAJARAN ALJABAR KELAS VIII SMP

Penulis:
Setiawan
Rachmadi Widdiharto

Penilai:
Sunandar
Krisdiyanto HP

Editor:
Ratna Herawati

Lay out:
Joko Purnomo

Departemen Pendidikan Nasional
Direktorat Jenderal Peningkatan Mutu Pendidik dan Tenaga Kependidikan
Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika
2009

KATA PENGANTAR

Puji syukur kita panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa karena atas bimbingan-Nya akhirnya PPPPTK Matematika dapat mewujudkan modul program BERMUTU untuk mata pelajaran matematika SD sebanyak sembilan judul dan SMP sebanyak sebelas judul. Modul ini akan dimanfaatkan oleh para guru dalam kegiatan di KKG dan MGMP. Kami mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada semua pihak yang telah membantu terwujudnya modul-modul tersebut.

Penyusunan modul melibatkan beberapa unsur yaitu PPPPTK Matematika, LPMP, LPTK, Guru SD dan Guru Matematika SMP. Proses penyusunan modul diawali dengan *workshop* yang menghasilkan kesepakatan tentang judul, penulis, penekanan isi (tema) modul, sistematika penulisan, garis besar isi atau muatan tiap bab, dan garis besar isi saran cara pemanfaatan tiap judul modul di KKG dan MGMP. *Workshop* dilanjutkan dengan rapat kerja teknis penulisan dan penilaian *draft* modul yang kemudian diakhiri rapat kerja teknis finalisasi modul dengan fokus *editing* dan *layouting* modul.

Semoga duapuluh judul modul tersebut dapat bermanfaat optimal dalam memfasilitasi kegiatan para guru SD dan SMP di KKG dan MGMP, khususnya KKG dan MGMP yang mengikuti program BERMUTU sehingga dapat meningkatkan kinerja para guru dan kualitas pengelolaan pembelajaran matematika di SD dan SMP.

Tidak ada gading yang tak retak. Saran dan kritik yang membangun terkait modul dapat disampaikan ke PPPPTK Matematika dengan alamat email *p4tkmatematika@yahoo.com* atau alamat surat: PPPPTK Matematika, Jalan Kaliurang Km 6 Condongcatur, Depok, Sleman, D.I. Yogyakarta atau Kotak Pos 31 Yk-Bs 55281 atau telepon (0274) 881717, 885725 atau nomor faksimili: (0274) 885752.

Sleman, Oktober 2009

a.n. Kepala PPPPTK Matematika

Kepala Bidang Program dan Informasi

Winarno, M.Sc.

NIP 195404081978101001

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Perkembangan usia siswa dari usia Sekolah Dasar (SD) ke Sekolah Menengah Pertama (SMP) juga mempengaruhi perkembangan kognitif siswa yakni dari number sense ke symbolic sense. Perubahan ini cukup dirasakan oleh beberapa teman guru matematika di lapangan ketika menyampaikan materi pembelajaran Matematika utamanya terkait dengan pembelajaran materi aljabar. Dari Laporan Hasil *Training Need Assessment* (*TNA*) dan *Recruitment* PPPPTK Matematika Yogyakarta th. 2007 menyebutkan bahwa materi diklat aljabar menempati urutan pertama dalam kategori sangat diperlukan. Diantara poin-poin yang dimaksud antara lain: Penyelesaian Matematika dari masalah yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan linier satu variabel (59,70%), Pemodelan matematika dari masalah yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan linier satu variabel (53,70%), Pemecahan masalah yang terkait dengan aljabar (53, 00%), Relasi dan Fungsi (53,70%) dan Penentuan gradien, persamaan, dan grafik garis lurus (50,70%).

Sementara itu, merujuk pada salah tujuan pembelajaran matematika di SMP dalam rangka mewujudkan hasil belajar berupa kecakapan matematika salah satu diantaranya adalah: memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model Matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh. (Permendiknas No. 22 th 2006 tentang Standar Isi). Kecakapan matematika merupakan kemampuan yang utamanya berkaitan dengan kemampuan kognitif (intelektual). Bila ditinjau dari perkembangan kognitifnya, karakteritik siswa usia Sekolah Menengah Pertama (SMP) berada pada tahap operasi formal. Hal itu sesuai dengan pendapat ahli psikologi kognitif Piaget bahwa perkembangan kognitif mereka yang berusia 11 tahun sampai dewasa berada pada tahap operasi formal, sedang mereka yang berusia sekitar 7-11 tahun berada pada tahap operasi kongkret (Wadsworth, 1984).

Meski pengelompokan perkembangan kognitif dari Piaget itu mendapat kritik karena beberapa penelitian dapat membuktikan bahwa tugas-tugas yang terkait perkembangan kognitif ala Piaget dapat diselesaikan oleh anak-anak pada tahap perkembangan yang lebih awal (Wardhani, 2004), namun pendapat Piaget itu telah berdampak besar dalam praktik-praktik pembelajaran. Prinsip Piaget yang sampai saat ini tetap dianggap penting yaitu perkembangan selalu mendahului pembelajaran. Jadi, agar kecakapan matematika dapat dikuasai optimal oleh siswa maka proses pembelajaran dan pedagoginya harus memperhatikan tahap perkembangan kognitif yang telah dicapai siswa.

PPPPTK Matematika Yogyakarta yang salah satu tugas dan fungsinya adalah pemberdayaan pendidik (guru) Matematika berusaha untuk memfasilitasi peningkatan keprofesionalan tugas tersebut. Tahun 2008, telah menerbitkan 40 buah Paket Fasilitasi Peningkatan KKG/MGMP untuk guru Matematika dari jenjang SD hingga SMA. Seiring dengan upaya tersebut, melalui program BERMUTU (*Better Education Reformed Through Management and Teachers Upgrading*) berusaha meningkatkan tugas dan profesi guru. Modul ini diharapkan mampu menunjang program tersebut dalam memberikan alterantif-alternatif penyelesaian dengan masalah-masalah yang muncul untuk Pembelajaran materi aljabar kelas VIII. Ada baiknya para rekan-rekan guru Matematika SMP merujuk pula materi pada Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP th. 2008 tentang Pembelajaran Aljabar Kelas VII SMP/MTs yang diterbitkan oleh PPPPTK Matematika dengan penulis Al. Krismanto, M.Sc. Sebagai pemahaman awal, atau penguatan materi, bahan di modul ini sebagian juga diambil dari Paket tersebut.

B. Tujuan

Modul ini bertujuan agar para pembaca, khususnya para guru anggota MGMP Matematika SMP lebih memahami permasalahan dalam memberikan beberapa alternatif penyelesaiannya tentang permasalahan aljabar khususnya materi di kelas VIII untuk ketercapaian kompetensi siswa dalam;

- melakukan operasi aljabar,
- menguraikan bentuk aljabar ke dalam faktor-faktornya,
- memahami relasi dan fungsi,
- menentukan nilai fungsi,
- membuat sketsa grafik fungsi aljabar sederhana pada sistem koordinat Cartesius,
- menentukan gradien, persamaan dan grafik garis lurus,
- membuat model matematika dari masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linier dua variabel, dan
- menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linier dua variabel dan penafsirannya.

C. Ruang Lingkup

Bahan ini memuat hal-hal sebagai berikut.

1. Operasi Aljabar dan Pemfaktoran Bentuk Aljabar

   Bagian ini diawali dengan mengingat kembali konsep dan pengetahuan dasar operasi perkalian pada bilangan bulat, kemudian diterapkan dalam bentuk aljabar. Selanjutnya di bahas tentang perkalian dua suku dari suku dua yang diharapkan sebagai *starting point* untuk masuk pada pemfaktoran bentuk aljabar beserta masalah pembelajaran dan alternatif mengatasinya.

2. Relasi, Fungsi dan Persamaan Garis Lurus

   Pada bagian ini diawali dengan pembahasan mengenai relasi antar elemen-elemen dari dua atau lebih himpunan. Sengaja pembahasannya agak detail lebih dari sekedar keperluan guru untuk menerangkan materi relasi di SMP, hal ini dimaksudkan memberi bekal pemahaman guru terhadap materi relasi yang merupakan dasar untuk pengembangan materi fungsi. Selanjutnya dikembangkan ke konsep fungsi yang pada hakikatnya adalah relasi khusus. Pembahasan fungsi disengaja agak detail mengingat urgensi dan esensi fungsi baik dalam matematika maupun cabang ilmu pengetahuan yang lain.

Kemudian dari fungsi-fungsi khusus ada pembahasan khusus mengenai fungsi linear yang dengan kaca geometri merupakan representasi dari garis lurus. Pada bagian akhir dari bab ini siswa difasilitasi mampu mempelajari persamaan garis lurus, dari berbagai situasi.

3. Sistem Persamaan Linier Dua Variabel

   Pada bagian ini dengan diawali dengan menyodorkan konteks, yang menggiring pada sistem persamaan linear dengan tiga peubah. Selanjutnya dibahas teknik-teknik penyelesaian sistem persamaan linear dua peubah, yang dapat diselesaikan baik dengan cara eliminasi, substitusi, ekuasi dan menentukan koordinat potong kedua grafik linear tersebut. Bab ini diakhiri dengan beberapa persoalan yang model matematikanya merupakan sistem persamaan linear dua peubah. Beberapa di antaranya dapat digolongkan soal-soal yang non rutin, yang dapat digunakan untuk mengetahui kemampuan siswa dalam masalah *problem solving.*

D. Saran Penggunaan

Modul ini merupakan bahan ajar yang berisi permasalahan aljabar dan pembelajarannya. Untuk memahaminya, selain membaca dan mendiskusikannya dengan teman-teman di MGMP, perlu dicobakan, kemudian mencari contoh-contoh lain agar alternatif saran yang ditawarkan dapat diolah kembali dan dikembangkan. Tugas hendaknya dikerjakan dan kemudian dipertukarkan dengan teman dalam MGMP, agar pendapat dan komentar dapat saling memberdayakan, disamping memperbaiki saran yang ditawarkan dalam modul ini. Itikad baik dan kejujuran teman “se-tim” dan keterbukaan setiap anggota tim dalam memberikan komentar dan penilaian sangat membantu untuk meningkatkan kompetensi anggota MGMP. Jika teman dalam MGMP memberikan nilai minimal 75% dari hasil jawaban Anda, maka Anda dianggap memahami paket ini.

Bagi siapa pun yang ingin memberikan saran perbaikan paket ini atau ingin berkomunikasi tentang bahan ini atau yang terkait, dapat berhubungan

a. melalui PPPPTK Matematika, alamat *e-mail*: p4tkmatematika@yahoo.com

   alamat *website*: www.p4tkmatematika.com

b. melalui *e-mail* penulis, dengan alamat: setiawan_p4tkm@yahoo.com dan rachmadiw@yahoo.com

BAB II
OPERASI ALJABAR DAN PEMFAKTORAN BENTUK ALJABAR

A. Pengantar

Pada b*ab* ini Anda akan mempelajari masalah operasi aljabar dan pemfaktoran bentuk aljabar. Sebagaimana telah kita ketahui bersama bahwa operasi aljabar dalam matematika merupakan hal yang sangat esensial dalam pembelajaran matematika. Seperti halnya pada operasi bilangan, terhadap bentuk aljabar dapat pula dilakukan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, maupun penarikan akar pangkat dan perpangkatan. Dengan penjumlahan muncul suku-suku dan dengan perkalian muncul pengertian faktor yang merupakan unsur dari perkalian tersebut.

B. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari b*ab* ini Anda diharapkan mampu menjelaskan tentang operasi aljabar, bagaimana proses pembelajarannya, beberapa alternatif penyelesaian yang dihadapi oleh siswa terkait dengan operasi bentuk aljabar, pemfaktoran, pemfaktoran sebagai operasi balikan dari penjabaran, beberapa metode alternatif dalam penjabaran, serta langkah-langkah mengatasi kesulitan yang dihadapi siswa terkait dengan pemfaktoran bentuk aljabar.

Untuk membantu Anda agar menguasai kemampuan tersebut, pembahasan b*ab* ini akan disajikan dalam 2 (dua) Kegiatan Belajar (KB) sebagai berikut.

1. KB – 1 : Operasi Aljabar

   Tujuan pembelajaran dari Kegiatan Belajar 1 ini adalah bahwa setelah mengikuti kegiatan belajar ini guru mampu

   a. Menyederhanakan bentuk aljabar dengan benar.

b. Menjelaskan proses penyederhanaan bentuk aljabar.

c. Melakukan penyederhanaan bentuk alajabar dengan berbagai cara.

2. KB – 2 : Pemfaktoran Bentuk Aljabar.

Tujuan pembelajaran dari Kegiatan Belajar 2, ini adalah bahwa setelah mengikuti kegiatan belajar ini guru mampu

a. Menyelasaikan persoalan aljabar dengan memfaktorkan

b. Menerapkan berbagai cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan dengan memfaktorkan

C. Kegiatan Belajar 1: Operasi Aljabar

> Ketika ada seorang siswa mengerjakan soal $a + a = a^2$,apa yang Anda lakukan? Bagaimana halnya apabila $ab \times 2a = 3a + b$; apa tindakan Anda?

Komunikasi dengan simbol merupakan suatu bentuk bahasa. Karena itu belajar aljabar dapat dipandang sebagai belajar bahasa simbol dan relasi antara bilangan. Jadi perlu memahami konsep dan kesepakatan-kesepakatan dasar yang digunakan dalam bahasa matematika, yaitu aljabar.

Merujuk pada permasalahan tersebut di atas terutama yang terkait dengan operasi bentuk aljabar, beberapa alternatif langkah yang dapat digunakan antara lain sebagai berikut:

1) Dengan pendekatan kontekstual, mantapkan dan ingat kembali pembelajaran tentang operasi bilangan bulat
2) Sembari mengingat, perjelas beberapa pengertian tentang variabel, konstanta, koefisien, bentuk aljabar, suku-suku sejenis dan sifat-sifatnya.
3) Lakukan operasi-operasi bentuk aljabar, kemudian untuk meningkatkan ketrampilan siswa, perbanyak latihan.

Secara garis besar, deskripsi pembelajarannya kurang lebih sebagai berikut. Diskusikan ketika ada seorang siswa sedang sakit kemudian memeriksakan diri atau berobat ke dokter atau rumah sakit, maka akan diberikan resep (Kusrini, 2003). Pada botol atau kemasan obat tersebut biasanya tertulis sehari 3×1 tablet, yaitu aturan memakainya. Kita bisa menanyakan kepada siswa apa maksud penulisan itu. Ungkapan ” 3×1 tablet” maksudnya adalah dalam sehari obat itu harus diminum 3 kali setiap minum masing-masing 1 tablet. Demikian halnya apabila obat batuk 2×2 sendok teh artinya dalam sehari obat batuk harus diminum 2 kali, setiap minum masing-masing 2 sendok teh.

Arti dari aturan pemakaian obat di atas sebenarnya sama dengan arti perkalian dalam matematika. ” 3×1” atau ”2×2” dapat diartikan:

$3 \times \boxed{1} = 1 + 1 + 1$

$2 \times \boxed{2} = 2 + 2$

Angka-angka yang berada di kotak dapat diganti dengan lambang sebarang bilangan bulat, misalnya a. Sehingga bila diganti dengan huruf a, maka:

$2 \times a$ atau ditulis $2a$, dan $2a = a + a$

$3 \times a$ atau ditulis $3a$, dan $3a = a + a + a$

$4 \times a$ atau ditulis $4a$, dan $4a = a + a + a + a$

dan seterusnya.

Perhatikan:
$1 \times a$ dapat ditulis a

Dalam matematika, perkalian untuk bilangan yang sama, seperti “2×2” dapat ditulis 2^2. Selanjutnya coba ditanyakan pada siswa bahwa pada resep dokter ”obat batuk sehari 2×2 sendok teh”, dapatkah ditulis 2^2 ?. Jawabnya tidak dapat. Mengapa? Coba jelaskan!

Selanjutnya pada matematika,

$2 \times 2 \times 2$ dapat ditulis 2^3

$2 \times 2 \times 2 \times 2$ dapat ditulis 2^4,

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ dapat ditulis 2^5,

dan seterusnya.

Penulisan tersebut berlaku juga untuk sembarang bilangan bulat, misalkan a. Dengan demikian berlaku hal berikut:

$a^3 = a \times a \times a$

$a^5 = a \times a \times a \times a \times a$, dan seterusnya

Perhatikan:
a^1 dapat ditulis a

Setelah siswa sudah mulai teringat kembali dengan operasi bilangan-bilangan tersebut, mulailah siswa diarahkan pada beberapa pengertian yang sebenarnya sudah dipelajari pada Kelas VII. Ajak siswa untuk memperhatikan lagi huruf a, dalam $2a$, $3a$ atau a^3 . Huruf a tersebut dinamakan variabel atau peubah, sedangkan 2, $2a$, $3a$, atau a^3 disebut bentuk aljabar. Contoh bentuk-bentuk aljabar lain dengan variabel a dan b adalah $3a^2$, $a + 3$, $-2a$, $a^2 + b$, $3b^2 - a + 2$, dan sebagainya.

Perhatikan bentuk aljabar berikut: $4a^3 + 3a^2 - a^2 + 9a + 7$, dalam bentuk aljabar ini; $4a^3$, $3a^2$, $-a^2$, $9a$, dan 7 dinamakan suku. Dengan demikian bentuk aljabar tersebut terdiri atas 5 suku. Bentuk aljabar yang demikian disebut polinom atau suku banyak . Pada suku $4a^3$; 4 disebut koefisien dari a^3 dan 3 disebut pangkat atau eksponen dari a. Begitu juga dengan $3a^2$; 3 disebut koefisien dari a^2 dan 2 disebut pangkat atau eksponen dari a.

Perhatikan kembali pada bentuk aljabar di atas. Pada suku: $3a^2$ dan $-a^2$, pangkat dari a dari kedua suku tersebut adalah sama yakni 2. Sehingga kedua suku tersebut dinamakan suku sejenis. Dua atau lebih suku dikatakan sejenis apabila memuat variabel atau peubah yang sama dan pangkat yang sama. Bila dalam bentuk aljabar terdapat suku-suku yang sejenis maka suku-suku tersebut dapat disederhanakan dengan dijumlahkan atau dikurangkan.

Contoh:

Sederhanakan

1). $3a^2 + 5a^2$

2). $-2x^3 + 4x^3$

Penyelesaian:

1). $3a^2 + 5a^2 = (a^2 + a^2 + a^2) + (a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2) = 7a^2$

atau dengan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan

$3a^2 + 5a^2 = (3 + 4)\ a^2 = 7a^2$

2). $-2x^3 + 4x^3 = (-2+4)\ x^3 = 2x^3$

Dengan beberapa contoh di atas, untuk memantapkan ketrampilan yang telah dimiliki, siswa bisa diarahkan pada bentuk perkalian dan pembagian operasi sederhana bentuk aljabar.

Contoh:

Sederhanakan

1). $\mathrm{a}^2 \times 2a$

2). $\dfrac{3a^5}{a^2}$

3). $ab^2 \times \dfrac{a^2}{3ab}$

Penyelesaian:

1). $a^2 \times 2a = (a \times a) \times (a + a)$

$= (a + a) \times (a \times a)$

$= a\ (\ a \times a) + a\ (a \times a)$

$= (a^2 \times a) + (a^2 \times a) = a^3 + a^3 = 2\ a^3$

2). $\dfrac{3a^5}{a^2} = \dfrac{3(a \times a \times a \cancel{\times a \times a})}{\cancel{(a \times a)}}$

$= 3\ (a \times a \times a) = 3\ a^3$

3). $ab^2 \times \dfrac{a^2}{3ab} = a \times (\cancel{b} \times b) \times \dfrac{(a \times \cancel{a})}{3 \cancel{a} \cancel{b}}$

$= (a \times b) \times \dfrac{a}{3} = \dfrac{a^2 b}{3}$

Selanjutnya, untuk memantapkan ketrampilan yang sudah dimiliki siswa mulai diarahkan pada bentuk aljabar yang lebih kompleks yang memuat dua variabel, misalnya 5xy, –7xy, 15xy, adalah contoh suku sejenis. Demikian juga bentuk aljabar $-2a^2b$, $3a^2b$, adalah juga contoh dari suku sejenis. Kemudian diberikan latihan-latihan operasi yang melibatkan bentuk aljabar ini.

Refleksi Diri KB - 1

Setelah Anda melaksanakan KB-1 ini, kerjakan Latihan nomor: 1 s.d 5 di bagian Refleksi diri KB – 1 ini dengan sungguh-sungguh. Cek hasil pekerjaan Anda dengan kunci jawaban di bagian Lampiran dari Modul ini, kemudian buat skor hasil pekerjaan Anda dengan rumus

$$\text{Skor refleksi diri } S_c = \frac{\text{Jumlah soal yang dikerjakan dengan benar}}{5} \times 100\%$$

Jika skor refleksi diri Anda lebih atau sama dengan 75%, selamat Anda telah memahami KB-1, dan Anda dapat melanjutkan ke KB – 2 Bab II, dan bagi Anda yang belum mencapai 75% dipersilahkan membaca lagi lebih cermat dan diskusikan dengan kolega Anda masalah yang dirasa kurang jelas dan dicoba lagi megerjakan soal-soal di bawah ini sekali lagi.

Soal Latihan KB – 1.

Sederhanakan bentuk aljabar berikut:

1. $5a - 3b - 6a + 2b$
2. $2x + 3(y - x)$
3. $3p^4 + 2p^3 - p + 2$
4. $2ab + a^2 - ab$
5. $5xy^2 + 2x - 7xy^2 - 5x + 7$

D. Kegiatan Belajar – 2: Pemfaktoran Bentuk Aljabar

Apabila anak diminta memfaktorkan bentuk $x^2 + x + 6$ pada umumnya tidak mengalami kesulitan, namun untuk memfaktorkan $2x^2 + 13x - 24$ mereka masih sering menemui hambatan, bagaimana tindakan Anda?

Dalam semesta bilangan cacah (Krismanto, 2008), faktor suatu bilangan adalah pembagi bulat (dalam hal ini bilangan asli) dari bilangan tersebut.

$12 = 1 \times 12$, maka 1 dan 12 masing-masing adalah faktor bilangan 12.

$12 = 2 \times 6$, maka 2 dan 6 masing-masing adalah faktor bilangan 12.

$12 = 3 \times 4$, maka 3 dan 4 masing-masing adalah faktor bilangan 12.

Telah diketahui bahwa faktor bulat positif bilangan 24 adalah 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, dan 24. Mendaftar faktor bulat positif dapat dilakukan dengan cara yang memudahkan dalam penyusunannya, yaitu menentukan pembagi bulat dan hasilnya (yang sekaligus juga faktor) secara berdampingan:

1	24
2	12
3	8
4	6

Bentuk aljabar pun dapat difaktorkan. Keterampilan memfaktorkan merupakan salah satu keterampilan yang diperlukan dalam menyelesaikan masalah dalam bentuk aljabar.

Contoh**:** $6a^2b$ mempunyai 24 faktor bulat positif**:**

1	$6a^2b$	a	$6ab$	b	$6a^2$
2	$3a^2b$	$2a$	$3ab$	$2b$	$3a^2$
3	$2a^2b$	$3a$	$2ab$	$3b$	$2a^2$
6	a^2b	$6a$	ab	$6b$	a^2

Sementara itu guna mengantarkan siswa ke pemfaktoran bentuk aljabar, siswa juga diingatkan tentang pengertian dari faktor persekutuan terbesar (FPB). Untuk maksud tersebut misalnya ditanyakan, berapa FPB dari 8 dan 12?

Faktor-faktor dari 8 : 1 , 2, 4, 8

Faktor-faktor dari 12 : 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Faktor persekutuan dari 8 dan 12 adalah 1, 2, dan 4. Karena $4 > 2$, dan $4 > 1$, maka 4 adalah FPB dari 8 dan 12.

Terkait dengan pemfaktoran bentuk aljabar, Marsigit (2009) menyebutkan beberapa bentuk aljabar yang difaktorkan:

1. Faktorisasi bentuk $ax + b$ atau $ax - b$

   Contoh: $4a + 6$; $x^2 - 2x$
2. Faktorisasi bentuk $x^2 + 2xy + y^2$

   Contoh: $b^2 + 6b + 9$; $9x^2 - 30x + 25$
3. Faktorisasi bentuk $x^2 - y^2$

   Contoh : $4x^2 - 4y^2$; $9m^2 - 64$
4. Faktorisasi bentuk $ax^2 + bx + c$

   Contoh : $x^2 + 5x + 6$; $6x^2 + x - 15$

1. Faktorisasi bentuk *ax* + *b* atau *ax* – *b*

Bagaimanakah cara melakukan pemfaktoran pada bentuk aljabar $ax + b$ atau $ax - b$? Cara untuk memfaktorkan atau faktorisasi betuk aljabar ini adalah sebagai berikut.

1. Carilah faktor persekutuan setiap suku.
2. Bagilah bentuk aljabar tersebut dengan faktor persekutuan terbesar dari setiap sukunya.

Contoh:

Faktorkan.

1). $4a + 6$

2). $x^2 - 2x$

Penyelesaian :

a. Perhatikan faktor persekutuan dari $4a$ dan 6 adalah 2. Telah juga diketahui bahwa FPB dari 4 dan 6 adalah 2 sehingga masing-masing suku dibagi dengan 2 diperoleh:

$$\frac{4a}{2} = 2a \quad \text{dan} \quad \frac{6}{2} = 3\,.$$

Dengan demikian pemfaktoran dari $4a + 6$ adalah $2(2a + 3)$ atau

$4a + 6 = 2\ (2a + 3)$

b. Perhatikan faktor persekutuan dari x^2 dan $-2x$ adalah x. Telah juga diketahui bahwa FPB dari 1 dan -2 adalah 1 sehingga masing-masing suku dibagi dengan $1 \times x = x$ diperoleh:

$$\frac{x^2}{x} = x \text{ dan } \frac{-2x}{x} = -2$$

Dengan demikian pemfaktoran dari . $x^2 - 2x$ adalah $x\ (x - 2)$ atau $x^2 - 2x = x\ (x - 2)$

2. Faktorisasi bentuk $x^2 + 2xy + y^2$

Pemfaktoran bentuk $x^2 + 2xy + y^2$ dapat dilakukan dengan mengarahkan siswa dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 &= x^2 + xy + xy + y^2 \\ &= x\ (x + y) + y\ (x + y) \\ &= (x + y)\ (x + y) \\ &= (x + y)^2 \end{aligned}$$

Jadi $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$. Sehingga $x^2 + 2xy + y^2$ merupakan bentuk kuadrat sempurna. Pada uraian tersebut terlihat karakteristiknya bahwa suku pertama (x^2) dan suku ketiga (y^2) dari hasil pengkuadratan suku dua merupakan bentuk kuadrat. Adapun suku kedua merupakan dua kali akar kuadrat dari suku pertama dan akar kuadrat dari kuadrat suku ketiga.

Dengan cara yang sama bisa diperoleh bahwa $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

Contoh:

Faktorkan 1). $b^2 + 6b + 9$

2). $9x^2 - 30x + 25$

Penyelesaian:

1). $b^2 + 6b + 9 = b^2 + 3b + 3b + 3^2$; (ingat $6b = 3b + 3b$)

$= b(b+3) + 3\ (b+3)$; (b^2+3b) bisa difaktorkan sebagai $b(b + 3)$)

$= (b + 3)^2$

Atau dengan melihat karakteristik uraian seperti di atas:

$b^2 + 6b + 9 = b^2 + 2\ .\ \sqrt{b^2}\sqrt{9} + 3^2$

$= b^2 + 2.b.3 + 3^2$; (ingat bentuk $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$)

$= (b + 3)^2$

2). $9x^2 – 30x + 25$; dengan karakteristik uraian di atas dapat dituliskan

$9x^2 – 30x + 25 = 9x^2 - 2\ .\ \sqrt{9x^2}\sqrt{25} + 5^2$

$= 9x^2 – 2.\ 3x^2.\ 5 + 5^2$ (ingat bentuk $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$)

$= (3x – 5)^2$

3. Faktorisasi bentuk $x^2 – y^2$

Bentuk $x^2 - y^2$ dinamakan bentuk selisih dua kuadrat. Faktorisasi bentuk $x^2 – y^2$ adalah sebagai $(x + y)\ (x – y)$ atau $x^2 – y^2 = (x + y)\ (x – y)$

Pemfaktoran bentuk $x^2 - y^2$ dapat dilakukan dengan mengarahkan siswa dengan cara sebagai berikut:

$x^2 – y^2 = x^2 + xy - xy - y^2$

$= (x + y)\ x + (x + y)\ (-y)$

$= (x + y)\ (x – y)$

Contoh :

Faktorkan: 1). $4x^2 – 4y^2$

2). $9m^2 – 64$

Penyelesaian:

1). $4x^2 – 4y^2 = 4x^2 + 4xy – 4xy – 4y^2$

$= (2x + 2y)\ (2x) + (2x + 2y)\ (-2y)$

$= (2x + 2y)\ (2x – 2y)$

Atau

$4x^2 – 4y^2 = 4\ (x^2 – y^2)$

$= 4\,(x + y)\,(x - y)$

2). $9m^2 - 64 = (3m)^2 - 8^2$

$= (3m + 8)\,(3m - 8)$

4. a. Faktorisasi bentuk $ax^2 + bx + c$

Untuk faktorisasi bentuk ini ada baiknya dimulai dari perkalian tentang suku sejenis terlebih dahulu. Pembahasan tentang suku sejenis dan perkalian bentuk aljabar di atas, apabila siswa telah cukup menguasai akan membantu pada pemfaktoran. Terkait dengan masalah pemfaktoran sebagai *trigger* di atas, beberapa langkah alternatif yang bisa dilakukan adalah sebagai berikut.

i. Mantapkan dahulu dengan pemahaman tentang suku sejenis, suku tak sejenis, dan perkaliannya.

ii. Perjelas tentang perkalian dua suku dari suku dua dengan beberapa cara antara lain: *splitting method, smiley face method,* dsb.

iii. Dengan memperhatikan jabaran tersebut, arahkan pada pemahaman bahwa pemfaktoran adalah proses balikan dari perkalian/menjabarkan.

iv. Apabila bentuk aljabar yang difaktorkan $ax^2 + bx + c$, lakukan untuk nilai a =1 dahulu yang difaktorkan.

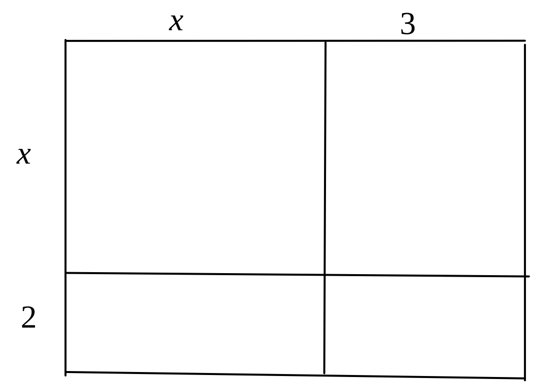
v. Pastikan bahwa langkah pada poin d telah dikuasai, baru melanjutkan untuk proses pemfaktoran dengan a > 1.

Secara sederhana langkah-langkah tersebut di atas apabila dideskripsikan adalah sebagaimana berikut ini.

Ulangi sepintas tentang operasi bentuk aljabar diatas, sebagai *starting point* untuk masuk ke perkalian dua suku dari suku dua. Untuk perkalian dua suku dari suku dua ada beberapa alternatif metode yang bisa dilakukan antara lain sebagaimana disampaikan oleh Chambers (2008) berikut ini:

Cara:

1.The ”splitting method”	$(x + 3)(x + 2) = x\,(x + 2) + 3\,(x + 2)$ $= x^2 + 2x + 3x + 6$ $= x^2 + 5x + 6$

2. FOIL	FOIL : *a mnemonic for " **f**irst, **o**uter, **i**nner, **l**ast", the four pairs of terms that need to be multiplied*
3. The "smiley face method"	$(x + 3)\ (x + 2)$
4. The "grid method"	$\begin{array}{c\|cc} & \boldsymbol{x} & \mathbf{+3} \\ \hline \boldsymbol{x} & \boldsymbol{x^2} & \mathbf{3}\boldsymbol{x} \\ \mathbf{+2} & \mathbf{2}\boldsymbol{x} & \mathbf{6} \end{array}$
5. The "area method"	

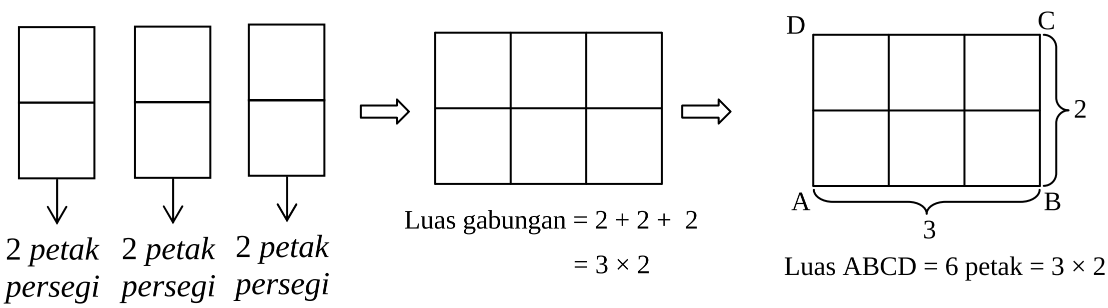
Keterangan:

1. Untuk ***"Splitting method"*** atau metode pemisahan, salah satu suku dua dipisahkan sebagai penjabaran penjumlahan dari suku dua yang ada, dalam hal ini suku dua (x + 3). Kemudian baru dikalikan dengan mengikuti hukum distributif.
2. ***"FOIL method"*** yang merupakan akronim dari ***"First, Outer, Inner, Last",*** atau bisa pula dinyatakan sebagai PLDA yakni "Pertama, Luar, Dalam, Akhir" Maksudnya, ketika dua suku dari suku dua itu diposisikan untuk dikalikan maka, lakukan perkalian yang *pertama dengan pertama* (dari masing-masing suku dua), perkalian suku yang *luar dengan luar*, perkalian suku yang *dalam dengan dalam*, dan perkalian suku yang *akhir dengan akhir*".

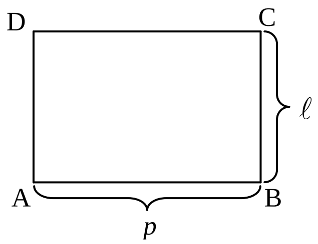
3. The ***"smiley face method",*** atau metode "gambar senyum" yang lebih melihat pada ilustrasi atau gambar dari alur perkalian yang menyerupai senyuman seseorang.
4. The "***grid method***", metode table/kotak. Metode ini menggunakan table dalam melaksanakan perkalian dua suku dari suku dua yang diketahui. Masing-masing suku ditaruh pada lajur kolom dan baris dari table yang dimaksud, kemudian pada hasil kali dari suku-suku tersebut ditaruh pada sel-sel yang bersesuaian.
5. The "***area method***", metode ini dengan pendekatan geometris yakni luas persegi panjang. Perkalian dua suku dari suku (x + 3) dan (x + 2) yang digambarkan sebagai luas dari persegi panjang dengan panjang (x + 3) dan lebar (x + 2).

Dengan pendekatan yang hampir serupa, Raharjo (dalam Limas No. 17, Desember th. 2006) untuk perkalian dua suku dari suku dua ini dijelaskan seperti berikut ini:

Mengulang kembali makna luas persegi panjang, seb*ab* makna perkalian dua bilangan bebas bersesuaian dengan luas bangun dua dimensi (dimensi panjang dan lebar) sedangkan jika yang dikalikan 3 bilangan bebas akan bersesuaian dengan volum bangun tiga dimensi (dimensi panjang, lebar, dan tinggi) Perhatikan bahwa jika 3 bangun persegi panjang yang masing-masing luasnya 2 petak persegi berikut jika digabungkan menjadi satu akan berbentuk persegi panjang yang luasnya 6 petak persegi yakni 6 = 3 × 2

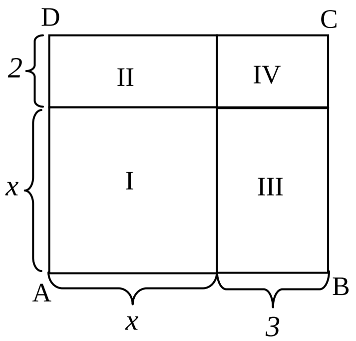


Dengan melihat pola yang ditunjukkan, diperoleh kesimpulan umum (generalisasi) bahwa untuk setiap persegi panjang yang panjang dan lebarnya berturut-turut adalah p dan ℓ, maka



Luas persegi panjang ABCD adalah $\boxed{L = p \times \ell}$

Sekarang misal kita mempunyai sebuah persegi panjang ABCD yang disekat menjadi 4 bagian dengan ukuran masing-masing diketahui seperti berikut.



Maka

Luas ABCD = $AB \times$ BC

$= (x + 3)(x + 2)$

Luas I = x^2

Luas II = $2x$

Luas III = $3x$

Luas IV = 6

Luas ABCD = Luas (I + II + III + IV)

$(x + 3)(x + 2) = x^2 + 2x + 3x + 6$

$= x^2 + 5x + 6$

Kesimpulannya

menjabarkan

$(x + 3)(x + 2) = x^2 + 5x + 6$ ……………(1)

memfaktorkan

Perhatikan bahwa proses pengubahan bentuk (1) di atas dari kiri ke kanan secara aljabar disebut ***menjabarkan,*** sedangkan dari kanan ke kiri disebut ***memfaktorkan***. Pertanyaan yang kita ajukan ke siswa adalah “bagaimana kita dapat mengubah bentuk di atas (dari kiri ke kanan dan sebaliknya dari kanan ke kiri) jika gambar geometrinya tidak ada?”. Itulah yang dalam topik aljabar disebut *menjabarkan* dan *memfaktorkan.*

4. b. Faktorisasi bentuk $ax^2 + bx + c$ (untuk a =1)

Merujuk pada pengertian menjabarkan dan memfaktorkan di atas, Marsudi (Limas, 2006) menyebutkan bahwa untuk maksud faktorisasi bentuk ini dapat didekati dengan prosedural maupun non prosedural.

A. *Menjabarkan* (*kiri ke kanan*)

$(x + 3)(x + 2) = x(x + 2) + 3(x + 2)$ .... *sifat distributif pekalian*(×) *terhadap* +

$= x^2 + 2x + 3x + 6$ ………*sifat distributif × terhadap +*

$= x^2 + 5x + 6$ ……*hasil pengumpulan suku-suku sejenis.*

B. *Memfaktorkan* (*kanan ke kiri*)

1. *Secara Prosedural (berdasarkan aturan matematika yang benar)*

$x^2 + 5x + 6 = 1x^2 + 5x + 6$

Kalikan = 6
= 1 × 6
= $\underbrace{2 \times 3}$............ *kedua faktor inilah yang jumlahnya sama dengan koefisien x. Sehingga 5x harus dipecah menjadi 2x dan 3x*

jumlah faktor yang = koef. x

$= x^2 + 2x + 3x + 6$
$= (x^2 + 2x) + (3x + 6)$ …………*kelompokkan dalam 2 suku*
$= x(x + 2) + 3(x + 2)$ ………… *keluarkan FPB masing-masing suku*
$= (x + 3)(x + 2)$ …………....*keluarkan faktor yang sama, dalam hal ini* (*x* + 2) *dari kanan.*

Dengan demikian secara aljabar tebukti benar bahwa

$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$ ▩

2. *Secara non-Prosedural (trik/cara cepat)*

$x^2 + 5x + 6 = 1x^2 + 5x + 6$, *akan difaktorkan dlm bentuk* (*x*)(*x*).

Kalikan = 6
= 1 × 6
= $\underbrace{2 \times 3}$.......... *kedua faktor inilah yang jumlahnya sama dengan koefisien x. Sehingga bentuk pemfaktorannya menjadi* (*x* + 2)(*x* + 3). *Yaitu*

jumlah faktor yang = koef. x

$= (x \quad)(x \quad)$
$= (x + 2)(x + 3)$
$= (x + 3)(x + 2)$ ... *sifat komutatif perkalian* (*bolak balik sama*)

Dengan demikian maka
$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$ ▒

Sementara itu untuk bentuk ax^2 + bx + c dengan a = 1, Marsigit (2009) menyebutkan bahwa faktorisasi bentuk **ax^2 + bx + c** adalah $(x+ p)(x+q)$ dengan b = p + q dan c = p × q.

Dari contoh di atas;
$x^2 + 5x + 6$; dalam hal ini a = 1, b = 5 dan c = 6;
b = p + q --- 5 = p + q
c = p × q --- 6 = p × q , selanjutnya dicari dua bilangan yang jumlahnya 5 dan hasil kalinya sama dengan 6
5 = 1 + 4 ---- 1 × 4 ≠ 6
5 = 2 + 3 ---- 2 × 3 = 6, jadi nilai p yang q yang dimaksud adalah p = 2 dan q = 3. Dengan demikian faktorisasi dari $x^2 + 5x + 6$ adalah $(x + 2)(x + 3)$, atau
$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

4. c. Faktorisasi bentuk ax^2 + bx + c (untuk a > 1)

Biasanya pemfaktoran ini yaitu dengan koefisien x^2 sama dengan 1 sebagaimana disajikan di atas relatif agak lancar, yang bermasalah yaitu jika koefisien x^2 (suku kuadrat) lebih dari 1.

Contoh:

Faktorkan = $6x^2 + x – 15$

Penyelesaian:

Alternatif pertama, Raharjo (dalam Limas No 17. Desember 2006) , kita tawarkan ke siswa adakah diantara siswa yang dapat mengubah bentuk

$$(2x – 3)(3x + 5) \underset{\textit{memfaktorkan}}{\overset{\textit{menjabarkan}}{\rightleftarrows}} 6x^2 + x – 15$$

namun bukan dari kiri ke kanan melainkan dari kanan ke kiri?

Biasanya tak seorangpun mampu melakukannya kecuali siswa berbakat yang sudah mendapatkan informasi dari pihak luar. Jika hal seperti ini yang terjadi guru dapat memberikan contoh cara memfaktorkan yang bersifat *prosedural* dan *non prosedural* seperti berikut.

1. *Secara Prosedural*

$6x^2 + 1x - 15 = 6x^2 + \ \dots\ -15$

Bagian tengah yakni 1x akan dipecah sehingga pemfaktoran dapat dilakukan dengan lancar.

Kalikan $\rightarrow$ *hasil* $= 90$

$$\left.\begin{aligned} &= 1 \times 90 \\ &= 2 \times 45 \\ &= 3 \times 30 \\ &= 5 \times 18 \\ &= 6 \times 15 \\ &= 9 \times 10 \end{aligned}\right\}$$

Carilah mana diantara pemfaktoran 90 ini yang faktor-faktornya mempunyai jumlah/selisih = 1 (*yaitu koefisien dari x*)

Agar *9* dan *10 mempunyai jumlah sama dengan 1* maka yang *9* kita tandai *negatif* dan yang *10* kita tandai positif, sehingga menjadi *–9* dan *10*. Maka nilai sukudua bagian tengah yaitu *1x* pecah menjadi *–9x* dan *10x*. Sehingga

$$\begin{aligned} 6x^2 + 1x - 15 &= 6x^2 + \ \dots\ -15 \\ &= 6x^2 - 9x + 10x - 15 \\ &= (6x^2 - 9x) + (10x - 15) \\ &= 3x(2x - 3) + 5(2x - 3) \\ &= (3x + 5)(2x - 3) \\ &= (2x - 3)(3x + 5) \end{aligned}$$

… keluarkan faktor persekutuan terbesarnya

Keluarkan faktor yang sama yakni (*2x* – *3*) *ke kanan* (*sifat distributif kanan)*

2. *Secara non-Prosedural (Cara cepat/trik saja)*

Karena sukudua $6x^2 + 1x - 15$ *koefisien x nya 6*, maka untuk kelancaran proses pemfaktoran, bentuk *identitas* (*pernyataan yang selalu benar untuk setiap nilai variabel x yang diberikan*) yang dimaksud nantinya adalah seperti berikut

$$6x^2 + 1x - 15 = \frac{(6x \quad)(6x \quad)}{6}$$

Teknik yang dimaksud selengkapnya adalah

$$6x^2 + 1x - 15 = \frac{(6x \quad)(6x \quad)}{6}$$

Kalikan $\longrightarrow$ *hasil* = *90*

= *1* × *90*
= *2* × *45*
= *3* × *30*
= *5* × *18*
= *6* × *15*
= *9* × *10*.

Carilah mana diantara pemfaktoran 90 ini yang faktor-faktornya mempunyai jumlah/selisih = 1 (*yaitu koefisien dari x*)

Karena diantara faktor-faktor dari *90* yang berselisih *1* adalah *9* dan *10* maka agar *keduanya berjumlah sama dengan 1* faktor yang *9* diberi tanda negatif dan faktor yang *10* diberi tanda positif yakni masing-masing menjadi *–9* dan *10*. Sehingga proses pemfaktoran berikutnya adalah seperti berikut.

$$\begin{aligned} 6x^2 + 1x - 15 &= \frac{(6x \quad)(6x \quad)}{6} \\ &= \frac{(6x - 9)(6x + 10)}{6} \\ &= \frac{3(2x - 3).2(3x + 5)}{6} \\ &= (2x - 3)(3x + 5) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Alternatif kedua, Krismanto (2008) adalah sebagai berikut:

$= \ 6x^2 + 1x - 15$

$= \frac{1}{6}(6.6x^2 + 6.1x - 6.15)$

$= \frac{1}{6}((6x)^2 + 1(6x) - 90)$; *bayangkan ada bentuk* $p^2 + 1p - 90$

$= \frac{1}{6}((6x - 9)(6x + 10))$

$= \frac{1}{6}(3(2x - 3). 2(3x + 5))$

$= (2x - 3)(3x + 5)$

Alternatif ketiga, Marsigit (2009) menyebutkan bahwa langkah – langkah untuk memfaktorkan bentuk $ax^2 + bx + c$ dengan $a > 1$ adalah sebagai berikut :

i. Ubah bentuk $ax^2 + bx + c$ menjadi $ax^2 + (p + q)x + c = ax^2 + px + qx + c$ dengan $p + q = b$ dan $p \times q = a \times c$
ii. Bentuk aljabar $ax^2 + px + qx + c$ dapat dipandang sebagai jumlah dua bentuk aljabar yaitu $ax^2 + px$ dan $qx + c$
iii. Tentukan FPB suku-suku ax^2 dan px. Kemudian tuliskan $ax^2 + px$ dalam bentuk hasil kali faktor-faktornya.
iv. Tentukan pula FPB suku-suku qx dan c. Kemudian tuliskan $qx + c$ dalam bentuk hasil kali faktor-faktornya.
v. Setelah melakukan langkah c dan d, akan diperoleh sebagai berikut:

$$ax^2 + bx + c = (a_1x(a_2x + b_2) + b_1(a_2x + b_2)$$
$$= (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)$$

Dengan $a_1 \times a_2 = a$ dan $(a_1 \times b_2) + (a_2 \times b_1) = b$

Dari contoh di atas dapat diselesaikan sebagai berikut:

$6x^2 + 1x - 15$

Pertama, dicari nilai p dan q dengan ketentuan $p + q = 1$ dan $p \times q = 6 \times (-15) = -90$. Nilai p dan q yang dimaksud adalah -9 dan 10 sehingga

$6x^2 + 1x - 15 = 6x^2 - 9x + 10x - 15$

Dengan demikian bentuk $6x^2 + 1x - 15$ dapat ditulis sebagai jumlah dari $(6x^2 - 9x)$ dan $(10x - 15)$. Selanjutnya tentukan FPB dari $6x^2 - 9x$ dan FPB dari $10x - 15$.

FPB dari $6x^2 - 9x$ adalah 3x, dan FPB dari $10x - 15$ adalah 5.

Jadi, bentuk $6x^2 + 1x - 15$ dapat ditulis sebagai;

$$\begin{aligned} 6x^2 + 1x - 15 &= 6x^2 - 9x + 10x - 15 \\ &= 3x(2x - 3) + 5(2x - 3) \\ &= (3x + 5)(2x - 3). \end{aligned}$$

Refleksi Diri KB - 2

Setelah Anda melaksanakan KB-2 ini, kerjakan Latihan nomor: 1 s.d 7 di bagian akhir Refleksi Diri KB – 2 ini dengan sungguh-sungguh. Cek hasil pekerjaan Anda dengan kunci jawaban di bagian Lampiran dari Modul ini, kemudian buat skor hasil pekerjaan Anda dengan rumus

$$\text{Skor refleksi diri } S_c = \frac{\text{Jumlah soal yang dikerjakan dengan benar}}{7} \times 100\%$$

Jika skor refleksi diri Anda lebih atau sama dengan 75%, selamat Anda telah memahami KB – 2 B*ab* II, dan Anda dapat melanjutkan ke B*ab* III, dan bagi Anda yang belum mencapai 75% dipersilahkan membaca lagi lebih cermat dan diskusikan dengan kolega Anda masalah yang dirasa kurang jelas dan dicoba lagi megerjakan soal-soal di bawah ini sekali lagi.

Soal Latihan KB – 2.

Faktorkanlah bentuk-bentuk aljabar berikut ini dengan menggunakan berbagai cara:

1. $8a - 2$
2. $15pq^2 + 5pq$
3. $x^2 + 10x + 25$
4. $9m^2 + 12\,mn + 4n^2$
5. $4a^2b^2 - 25$
6. $16p^2 - 7(p - q)^2$
7. $3m^2 - 16\,my - 12y^2$

BAB III
RELASI, FUNGSI DAN PERSAMAAN GARIS LURUS

A. Pengantar

Pada bab ini Anda akan mempelajari masalah relasi, fungsi dan persamaan garis lurus. Sebagaimana telah kita ketahui bersama bahwa fungsi suatu pengertian khusus dalam matematika merupakan hal yang sangat esensial dalam pembelajaran matematika. Bahwa konsep fungsi dikembangkan atas dasar konsep relasi khususnya relasi binar, sehingga pembahasan mengenai relasi dibuat agak mendetail dengan tujuan untuk memudahkan guru untuk mengambil konteks dalam pembelajaran matematika.

B. Tujuan Pembelajaran

Setelah Anda mempelajari bab ini, diharapkan mampu menjelaskan relasi binar dari elemen-elemen dari satu atau lebih himpunan, menjelaskan konsep fungsi yang merupakan relasi khusus dan menentukan nilai fungsi, dan menjelaskan bagaimana mendesain grafik fungsi serta menentukan gradien dan persamaan garis lurus.

Untuk membantu Anda agar menguasai kemampuan tersebut, pembahasan bab ini dikemas dalam 4 (empat) kegiatan belajar sebagai berikut.

1. KB-1: Relasi

   Setelah mengikuti kegiatan belajar 1 ini, guru diharapkan dapat:

   a. Menjelaskan konsep relasi binar antar elemen-elemen dari satu atau lebih himpunan

   b. Menyajikan berbagai cara penyajian suatu relasi

2. KB-2: Fungsi

   Setelah mengikuti kegiatan belajar 2 ini, guru diharapkan dapat:

   a. Menjelaskan konsep fungsi dan kaitannya dengan relasi
   b. Mengidentifikasi sifat-sifat fungsi dan mengklasifikasikan sesuai dengan karakteristik yang dimilikinya.

3. KB-3: Grafik fungsi aljabar

   Setelah mengikuti kegiatan belajar 2 ini, guru diharapkan dapat menjelaskan cara mengkonstruksi suatu grafik fungsi dan mengaplikasikannya untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang terkait dengan fungsi.

4. KB-4: Gradien dan Persamaan Garis Lurus

   Setelah mengikuti kegiatan belajar 4 ini, diharapkan guru mampu menjelaskan cara menentukan kemiringan suatu garis dan menentukan persamaan garis lurus.

C. Kegiatan Belajar-1: Relasi

Disajikan suatu himpunan {(Muhammad Ali, tinju), (Ronaldo,sepak bola), (Roger Federer, tenis), (Valentino Rossi, motoGP), (Kimi Raikkonen, F1)}, himpunan pasangan berurut ini menyajikan relasi antar dua elemen dari satu atau lebih himpunan, deskripsikan relasi di atas.

Agar dapat mendeskripsikan suatu relasi antar elemen-elemen dari dua atau lebih himpunan sebagaimana relasi di atas, maka Anda perlu mencermati uraian di bawah ini dengan sebaik-baiknya.

1. Pengertian Relasi

Dari data pribadi siswa yang dapat diambil dari Bimbingan dan Konseling, dicatat hobi dari beberapa siswa diantaranya: Ali gemar bermain badminton, Budi gemar bermain sepakbola, Citra gemar bermain basket dan tenis meja, Desy gemar bermain basket dan tenis meja, sedang Elly tak satupun cabang olehraga yang digemarinya.

Kalau kita pandang hubungan antar elemen-elemen dari semesta ini pada hakikatnya hubungan ini dalam matematika kita kenal dengan nama **relasi.**

Unsur-unsur yang menjadikan hubungan antar elemen ini dikatakan relasi adalah:

a. adanya dua himpunan yang tidak kosong yakni :
   A = {Ali, Budi, Citra, Desy, Elly}
   B = {badminton, sepakbola, basket, tenis meja}
b. adanya aturan pengawanan antar elemen-elemen, yakni suatu kalimat terbuka "*a* gemar bermain *b*".

Pembahsan relasi di sini adalah menyangkut relasi-relasi di dalam suatu himpunan maupun dengan anggota dari himpunan lain. Relasi yang menyangkut dua anggota disebut **relasi binar (diadic),** relasi yang menyangkut tiga elemen disebut relasi **terner (triadic),** sedang yang menyangkut empat elemen disebut **relasi kuarterner (tetradic),** dan yang menyangkut lebih dari empat elemen disebut **relasi polyadic.**

Di bawah ini diberikan beberapa contoh tentang relasi-relasi tersebut :

(1) Contoh relasi binar (diadic) :
   (a) "*x* lebih dari atau sama dengan *y*"
   (b) "Abdor adalah ayah dari Andini"

(2) Contoh relasi terner (triadic) :
   (a) "garis *a* sejajar *b* karena *b* sejajar *c*"
   (b) "Ali benci pada Budi yang kerenanya Elly tak mempedulikannya lagi"

(3) Contoh relasi kuarterner (tetradic) :
   (a) "*p*, *q*, *r*, dan *s* adalah sisi-sisi empat persegi panjang *PQRS*"
   (b) "Anik, Budi, Citra dan Desy duduk mengitari meja makan"

(4) Contoh relasi polyadic :

(a) "Ketujuh penjahat itu saling berkelahi karena merasa dicurangi dalam pembagian hasil kejahatannya"

(b) "Para guru matematika SMP se Kabupaten Bantul saling berdiskusi dengan dipandu Guru Inti MGMP-nya".

Selanjutnya fokus pembahasan kita pada relasi binar, yaitu relasi yang menyangkut pasangan elemen dari satu atau lebih himpunan. Untuk dapat mendefinisikan relasi (relasi binar) diperlukan :

a) suatu himpunan *A* yang tidak kosong
b) suatu himpunan *B* yang tidak kosong
c) suatu kalimat terbuka, yang kita singkat sebagai $P(x,y)$, dimana $\mathrm{P}(a,b)$ dapat bernilai benar atau salah untuk tiap pasangan berurut (a,b).

Jika $P(a,b)$ benar maka kita tulis aRb atau $R(a,b)$, dan sebaliknya jika salah kita tulis $a \not R b$ atau $\not R(a,b)$.

Contoh 1

$A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Dan ambillah kalimat terbuka $P(x,y)$ yang merumuskan relasi dari *A* ke *B* dengan : "*x* adalah faktor dari *y*", maka :

$2R2$, $2R4$, $2R6$, $3R3$, $3R6$, $4R4$, $5R5$, $6R6$ sedangkan $2 \not R 5$, $3 \not R 5$, $5 \not R 6$… .

Contoh 2

P = {Ali, Budi, Citra, Desy, Elly}

Q = {badminton, sepakbola, bolabasket, tenis meja}

Ambillah dari contoh di muka suatu kalimat terbuka yang mendefinisikan relasinya : "*x* gemar bermain *y*". sehingga:

Ali *R* badminton, Budi *R* sepakbola, Citra *R* tenis meja , dan sebagainya, tetapi: Ali $\not R$ badminton, *Desy* $\not R$ sepakbola serta Elly $\not R$ sepakbola.

Relasi tersebut jika disajikan dengan himpunan pasangan berurut menjadi {(Ali, badminton), (Budi, sepak bola), (Citra, basket), (Citra, tenis meja), (Desi, basket), (Desi, tenis meja)}

2. Relasi Determinatif

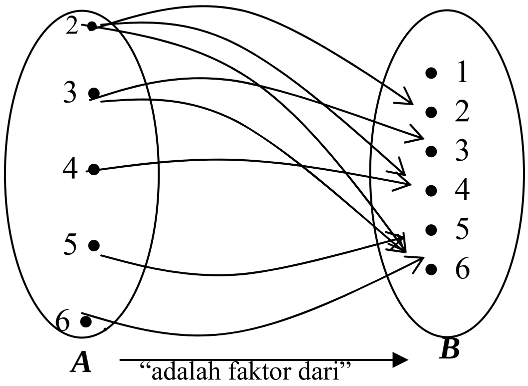
Suatu relasi *R* dikatakan determinatif antar anggota-anggota *S*, apabila ***aRb*** merupakan kalimat deklaratif (pernyataan) untuk setiap *a* dan *b* dalam *S*.

Sebagai contoh relasi yang ditentukan oleh kalimat terbuka "*x* habis dibagi *y*" merupakan relasi determinatif untuk semesta bilangan asli *A*, tetapi tidak determinatif untuk semesta manusia. Andaikan *a* dan *b* bilangan asli *A*, maka "*a R b*" merupakan kalimat deklaratif, sebagai contoh "3*R*12" adalah suatu kalimat deklaratif, tetapi untuk *p* dan *q* pada semesta manusia, misalnya Siti dan Pardi, maka "Siti habis dibagi oleh Pardi" merupakan kalimat yang bukan deklaratif. Sehingga relasinya bukan relasi determinatif untuk semesta manusia.

3. Cara Menyajikan Suatu Relasi.

Suatu relasi *R* dari himpunan *A* ke himpunan *B*, dapat disajikan dengan :

a. **Diagram panah**



Gb. 3.1

Diagram di samping ini menyajikan diagram relasi dari himpunan :
A = { 2, 3, 4, 5, 6} ke himpunan
B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } yang ditentukan oleh kalimat terbuka "*x* adalah faktor dari *y*"

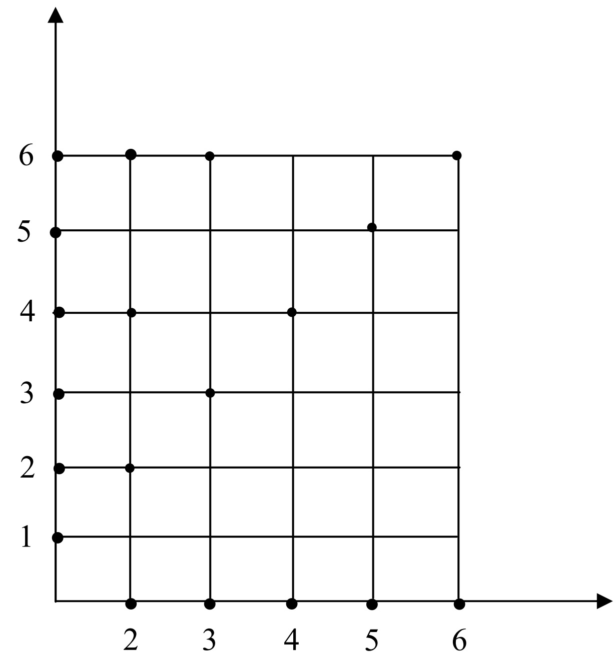
b. Himpunan Pasangan Berurut

Pada relasi di atas, yaitu relasi binar dari himpunan *A* = {2, 3, 4, 5, 6} ke himpunan *B* = {1, 2, 3, 4, 5, 6} yang didefinisikan melelalui kalimat terbuka "x adalah faktor dari y", jika disajikan dalam himpunan pasangan berurutan akan menjadi

R = {(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (6,6)}

c. Dengan Diagram Cartesius

Jika relasi R = {(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (6,6)} dari contoh di atas disajikan dalam diagram Cartesius maka grafiknya akan tampak sebagai berikut :



Gb. 3.2

4. Daerah Asal dan Hasil dari Relasi

Perhatikan contoh 2 di atas, relasi R dari himpunan P = {Ali, Budi, Citra, Desy, Elly} ke himpunan Q = {badminton, sepakbola, bolabasket, tenis meja} yang disajikan dalam himpunan pasangan berurut R = {(Ali, badminton), (Budi, sepak bola), (Citra, basket), (Citra, tenis meja), (Desi, basket), (Desi, tenis meja)}, maka yang disebut **daerah asal (domain)** dari relasi R adalah D_R =

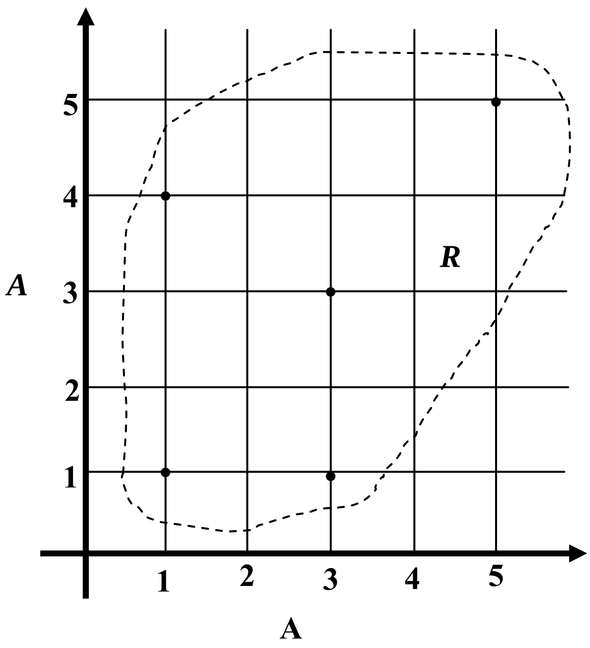
{Ali, Budi, Citra, Desi}, sedangkan **daerah hasil (range)** dari *R* adalah {{badminton, sepakbola, bolabasket, pingpong}.

Dengan demikian dapat kita definisikan domain (*D*) dan range (*H*), dari suatu relasi *R* dari himpunan *A* ke himpunan *B* adalah sebagai berikut:

$D = \{a \mid a \in A, (a,b) \in R\}$ dan

$H = \{b \mid b \in B, (a,b) \in R\}$

Sebagai contoh jika relasi *R* pada himpunan *A* = { 1, 2, 3, 4, 5} yang disajikan dalam diagram Cartesius sebagai berikut**:**



Gb. 3.3

Dari relasi *R* di *samping* Daerah asal *D* = { 1, 3, 5 } dan daerah hasil *H* = { 1, 3, 4, 5 }

Catatan:

Yang dimaksud dengan relasi **pada** himpunan *A* adalah relasi binar **dari** himpunan *A* **ke** himpunan *A* itu sendiri

5. Relasi Invers

Setiap relasi *R* dari himpunan *A* ke himpunan *B* memiliki invers R^{-1} dari *B* ke *A* yang didefinisika sebagai berikut :

$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$

Jadi dapat juga dikatakan bahwa R^{-1} adalah himpunan semua pasangan berurut yang bersifat bahwa jika urutan elemen dalam pasangan itu ditukar, maka pasangan berurut baru tersebut adalah anggota R

Contoh 1

Jika $A = \{ 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sedangkan relasi :

$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (6,6)\}$, maka :

$R^{-1} = \{(2,2), (3,3), (4,2), (4,4), (5,5), (6,2), (6,3), (6,6)\}$

Dan kalimat terbuka yang menentukan relasi R^{-1} adalah "x mempunyai faktor y"

Contoh 2

Himpunan $A = \{ a, b, c\}$ dan $B = \{ 0, 1\}$, maka :

$A \times B = \{(a,0), (b,0), (c,0), (a,1), (b,1), (c,1)\}$, dan jika

$R = \{(a,0), (b,0), (b,1), (c,1)\}$ maka

$R^{-1} = \{(0,a), (0,b), (1,b), (1,c)\}$ dan dari

$B \times A = \{(0,a), (1,a), (0,b), (1,b), (0,c), (1,c)\}$, maka $R^{-1} \subset B \times A$

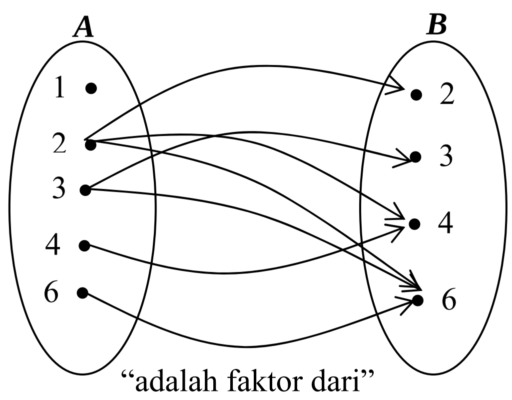
Dalam hal ini : domain dari R adalah range dari R^{-1}, dan range dari R^{-1} adalah domain dari R

Catatan :

Suatu relasi yang domain dan range-nya sama ($A = B$), maka relasi dari ke A tersebut cukup dikatakan sebagai **relasi pada *A*.**

Contoh 3

Jika $A = \{ 2, 3, 4, 6\}$, maka tentukan relasi R pada A, yang ditentukan oleh kalimat terbuka "x adalah faktor dari y", diagram panahnya dapat disajikan di samping ini :



Gb. 3.4

Sehingga R = {(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (6,6)}

Catatan :

Suatu relasi pada A dikatakan sebagai **relasi identitas** dan dinyatakan dengan Δ_A, apabila $\Delta_A = \{(a,a) | a \in A\}$

Contoh :

Jika A = { 1, 2, 3, 4, 5} maka Δ_A = {1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)}

Relasi identitas ini sering juga disebut sebagai **diagonal.**

6. Komposisi Relasi

Misalkan R_1 suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan R_2 adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C, maka relasi R dari himpunan A ke C, yang terdiri atas $(a,c) \in R$ sedemikian hingga $(a,b) \in R_1$ dan $(b,c) \in R_2$, dinamakan relasi komposit dari A ke C dan ditulis dengan notasi $R = R_2 \circ R_1$

Jadi:

$R_2 \circ R_1 = \{(x, y\} | x \in A, y \in C$ sedemikian hingga $(x, p) \in R_1$ dan $(p, y) \in R_2\}$

Catatan:

Syarat terjadinya relasi komposit $R_2 \circ R_1$ adalah range (R_1) $\cap$ domain (R_2) $\neq \phi$

Contoh 1

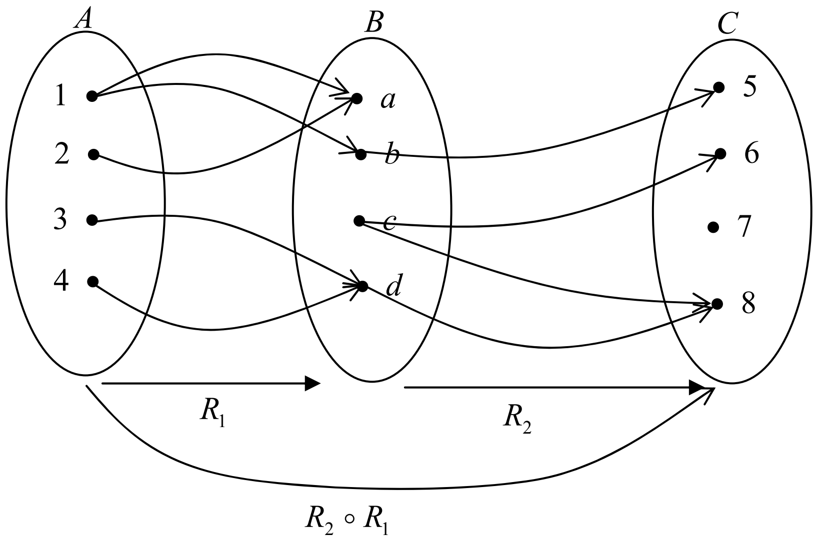
Jika A = { 1,2,3,4}, B = { a, b, c, d} dan { 5,6,7,8 } dan relasi

R_1 = {(1,a),(1,b),(2,a),(3,d),(4,d)} dan

R_2 = {(b,5),(c,6),(c,8),(d,8)}, maka

Tentukan : $R_2 \circ R_1$

Jawab : Jika relasi-relasi di atas kita sajikan dalam suatu diagram panah:



Gb. 3.5

Jadi $R_2 \circ R_1$ = {(1,5), (3,8),(4,8)}

Contoh 2

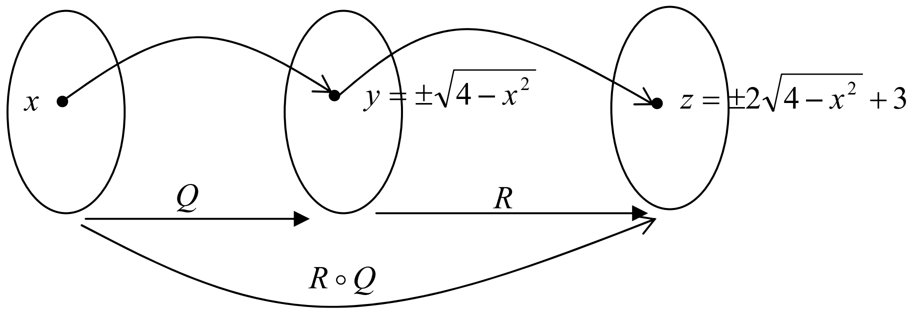
Diketahui relasi - relasi Q dan R adalah relasi-relasi pada bilangan real, yang didefinisikan sebagai berikut :

$Q = \{(x,y)\}|\ x^2 + y^2 = 4\}$ dan $R = \{(y,z)|z = 2y + 3\}$

Tentukan : $R \circ Q$

Jawab :

Relasi $R \circ Q$ merupakan komposisi relasi dari relasi Q yang dilanjutkan dengan relasi R, dengan kalimat terbuka yang menyatakan aturan perkawanannya diperoleh dengan mengeliminir y dari persamaan rumus relasi keduanya.



Gb. 3.6

Jadi relasi $R \circ Q = \{(x,z)|\ z = \pm 2\sqrt{4 - x^2} + 3\}$.

7. Refleksi Diri

Setelah Anda melaksanakan KB-1 ini, kerjakan soal 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dari Refleksi Diri di bawah ini, dengan sungguh-sungguh, kemudia cocokkan hasilnya dengan kunci jawab di belakang, kemudian buat skor hasil pekerjaan Anda dengan rumus

$$\text{Skor refleksi diri } S_c = \frac{\text{Jumlah soal yang dikerjakan dengan benar}}{9} \times 100\%$$

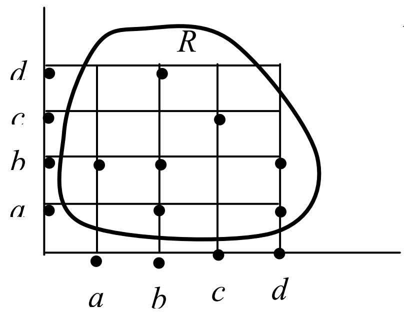
Jika skor refleksi diri Anda lebih atau sama dengan 75%, selamat Anda telah memahami bab ini, dan Anda dapat melanjutkan Kegiatan Belajar-2, dan bagi Anda yang belum mencapai 75% dipersilahkan membaca lagi lebih cermat dan diskusikan dengan kolega Anda masalah yang dirasa kurang jelas dan dicoba lagi megerjakan soal-soal di bawah ini sekali lagi.

Soal Latihan:

1. Misalkan R adalah relasi dari himpunan A = { 1, 2, 3, 4} ke himpunan B = { 1, 3, 5} yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "x lebih kecil dari y", maka :
   a. nyatakan R dalam himpunan pasangan berurut.
   a. sajikan R pada diagram Cartesius $A \times B$.

2. Misalkan R adalah relasi dari himpunan C = { 2, 3, 4, 5} ke D = { 3, 6, 7, 10} yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "y habis dibagi oleh x", maka :
   a. nyatakan R dalam himpunan pasangan berurut.
   b. sajikan R pada diagram Cartesius $C \times D$.

3. Misalkan E = { a, b, c, d} dan R suatu relasi pada E, yang diagramnya sebagai berikut
   a. Tentukan nilai dari pernyataan :
      (i) $c\ R\ b$, (ii) $d\ R\ a$ (iii) $a\ R\ c$ (iv) $b\ R\ b$



   b. Carilah $\{ x |\ (x,b) \in R\}$ yaitu semua elemen yang berkawan dengan b.
   c. Carilah $\{ x |\ (d,x) \in R\}$

4. Pandang relasi $R = \{(1,5),(4,5),(1,4),(4,6),(3,7),(7,6)\}$, maka :

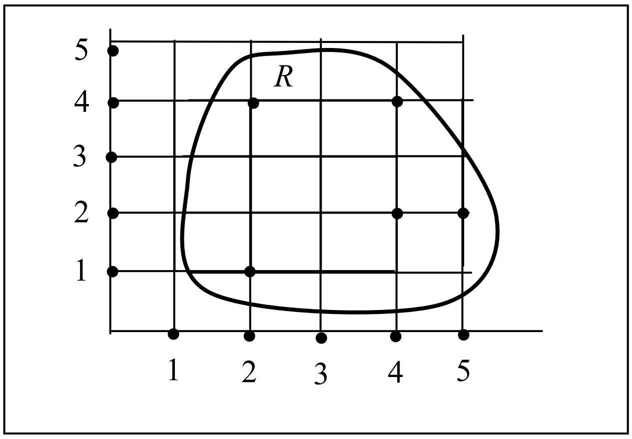
   Tentukanlah :

   a. domain dari relasi R

   b. range dari relasi R

   c. relasi invers dari R (R^{-1})

5. Relasi R pada $F = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, yang disajikan dengan diagram berikut :



Gb. 2.9

   Carilah :

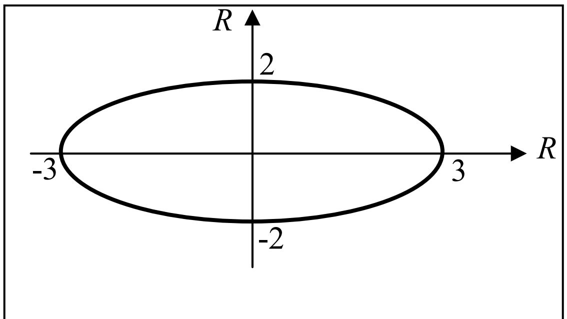
   a. domain dari R

   b. range dari R

   c. invers dari relasi R

   d. sketsa R^{-1} pada $F \times F$

6. Diketahui relasi R pada himpunan bilangan real yang didefinisikan oleh $R = \{(x,y) | 4x^2 + 9y^2 = 36\}$ maka :



Gb. 2.10

   Tentukanlah :

   a. domain dari R

   b. range dari R

   c. relasi invers dari R (R^{-1})

7. Misalkan relasi R pada bilangan asli $N = \{ 1, 2, 3, \ldots\}$ yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "$x + 2y = 10$", maka tentukan

   a. domain dari R

   b. range dari R

   c. relasi invers dari R (relasi R^{-1})

8. Misalkan R_1 dan R_2 adalah relasi-relasi pada bilangan real yang disajikan dalam bentuk himpunan pasangan berurut :

   $R_1 = \{(x,y) \mid y \geq x^2\}$

   $R_2 = \{(x,y) \mid y \leq x + 2$

   a. Buatlah sketsa $R_1 \cap R_2$ pada diagram Cartesius.
   b. Carilah domain dari $R_1 \cap R_2$!
   c. Caliah jangkauan (range) dari $R_1 \cap R_2$!

D. Kegiatan Belajar-2: Fungsi

Sebelum Anda mencermati uraian tentang fungsi, maka terlebih dulu cobalah untuk mencari jawab persoalan di bawah ini:

> Jika diketahui dua himpunan A = { 1, 2, 3, 4, … } dan himpunan B = { 2, 4, 6, 8, …} maka dipastikan bahwa di satu sisi Anda pasti mengenal bahwa A adalah himpunan bilangan asli dan B adalah himpunan genap positif yang artinya $B \subset A$, tetapi di sisi lain, dengan mencermati relasi antar elemen dari A dan B maka Anda pasti dapat menunjukkan bahwa jumlah elemen kedua himpunan itu "sama", nampaknya hal ini suatu kontroversi, jelaskan mengapa demikian!

Agar Anda dapat menjelaskan masalah di atas sebaik-baiknya maka cermatilah uraian mengenai **relasi fungsional** di bawah ini, yang merupakan suatu relasi khusus dari apa yang telah kita pelajari.

1. Pengertian Fungsi

a. Fungsi ke dalam (Into)

Konsep fungsi terdapat hampir dalam setiap cabang matematika, sehingga fungsi merupakan materi pembelajaran yang sangat esensial, begitu besar fungsi dan manfaatnya, baik dalam matematika itu sendiri maupun dalam ilmu-ilmu yang lain.

Gottfried W. Leibniz (1646-1716)

Gb. 3.7

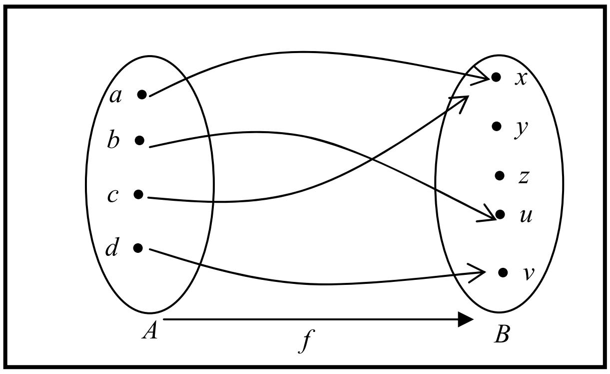
Ada sedikit perbedaan pengertian fungsi dalam kehidupan sehari-hari dengan pengertian fungsi dalam matematika. Dalam kehidupan sehari-hari fungsi adalah sinonim dari guna atau manfaat, sedang pengertian fungsi dalam matematika adalah mengacu adanya relasi binar yang khusus antara dua himpunan.

Pengertian ini pertama kali diperkenalkan oleh Gottfried W. Leibniz (1646-1716) pada tahun 1694.

Senada dengan relasi maka pada fungsi terdapat tiga unsur yang harus dipenuhi, yakni :

1) suatu himpunan tidak kosong, katakanlah *A*
2) suatu himpunan tidak kosong lain, katakanlah *B*
3) suatu kalimat terbuka, yang juga disebut **aturan** yang mengakibatkan tiap elemen di *A*, menentukan dengan tepat elemen tunggal di *B*

Relasi khusus ini sering disebut dengan **relasi fungsional,** yang sering disingkat dengan **fungsi** saja, sering disebut juga dengan istilah **pemetaan** (mapping).



Gb. 3.8

Fungsi Gb.3.8 di atas secara formal biasa didefinisikan sebagai berikut:

Definisi :

> **Suatu fungsi f dari himpunan A ke dalam himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap elemen dari A dengan tepat satu elemen di B.**

Fungsi f dari himpunan A ke dalam B ini biasa ditulis dengan notasi:

$\boldsymbol{f : A \to B}$ dibaca "fungsi f memetakan A ke dalam B"

Unsur tunggal di dalam B yang dihubungkan dengan $a \in A$ oleh f dinyatakan dengan $f(a)$ dan disebut **peta** atau **bayangan *a*** oleh ***f***, atau disebut juga **nilai *f* pada *a***. Dan dalam hal ini a adalah **prapeta** dari $f(a)$.

Notasi yang digunakan untuk menyatakan suatu fungsi f yang memetakan setiap anggota x dari himpunan A ke anggota y dari himpunan B, adalah:

$\boldsymbol{f : x \to y}$ dibaca "f memetakan x ke y"

Catatan :

> Untuk menuliskan fungsi yang mendeskripsikan hubungan antar elemennya agar dari setiap x diperoleh $f(x)$, ***B. Abrahamson*** (1971), menganjurkan menuliskannya dengan $\boldsymbol{f : x \mapsto f(x)}$**.** (Lambang "$\mapsto$" digunakan untuk membedakan "$\to$" pada $f : A \to B$)

Pandanglah pemetaan $f : A \to B$, sebagaimana di atas, dalam hal ini :

(1) Himpunan A disebut **daerah asal (domain)** dari f

(2) Himpunan B disebut **daerah kawan (codomain)** dari f

(3) Himpunan semua peta unsur A dalam B disebut **daerah hasil (range)** dari f, dan ditulis dengan notasi $\boldsymbol{f(A)}$**.**

Sehingga $f(A) = \{f(a) \mid \in A\}$

Karena fungsi pada hakikatnya adalah relasi khusus, maka representasi fungsi dapat dilakukan dengan diagram panah, himpunan pasangan berurut maupun dengan diagram Cartesius yang sering kita sebut dengan grafik suatu fungsi.

Contoh 1

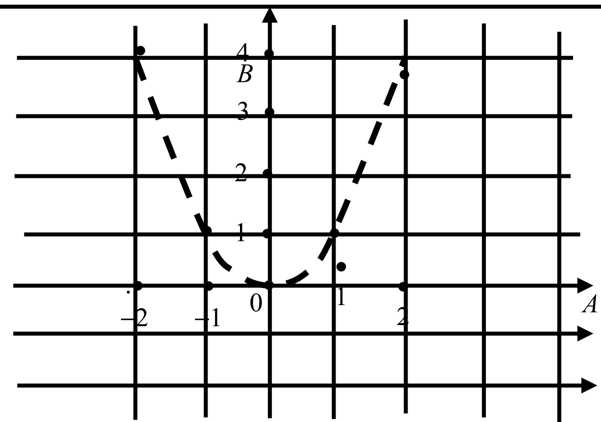
Misalkan $A = \{ -2, -1, 0, 1, 2\}$ dan $B = \{ 0, 1, 2, 3, 4\}$, suatu pemetaan f dari A ke dalam B, sedemikian hingga $f(x) = x^2$, maka

Tentukan :

a. himpunan pasangan berurut yang menyajikan fungsi tersebut
b. daerah hasil dari f
c. diagram Cartesiusnya

Jawab :

a. Himpunan pasangan berurutnya adalah $\{(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)\}$
b. Daerah hasil dari f adalah $f(A) = \{ 0, 1, 4\}$
c. Diagram Cartesiusnya adalah:



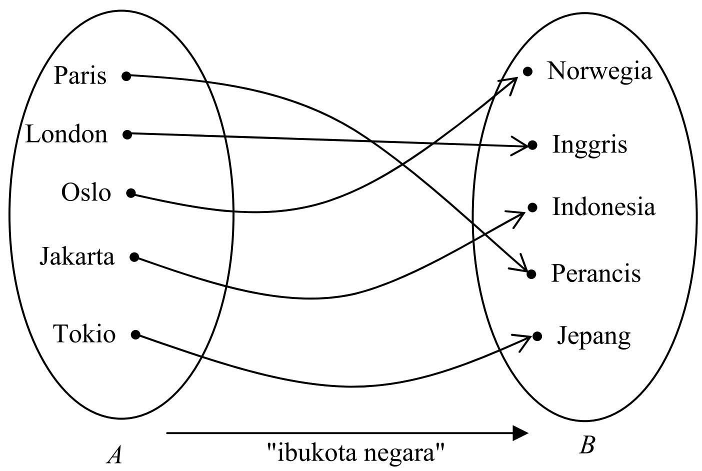
Gb. 3.9

Catatan:

Diagram Cartesiusnya berupa noktah-noktah yang dilewati oleh kurva putus-putus tersebut, dan jika daerah asalnya himpunan semua bilangan real pada interval tersebut, maka diagram Cartesiusnya akan menjadi kurva mulus yang ditentukan oleh kurva putus-putus tersebut.

Contoh 2

Jika A = { Paris, London, Oslo, Jakarta, Tokio}dan B = { Norwegia, Inggris, Indonesia, Perancis, Jepang}, maka relasi yang memasangkan negara-negara dengan ibukotanya, dari A ke B, adalah suatu **fungsi** yang diagram panahnya dengan jelas sebagai berikut:



Gb. 3.10

Contoh 3

Diketahui suatu fungsi $f : A \rightarrow \boldsymbol{R}$ di mana $A = \{ x \mid -3 \leq x \leq 2, x \in \boldsymbol{R} \}$ yang ditentukan oleh rumus $f(x) = x^2 + 1$, maka tentukan :

1) $f(-1), f(0)$, dan prapeta dari 5
2) dengan menyajikannya dalam diagram Cartesius tentukan daerah hasil dari f

Jawab :

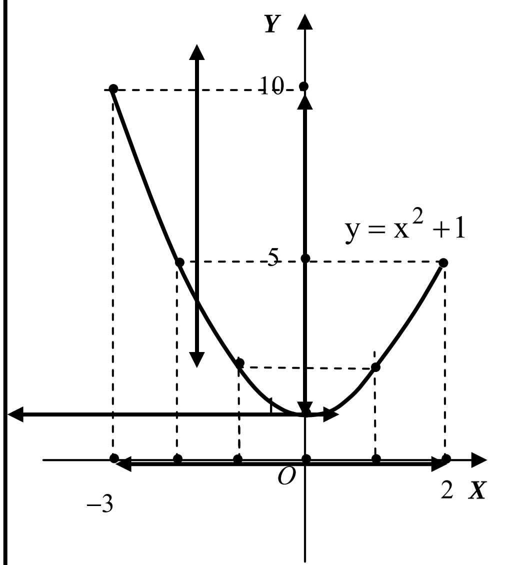
1) $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

   $f(0) = 0^2 + 1 = 1$

   Prapeta dari 5, adalah mencari $f(x) = 5 \rightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

   Sehingga prapeta dari 5 adalah 2 atau -2.

2)



Gb. 3.11

Dibuat grafik $y = x^2 + 1$

$f(-3) = (-3)^2 + 1 = 10$

$f(2) = 2^2 + 1 = 5$

Jadi daerah hasil dari f adalah

$f(A) = \{ y \mid 1 \leq y \leq 10, y \in \mathbf{R} \}$

Catatan :

Jika domain dan kodomain dari suatu fungsi kedua-duanya adalah himpunan yang sama, katakanlah fungsi $f : A \rightarrow A$, maka f seringkali disebut **operator** atau **transformator** pada A.

2. Fungsi Surjektif, Injektif dan Bijektif.

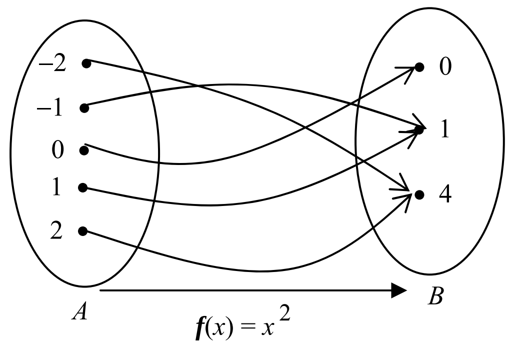
a. Fungsi Surjektif

Misalkan f suatu fungsi dari A ke dalam B, maka daerah hasil $f(A)$ dari fungsi f adalah himpunan bagian dari kodomain B atau $f(A) \subset B$. Jika $f(A) = B$ artinya setiap anggota B muncul sebagai peta dari sekurang-kurangnya satu elemen A, maka kita katakan **"*f* adalah suatu fungsi *A* pada *B*".** Fungsi **pada (onto function)** biasa juga kita kenal dengan nama fungsi **surjektif.** Dengan demikian dapat kita definisikan suatu fungsi surjektif, sebagai berikut:

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$, adalah fungsi **pada** (**onto**) atau **surjektif**, jika untuk setiap $b \in B$, terdapat paling sedikit satu eleman $a \in A$, yang dipenuhi $b = f(\text{a})$

Contoh 1

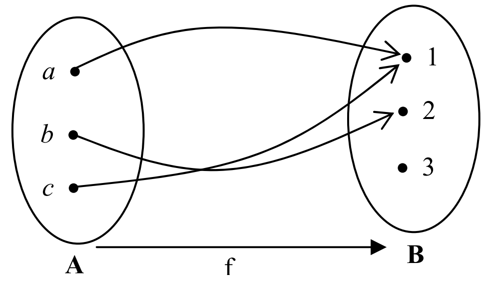
Fungsi f dari himpunan $A = \{ -2, -1, 0, 1, 2\}$ ke dalam $B = \{ 0, 1, 4\}$ yang didefinisikan oleh rumus fungsi $f(x) = x^2$ adalah suatu fungsi yang surjektif, karena setiap elemen di B merupakan sekurang-kurangnya peta dari satu elemen di A.



Gb. 3.12

Contoh 2

Misalkan fungsi f didefinisikan oleh diagram panah :



Gb. 3.13

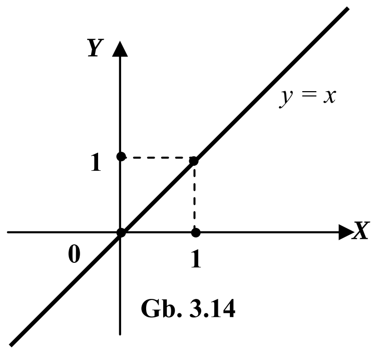
Fungsi f di samping ini bukan fungsi surjektif karena :

$f(A) = \{ 1, 2\} \neq B$

Fungsi surjektif $f : A \rightarrow A$ yang didefinisikan oleh rumus $f(x) = x$, yang berarti f menentukan tiap-tiap elemen dalam A dengan elemen yang bersangkutan itu sendiri, disebut **fungsi satuan** atau **fungsi identitas,** dan sebagaimana telah diuraikan didepan f sering dikatakan sebagai transformator atau operator pada A

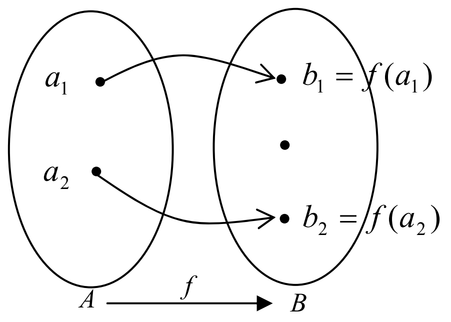
Contoh

Fungsi $f : \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ yang didefisikan oleh rumus $f(x) = x$ adalah fungsi identitas pada $\boldsymbol{R}$**.**



Gb. 3.14

b. Fungsi Injektif.



Gb. 3.15

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ sedemikian hingga untuk setiap anggota A yang berbeda mempunyai peta yang berbeda pula di B, dikatakan f sebagai fungsi yang **injektif** atau **fungsi satu-satu.** Jadi :

Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif (satu-satu), jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$ berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Dari ketentuan bahwa suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ merupakan fungsi injektif, jika untuk setiap pasang anggota $a_1, a_2 \in A$ berlaku :

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

Rumus ini bernilai logis sama dengan pernyataan :

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

Pernyataan terakhir inilah yang biasa digunakan untuk menunjukkan apakah suatu fungsi itu injektif ataupun bukan.

Contoh 1

Selidikilah injektif tidaknya fungsi di dalam bilangan asli A ($f : A \rightarrow A$), yang didefinisikan dengan *rumus* $f(x) = 2x$

Jawab: untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ yang memenuhi $f(x_1) = f(x_2), maka$

$2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Sehingga dari $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, maka f adalah fungsi yang surjektif di dalam ***R***

Contoh 2

Relasi dari himpunan negara N ke himpunan bendera nasional B, yang didefinisikan dengan kalimat terbuka "negara x bendera nasionalnya adalah y ", adalah suatu fungsi sebab setiap negara pasti mempunyai bendera nasional, dan bendera nasionalnya hanya satu, tetapi bukan suatu fungsi injektif sebab ada dua negara yang berbeda misalnya Indonesia dan Monaco tetapi mempunyai bendera nasional yang sama yaitu sama-sama merah putihnya.

Contoh 3

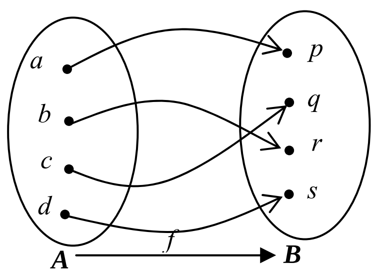
Fungsi f : $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ dimana $\boldsymbol{R} =$ {bilangan real}, yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^2$ bukan suatu fungsi injektif, sebab untuk $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$ sedemikian hingga :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^{\ 2} = x_2^{\ 2} \Leftrightarrow x_1^{\ 2} - x_2^{\ 2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ atau } x_1 = -x_2$$

Hal ini menunjukkan adanya dua elemen yang berlainan, yang mempunyi peta yang sama.

c. Fungsi Bijektif.



Gb. 3.16

Jika suatu fungsi f : $A \rightarrow B$ sedemikian hingga f suatu fungsi yang surjektif dan injektif sekaligus, sebagaimana ilustrasi di samping, maka dikatakan f adalah suatu fungsi **bijektif** atau **korespondensi satu-satu.**

Definisi :

Fungsi *f* : *A* $\rightarrow$ *B* disebut suatu fungsi bijektif jika *f* sekaligus fungsi surjektif dan fungsi injektif.

Contoh 1

Fungsi $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = 2x - 3$ adalah fungsi bijektif sebab untuk setiap y peta dari x pasti akan dipenuhi :

$2x - 3 = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(y+3)$ yang ini menunjukkan prapeta dari y di B. Dengan demikian f adalah fungsi yang surjektif.

Sedang untuk setiap pasang $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$, yang dipenuhi $f(x_1) = f(x_2)$, akibatnya :

$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Hal ini menunjukkan f suatu fungsi yang injektif, dan dari f injektif dan surjektif sekaligus ini, dapat disimpulkan bahwa f adalah fungsi bijektif.

Contoh 2

Suatu fungsi f di dalam bilangan real $\boldsymbol{R}$, yang didefinisikan oleh $f(x) = x^2$ bukan fungsi bijektif sebab untuk $f(x) = 4$ misalnya, akan diperoleh :

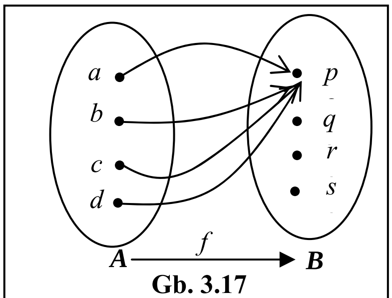
$f(x) = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ atau $x = 2$

ini menunjukkan f bukan fungsi injektif yang berarti f bukan fungsi yang bijektif.

3. Fungsi-fungsi Khusus.

Di dalam matematika, banyak sekali dijumpai beberapa macam fungsi, yang beberapa di antaranya memiliki ciri-ciri yang khas, fungsi-fungsi khusus tersebut di antaranya adalah :

a. Fungsi Konstanta.

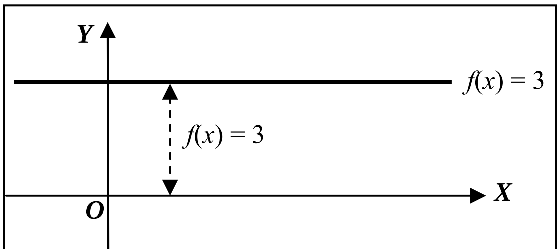


Gb. 3.17

Suatu fungsi $f : A \to B$ yang untuk semua elemen di A berkaitan hanya dengan sebuah unsur di B disebut **fungsi konstanta.** Sebagaimana ilustrasi di samping yang memasangkan setiap elemen di dalam himpunan A dengan hanya satu elemen saja di B,

Contoh

Suatu fungsi f di dalam himpunan real $\boldsymbol{R}$**,** atau $f : \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$**,** yang didefinisikan oleh rumus $f(x) = 3$, adalah sebuah fungsi konstanta .



Gb. 3.18

Dari kurva di samping terlihat jelas:

$f(-3) = 3$

$f(0) = 3$

$f(1) = 3$

$f(5) = 3$

b. Fungsi Identitas

Suatu fungsi $f : A \rightarrow A$ yang didefinisikan oleh rumus $f(x) = x$, yaitu fungsi yang menetapkan setiap elemen dalam A dengan elemen yang bersangkutan itu sendiri, maka f disebut **fungsi satuan** (identity function), atau **transformasi satuan** pada A. Dan kita nyatakan dengan $\boldsymbol{I}$ atau I_A

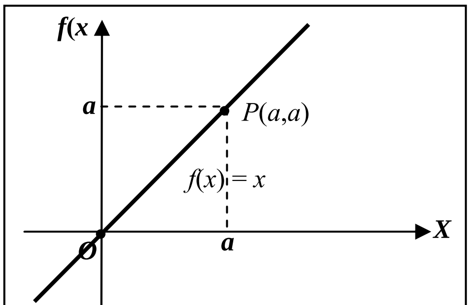
Contoh 1

Fungsi identitas I_A pada $A = \{ a, b, c\}$ adalah $I_A = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$.

Contoh 2

Fungsi identitas pada himpunan bilangan real $\boldsymbol{R}$**,** adalah :

$I_{\mathbf{R}} = \{(x,x) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$



Gb. 3.19

c. Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut **fungsi genap** jika $f(-x) = f(x)$, dan

Fungsi $f : A \to B$ disebut **fungsi ganjil** jika $f(-x) = -f(x)$, sedang fungsi yang tidak memenuhi salah satu dari pernyataan di atas dikatakan fungsi yang tidak genap maupun tidak ganjil.

Contoh

1. Fungsi $f:\ x \to x^2$ adalah fungsi genap, sebab $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
2. Fungsi $f:\ x \to x^3 - 2x$ adalah fungsi ganjil, sebab $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$
3. Fungsi $f:\ x \to x^2 - x$ adalah bukan fungsi genap maupun ganjil, sebab $f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x$ di mana bentuk terakhir ini tidak sama dengan $f(x)$ maupun $-f(x)$.

d. Fungsi Modulus

Berdasarkan definisi dari modulus atau nilai mutlak, bahwa nilai mutlak suatu bilangan real x didefinisikan sebagai :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ jika } x \geq 0 \\ -x \text{ jika } x < 0 \end{cases}$$

Contoh :

$| 3 | = 3$

$|-3| = 3$

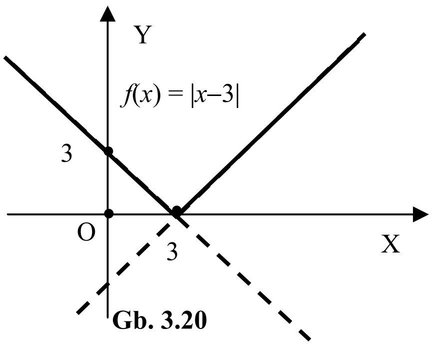
Fungsi $M:\ x \to M(x)$ disebut fungsi modulus jika $M(x) = |f(x)|$

Contoh

Fungsi f di dalam bilangan real $\boldsymbol{R}$ yang didefinisikan oleh $f(x) = |x - 3|$

Tentukan kurva grafiknya.

Jawab :



Gb. 3.20

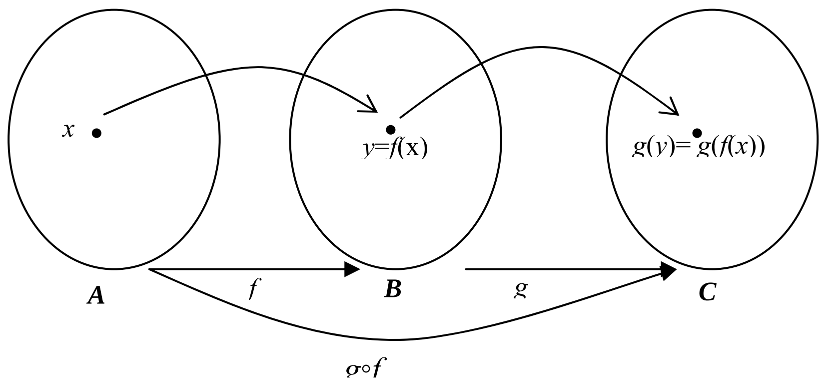
$f(x) = |x - 3|$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x - 3 \text{ jika } x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3) \text{ jika } x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x - 3 \text{ jika } x \geq 3 \\ -x + 3 \text{ jika } x < 3 \end{cases}$$

4. Fungsi Komposit

Misalkan fungsi *f* memetakan himpunan *A* ke dalam *B*, dan fungsi g memetakan himpunan *B* kedalam *C* sebagaimana ilustrasi di bawah ini:



Gb. 3.21

Untuk $a \in A$ maka petanya $f(a)$ berada di *B* yang juga merupakan domain dari fungsi *g*, oleh sebab itu pasti diperoleh peta dari $f(a)$ di bawah pemetaan *g* yaitu $g(f(a))$. Dengan demikian kita mempunyai suatu aturan yang menentukan setiap elemen $a \in A$ dengan tepat satu elemen $g(f(a)) \in C$. Fungsi baru inilah yang disebut **fungsi komposit** dari *f* dan *g*, yang dinyatakan dengan notai $g \circ f$ (dibaca "*g* bundaran *f*").

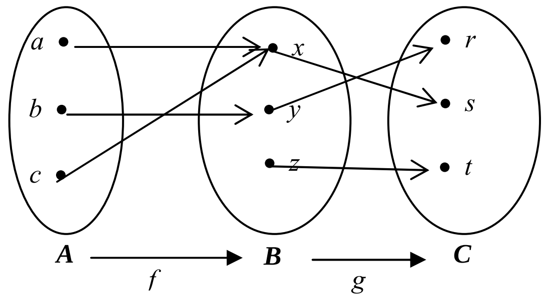
Secara singkat jika f: $A \to B$, dan g: $B \to C$ maka kita definisikan suatu fungsi komposisi $g \circ f$: $A \to \boldsymbol{C}$ sedemikian hingga $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Catatan:

1. **Perhatikan bahwa fungsi komposit $g \circ f$ adalah penggandaan fungsi yang mengerjakan f dahulu, baru kemudian mengerjakan g.**
2. **Akan diperoleh fungsi komposit $g \circ f$ haruslah dipenuhi syarat, bahwa range dari f (R_f) $\cap$ domain dari g (D_g) $\neq \phi$**

Contoh 1

Misalkan $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ yang didefinisikan sebagaimana diagram panah di bawah ini



Gb. 3.22

$(g \circ f) : A \rightarrow B$ ditentukan oleh :

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(x) = s$

$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(y) = r$

$(g \circ f)(c) = g(f(\text{c})) = g(x) = s$

Contoh 2

Fungsi $f : R \rightarrow R$ dan $g : R \rightarrow R$ didefinisikan oleh rumus $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = 3x^2$

Tentukan : a) $(g \circ f)(1)$ dan $(f \circ g)(1)$

b) rumus untuk $(g \circ f)$ dan $(f \circ g)$

Jawab :

a. $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(1 + 2) = g(3) = 3(3^2) = 27$

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3.1^2) = f(3) = 3 + 2 = 5$

b. $(g \circ f) : x \rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = 3(x + 2)^2 = 3x^2 + 12x + 12$

Sehingga $(g \circ f) : x \rightarrow 3x^2 + 12x + 12$

$(f \circ g) : x \rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x^2) = 3x^2 + 2$

Sehingga $(f \circ g) : x \rightarrow 3x^2 + 2$

Catatan : Dari jawab b**.** didapat fungsi $g \circ f$ dan $f \circ g$ tidak sama, sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa komposisi fungsi tidak bersifat komutatif.

5. Fungsi Invers

a. Invers Suatu Fungsi

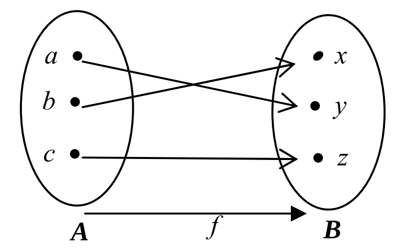
Misalkan f suatu fungsi dari A ke dalam B dan misalkan untuk suatu $a \in A$ petanya adalah $f(a) = b \in B$, maka invers dari b (dinyatakan dengan $f^{-1}(b)$) adalah elemen-elemen dalam A yang memiliki $b \in B$ sebagai petanya.
Secara singkat, jika $f : A \rightarrow B$ sedemikian hingga $f : x \rightarrow f(x)$ maka yang dimaksud dengan invers fungsi b :

$$f^{-1}(b) = \{x \mid x \in A, f(x) = b\}$$

(notasi f^{-1} dibaca "f invers")

Contoh

Misalkan fungsi $f : A \rightarrow B$ didefinisikan sebagaimana diagram panah gambar 3.23 berikut :



Gb. 3.23

maka :

$f^{-1}(x) = b$

$f^{-1}(y) = a$

$f^{-1}(z) = c$

6. Fungsi Invers

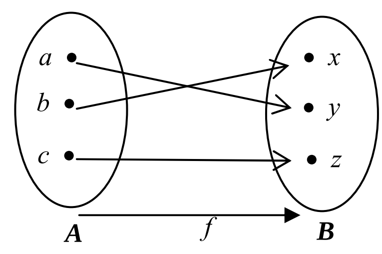
Misalkan f adalah suatu fungsi dari A ke dalam B. Pada umumnya $f^{-1}(b)$ untuk suatu $b \in B$ dapat terdiri lebih dari satu elemen atau mungkin tidak ada. Jika $f: A \rightarrow B$ adalah suatu fungsi yang bijektif, maka untuk setiap $b \in B$, invers $f^{-1}(b)$ akan terdiri dari sebuah elemen tunggal dalam A. Dengan demikian kita mendapatkan suatu aturan yang menetapkan untuk setiap $b \in B$ dengan suatu elemen tunggal $f^{-1}(b)$ dalam A. Oleh sebab itu f^{-1} adalah suatu fungsi dari B ke dalam A, dan kita tulis fungsi $f^{-1} : B \rightarrow A$, fungsi f^{-1} ini disebut "fungsi invers dari fungsi f".

Catatan: Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ akan diperoleh fungsi invers $f^{-1} : B \rightarrow A$ hanya apabila f suatu fungsi yang bijektif (injektif dan surjektif sekaligus)

Mengacu definisi di atas, maka $f \circ f^{-1} : x \rightarrow x$ demikian juga $f^{-1} \circ f : x \rightarrow x$, yang ini berarti: $\boxed{f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I}$

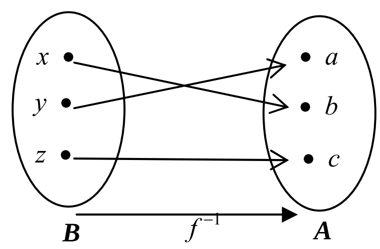
Contoh 1

Jika fungsi $f : A \rightarrow B$ didefinisikan dengan diagram



Gb. 3.31

maka fungsi invers $f^{-1} : B \rightarrow A$ didefinisikan oleh diagram panah:



Gb. 3.32

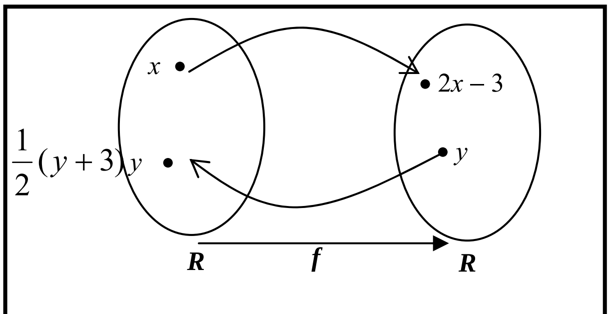
Dari diagram panah di atas, terlihat bahwa:

- f^{-1} ($f(x)$) = f^{-1} (b) = x = $I(x)$, dan
- $f(f^{-1}(y)) = f(a) = y = I(y)$, yang ini mempertegas sifat $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I$

Contoh 2

Misalkan fungsi $f : A \rightarrow B$ yang didefinisikan dengan $f(x) = 2x - 3$. Karena fungsi f adalah fungsi yang bijektif, maka akan diperoleh fungsi inversnya.

Untuk menentukan rumus fungsi invers f^{-1} ditempuh langkah-langkah sebagai berikut :



Gb. 3.32

Misalkan $2x - 3 = y$

maka $2x = y + 3$

sehingga $x = \frac{1}{2}(y+3)$

Oleh karena itu fungsi invers $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y+3)$

Jadi fungsi invers $f^{-1}: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ ditentukan oleh $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x+3)$

7. Refleksi Diri KB-2

Setelah Anda melaksanakan KB-2 ini, kerjakan latihan soal di bawah ini dengan sungguh-sungguh, kemudia cocokkan hasilnya dengan kunci jawab di belakang, kemudian buat skor hasil pekerjaan Anda dengan rumus

Skor refleksi diri $S_c = \dfrac{\text{Jumlah soal yang dikerjakan dengan benar}}{11} \times 100\%$

Jika skor refleksi diri Anda lebih atau sama dengan 75%, selamat Anda telah memahami KB-2, dan Anda dapat melanjutkan KB-3, dan bagi Anda yang belum mencapai 75% dipersilahkan membaca lagi lebih cermat dan diskusikan dengan kolega Anda masalah yang dirasa kurang jelas dan dicoba lagi megerjakan soal-soal di bawah ini sekali lagi

Soal Latihan KB-2

1. Diketahui $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{p, q, r\}$. Apakah relasi-relasi berikut ini merupakan fungsi dari A ke dalam B ?
   a. $R_1 = \{(a,q), (c,p)\}$
   b. $R_2 = \{(a,q), (b,r), (c,p)\}$
   c. $R_3 = \{(a,p), (b,r), (c,p)\}$

2. Gunakan sebuah rumus untuk mendefinisikan fungsi-fungsi
   a. Untuk tiap-tiap bilangan real f_1 menetapkan dengan pangkat tiganya!
   b. Untuk tiap-tiap bilangan real f_2 menetapkan dengan bilangan 3
   c. Untuk tiap-tiap bilangan real positif, f_3 menetapkan kuadratnya, sedangkan bilangan real yang lain f_3 menetapkannya dengan bilangan 5.

3. Misalkan $f(x) = x^2$ dengan domain $\{ x \mid -2 \le x \le 8, x \in R\}$ tentukanlah :
   a. $f(4)$
   b. $f(-3)$
   c. $f(t - 3)$, dan tentukan nilai t agar masih tetap pada domainnya.

4. Diketahui fungsi $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ yang didefinisikan dengan rumus :

   $$f(x) = \begin{cases} 1 \textit{ jika} \text{ x rasional} \\ 0 \text{ jika x irasional} \end{cases}$$

   a. Tulis kalimat terbuka yang menentukan f
   b. Tentukan $f(1\frac{1}{2})$, $f(3{,}141414\ldots\}$, $f(\sqrt{3})$, $f(\pi)$

5. Diketahui fungsi $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ yang ditentukan oleh rumus :

   $$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 3\mathrm{x} - 1 \text{ untuk x} > 3 \\ \mathrm{x}^2 - 2 \text{ untuk } -2 \le \mathrm{x} \le 3 \\ 2\mathrm{x} + 3 \text{ untuk x} < -2 \end{cases}$$

   maka tentukanlah :

   a. f(2) b. f(4) c. f(−1) d. f(−3)

6. Misalkan A = {a, b, c} dan B = {x,y}

   Berapa banyak fungsi berlainan yang dapat didefinisikan dari A ke dalam B?

7. Jika B = { −2, −1, 0, 1, 2} dan suatu fungsi f : B $\to$ **R** didefinisikan oleh rumus

   $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x}^2 + 1$

   Carilah daerah hasil dari g !

8. Misalkan A = { a, b, c, d, e } dan B himpunan huruf-huruf dalam alfabet.
   Misalkan f, g, h dari A ke dalam B didefinisikan oleh :
   a. f(a) = r; f(b) = c; f(c) = s; f(d) = t; f(e) = e
   b. g(a) = a; g(b) = c; g(c) = e; g(d) = r; g(e) = e
   c. h(a) = z; h(b) = y; h(c) = x; h(d) = y; h(e) = z
   Nyatakanlah apakah tiap-tiap fungsi di atas injektif atau bukan?

9. Nyatakanlah apakah tiap-tiap fungsi berikut ini satu-satu atau bukan !
   a. Untuk tiap-tiap penduduk bumi, ditetapkan dengan bilangan yang berkaitan dengan usianya.
   b. untuk tiap-tiap negara di dunia ini, ditetapkan dengan bilangan yang menyatakan jumlah penduduknya.
   c. Untuk tiap-tiap buku yang ditulis oleh seorang pengarang tunggal, ditatapkan dengan nama pengarangnya.
   d. Untuk tiap-tiap negara di bumi ini yang mempunyai perdana menteri, ditetapkan dengan nama perdana menterinya..

10. Jika A = [–1, 1] maka tentukan yang manakah fungsi – fungsi $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ di bawah ini yang bijektif, jika f didefinisikan dengan :

a. $f(x) = x - 3$	d. $f(x) = x^3$
b. $f(x) = 2x + 1$	e. $f(x) = x^4$
c. $f(x) = x^2$	

11. Jelaskan fungsi – fungsi di bawah ini apakah injektif, surjektif dan bahkan bijektif
    a. Masing – masing orang di bumi dikaitkan dengan bilangan yang menyatakan umurnya.
    b. Masing – masing negara di bumi dikaitkan dengan populasi warganya.
    c. Buku – buku dengan pengarang tunggal dikaitkan dengan pengarangnya.
    d. Masing – masing negara di dunia dikaitkan dengan kepala negaranya.
    e. Masing - masing negara di dunia dikaitkan dengan kepala pemerintahannya.

E. Kegiatan Belajar-3: Grafik Fungsi Aljabar

Diketahui persegi *ABCD* dengan panjang sisi 16 cm, Titik *E* pada *AB* sehingga $BE = \quad x$ cm, dan pada *BC* terletak titik *F* sehingga $CF = 2x$ cm. Nyatakan luas ΔDEF dengan *L*. Anda dapat menentukan *x* agar luas *L* minimum dengan memanfaatkan grafik $L(x)$.
Agar Anda dapat membuat sketsa grafik $L(x)$ di atas maka cermatilah uraian tentang grafik fungsi di bawah ini:

1. Grafik Suatu Fungsi

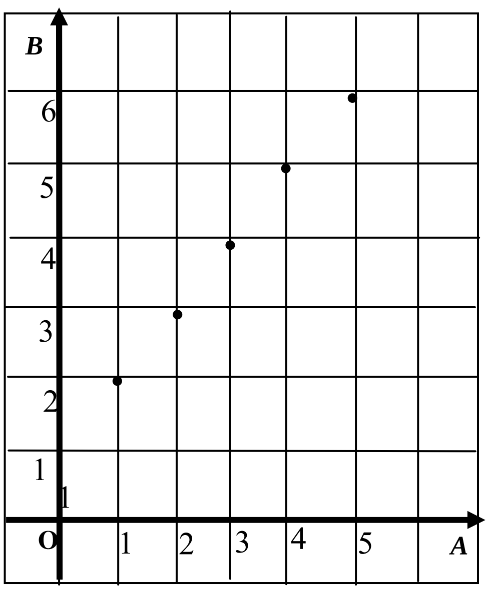
Grafik fungsi f: $A \to B$ adalah diagram Cartesius dari $\{(a,b)|\ a \in A,\ b = f(a)\}$ pada bidang $A \times B$

Contoh: 1

Buatlah sketsa grafik fungsi $f : A \to B$ di mana $A = \{\ 1, 2, 3, 4, 5\ \}$ dan
$f : x \to x + 1$

Jawab:

Jika dari fungsi tersebut disajikan dalam himpunan pasangan terurut, akan dihasilkan $\{(1,2), (2,$ $f : A \to B$ di mana $A = \{\ 1, 2, 3, 4, 5\ \}$ dan $f : x \to x + 1),$ $(3,4), (4,5), (5,6)\}$.



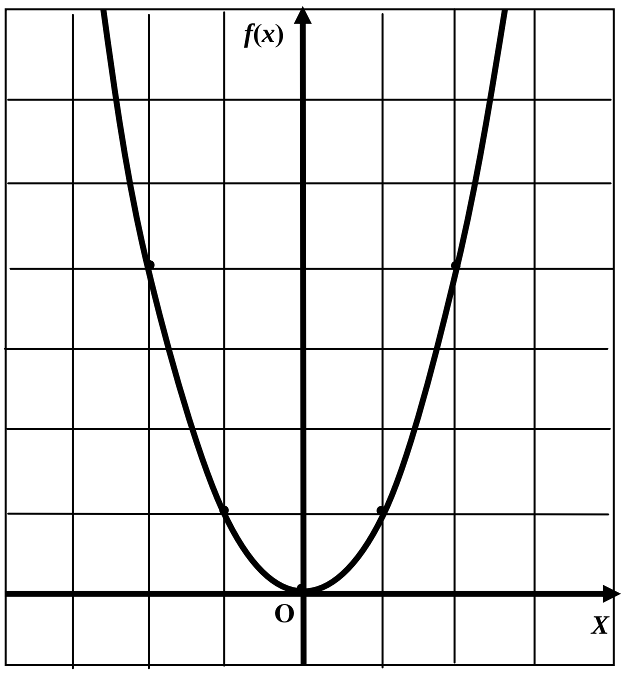
Grafik pemetaan $x \to x + 1$ berupa noktah-noktah dari diagram Cartesiusnya di samping.

Gb. 3.21

Contoh 2

Misalkan Anda diminta membuat sketsa grafik fungsi pada bilangan real, yang ditentukan oleh $f(x) = x^2$

Langkah pertama ditentukan beberapa anggota *f*, yang di antaranya adalah : (−3,9), (−2,4), (−1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9).



Gb. 3.23

Grafik dari pasangan-pasangan berurut di atas adalah sebagaimana noktah-noktah di samping. Sehubungan daerah asal *f* adalah himpunan bilangan real, maka grafik fungsinya berupa kurva mulus yang melalui noktah-noktah bantuan di atas. Dan daerah hasil dari *f* adalah himpunan bilangan real yang tidak negatif.

Contoh 3

Fungsi kuadrat *f* yang ditentukan oleh $f(x) = x^2 - 2x$ yang daerah asalnya ialah $A = \{x \mid -3 \le x \le 5, x \in \boldsymbol{R}\}$

Tentukan:
a. Gambarlah grafik fungsi kuadrat tersebut
b. Pembuat nol fungsi (pembuat nol fungsi adalah nilai pengganti *x* sedemikian hingga *f*(*x*) bernilai nol)
c. Sumbu simetri
d. Titik balik atau titik puncak parabol.

Jawab :

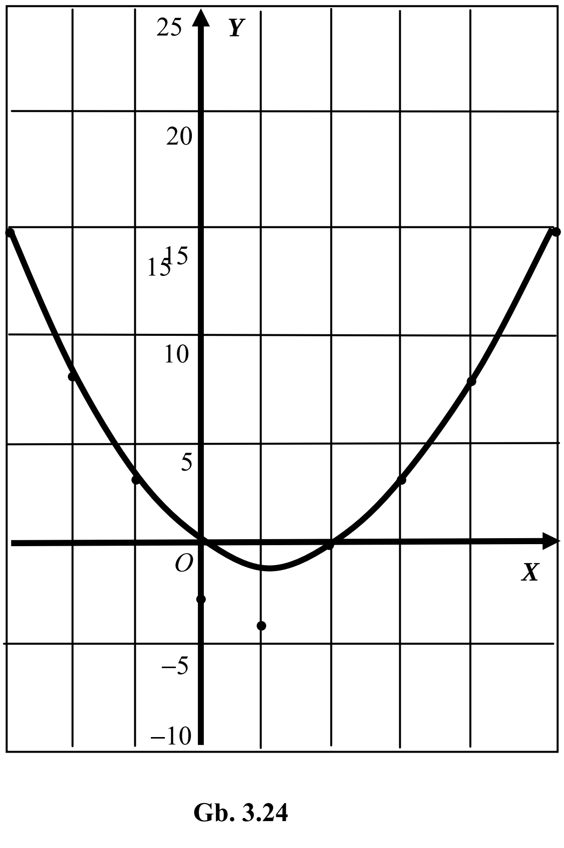
a. Untuk menggambar grafik tersebut, maka dipilih beberapa nilai x yang sesuai dan dihitung nilai f yang bersangkutan .

Daftar berikut ini menunjukkan cara yang mudah untuk menghitung nilai f.

x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4	5
x^2	9	4	1	0	1	4	9	16	25
– 2x	6	4	2	0	– 2	– 4	– 6	– 8	– 10
f(x)	15	8	3	0	– 1	0	3	8	15

Gambarlah titik-titik (–3, 15),(–2,8), (–1,3), (0,0), (1,–1), (2,0), (3,3), (4,8), (5,15)}

Kemudian gambarlah kurva mulus yang melalui titik-titik itu.



Gb. 3.24

b. Pembuat nol dari fungsi fungsi f, adalah mencari x sedemikian hingga $f(x) = 0$.

$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$

$x = 0$ atau $x = 2$

Jadi pembuat nolnya adalah 0 dan 2

c. Dari kurva yang diperoleh di samping, terlihat bahwa sumbu simetrinya adalah garis $x = 1$.

d. Daerah hasil fungsi f ialah $f(A)= \{y| -1 \le x \le 15, y \in \boldsymbol{R}\}$.

Grafik di atas menunjukkan bahwa jika x bertambah dari –3 sampai 5, maka nilai fungsi turun dari 15 sampai –1, kemudian naik dari –1 sampai 15.

Titik $A(1,-1)$ tempat perubahan nilai fungsi dari turun menjadi naik disebut **titik balik** atau **puncak** parabol, dan karena tidak titik lain yang mempunyai ordinat kurang dari −1, maka titik A disebut **titik balik minimum**. Nilai fungsi yang bersesuaian dengan titik balik minimum itu ialah −1 untuk $x = 1$ disebut nilai minimum fungsi.

Contoh 4

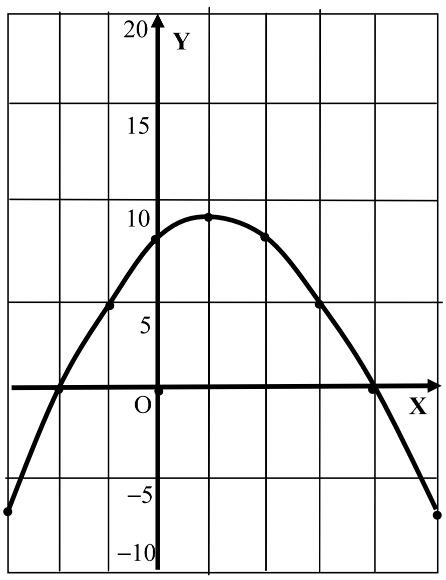
Fungsi kuadrat f pada himpunan bilangan real $\boldsymbol{R}$ ditentukan oleh rumus $f(x) = 8 + 2x - x^2$ dengan daerah asalnya $\{ x \mid -3 \le x \le 5, x \in \boldsymbol{R}\}$.

a. Gambarlah grafik fungsinya
b. Tentukan pembuat nol fungsinya
c. Tentukan persamaan sumbu simetrinya
d. Tentukan koordinat titik puncaknya
e. Perikan nilai puncaknya.

Jawab.

a. Langkah pertama kita buat tabel untuk memudahkan perhitungan

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
2x	−6	−4	−2	0	2	4	6	8	10
$-x^2$	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9	−16	−25
f(x)	−7	0	5	8	9	8	5	0	−7



Gb. 3.25

Kita gambarkan titik-titik (−3,−7), (−2,0),(−1,5),(0,8),(1,9),(2,8),(3,5), (4,0), (5,−7)

kemudian digambar kurva mulus melalui titik-titik tersebut sebagaimana gambar 3.25 di samping

Daerah hasil dari fungsi fungsi f adalah :

$f(A) = \{y \mid -7 \le x \le 9, y \in \boldsymbol{R}\}$

$f : x \to 8 + 2x - x^2$

b. Pembuat nol dari fungsi f adalah menentukan x sedemikian hingga $f(x)$ =0 atau $8 - 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow (4 - x)(2 + x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ atau $x = -2$.

   Pembuat nol dari f yaitu −2 dan 4 tidak lain adalah perpotongan kurva tersebut dengan sumbu-X.

c. Dengan memperhatikan grafiknya maka sumbu simetrinya adalah $x = 1$

d. Grafik f menunjukkan jika x bertambah dari −3 sampai 5 maka f bertambah dari −7 sampai 9 dan kemudian berkurang dari 9 sampai −7. Dalam keadaan seperti ini maka $A(1,9)$ dinamakan titik balik maksimum.

e. Nilai f adalah 9 untuk $x = 1$ dinamakan nilai maksimum fungsi tersebut.

Nilai maksimum atau nilai minimum suatu fungsi disebut juga **nilai ekstrim.**

Secara umum dari persamaan fungsi :

$f(x) = ax^2 + bx + c, a \ne 0$ dapat diubah dalam bentuk :

$$f(x) = a(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a})$$

$$= a(x^2 + 2.\tfrac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \tfrac{c}{a})$$

$$= a(x^2 + 2.\tfrac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a}) - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a(x + \tfrac{b}{2a})^2 + \frac{b^2 - 4ac}{-4a}$$

Melihat bentuk ini fungsi f akan mencapai ekstrim jika $(x + \tfrac{b}{2a})^2 = 0$ atau pada $x = -\tfrac{b}{2a}$, dengan nilai fungsinya sebesar $\dfrac{b^2 - 4ac}{-4a}$.

Sehingga untuk setiap fungsi kuadrat $f : x \to ax^2 + bx + c$ akan dicapai ekstrim pada $x = -\tfrac{b}{2a}$ yang juga merupakan persamaan sumbu simetrinya, dengan nilai f sebesar $\dfrac{b^2-4ac}{-4a}$, yang akan merupakan nilai maksimum jika $a < 0$ dan akan merupakan nilai minimum jika $a > 0$.

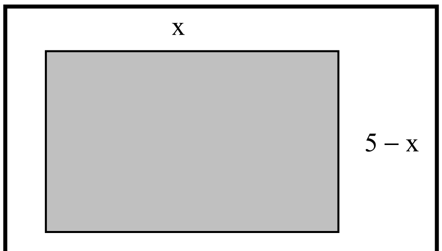
Contoh 5

Suatu persegi panjang kelilingnya 10 meter.

Tentukan :

a. Luas persegi panjang jika panjang = 2,4 meter
b. Ukuran persegi panjang agar luasnya 4 m^2
c. Luas maksimum persegi panjang tersebut, berikut panjang dan lebar serta ulasannya.

Jawab :



Gb. 3.25

a. Jika panjang persegi panjang tersebut adalah x meter, maka lebarnya menjadi $(5-x)$ meter, sehingga luas persegi panjangnya :

$L(x) = x(5-x)$ m^2

Sehingga rumus fungsi yang menyatakan luasnya adalah :

$L(x) = x(5-x) = 5x - x^2$

Jika panjang 2,4 meter, maka luas persegi panjangnya :

$L(2{,}4) = 5.(2{,}4) - (2{,}4)^2 = 6{,}24$

Jadi luas persegi panjang yang panjangnya 2,4 meter adalah 6,24 m^2

b. Ukuran persegi pajang yang luasnya 4 m^2, dapat dicari sebagai berikut :

$L(x) = 5x - x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ atau $x = 4$

Jadi agar luasnya 4 m^2, maka panjangnya 1 meter dan lebarnya $(5-1) =$ 4 m, atau panjangnya 4 meter dengan lebar $(5-4) = 1$ meter.

c. Nilai maksimumnya adalah nilai ekstrim $L(x) = 5x - x^2$, yang besarnya adalah $\frac{b^2 - 4ac}{-4a} = \frac{5^2 - 4.(-1).0}{-4.(-1)} = \frac{25}{4} = 6{,}25$

2. Refleksi Diri KB-3

Setelah Anda melaksanakan KB-3 ini, kerjakan soal di bawah ini dengan sungguh-sungguh, kemudia cocokkan hasilnya dengan kunci jawab di belakang, kemudian buat skor hasil pekerjaan Anda dengan rumus

Skor refleksi diri $S_c = \frac{\text{Jumlah soal yang dikerjakan dengan benar}}{6} \times 100\%$

Jika skor refleksi diri Anda lebih atau sama dengan 75%, Selamat!. Anda telah memahami KB-3, dan Anda dapat melanjutkan KB-4, dan bagi Anda yang belum mencapai 75% dipersilahkan membaca lagi lebih cermat dan diskusikan dengan kolega Anda masalah yang dirasa kurang jelas dan dicoba lagi megerjakan soal-soal di bawah ini sekali lagi.

Soal Latihan KB-3

1. Sketslah grafik fungsi – fungsi dari ***R*** ke dalam ***R*** yang didefinisikan oleh :
   a. $f : x \to x$
   b. $f : x \to 2x - 3$
   c. $f : x \to \frac{1}{2}x + 4$
   d. $f : x \to 2x - 5$
   e. $f : x \to 3x + 1$

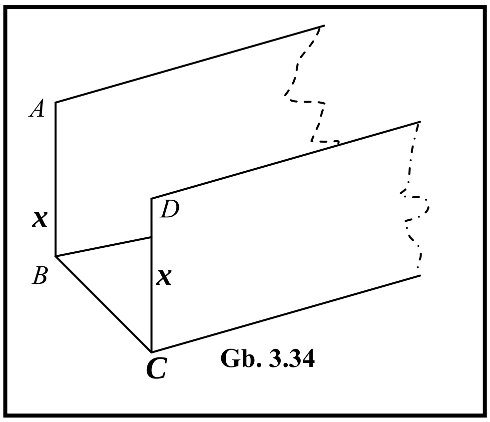
2. Arsirlah daerah – daerah di bawah ini pada diagram Cartesiusnya.
   a. $\{(x,y) \mid y > x\}$
   b. $\{(x,y) \mid y < -x\}$
   c. $\{(x,y) \mid y > x + 2\}$
   d. $\{(x,y) \mid y \leq x - 3\}$
   e. $\{(x,y) \mid y \geq 3x - 6\}$

3. Suatu fungsi $f : A \rightarrow \boldsymbol{R}$ di mana $A = \{ x \mid -3 \le x \quad 3, x \in \boldsymbol{R} \}$ didefinisikan dengan $f(x) = 4 - x^2$, maka tentukanlah
   a. Koordinat titik maksimumnya
   b. Nilai maksimum dari f
   c. Pembuat nol dari f
   d. Daerah hasil dari f
   e. Persamaan sumbu simetri parabolnya.

4. Suatu fungsi $f : A \rightarrow \boldsymbol{R}$ di mana $A = \{ x \mid -5 \le x \le 3, x \in \boldsymbol{R} \}$, ditentukan oleh $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Tentukanlah :
   a. Koordinat titik minimumnya
   b. Nilai minimum fungsi f
   c. Pembuat nol fungsi f
   d. Daerah hasil fungsi f
   e. Persamaan sumbu simetri parabolanya.

5. Sebuah roket ditembakkan vertikal ke atas. Tinggi sesudah t detik ialah $30 - 5t^2$ meter. Rumus fungsi h ialah $h(t) = 30t - 5t^2$. Daerah asal fungsi f ialah $\{ t \mid 0 \le t \le 6 \}$. Setelah di buat grafiknya, tentukanlah :
   a. Setelah berapa detikkah ketinggian roketnya maksimum ?
   b. Berapa tinggi maksimum roket ?
   c. Selang waktu di mana tinggi roket lebih dari 25 meter.

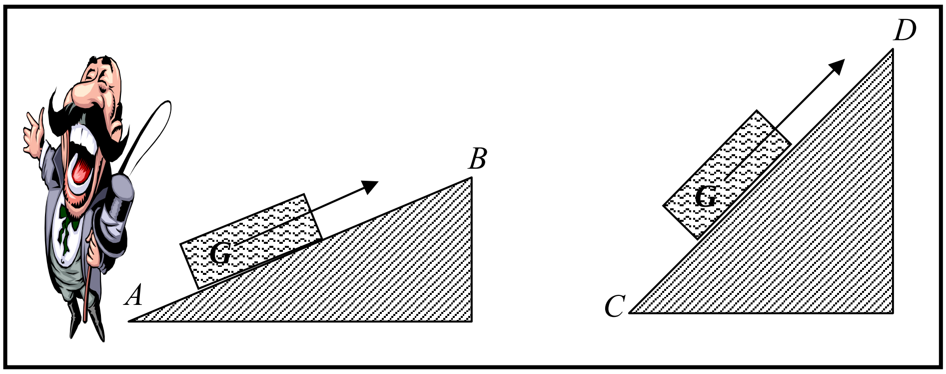
6.



Gb. 3.34

Gambar di samping menyajikan lembaran seng yang berbentuk persegi panjang dengan lebar 40 cm, dan akan dibuat talang air.
Agar talang air ini dapat dilalui air sebanyak – banyaknya, dengan bantuan grafik fungsi maka tentukan ukuran panjang dan lebar penampang talang tersebut.

F. Kegiatan-4: Gradien, Persamaan dan Grafik Garis Lurus



Suatu benda G jika didorong keatas pada permukaan CD terasa lebih berat jika dibanding dengan jika benda G tersebut di dorong ke atas pada bidang AB. Mengapa demikian? Hal ini disebabkab kemiringan CD lebih besar dari kemiringan AB.

Untuk dapat mengukur kemiringan suatu kurva, maka dipersilakan Anda mencermati uraian tentang masalah itu di bawah ini. Pada pemaparan masalah gradien, persamaan dan grafik garis lurus pada modul ini dengan pendekatan fungsi linear.

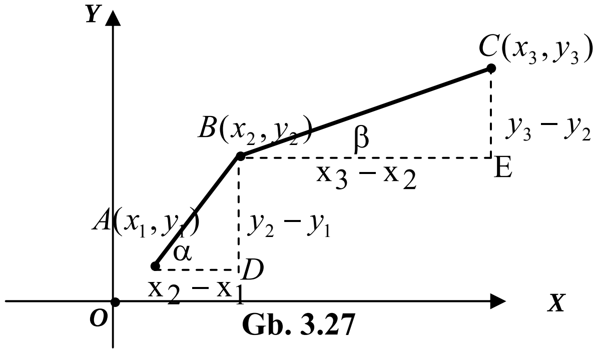
1. Fungsi Linear

Fungsi f pada bilangan real ***R*** **(** f : ***R*** $\rightarrow$ ***R*)**, yang ditentukan oleh rumus $f(x) = mx + n$, dengan m dan n konstanta dan $m \neq 0$ disebut **fungsi linear.**

Grafik fungsi linear $f(x) = mx + n$ pada bidang Cartesius berupa garis lurus.

Dari fungsi linear $\{(x,y)|\ y = mx + n, m, n$ konstanta , $m \neq 0\}$, maka $y = mx + n$ biasa disebut rumus fungsi, dan pada masalah ini rumus fungsi berupa persamaan yang karena grafiknya berupa garis lurus, maka persamaan $y = mx + n$ disebut juga persamaan garis lurus, yang buktinya kita paparkan di bawah ini.

Bukti : Akan kita tunjukkan bahwa y = mx + n adalah persamaan garis lurus.



Gb. 3.27

Misalkan $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ dan $C(x_3, y_3)$ terletak pada y = mx + n, oleh karena itu akan berlaku:

$A(x_1, y_1)$ pada $y = mx + n$ maka $y_1 = mx_1 + n$ ……………(1)

$B(x_2, y_2)$ pada $y = mx + n$ maka $y_2 = mx_2 + n$ ……………(2)

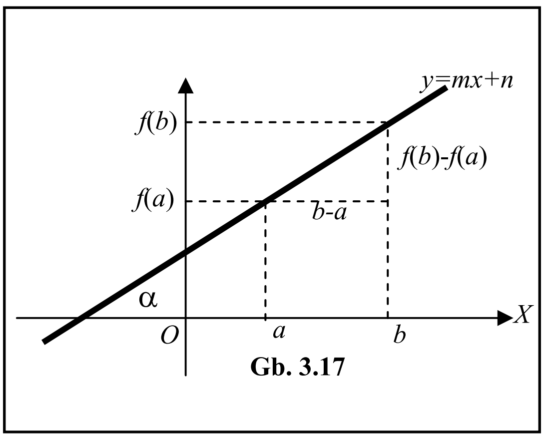
$C(x3, y3)$ pada $y = mx + n$ maka $y_3 = mx_3 + n$ ……………(3)

Jika (2) – (1) $\rightarrow y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \Rightarrow m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

dan (3) – (2) $\rightarrow y_3 - y_2 = m(x_3 - x_2) \Rightarrow m = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$

Berarti $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ dan karena $\angle ADB = \angle BEC$ yang secara geometris berarti ΔADB dan ΔBEC sebangun, yang ini akan berakibat $\angle BAD = \angle CBE$ yang mana kesimpulan ini membawa akibat *A*, *B* dan *C* kolinear (segaris).

Dan hal yang sama akan berlaku untuk setiap tiga titik yang terletak pada *y* = *mx* + *n*. pasti kolinear, yang dengan kata lain *y* = *mx* + *n* adalah persamaan garis lurus.



Gb. 3.17

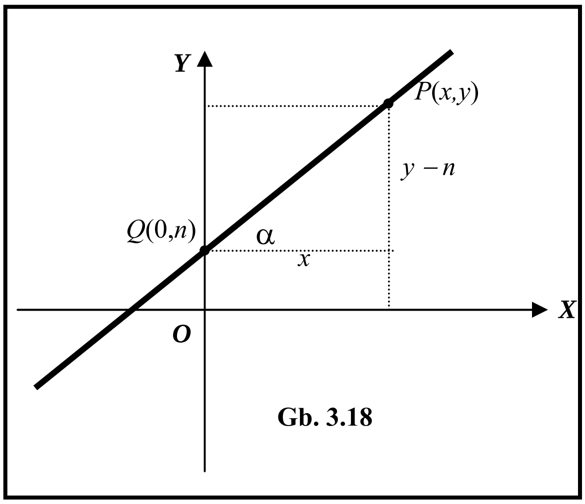
$f(x) = mx + n \rightarrow$

$$\begin{array}{rcl} f(b) & = & bm + n \\ f(a) & = & am + n \\ \hline f(b) - f(a) & = & m(b - a) \end{array} \; -$$

$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Nilai rasio inilah yang dinamakan **gradien (koefisien arah)** garis tersebut, yang menentukan kecondongan (kemiringan) garis terhadap sumbu-*X*.

2. Persamaan Garis Lurus



Gb. 3.18

Misalkan titik $P(x,y)$ pada garis g

Garis ini memotong sumbu y di titik Q(0,**n**), dan memiliki kecondongan sebesar m

Dari $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ maka

$$m = \frac{y-n}{x-0}$$

Jika disajikan dalam himpunan, garis g dapat dituliskan dalam bentuk himpunan

$$G = \{(x,y) \mid \tfrac{y-n}{x} = m, x \neq 0\} \cup \{(0,n)\}$$

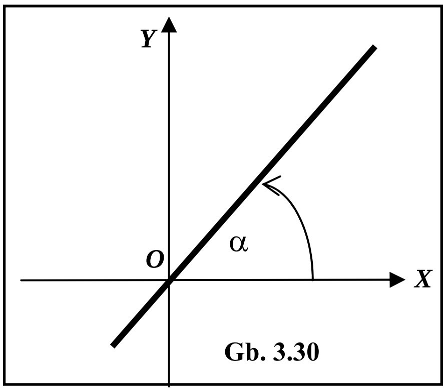
$$= \{(x,y) \mid y = mx + n \text{ untuk } x \neq 0, \text{ atau } x = 0\}$$

$$= \{(x,y) \mid y = mx + n\}$$

Jadi persamaan $y = mx + n$ adalah suatu persamaan garis yang melalui $(0,n)$ dengan gradien m.

Akibatnya :

1) Persamaan garis bergradien m dan melalui O(0,0) adalah :



Gb. 3.30

$y = mx + 0$

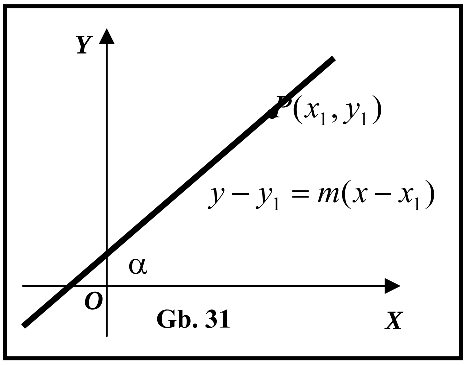
$\boxed{\mathbf{y = mx}}$

Yang berarti :

y* = *x adalah garis bagi kuadran I/III

y* = −*x adalah garis bagi kuadran II/IV

2) Persamaan garis yang melalui $P(x_1, y_1)$ dengan gradien *m*, adalah dicari dengan :



Gb. 31

persamaan garis dengan gradien *m* adalah :

$y = mx + n$ ………….(1)

yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ persamaannya adalah :

$y_1 = mx_1 + n$ ……….(2)

Jika (2) - (1) maka :

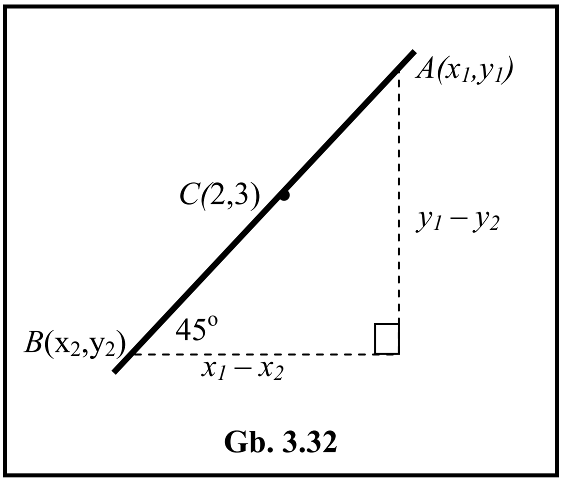
$y - y_1 = m(x - x_1)$

Jadi persamaan garis yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ dan gradiennya m adalah $\boxed{: y - y_1 = m(x - x_1)}$

Contoh :

Tentukan persamaan garis yang melalui titik *C*(2,3) dan membuat sudut sebesar 45° dengan sumbu *X*

Jawab :



Gb. 3.32

Gradien dari garis tersebut adalah $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ dan karena garis tersebut membuat sudut 45^{o} dengan sumbu-*X* positif, maka nilai $y_1 - y_2 = x_1 - x_2$. Nilai $m = 1$, maka persamaan garis yang diketahui salah satu titik dan gradiennya adalah :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 1$$

3) Persamaan garis yang melalui dua titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$, dapat dicari sebagai berikut :

Persamaan garis yang melalui $P(x_1, y_1)$ dengan gradien m adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$, dan jika garis tersebut juga melalui $Q(x_2, y_2)$, maka:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \text{ sehingga } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Jadi persamaan garis yang melalui titik-titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah

$$y_2 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1)$$

Sehingga diperoleh persamaan garis yang melalui dua titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ adalah :

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

Contoh

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (2,5) dan (1,–4).

Jawab :

Persamaan garis yang melalui (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah :

$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, sehingga persamaan garis yang melalui (2,5) dan (1,–4):

$$\frac{y-5}{-4-5} = \frac{x-2}{1-2}$$

$$\frac{y-5}{-9} = \frac{x-2}{-1}$$

$$-(y-5) = -9(x-2)$$

$$y = 9x - 13$$

4) Persamaan Umum Garis Lurus

Persamaan garis dapat dinyatakan dalam persamaan : ***ax* + *by* + c = 0,** di mana *a* dan *b* tidak boleh kedua-duanya nol, persamaan ini dinamakan **persamaan umum garis lurus.**

Jika persamaan ini kita ubah menjadi $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, (b \neq 0)$, sehingga darinya dapat ditarik suatu kesimpulan bahwa : $ax + by + c = 0$ adalah suatu persamaan garis dengan gradien $m = -\frac{a}{b}$, dan memotong sumbu *y* di titik $(0, -\frac{c}{b})$.

Contoh

Tentukan gradien dan perpotongan dengan sumbu *y*, suatu garis yang persamaannya $3x + 2y - 7 = 0$

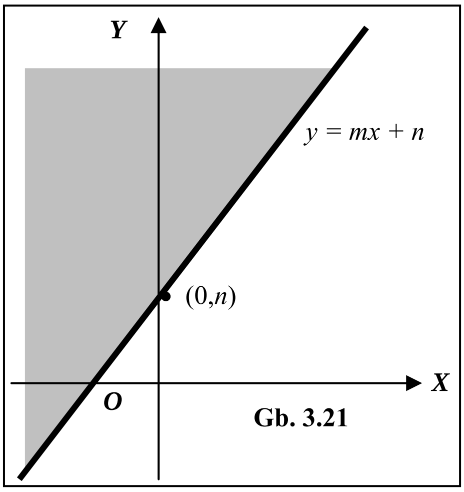
Jawab :

$a = 3$, $b = 2$ dan $c = -7$, sehingga :

gradien $m = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{2}$ dan $n = -\frac{c}{b} = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}$

Jadi garis $3x + 2y - 7 = 0$, mempunyai gradien $\text{m} = -\frac{3}{2}$ dan memotong sumbu *y* di $(0, \frac{7}{2})$.

3. Pertidaksamaan Linear



Gb. 3.21

Garis $y = mx + n$ akan membagi bidang Cartesius menjadi tiga bagian yakni :

$\{(x,y) \mid y < mx + n\}$

$\{(x,y) \mid y = mx + n\}$, dan

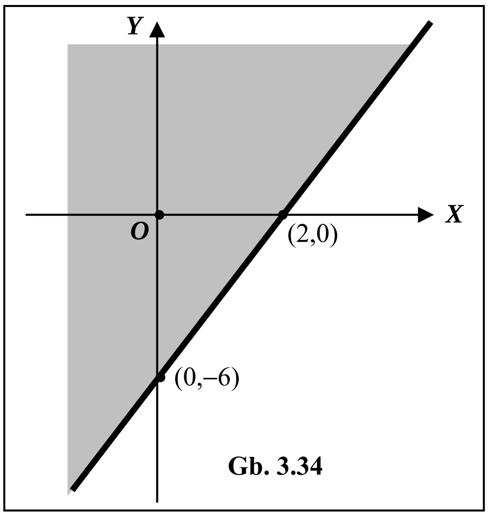
$\{(x,y) \mid y > mx + n\}$, atau daerah di sebelah bawah, garis itu sendiri dan daerah di sebelah atas garis $y = mx + n$.

Contoh

Arsirlah daerah yang menjadi tempat kedudukan titik-titik yang dapat ditunjukkan dengan $\{(x,y) \mid y \geq 3x - 6\}$

Jawab :

Langkah pertama gambarlah garis dengan persamaan $y = 3x - 6$. Cara yang baik untuk menggambar garis dengan cepat ialah dengan menggambar titik potongnya dengan sumbu-sumbu koordinat, kemudian menggambar garis melalui kedua titik itu.



Gb. 3.34

$y = 3x - 6$

x	0	2
y	–6	0
(x,y)	(0,–6)	(2,0)

Untuk mencari daerah yang menentukan nilai dari salah satu titik pada salah satu daerah.

Misalkan kita gunakan $O(0,0)$:

$(0,0) \rightarrow y = 3x - 6$

$\rightarrow 0 > 3.0 - 6$, (dipenuhi)

Jadi daerah yang diminta adalah daerah yang memuat $O(0,0)$, sebagaimana daerah yang

4. Refleksi Diri KB-4

Setelah Anda melaksanakan KB-2 ini, kerjakan latihan nomor di bawah ini dengan sungguh-sungguh, kemudia cocokkan hasilnya dengan kunci jawab di belakang, kemudian buat skor hasil pekerjaan Anda dengan rumus

$$\text{Skor refleksi diri } S_c = \frac{\text{Jumlah soal yang dikerjakan dengan benar}}{4} \times 100\%$$

Jika skor refleksi diri Anda lebih atau sama dengan 75%, selamat Anda telah memahami KB-4, dan Anda dapat melanjutkan ke Bab IV, dan bagi Anda yang belum mencapai 75% dipersilahkan membaca lagi lebih cermat dan diskusikan dengan kolega Anda masalah yang dirasa kurang jelas dan dicoba lagi megerjakan soal-soal di bawah ini sekali lagi

Soal Latihan KB-4

1. Tulis persamaan garis lurus yang melewati titik di bawah ini dan dengan gradiennya

   a. $(2, -3)$, $m = 2$
   b. $(-7,-6)$, $m = 2$
   c. $(-2,3)$, $m = -\frac{1}{4}$
   d. $p,q)$, $m = r$
   e. $(-5,4)$, $m = -\frac{4}{5}$

2. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui pasangan titik –titik di bawah ini.

   a. (12,3), (2,–5)
   b. (–4,0), (0,4)
   c. (5,7), (5,–3)
   d. (0,2), (8,–1)
   e. (3,–5), (–1,–5)

3 Tentukan persamaan garis berat *AD* dari segitiga dengan titik – titik sudut *A*(13,−7), *B*(−8,1) dan *C*(2,−5). Dengan menggunakan rumus koordinat titik tengah *PQ* adalah $T(\frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2})$

4. Tunjukkan bahwa persamaan garis yang lewat (*a*,0) dan (0,*b*) adalah $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, (a \neq 0, b \neq 0)$ (Persamaan ini biasa dikenal dengan nama **persamaan garis bentuk titik potong ganda**).

BAB IV
SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA PEUBAH

A. Pengantar

Kenyataan di lapangan masih banyak dijumpai kesukaran guru dalam mengembangkan permasalahan yang dibawa ke sistem persamaan linear dua peubah.

Pada bab ini Anda diharapkan lebih mengenal lagi sistem persamaan linear tiga peubah, dalam hal ini dibahas berbagai teknik penyelesaian sistem persamaan tiga peubah, juga dibahas bagaimana membuat dan menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dua peubah dan penafsirannya.

B. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini diharapkan Anda mampu menjelaskan berbagai teknik menyelesaikan sitem persamaan linear dua peubah dan membuat serta menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan dua peubah dan penafsirannya.

Sistem persamaan linear dua peubah ini dikemas dalam dua kegiatan belajar (KB) sebagai berikut:

1. KB-1: Teknik menyelesaikan sistem persamaan linear dua peubah
   Setelah mengikuti kegiatan belajar 1 ini, diharapkan guru dapat menjelaskan berbagai teknik penyelesaian sistem persamaan linear dengan dua peubah baik secara numerik maupun grafik

2. KB-2: Membuat dan menyelesaikan model matematika yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dua peubah dan penafsirannya.

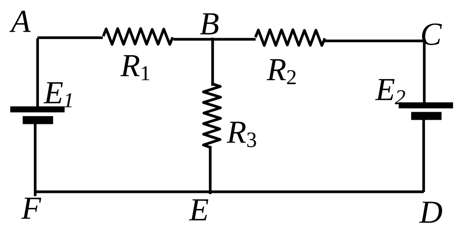
   Setelah menyelesaikan kegiatan belajar 2 ini, diharapkan guru dapat menjelaskan strategi menyelesaikan persaoalan yang model matematikanya berupa sistem persamaan linear dua peubah.

C. Kegiatan Belajar-1: Teknik Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Dua Peubah

1. Perhatikan permasalahan berikut:

(1) Bu Atun membeli 2 kg gula pasir dan 5 kg beras seharga Rp 25.600,00 di warung bu Tini. Bu Yayuk membeli 3 kg gula pasir dan 4 kg beras di warung yang sama. Ia membayar Rp 27.200,00. Berapa yang harus dibayar bu Reni jika di warung tersebut ia membeli 4 kg gula pasir dan 7 kg beras, dan ketiga ibu membeli barang dengan kualitas sama?

(2)



Jika R_1, R_2, dan R_3 berturut-turut 3Ω, 6Ω, dan 12Ω dan E_1 = 60 Volt, E_2 = 72 Volt, Berapa besar dan bagaimana arah arus antara *AB* dan *BC* masing-masing?

Kedua permasalahan di atas ini penyelesaiannya akan membawa Anda ke suatu sistem persamaan, sebagai misal kalau pada permasalahan pertama kita misalkan harga gula pasir x rupiah per kg, dan beras y rupiah per kilogramnya, maka diperoleh model matematika:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 26.600 \\ 3x + 4y = 27.200 \end{cases}$$

Dan persoalannya adalah Anda diminta menentukan nilai $4x + 7y$

Sistem persamaan di atas dikenal dengan sebutan sistem persamaan linear dua peubah

2. Beberapa Hal Tentang Sistem Persamaan Linear

a. Sistem persamaan linear **(SPL)** dua peubah merupakan pokok bahasan yang banyak digunakan dalam matematika di tingkat menengah maupun lanjut, misalnya sistem persamaan linear tiga peubah dan program linear.

b. Sistem persamaan linear disebut juga persamaan linear simultan (simultaneous linear equations). SPL paling sederhana ialah SPL dua persamaan dua variabel, bentuk umumnya**:** $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

c. Penyelesaiannya ialah pasangan bilangan $(\bar{x}, \bar{y})$ sedemikian sehingga jika $\bar{x}$ digantikan pada *x* dan $\bar{y}$ digantikan pada y terbentuk pernyataan yang secara simultan benar untuk kedua persamaan.

Tiga masalah dalam penyelesaian sistem persamaan linear
1) ada tidaknya penyelesaian
2) metode untuk menentukan
3) deskripsi selengkapnya tentang penyelesaian tersebut.

Manipulasi sistem persamaan berikut tidak mengubah ada tidaknya penyelesaian-penyelesaian sistem persamaan**:**

- penambahan ruas-ruas persamaan (persamaan-persamaan) ke ruas-ruas persamaan lain dalam sistemnya
- perkalian setiap ruas pada suatu persamaan dengan sebarang bilangan bukan 0 (nol)
- pengubahan urutan persamaan dalam sistemnya.

d. Secara numerik, diantara penyelesaian secara elementer dikenal:
- metode substitusi
- metode eliminasi
- metode ekuasi (penyamaan)

yang sesungguhnya ketiga-tiganya mengarah pada eliminasi salah satu variabelnya.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan**:** $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

Jawab**:**

1) dengan substitusi**:** $\begin{cases} 3x - y = 3 & (1) \\ x + 2y = 8 & (2) \end{cases}$

(1) $3x - y = 3 \Leftrightarrow y = 3x - 3$ ………. (3)

Substitusikan y pada (3) ke (2) diperoleh**:** $\rightarrow x + 2\ (3x - 3) = 8 \Leftrightarrow 7x = 14 \Leftrightarrow x = 2$.

Jika $x = 2$ disubstitusikan ke (3) diperoleh $y\ n= 3(2) - 3 = 3$

Himpunan penyelesaiannya ialah $\{(2, 3)\}$.

2) dengan eliminasi**:**

$$\begin{array}{r|l|l} 3x - y = 3 & \times 2 & \Leftrightarrow 6x - 2y = 6 \\ x + 2y = 8 & \times 1 & \Leftrightarrow \underline{x + 2y = 8}\ + \\ & & 7x = 14 \Leftrightarrow x = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l} 3x - y = 3 & \times 1 & \Leftrightarrow 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 & \times 3 & \Leftrightarrow \underline{3x + 6y = 24}\ - \\ & & -7y = -21 \Leftrightarrow y = 3 \end{array}$$

Himpunan penyelesaiannya ialah {(2, 3)}

3) dengan ekuasi (penyamaan)

$3x - y = 3 \Leftrightarrow y = 3x - 3$

$x + 2y = 8 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$

Berarti $3x - 3 = -\frac{1}{2}x + 4$

$\Leftrightarrow 3\frac{1}{2}x = 7$

$\Leftrightarrow x = 2$

$3x - y = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}y + 1$

$x + 2y = 8 \Leftrightarrow x = -2y + 8$

Berarti $\frac{1}{3}y + 1 = -2y + 8$

$\Leftrightarrow 2\frac{1}{3}y = 7$

$\Leftrightarrow y = 3$

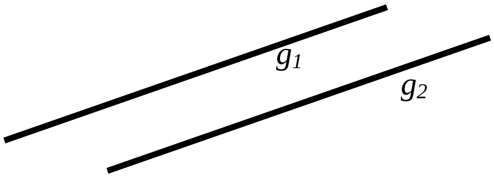
Himpunan penyelesaiannya ialah {(2, 3)}

e. Penyelesaian secara Geometrik (Geometri Analitik)

Penyelesaian secara geometrik haruslah dilandasi dengan pemahaman menggambar grafik persamaan linear dan gambar yang disajikan haruslah teliti. Penyelesaian cara ini pada dasarnya mencari titik persekutuan antara dua garis yang persamaannya disajikan dalam setiap persamaan dalam sistem tersebut.

Ada tiga kemungkinan**:**

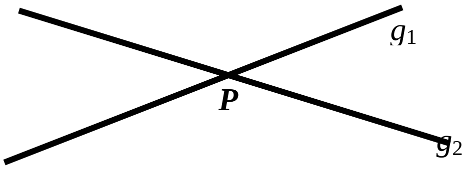
1) Garis sejajar ⇔ tidak ada titik persekutuan ⇔ Himpunan Penyelesaiannya ϕ (tidak mempunyaii penyelesaian)



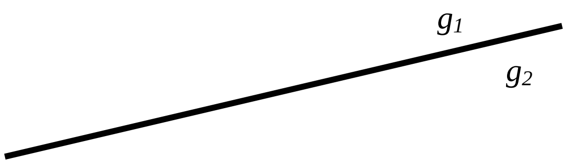
Contoh:

Sistem persamaan linear $\begin{cases} 2x+4y-7=0 \\ x+2y-8=0 \end{cases}$ grafiknya merupakan dua garis lurus yang sejajar, sehingga tidak ada penyelesaian sistem persamaannya.

2) Garis berpotongan ⇔ Ada satu titik potong → Himpunan penyelesaiannya beranggota sebuah pasangan bilangan (mempunyai penyelesaian tunggal)



3) Garis berimpit ⇔ Setiap titik yang terletak pada garis pertama pasti terletak pada garis kedua dan sebaliknya → Himpunan penyelesaiannya adalah himpunan yang pasangan absis dan ordinatnya dari titiknya memenuhi salah satu persmaan.



Contoh : $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 4x - 2y = 14 \end{cases}$

Grafiknya adalah dua garis berimpit, sehingga himpunan penyelesaian sistem persamaan di atas adalah $\{(x, y) \mid 2x - y = 7, x, y \in R\}$

3. Tinjauan Umum

$a_1x + b_1y = c_1$ (1) $\Leftrightarrow a_1 a_2 x + a_2b_1y = a_2c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$ (2) $\Leftrightarrow a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2$

——————————— (–)

$(a_2b_1 - a_1b_2)y = a_2c_1 - a_1c_2 \Leftrightarrow y = \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2} = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

Analog diperoleh: $x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

Jadi: $\boldsymbol{x = -}\ \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ $\boldsymbol{y =}\ \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

Nilai-nilai x dan y **ada, jika dan hanya jika** $\boldsymbol{a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0}$ **atau** $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ **.**

Tetapi jika nilai $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ atau $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ maka ada tidaknya nilai-nilai x dan y tergantung dari pembilang pecahan itu. Jika $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ atau $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ maka nilai y tidak terdefinisi. Demikian juga $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$ atau $\dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ nilai x tidak terdefinisi. Penyebab terjadinya hal tersebut secara singkat disebabkan oleh $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$**.**

Jika $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ atau $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, maka terdapat hubungan $-0 \times y = 0$, yang dipenuhi oleh setiap nilai y. Demikian juga jika $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ atau

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, maka ada hubungan $(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$ yang berdasar nilai itu berarti $0 \times x = 0$, sehingga dipenuhi oleh setiap nilai x. Dengan demikian maka setiap pasangan terurut (x, y) yang memenuhi pada persamaan pertama juga memenuhi pada persamaan yang kedua.

Dari uraian di atas hal itu terjadi jika $(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ dan $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2})$ atau $(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ dan $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2})$. Secara singkat hal itu terjadi karena $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Kesimpulan dari uraian di atas**:** Dari sistem persamaan $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

(i) jika $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ maka ada satu penyelesaian,

(ii) jika $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ maka tidak ada penyelesaian

(iii) jika $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, maka ada tak berhingga penyelesaian

Ketiga kemungkinan di atas jika dikaitkan dengan grafiknya adalah bahwa keduanya merupakan garis-garis lurus yang**:**

(i) berpotongan pada sebuah titik
(ii) sejajar
(iii) berimpit

4. Refleksi Diri KB-1

Setelah Anda melaksanakan KB- ini, kerjakan latihan di bawah ini dengan sungguh-sungguh, kemudia cocokkan hasilnya dengan kunci jawab di belakang, kemudian buat skor hasil pekerjaan Anda dengan rumus

Skor refleksi diri S_c= $\frac{\text{Jumlah soal yang dikerjakan dengan benar}}{5} \times 100\%$

Jika skor refleksi diri Anda lebih atau sama dengan 75%, selamat Anda telah memahami KB-1, dan Anda dapat melanjutkan ke KB-2, dan bagi Anda yang belum mencapai 75% dipersilahkan membaca lagi lebih cermat dan diskusikan dengan kolega Anda masalah yang dirasa kurang jelas dan dicoba lagi megerjakan soal-soal di bawah ini sekali lagi

Tentukan himpunan penyelesaian setiap sistem persamaan berikut, dengan menggunakan salah satu dari keempat teknik menyelesaikan sistem persamaan linear dua peubah, tulis juga alasanmu mengapa Anda memilih teknik itu!

a. $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x + 4y - 5 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 6y - 2x + 4 = 0 \end{cases}$

D. Kegiatan Pembelajaran-2: Membuat dan Menyelesaikan Model Matematika Sistem Persamaan Linear Dua Peubah

Cermatilah wacana:

Dengan memiliki uang sebesar Rp 6.200,00, Anik dapat membeli 5 buah mangga dan 8 jeruk atau membeli 3 buah mangga dan 11 buah jeruk. Berapa harga masing-masing?

Persoalan di atas model matematikanya merupakan sistem persamaan linear dua peubah.

1. Mengembangkan model matematika berbentuk sistem persamaan linear dua peubah

Anda sering menemui soal-soal yang berbentuk cerita dan soal tersebut menuntut Anda untuk membuat model matematikanya yang berbentuk persamaan linear dua peubah. Baru dari sisni dapat dicari penyelesaiannya. Untuk menentukan solusi dari masalah itu adalah dengan menggunakan langkah baku dalam pemecahan masalah yaitu:

a. Bacalah soal itu dengan cermat sampai selesai dan mengerti akan kandungannya, misalnya apa yang ditanyakan dari persoalan tersebut
b. Susunlah model matematikanya dalam bentuk sistem persamaan linear dua peubah
c. Selesaaikanlah sistem persamaan linear dua peubah tersebut dengan menggunakan salah satu teknik penyelesaian yang telah Anda pelajari di depan.
d. Tulis jawaban dari soal tersebut, yang sebelumnya perlu Anda cek dengan cara mencocokkan kembali ke dalam soalnya

Di bawah ini diberikan contoh persoalan yang model matematikanya merupakan sistem persamaan linear dua peubah.

Contoh

1. Selisih dua bilangan cacah adalah 12, sedangkan jumlahnya 88. Tentukan bilangan-bilangan itu!

   Penyelesaian

   Misalkan bilangan pertama = x dan bilangan kedua = y

   Sistem persamaan linearnya:

   $$x - y = 12$$
   $$x + y = 88$$

   Penyelesaian sistem persamaan linearnya:

$$\begin{array}{r} x - y = 12 \\ x + y = 88 \\ \hline 2x \quad = 100 \end{array} + \Leftrightarrow x = 50$$

Substitusikan x = 50 ke persamaan ke dua, diperoleh:

$50 + y = 88 \Leftrightarrow y = 38$

Mencocokkan jawabnya:

50 – 38 = 12 (benar)

50 + 38 = 88 (benar)

Jadi bilangan pertamanya adalah 50 dan bilangan ke dua adalah 38.

2. Suatu pecahan jika disederhanakan bernilai $\frac{3}{4}$, jika pembilang pecahan mula-mula dikurangi 9, maka nilainya berubah menjadi $\frac{1}{2}$. Pecahan manakah itu?

Penyelesaian

Misalkan pembilang = x dan penyebut pecahan itu = y, sehingga:

$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x = 3y$

$\Leftrightarrow 4x - 3y = 0$

Dari kalimat kedua diperoleh persamaan:

$\frac{x-9}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x-9) = y$

$\Leftrightarrow 2x - y = 18$

Sehingga model matematikanya berupa sistem persamaan:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 2x - y = 18 \end{cases} \left| \begin{matrix} \times 1 \\ \times 3 \end{matrix} \right| \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 6x - 3y = 54 \end{cases} -$$

$-2x = -54 \Leftrightarrow x = 27$

Substitusikan $x = 27$ ke persamaan kedua diperoleh:

$2(27) - y = 18 \Leftrightarrow y = 54 - 18 = 36$

Jika Anda cocokkan jawab ini dengan persoalannya:

Pembilang = 27 dan penyebut 36

Nilai pecahan semula = $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$ (benar)

Pecahan baru = $\frac{27-9}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ (benar)

Jadi pecahan itu adalah $\frac{27}{36}$

2. Refleksi Diri Kegiatan Belajar-2

Setelah Anda melaksanakan KB-2 ini, kerjakan latihan di bawah ini dengan sungguh-sungguh, kemudia cocokkan hasilnya dengan kunci jawab di belakang, kemudian buat skor hasil pekerjaan Anda dengan rumus

Skor refleksi diri $S_c = \frac{\text{Jumlah soal yang dikerjakan dengan benar}}{8} \times 100\%$

Jika skor refleksi diri Anda lebih atau sama dengan 75%, selamat Anda telah memahami KB-2, dan Anda dipandang telah cukup memahami modul ini, dan bagi Anda yang belum mencapai 75% dipersilahkan membaca lagi lebih cermat dan diskusikan dengan kolega Anda masalah yang dirasa kurang jelas dan dicoba lagi megerjakan soal-soal di bawah ini sekali lagi

1. Carilah dua dua buah bilangan yang jumlahnya 67 dan selisihnya 45.
2. Jumlah harga 3 batang pensil dan 4 buah buku adalah Rp 13.750,00 sedangkan harga 2 batang pensil dan 5 buku tulis adalah Rp 15.000,00 . Tentukan haraga masing-masing!
3. Dua buah bilangan berselisih 10, dua kali bilangan yang kecil 37 lebihnya dari bilangan besar. Bilangan-bilangan manakah itu?
4. Dua bilangan berbanding 3 : 4. jika yang pertama dikurangi 5 dan yang kedua ditambah 20, maka jumlah kedua bilangan baru adalah 127. Bialangan-bilangan manakah itu?
5. Sebuah bilangan ditulis dengan dua angka . Bilangan itu 7 kali dari jumlah angka-angkanya.Carilah bilangan itu!

6. Pada garis AB terletak titik P, sedemikian hingga $PA : PB = 2 : 3$, Jika P digeser 5 cm ke arah A, maka $PB = 2\frac{1}{2}PA$, Tebtukan panjang AB!
7. Dua nodal berjumlah Rp 2.000.000,00 sedangkan jumlah bunganya setiap tahun sebesar Rp 68.000,00. Jika modal yang besar suku bunganya 3% setahun dan modal yang kecil mempunyai interes 4% setahun. Tentukan besar modal itu masing-masing.
8. Tiga tahun yang akan datang umur seorang ayah 3 kali umur anaknya, sedangkan 8 tahun yang lalu umur ayah tersebut 14 kali umur anaknya tersebut. Berapa tahun lagi umur ayah itu mencapai setengah abad?

BAB V
PENUTUP

A. Rangkuman

Setelah Anda pelajari secara keseluruhan modul ini, sebelum Anda merefleksikan hasil belajar Anda dengan mengerjakan soal-soal yang telah disiapkan di bawah ini, maka terlebih dahulu uraian modul ini dapat disarikan sebagai berikut:

1. Operasi Aljabar dan Pemfaktoran Bentuk Aljabar

Untuk operasi bentuk aljabar, beberapa alternatif langkah yang dapat digunakan antara lain sebagai berikut.

a. Dengan pendekatan kontekstual, mantapkan dan ingat kembali pembelajaran tentang operasi bilangan bulat.

b. Sembari mengingat, perjelas beberapa pengertian tentang variabel, konstanta, koefisien, bentuk aljabar, suku-suku sejenis dan sifat-sifatnya.

c. Lakukan operasi-operasi bentuk aljabar, kemudian untuk meningkatkan ketrampilan siswa, perbanyak latihan.

Sementara itu, untuk pemfaktoran bentuk aljabar, beberapa bentuk aljabar yang difaktorkan.

a. Faktorisasi bentuk $ax + b$ atau $ax - b$

b. Faktorisasi bentuk $x^2 + 2xy + y^2$

c. Faktorisasi bentuk $x^2 - y^2$

d. Faktorisasi bentuk $ax^2 + bx + c$

2. Relasi, Fungsi dan Persamaan Garis Lurus

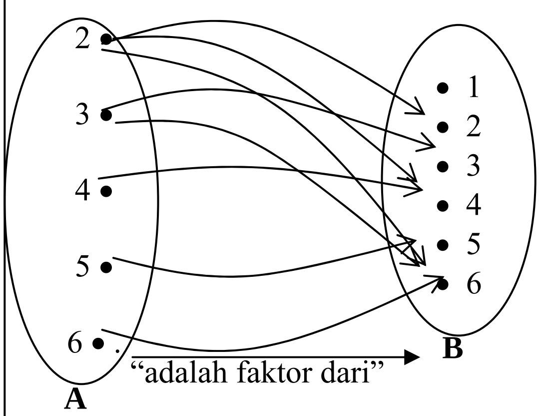
a. Relasi

Relasi binar antar elemen-elemen dari satu atau lebih himpunan, untuk dapat menentukan suatu relasi diperlukan :

1) suatu himpunan *A* yang tidak kosong,
2) suatu himpunan *B* yang tidak kosong,
3) suatu kalimat terbuka, yang kita singkat sebagai $P(x,y)$, dimana $P(a,b)$ dapat bernilai benar atau salah untuk tiap pasangan berurut (a,b).

Untuk menyajikan relasi relasi binar dari himpunan A ke himpunan B, dapat dilakukan dengan:

a) Diagram panah



Gb.5.1

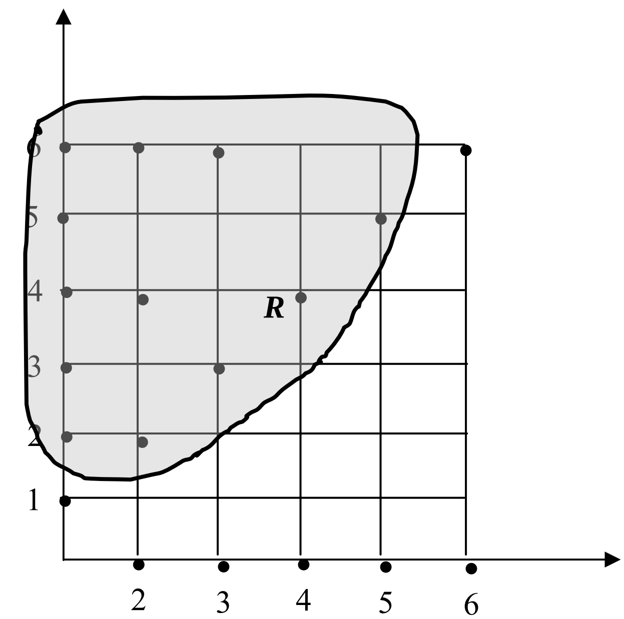
Diagram di samping ini menyajikan diagram relasi dari himpunan :
$A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ke himpunan $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ yang ditentukan oleh kalimat terbuka "*x* adalah faktor dari *y*"

b) Himpunan Pasangan Berurut

Berangkat dari relasi di atas, yaitu relasi dari himpunan $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ke himpunan $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ yang didefinisikan melalui kalimat terbuka "*x* adalah faktor dari *y*", jika disajikan dalam himpunan pasangan berurutan akan menjadi $R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

c) Dengan Diagram Cartesius

Jika relasi *R* = {(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (6,6)} dari contoh di atas disajikan dalam diagram Cartesius maka grafiknya akan tampak sebagai berikut :



Gb. 5.2

b. Fungsi

Suatu fungsi *f* dari himpunan *A* ke dalam himpunan *B* adalah suatu relasi yang memasangkan setiap elemen dari *A* dengan tepat satu elemen di *B*

Fungsi *f* dari himpunan *A* ke dalam *B* ini biasa ditulis dengan notasi:

$\boldsymbol{f : A \rightarrow B}$ dibaca "fungsi *f* memetakan *A* ke dalam *B*"

Unsur tunggal di dalam *B* yang dihubungkan dengan $a \in A$ oleh f dinyatakan dengan *f*(*a*) dan disebut **peta** atau **bayangan *a*** oleh *f*, atau disebut juga **nilai *f* pada *a***. Dan dalam hal ini *a* adalah **prapeta** dari *f*(*a*).

Notasi yang digunakan untuk menyatakan suatu fungsi *f* yang memetakan setiap anggota *x* dari himpunan *A* ke anggota *y* dari himpunan *B*, adalah :

$\boldsymbol{f : x \rightarrow y}$ dibaca "*f* memetakan *x* ke *y*"

Pandanglah pemetaan $f : A \rightarrow B$, sebagaimana di atas, dalam hal ini :

(1) Himpunan *A* disebut **daerah asal (domain)** dari *f*

(2) Himpunan *B* disebut **daerah kawan (codomain)** dari *f*

(3) Himpunan semua peta unsur *A* dalam *B* disebut **daerah hasil (range)** dari f, dan ditulis dengan notasi ***f*(*A*).**

Sehingga $f(A) = \{f(a) \mid \in A\}$

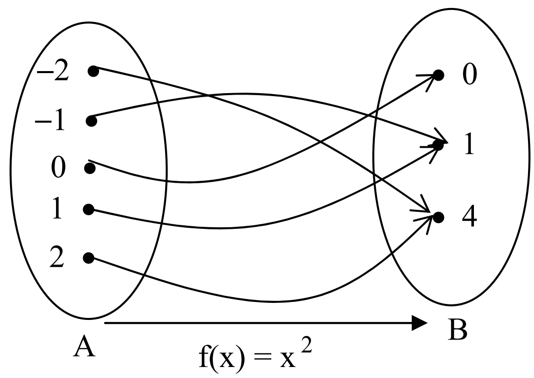
1) Fungsi – fungsi Khusus

a) Fungsi Surjektif

Misalkan *f* suatu fungsi dari *A* ke dalam *B*, maka daerah hasil *f*(*A*) dari fungsi *f* adalah himpunan bagian dari kodomain *B* atau $f(A) \subset B$, fungsi ini kita kenal dengan nama **fungsi *into* (ke dalam).** Jika *f*(*A*) = *B* artinya setiap anggota *B* muncul sebagai peta dari sekurang-kurangnya satu elemen *A*, maka kita katakan **"*f* adalah suatu fungsi *A* pada *B*".** Fungsi **pada (*onto function*)** biasa juga kita kenal dengan nama fungsi **surjektif.**

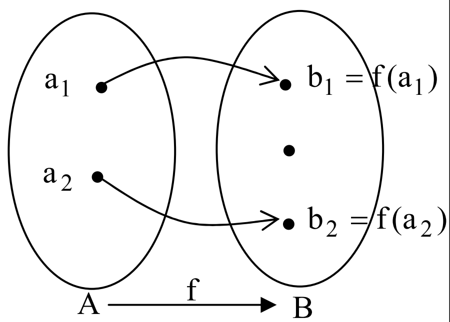
Contoh

Fungsi *f* dari himpunan *A* = { –2, –1, 0, 1, 2} ke dalam *B* = { 0, 1, 4} yang didefinisikan oleh rumus fungsi $f(x) = x^2$ adalah suatu fungsi yang surjektif, karena setiap elemen di *B* merupakan sekurang-kurangnya peta dari satu elemen di *A*.



Gb. 5.3

b) Fungsi Injektif.



Gb. 5.4

Suatu fungsi $f\ :\ A \to B$ sedemikian hingga untuk setiap anggota A yang berbeda mempunyai peta yang berbeda pula di B, dikatakan f sebagai fungsi yang **injektif** atau **fungsi satu-satu.**

Jadi :

Fungsi $f : A \to B$ disebut fungsi injektif (satu-satu), jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$ akan berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Dari ketentuan bahwa suatu fungsi $f\ :\ A \to B$ merupakan fungsi injektif, jika untuk setiap pasang anggota $a_1, a_2 \in A$ berlaku :

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

Rumus ini bernilai logika sama dengan pernyataan :

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

Pernyataan terakhir inilah yang biasa digunakan untuk menunjukkan apakah suatu fungsi itu injektif ataupun bukan.

Contoh

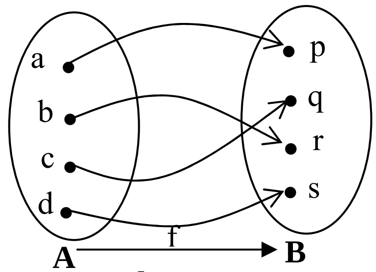
Selidikilah injektif tidaknya fungsi di dalam bilangan asli A ($f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$), yang didefinisikan dengan rumus $f(x) = 2x$

Jawab : untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ yang memenuhi $f(x_1) = f(x_2)$, maka

$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Sehingga dari $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, maka f adalah fungsi yang surjektif di dalam ***R.***

c) Fungsi Bijektif.



Gb. 5.5

Jika suatu fungsi $f : A \to B$ sedemikian hingga f suatu fungsi yang surjektif dan injektif sekaligus, sebagaimana ilustrasi di samping, maka dikatakan f adalah suatu fungsi **bijektif** atau **korespondensi satu-satu.**

Definisi

Fungsi $\boldsymbol{f : A \to B}$ disebut suatu fungsi bijektif jika $\boldsymbol{f}$ sekaligus fungsi surjektif dan fungsi injektif.

Contoh

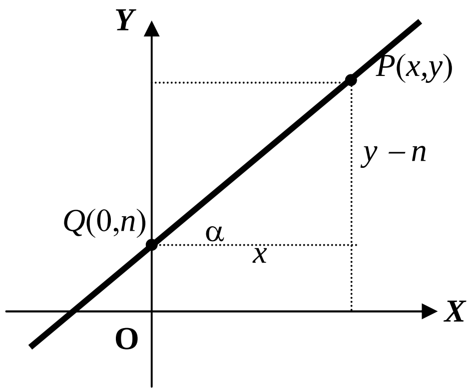
Fungsi $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = 2x - 3$ adalah fungsi bijektif sebab untuk setiap y peta dari x pasti akan dipenuhi : $2x - 3 = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(y + 3)$ yang ini menunjukkan prapeta dari y di B. Dengan demikian f adalah fungsi yang surjektif.

Sedang untuk setiap pasang $x_1, x_2 \in R$, yang dipenuhi $f(x_1) = f(x_2)$, akibatnya:

$$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Hal ini menunjukkan f suatu fungsi yang injektif, dan dari f injektif dan surjektif sekaligus ini, dapat disimpulkan bahwa f adalah fungsi bijektif.

c. Persamaan Garis Lurus



Gb. 5.6

Misalkan titik $P(x,y)$ pada garis g Garis ini memotong sumbu y di titik $Q(0,n)$, dan memiliki kecondongan sebesar m

Dari $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ maka

$$m = \frac{y-n}{x-0}$$

Apabila garis g disajikan dalam bentuk himpunan, maka:

G = $\{(x,y) \mid \frac{y-n}{x} = m, x \neq 0\} \cup \{(0,n)\}$

= $\{(x,y) \mid y = mx + n$ untuk $x \neq 0$, atau $x = 0\}$

= $\{(x,y) \mid y = mx + n\}$

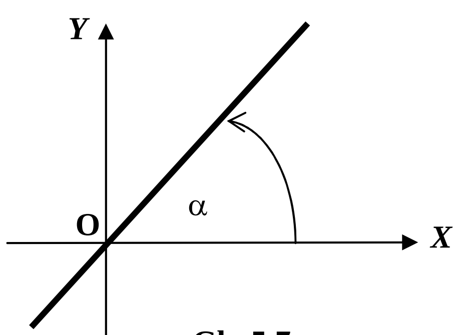
Jadi persamaan $y = mx + n$ adalah suatu persamaan garis yang melalui $(0,n)$ dengan gradien m.

Akibatnya :

1) Persamaan garis bergradien m dan melalui $O(0,0)$ adalah :

$y = mx + 0$

$\boxed{y = mx}$



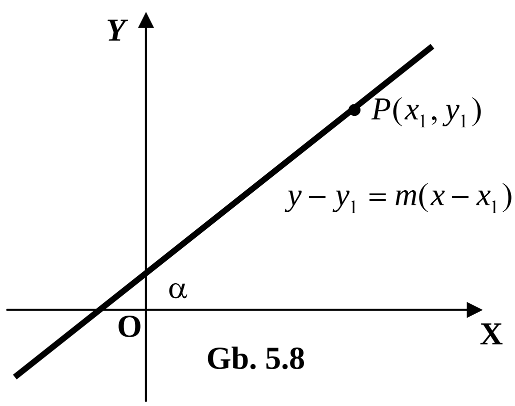
Gb. 5.7

Yang berarti :

y* = *x adalah garis bagi kuadran I/III

y* = −*x adalah garis bagi kuadran II/IV

2) Persamaan garis yang melalui $P(x_1, y_1)$ dengan gradien *m*, adalah dicari dengan :



Gb. 5.8

persamaan garis dengan gradien m adalah :

$$y = mx + n \text{ …………(1)}$$

yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ persamaanya adalah :

$$y_1 = mx_1 + n \text{ ………(2)}$$

Jika (2) - (1) maka :

$y - y_1 = m(x - x_1)$

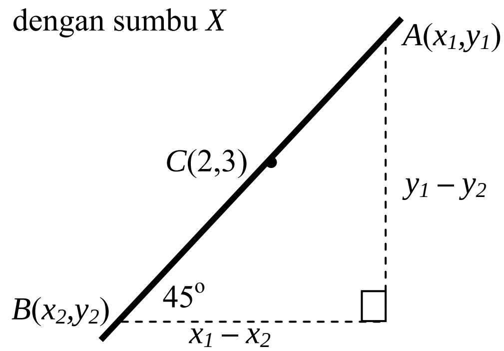
Jadi persamaan garis yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ dan gradiennya *m* adalah :

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Contoh :

Tentukan persamaan garis yang melalui titik C(2,3) dan membuat sudut sebesar 45° dengan sumbu *X*

Jawab :



Gradien dari garis tersebut adalah $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ dan karena garis tersebut membuat sudut 45° dengan sumbu-*X* positif, maka nilai $y_1 - y_2 = x_1 - x_2,$

sehingga nilai m = 1, sehingga persamaan garis yang diketahui salah satu titik dan gradiennya adalah :

$y - y_1 = m(x - x_1)$ yang berarti :

$y - 3 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 1$

3) Persamaan garis yang melalui dua titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$, dapat dicari sebagai berikut :

Persamaan garis yang melalui $P(x_1, y_1)$ dengan gradien m adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Dan jika garis tersebut juga melalui $Q(x_2, y_2)$, maka:

$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$ sehingga $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Jadi persamaan garis yang melalui titik-titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah :

$$y_2 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1)$$

Sehingga diperoleh persamaan garis yang melalui dua titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ adalah :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh

Tentukan persamaan garis yang melalui (2,5) dan (1,–4)

Jawab :

Persamaan garis yang melalui (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah:

$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, sehingga persamaan garis yang melalui (2,5) dan (1,–4) :

$$\frac{y - 5}{-4 - 5} = \frac{x - 2}{1 - 2}$$

$$\frac{y-5}{-9} = \frac{x-2}{-1}$$

$-(y-5) = -9(x-2)$

$y = 9x - 13$

3. Sistem Persamaan Linear dengan Dua Peubah

a. Secara numerik, di antara penyelesaian secara elementer dikenal**:**

1) metode substitusi
2) metode eliminasi
3) metode ekuasi (penyamaan)

yang sesungguhnya ketiga-tiganya mengarah pada eliminasi salah satu variabelnya.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan**:** $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

Jawab**:**

1) dengan substitusi**:** $\begin{cases} 3x - y = 3 & (1) \\ x + 2y = 8 & (2) \end{cases}$

(1) $3x - y = 3 \Leftrightarrow y = 3x - 3$ ………. (3)

Substitusikan y pada (3) ke (2) diperoleh**:** $\rightarrow x + 2\,(3x - 3) = 8 \Leftrightarrow 7x = 14 \Leftrightarrow$ $x = 2$.

Jika $x = 2$ disubstitusikan ke (3) diperoleh y n= 3(2) – 3 = 3

Himpunan penyelesaiannya ialah {(2, 3)}.

2) dengan eliminasi**:**

$$\begin{array}{r|l|l} 3x - y = 3 & \times 2 & \Leftrightarrow 6x - 2y = 6 \\ x + 2y = 8 & \times 1 & \underline{\Leftrightarrow x + 2y = 8}\,+ \end{array} \qquad \begin{array}{r|l|l} 3x - y = 3 & \times 1 & \Leftrightarrow 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 & \times 3 & \underline{\Leftrightarrow 3x + 6y = 24}\,- \end{array}$$

$7x = 14 \Leftrightarrow x = 2$ $\qquad$ $-7y = -21 \Leftrightarrow y = 3$

Himpunan penyelesaiannya ialah {(2, 3)}

3) dengan ekuasi (penyamaan)

$3x - y = 3 \Leftrightarrow y = 3x - 3$ $\qquad$ $3x - y = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}y + 1$

$x + 2y = 8 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$ $\qquad$ $x + 2y = 8 \Leftrightarrow x = -2y + 8$

Berarti $3x - 3 = -\frac{1}{2}x + 4$ $\qquad$ Berarti $\frac{1}{3}y + 1 = -2y + 8$

$\Leftrightarrow 3\frac{1}{2}x = 7$ $\qquad$ $\Leftrightarrow 2\frac{1}{3}y = 7$

$\Leftrightarrow x = 2$ $\qquad$ $\Leftrightarrow y = 3$

Himpunan penyelesaiannya ialah $\{(2, 3)\}$

b. Penyelesaian secara geometrik (geometri analitik)

Penyelesaian secara geometrik haruslah dilandasi dengan pemahaman menggambar grafik persamaan linear dan gambar yang disajikan haruslah teliti. Penyelesaian cara ini pada dasarnya mencari titik persekutuan antara dua garis yang persamaannya disajikan dalam setiap persamaan dalam sistem tersebut.

Ada tiga kemungkinan**:**

(a). Garis sejajar $\Leftrightarrow$ tidak ada titik persekutuan $\Leftrightarrow$ Himpunan Penyelesaiannya ϕ

(b). Garis berpotongan $\Leftrightarrow$ Ada satu titik potong $\rightarrow$ Himpunan penyelesaiannya beranggota sebuah pasangan bilangan.

(c). Garis berimpit $\Leftrightarrow$ Setiap titik yang terletak pada garis pertama pasti terletak pada garis kedua dan sebaliknya $\rightarrow$ Himpunan penyelesaiannya adalah himpunan yang pasangan titiknya memenuhi salah satu persmaan.

Contoh **:** $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 4x - 2y = 14 \end{cases}$

Grafiknya adalah dua garis berimpit, sehingga himpunan penyelesaian sistem persamaan di atas adalah $\{(x, y) \mid 2x - y = 7, x, y \in R\}$

B. Soal Refleksi Diri

Setelah Anda pelajari modul ini untuk refleksi diri, kerjakan latihan di bawah ini dengan sungguh-sungguh, kemudia cocokkan hasilnya dengan kunci jawab di belakang, kemudian buat skor hasil pekerjaan Anda dengan rumus

$$\text{Skor refleksi diri } S_c = \frac{\text{Jumlah soal yang dikerjakan dengan benar}}{\text{Jumlah semua soal latihan}} \times 100\%$$

Jika skor refleksi diri Anda lebih atau sama dengan 75%, selamat Anda telah memahami modul ini, dan bagi Anda yang belum mencapai 75% dipersilahkan membaca lagi lebih cermat dan diskusikan dengan kolega Anda masalah yang dirasa kurang jelas dan dicoba lagi megerjakan soal-soal di bawah ini sekali lagi

Kerjakan soal-soal di bawah ini sebaik-baiknya.

1. Sederhanakan bentuk aljabar berikut:
   a. $5p^4 + 7p^3 - p + 2$
   b. $2ab + a^2 - ab$
   c. $3xy^3 + 2x - 7xy^2 - 5x + 7$

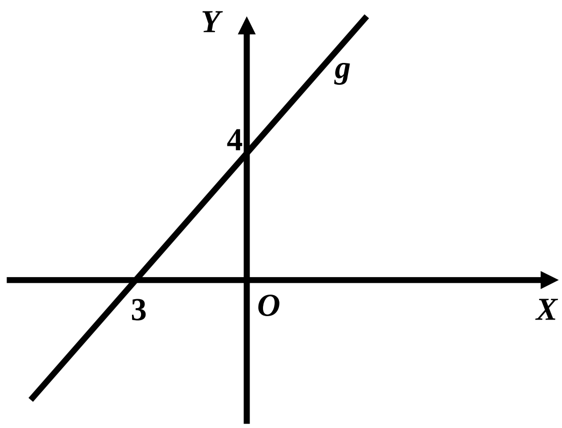
2. Faktorkanlah bentuk aljabar berikut:
   a. $x^2 + 15x + 56$
   b. $6x^2 - 11x - 10$
   c.$16p^2 - 81(p - q)^2$

3. Relasi R pada bilangan asli $A = \{ 1, 2, 3, \ldots\}$ yang ditentukan oleh kalimat terbuka: “$x + 2y = 10$, maka tentukannlah:
   a. domain dari R
   b. range dari R
   c. relasi invers dari R (relasi R^{-1})
   d. diagram Cartesius dari R

4. Tentukan fungsi f pada bilangan real R sedemikian hingga $f(1 - 2x) = x^3 + 1$ (Petunjuk: misalkan $1 - 2x = y$, kemudia nyatakan x dalam y, yang dilanjutkan dengan)

5. Fungsi kuadrat f pada himpunan bilangan real ditentukan oleh rumus $f(x) = x^2 - 2x - 3$, dengan daerah asal $\{ x| -2 \le x \le 4, x \in R\}$
   a. Buatlah tabelnya
   b. Gambarlah grafiknya
   c. Tentukanlah daerah hasilnya
   d. Tentukan pembuat nol fungsinya!

6. Tentukan persamaan garis lurus yang ditunjukkan oleh diagram di bawah ini:



7. Tentukan penyelesaian sistem persamaan linear: $\begin{cases} 10x + 2y = 38 \\ -3x + 5y = 11 \end{cases}$

8. Dua bilangan berbanding sebagai 3 : 4. Jika yang pertama dikurangi 5 dan kedua ditambah 20, maka jumlah kedua bilangan yang baru menjadi 127. Bilangan yang manakah itu?

DAFTAR PUSTAKA

Chambers, Paul 2008. *Teaching Mathematics, Developing as a Reflective Secondary Teachers*: Sage Publications Inc.

Hirjan dkk. 1977. *Matematika.* Bandung: Balai Pendidikan Guru Tertulis

Kusrini dkk, 2003 *Matematika Sekolah Lanjutan Tingkat Pertama Kelas 1*. Proyek Peningkatan Mutu SLTP Jakarta.

Krismanto, Al. 2004. *Aljabar.* Bahan Ajar Diklat Jenjang Dasar di PPPG Matematika Yogyakarta, Yogyakarta: PPPG Matematika

___________, *Pembelajaran Aljabar Kelas VII SMP/MTs*, Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika, Yogyakarta: PPPPTK Matematika

Marsigit, 2009. *Mathematics 2 for Junior High School Year VIII*, Jakarta: Yudhistira.

Nedi Sunaedi dkk. 1992. *Aljabar. Seri Matematika untuk Sekolah Menengah Umum Tingkat Pertama.* Bandung: Penerbit Pakar Raya

Raharjo, Marsudi. 2006. *Solusi Masalah Pemfaktoran Bentuk Kuadrat*, Buletin Limas PPPG Matematika Yogyakarta No. 17 Desember 2006.

Setiawan. 2008. *Persamaan, Pertidak Samaan, dan Fungsi Aljabar.* Yogyakarta: PPPPTK Matematika

Spiegel, Murray R. 1999. *Theory and Problem of College Algebra (*Edisi Terjemahan oleh Kasir Iskandar). Jakarta: Penerbit Erlangga

Suhardjo. 1984. *Teori Himpunan.* Surakarta: Buku Pegangan Kuliah Jurusan MIPA UNS

Sumadi dkk. 1996. *Matematika SMU.* Solo: Penerbit Tiga Serangkai

Wardhani, Sri & Widyantini, Theresia. 2004. *Perkalian Dua Suku Dua*, Petunjuk dan Lembar Kerja Alat Peraga Matematika SMP, PPPG Matematika Yogyakarta

Wadsworth, Barry J, 1984. *Piaget's Theory of Cognitive Development*, CA. Allyn Bacon.

KUNCI SOAL LATIHAN

Bab II Operasi Aljabar dan Pemfaktoran Bentuk Aljabar

Kegiatan Belajar – 1 Halaman 10

1. $2a - b$
2. $3y - x$
3. $3p^4 + 2p^3 - p + 2$
4. $ab + a^2$
5. $-2y^2 - 3x + 7$

Kegiatan Belajar – 2 Halaman 24

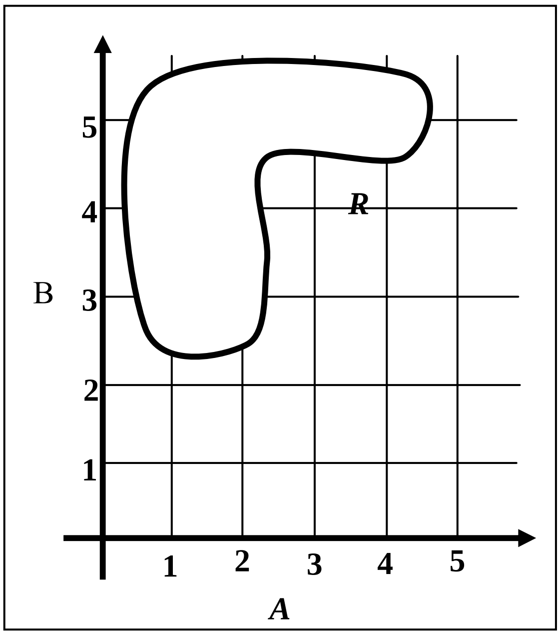
1. $2(4a - 1)$
2. $5pq\,(3q + 1)$
3. $(x + 5)\,(x + 5)$
4. $(3m + 2n)\,(3m + 2n)$
5. $(2ab - 5)\,(2ab + 5)$
6. $9p^2 + 14pq - q^2$
7. $(3m - 2)\,(m - 6)$

Bab III Relasi, Fungsi dan Persamaan Garis Lurus

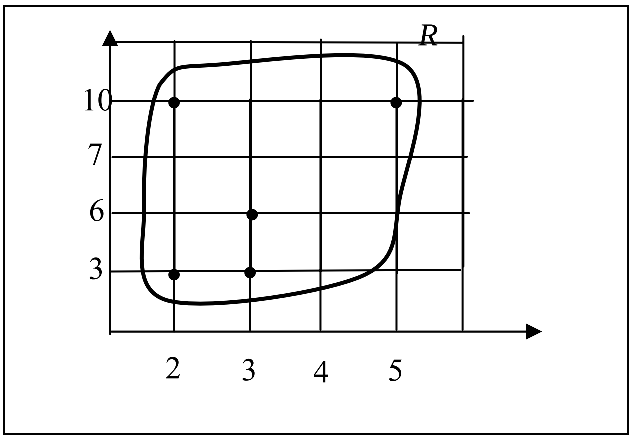
Kunci Jawab KB-1

1. a. { (1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,5), (4,5)}

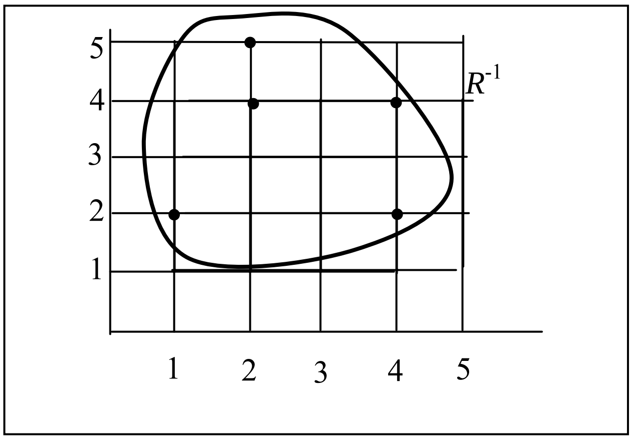
b.



2. a. R = {(3,3), (6,3), (10,2), (10,5)}
   b.



3. a. (i) salah (ii) benar (iii) salah (iv) benar
   b. {a,b}
   c. {a,b}
4. a. Domain dari relasi R = {1, 3, 4, 7}
   b. Range dari relasi R = {5, 6, 7}
   c. Relasi invers dari R adalah R^{-1} = {(4,1), (5,1), (5,4), (6,4), (6,7), (7,3)}
5. a. Domain dari R = {2, 4, 5}
   b. Range dari R = {1, 2, 4}
   c. R^{-1} = { (1,2), (2,4), (2,5), (4,2), (4,4)}
   d.



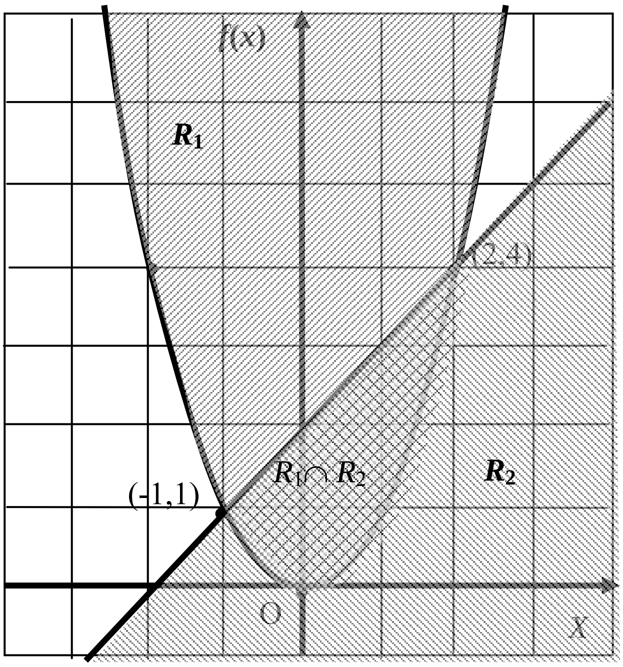
6. a. Domain dari $R = \{x \mid -3 \le x \le 3, x \in \mathrm{R}\}$
   b. Range dari $R = \{y \mid -2 \le y \le 2, y \in \mathrm{R}\}$
   c. $R^{-1} = \{(x,y) \mid 4x^2 + 4y^2 = 36\}$

7. $y = \dfrac{1}{2}(10 - x) = 5 - \dfrac{x}{2}$

   R = {(2,4), (4,3), (6,2), (8,1)}
   a. Domain dari R = {2,4,6,8}

b. Range dari R = (1,2,3,4}
c. Relasi invers, R^{-1} = {(2x, (x,y)} | 2x + y = 10}

8. a.



b. Domain dari $R_1 \cap R_2$ adalah $\{x \mid -1 \le x \le 2,\ x \in R\}$
c. Range dari $R_1 \cap R_2$ adalah $\{y \mid 0 \le y \le 4,\ x \in R\}$

Kunci jawab KB-2

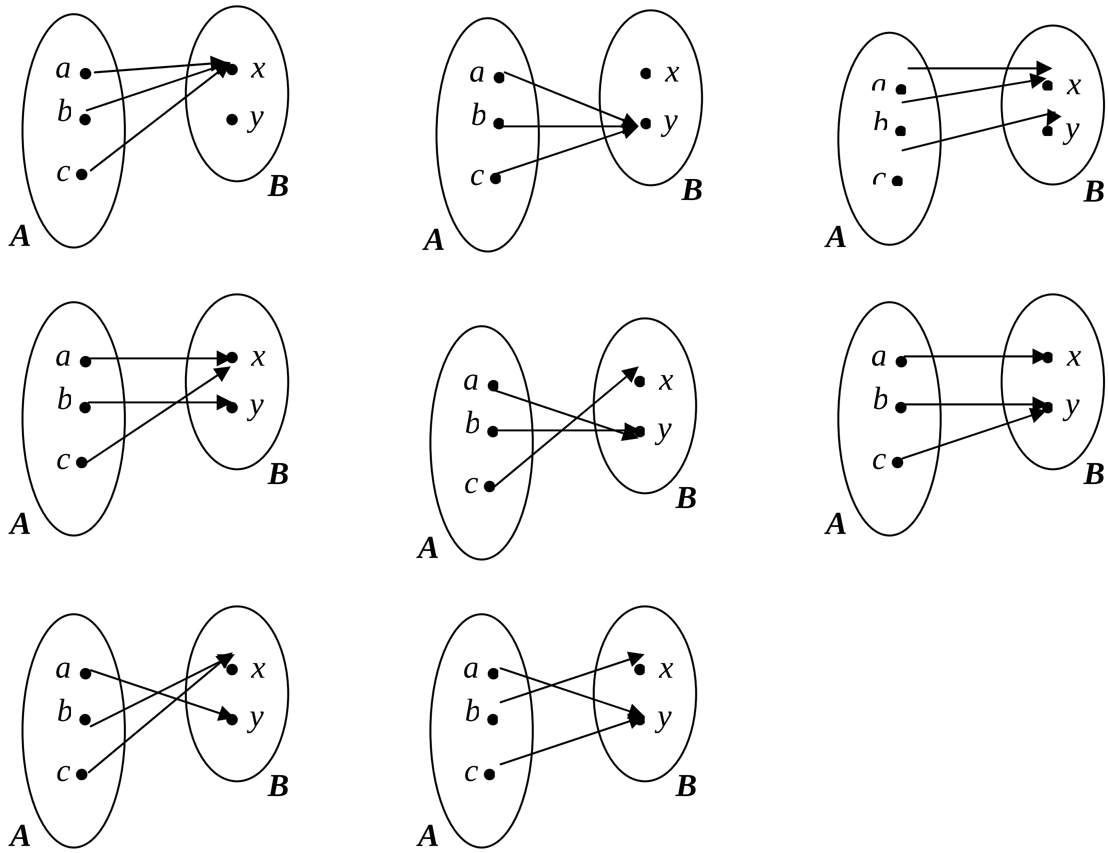
1. a. Bukan fungsi
   b. Fungsi
   c. Fungsi
2. a. $f\colon x \to x^3$
   b. $f\colon x \to 3$
   c. $f\colon x \to \begin{cases} x^2, \text{ untuk } x \in R \text{ dan } x > 0 \\ 5, \text{ untuk } x \in R \text{ dan } x \le 0 \end{cases}$

3. a. $f(4) = 16$
   b. $f(-3) = 9$
   c. $\{t \mid -2 \le t - 3 \le 8,\ t \in R\} = \{t \mid 1 \le t \le 11,\ t \in R\}$

4. a. "fungsi f menyatakan : x rasional ke 1 dan x irrasional ke 0"
   b. $f(1\frac{1}{2}) = 1$; $f(3{,}141414...) = 1$; $f(\sqrt{3}) = 0$; $f(\pi) = 0$

5. a.$f(2) = 2$ b. $f(4) = 11$ c. $f(-1) = -1$ d. $f(-3) = -3$

6.



Ada 8 buah fungsi.

7. Daerah hasil dari f = {1, 2, 5}

8. a. fungsi injektif
   b. bukan fungsi injektif
   c. bukan fungsi injektif

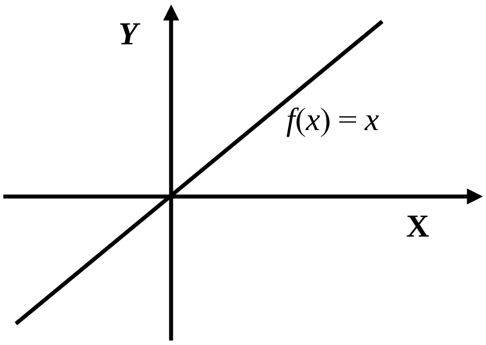
9. a. bukan fungsi satu-satu
   b. bukan fungsi satu-satu
   c. fungsi satu-satu
   d. fungsi satu-satu

10. a. bijektif
    b. bijektif
    c. bukan fungsi bijektif
    d. bijektif
    e. bukan fungsi bijektif

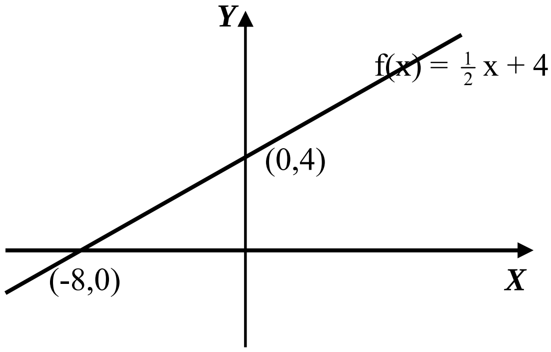
11. a. fungsi into biasa
    b. fungsi injektif
    c. fungsi surjektif
    d. fungsi surjektif
    e. fungsi bijektif

Kunci Jawab KB-3

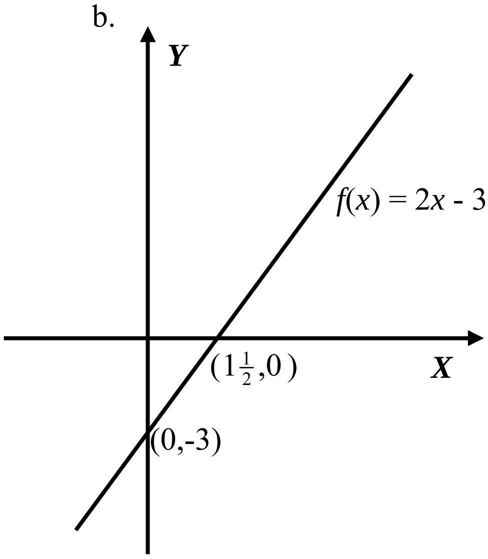
1. a.



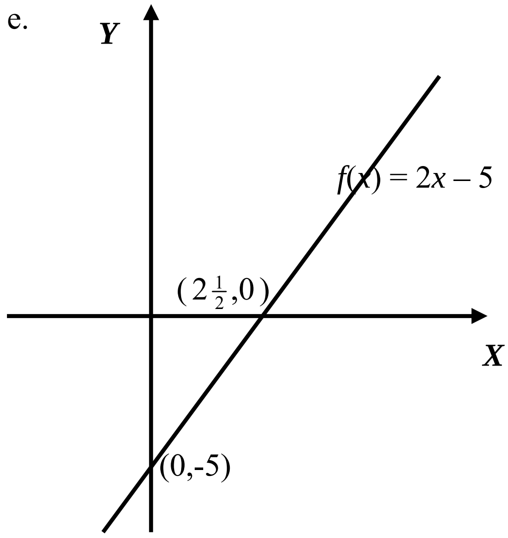
d.



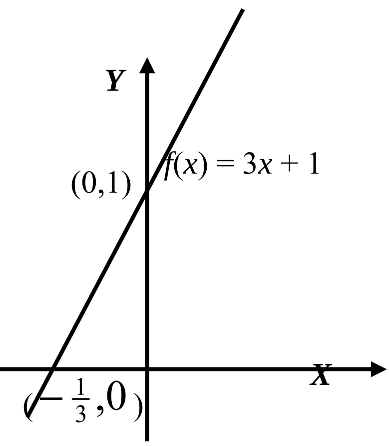
b.



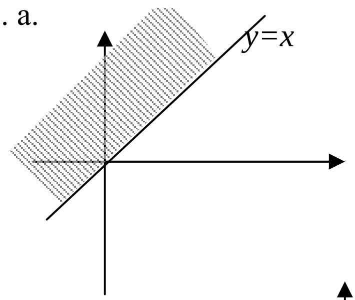
e.



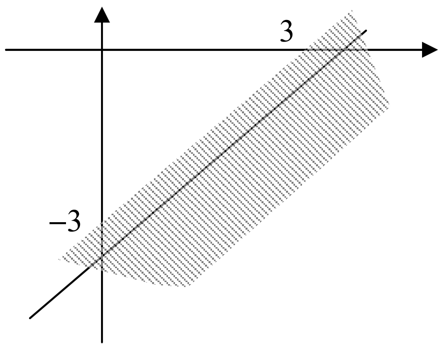
c.



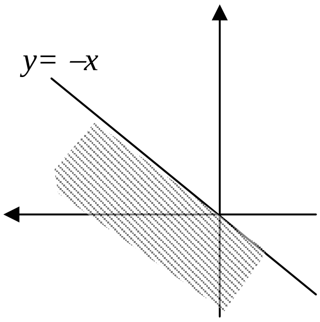
2. a.



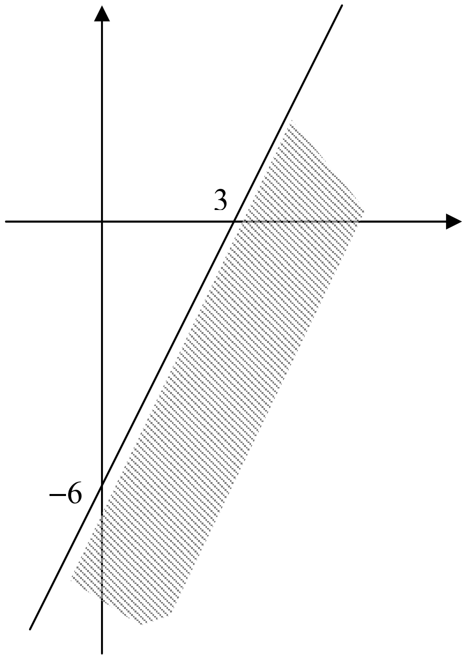
d.



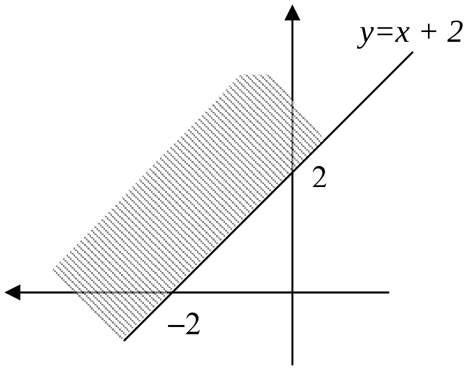
b.



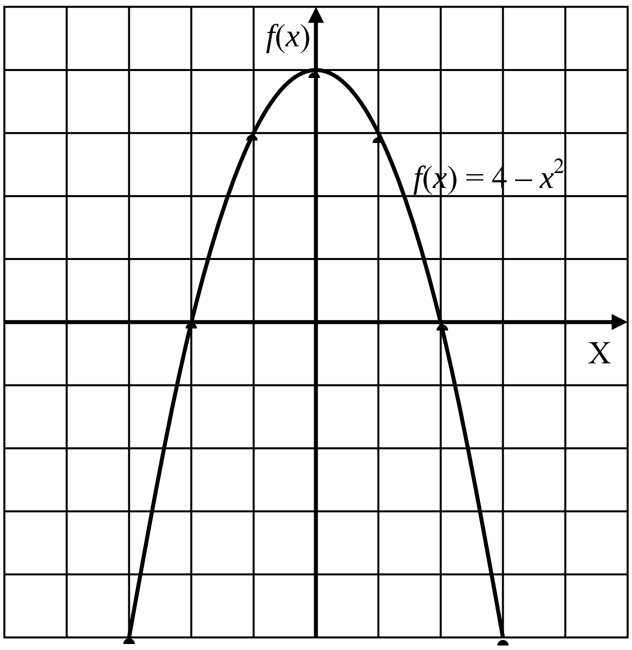
e.



c.



3.



a. Koordinat titik maksimumnya (0,4)
b. Nilai maksimum dari f adalah 4
c. Pembuat nol dari f adalah -2 dan 2
d. Daerah hasil dari f adalah $\{y|\ -5 \leq y \leq 5\ ,y \in R\}$
e. Persamaan sumbu simetri parabolanya $x = 0$

4. a. Koordinat titik minimumnya (-1, -4)
   b. Nilai minimum dari f adalah -4
   c. Pembuat nol dari f adalah -3 dan 1
   d. Daerah hasil dari f adalah $\{ y \mid -4 \le y \le 12, y \in R\}$

5. a. Ketinggian roket maksimum setelah 3 detik
   b. Tinggi maksimumnya adalah 45 m
   c. Tinggi roket lebih dari 25 m pada interval waktu $1 \le t \le 5$ detik

6. Ukuran panjang dan lebar penampang talang agar debit air yang lewat maksimum adalah 20 cm × 10 cm.

Kunci Jawab KB-4

1. . a. $y = 2x - 7$
   b. $y = 2x + 8$
   c. $y = -\frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}$
   d. $y = rx - pr + q$
   e. $y = -\frac{4}{5}x$
2. . a. $4x - 5y - 33 = 0$
   b. $x - y + 4 = 0$
   c. $x = 5$
   d. $3x + 8y - 16 = 0$
3. . $5x + 6y - 47 = 0$
4. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Bab IV Sistem Persamaan Linear Dua Peubah

Kunci Jawab KB-1

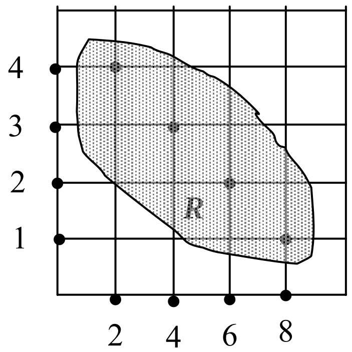
a. $\{(5,2)\}$
b. $\{(2,-1)\}$
c. $\{(2,-2)\}$
d. ϕ, karena grafik kedua garis itu sejajar
e. $\{(x,y) \mid x - 3y = 2\}$, karena grafik kedua garis tersebut berimpit

Kunci Jawab KB-2

1. Bilangan itu adalah 56 dan 11
2. Harga satu batang pensil Rp 1.250,00 dan sebuah buku Rp 2.500,00
3. Bilangan-bilangan itu adalah 57 dan 47
4. Bilangan-bilangan itu adalah 48 dan 64
5. Bilangan itu adalah 21, 42, dan 63
6. Panjang AB = 15 cm
7. Modal-modal itu adalah Rp 1.200.000,00 dan Rp 800.000,00
8. Umur ayah akan mencapai setengah abad setelah 14 tahun lagi.

Bab V Kunci Jawab Refleksi Diri

1. a. $5p^4 + 7p^3 - p + 2$
   b. $ab + a^2$
   c. $3xy^3 - 3x - 7xy^2 + 7$
2. a. $(x + 7)\ (x + 8)$
   b. $(2x - 5)\ (3x + 2)$
   c. $-65p^2 + 162pq - 81q^2$
3. a. Domain dari R adalah $D = \{\ 2, 4, 6, 8\ \}$
   b. Range dari R adalah = $\{\ 1, 2, 3, 4\ \}$
   c. $R^{-1} = \{\ (1,8), (2,6), (3,4), (4,2)\ \}$
   d.

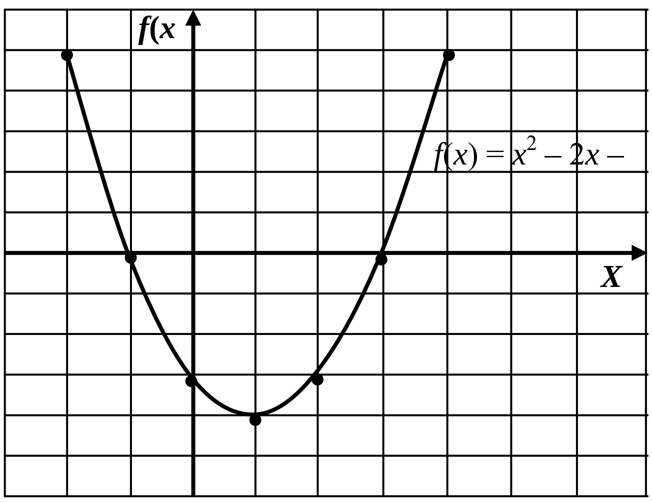


4. $f(x) = \frac{1}{8}(9 - 3x - 3x^2 - x^3)$

6. a. Tabel pertolongan untuk membuat grafik:

x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
x^2	4	1	0	1	4	9	16
$-2x$	4	2	0	-2	-4	-6	-8
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

b. Grafik fungsi $f(x) = x^2 - 2x - 3$



c. Daerah hasilnya adalah $\{ y \mid -4 \leq y \leq 5, y \in R \}$
d. Pembuat nol fungsinya adalah -1 dan 3

7. $3x - 4y - 12 = 0$
8. $\{(3,4)\}$
9. Bilangan – bilangan itu adalah 48 dan 64

Jalan Kaliurang Km 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, Yogyakarta
Kotak Pos 31 YKBS YOGYAKARTA 55281
Telepon (0274) 885725, 881717, Faksimili 885752
Web site p4tkmatematika.com
E-mail p4tkmatematika@yahoo.com