PROGRAM BERMUTU

Better Education through Reformed Management and Universal Teacher Upgrading

PEMANFAATAN MATEMATIKA REKREASI DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA DI SMP

KEMENTERIAN PENDIDIKAN NASIONAL

BADAN PENGEMBANGAN SUMBER DAYA MANUSIA PENDIDIKAN DAN PENJAMINAN MUTU PENDIDIKAN

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

Modul Matematika SMP Program BERMUTU

Pemanfaatan Matematika Rekreasi dalam Pembelajaran Matematika di SMP

Penulis:
Untung Trisna Suwaji
Agus Dwi Wibawa

Penilai:
R. Rosnawati
Sugiyono

Editor:
Imam Sujadi

Layouter:
R. Haryo Jagad Panuntun

Kementerian Pendidikan Nasional
Badan Pengembangan Sumber Daya Manusia Pendidikan dan Penjaminan Mutu Pendidikan
Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika
2011

KATA PENGANTAR

Segala bentuk pujian dan rasa syukur kami haturkan ke hadirat Allah SWT, atas limpahan nikmat dan rahmat-Nya PPPPTK Matematika dapat mewujudkan kembali modul pengelolaan pembelajaran matematika untuk guru SD dan SMP. Pada tahun 2011 ini telah tersusun sebanyak dua puluh judul, terdiri dari tujuh judul untuk guru SD, delapan judul untuk guru SMP, dan lima judul untuk guru SD maupun SMP.

Modul-modul ini disusun untuk memfasilitasi peningkatan kompetensi guru SD dan SMP di forum Kelompok Kerja Guru (KKG) dan Musyawarah Guru Mata Pelajaran (MGMP), khususnya KKG dan MGMP yang dikelola melalui program BERMUTU (*Better Education through Reformed Management and Universal Teacher Upgrading)*. Modul yang telah disusun, selain didistribusikan dalam jumlah terbatas ke KKG dan MGMP yang dikelola melalui program BERMUTU, juga dapat diunduh melalui laman PPPPTK Matematika dengan alamat www.p4tkmatematika.org.

Penyusunan modul diawali dengan kegiatan *workshop* yang menghasilkan kesepakatan tentang daftar judul modul, sistematika penulisan modul, dan garis besar isi tiap judul modul. Selanjutnya secara berurutan dilakukan kegiatan penulisan, penilaian, *editing*, harmonisasi, dan *layouting* modul.

Penyusunan modul melibatkan berbagai unsur, meliputi widyaiswara dan staf PPPPTK Matematika, dosen LPTK, widyaiswara LPMP, guru SD, guru SMP, dan guru SMA dari berbagai propinsi. Untuk itu, kami sampaikan terima kasih dan teriring doa semoga menjadi amal sholih kepada semua pihak yang telah membantu terwujudnya modul tersebut.

Semoga dua puluh modul tersebut bermanfaat secara optimal dalam peningkatan kompetensi para guru SD dan SMP dalam mengelola pembelajaran matematika, sehingga dapat meningkat kualitas dan kuantitas hasil belajar matematika siswa SD dan SMP di seluruh Indonesia.

Kami sangat mengharapkan masukan dari para pembaca untuk penyempurnaan modul-modul ini demi peningkatan mutu layanan kita dalam upaya peningkatan mutu pendidikan matematika di Indonesia.

Akhir kata, kami ucapkan selamat membaca dan menggunakan modul ini dalam mengelola pembelajaran matematika di sekolah.

Yogyakarta, Juni 2011
Plh. Kepala

KEMENTERIAN PENDIDIKAN NASIONAL
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

Dra. Ganung Anggraeni, M. Pd.
NIP. 19590508 198503 2 002

DAFTAR JUDUL MODUL

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

PENDAHULUAN

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Sebagai penjaminan mutu minimal dari layanan pendidikan dengan KTSP, pemerintah mengeluarkan PP No 19 tahun 2005 yang menetapkan delapan standar nasional pendidikan yang digunakan sebagai acuan pengembangan kurikulum. Salah satu standar yang harus dikembangkan adalah standar proses. Standar proses adalah standar nasional pendidikan yang berkaitan dengan pelaksanaan pembelajaran pada satuan pendidikan untuk mencapai kompetensi lulusan. Memberikan motivasi kepada siswa merupakan bagian penting dalam proses pembelajaran. Dengan adanya motivasi, siswa akan cenderung semangat mengikuti kegiatan pembelajaran. Salah satu kegiatan yang dapat dilakukan dalam memberi motivasi adalah menjelaskan kegunaan materi yang akan dipelajari untuk kehidupan.

Salah satu tujuan mata pelajaran matematika diberikan di SMP adalah agar siswa memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah. Suatu upaya yang dapat dilakukan adalah dengan mengembangkan kegiatan rekreasi matematika. Rekreasi matematika diartikan sebagai kegiatan menyenangkan yang membangkitkan minat siswa mempelajari dan memahami konsep matematika. Kegiatan tersebut dapat berupa mengkaji latar belakang sejarah baik dari penemuan konsep maupun penemu konsep tersebut, memberikan fakta-fakta menarik suatu konsep, menyelesaikan teka-teki, menelaah paradoks, serta mengkaji aplikasi matematika. Sebagai konsekuensi, guru harus mampu mengembangkan pembelajaran yang interaktif dan memberikan kontribusi terhadap proses belajar mereka dengan memfasilitasi kegiatan rekreasi matematika tersebut.

Mengingat hal-hal tersebut maka modul dengan judul “Pemanfaatan Matematika Rekreasi dalam Pembelajaran Matematika di SMP” ini diharapkan dapat memenuhi harapan para guru dalam memenuhi kebutuhan sumber belajar, khususnya tentang bagaimana memotivasi siswa belajar matematika.

Modul ini sekaligus dimaksudkan sebagai payung bagi modul lain yang ditulis dengan maksud yang sama dalam kajian-kajian matematika tertentu.

B. Tujuan

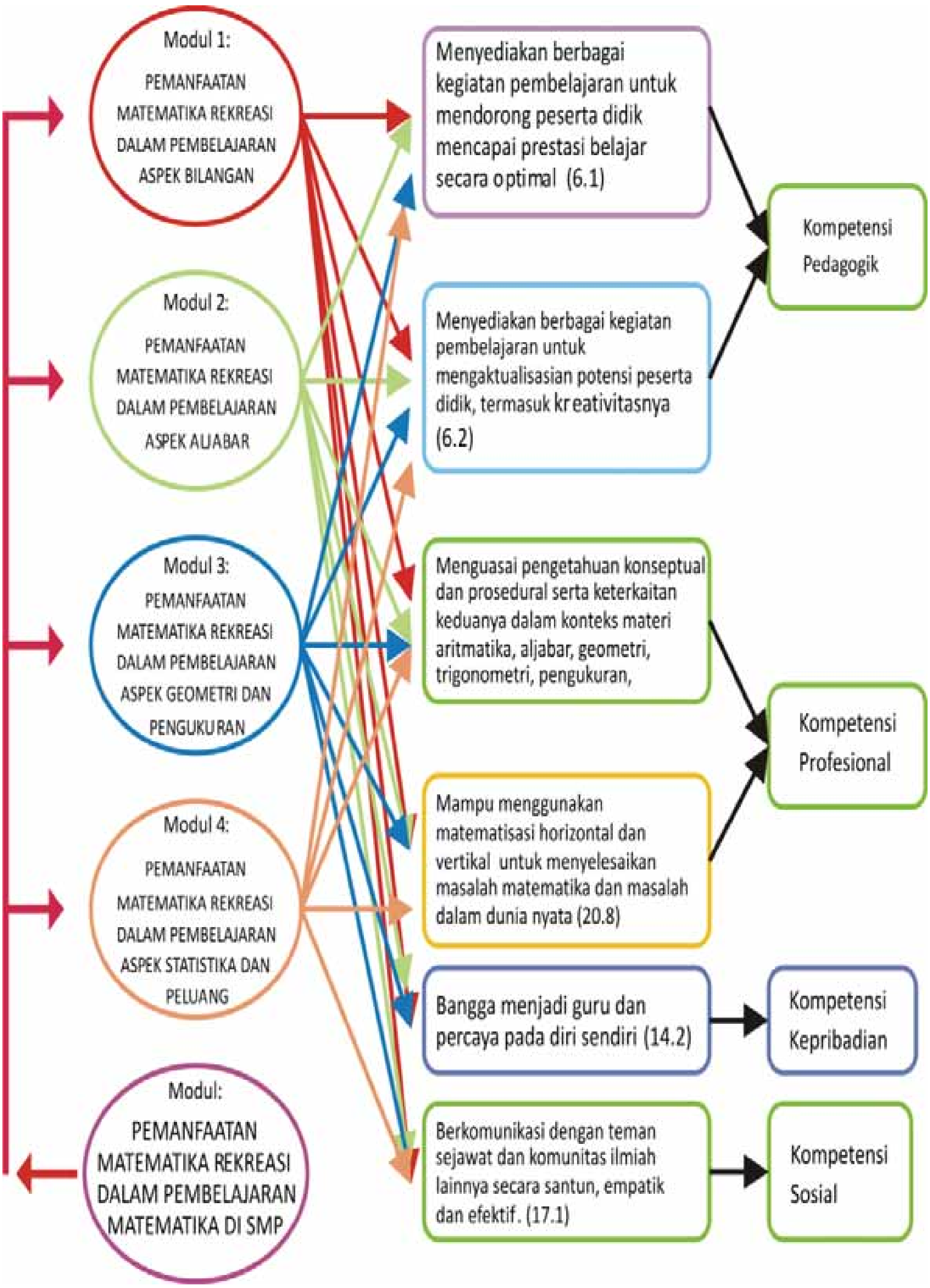
Setelah mempelajari modul ini diharapkan terjadi peningkatan kompetensi guru dibanding sebelumnya, khususnya terkait hal-hal sebagai berikut.

1. Dapat menggunakan matematika rekreasi aspek bilangan untuk mengembangkan pembelajaran matematika yang dapat memberikan motivasi kepada siswa dalam belajar matematika aspek bilangan di SMP.
2. Dapat menggunakan matematika rekreasi aspek aljabar untuk mengembangkan pembelajaran matematika yang dapat memberikan motivasi kepada siswa dalam belajar matematika aspek aljabar di SMP.
3. Dapat menggunakan matematika rekreasi aspek geometri dan pengukuran untuk mengembangkan pembelajaran matematika yang dapat memberikan motivasi kepada siswa dalam belajar matematika aspek geometri dan pengukuran di SMP.
4. Dapat menggunakan matematika rekreasi aspek statistika dan peluang untuk mengembangkan pembelajaran matematika yang dapat memberikan motivasi kepada siswa dalam belajar matematika aspek statistika dan peluang di SMP.

C. Peta Kompetensi

Pada Permendiknas Nomor 16 Tahun 2007 tentang Standar Kompetensi Guru dimuat daftar kompetensi yang harus dikuasai guru kelas dan guru mata pelajaran. Daftar kompetensi tersebut mencakup kompetensi pedagogik, kepribadian, sosial dan profesional. Berikut ini adalah kompetensi yang akan ditingkatkan melalui proses belajar dengan menggunakan modul ini.

PETA KOMPETENSI



D. Ruang Lingkup

Ruang lingkup modul berjudul Pemanfatan Matematika Rekreasi dalam Pembelajaran Matematika di SMP ini *terdiri* dari empat bagian. Bagian pertama modul ini membahas tentang pemanfaatan matematika rekreasi dalam pembelajaran aspek bilangan. Bahasan pada bagian pertama ini akan dikemas menjadi dua kegiatan belajar yaitu kegiatan belajar tentang: (1) Sejarah matematikawan terkait bilangan, dan (2) Berbagai topik matematika rekreasi tentang bilangan. Bagian kedua modul ini membahas tentang pemanfaatan matematika rekreasi dalam pembelajaran aspek aljabar. Bahasan pada bagian kedua ini akan dikemas menjadi dua kegiatan belajar yaitu kegiatan belajar tentang: (1) Sejarah matematika terkait aljabar, dan (2) Berbagai topik matematika rekreasi tentang aljabar. Bagian ketiga modul ini membahas tentang pemanfaatan matematika rekreasi dalam pembelajaran aspek geometri dan pengukuran. Bahasan pada bagian ketiga ini akan dikemas menjadi dua kegiatan belajar yaitu kegiatan belajar tentang: (1) Sejarah matematika terkait geometri dan pengukuran, dan (2) Fakta unik seputar geometri dan pengukuran. Sedangkan Bagian keempat modul ini membahas tentang pemanfaatan matematika rekreasi dalam pembelajaran aspek statistika dan peluang. Bahasan pada bagian keempat ini akan dikemas menjadi dua kegiatan belajar yaitu kegiatan belajar tentang: (1) Sejarah matematika terkait statistika dan peluang, dan (2) Fakta unik seputar statistika dan peluang.

E. Saran Cara Penggunaan Modul ini di MGMP/Sekolah

1. Modul ini dapat digunakan pada kegiatan-kegiatan di MGMP melalui program BERMUTU atau di luar program BERMUTU.
2. Modul ini dapat menjadi salah satu bahasan dalam kegiatan *Inservise Training* sebelum pertemuan-pertemuan kegiatan belajar di MGMP melalui program BERMUTU dilaksanakan.
3. Modul ini dapat dimanfaatkan sebagai bahan rujukan dalam menyelesaikan tugas terstruktur atau tugas mandiri pada 16 pertemuan MGMP yang telah dijadwalkan dan dibiayai Dana Bantuan Langsung (DBL) BERMUTU atau dana pendamping dari pemerintah daerah.

4. Modul ini juga dapat menjadi bahan bahasan dalam pertemuan rutin MGMP yang tidak dibiayai program BERMUTU.
5. Modul ini digunakan sebagai referensi belajar secara pribadi atau dengan teman sejawat di sekolah atau di MGMP, baik MGMP yang dikelola oleh program BERMUTU maupun yang dikelola secara rutin dengan swadana atau bantuan berbagai pihak lain yang bukan program BERMUTU.
6. Waktu yang diperlukan dalam mempelajari modul ini minimal 12×45 menit. Waktu tersebut di luar waktu menyelesaikan tugas pada tiap bagian yang bersifat praktek di kelas. Asumsi untuk alokasi waktu tersebut adalah 4×45 menit untuk mempelajari masing-masing bagian dalam modul.
7. Bacalah masing-masing kegiatan belajar dalam bagian modul dengan seksama agar dapat menyelesaikan latihan dalam modul dengan baik. Pada setiap kegiatan belajar diawali dengan pertanyaan yang dilanjutkan dengan uraian materi.
8. Sebelum membaca uraian materi pada kegiatan belajar, Anda diharapkan terlebih dahulu mencermati dan mencoba untuk merenungkan jawaban dari pertanyaan yang terdapat pada awal kegiatan belajar. Selanjutnya barulah Anda membaca uraian materi ini sebagai tambahan referensi dalam memperoleh jawaban.
9. Setelah Anda merasa cukup memahami isi uraian materi, jawablah latihan yang terdapat pada akhir setiap bagian modul.
10. Untuk mengetahui pencapaian pemahaman Anda terhadap uraian materi pada masing-masing kegiatan belajar, Anda dapat mencocokkan dengan kunci jawaban individual atau kelompok.

Modul ini dapat diakses pada situs PPPPTK Matematika dengan alamat www.p4tkmatematika.com. Bila ada permasalahan yang belum dapat diselesaikan dalam proses mempelajari modul ini atau ada hal yang akan dikomunikasikan kepada penulis, Anda dapat menghubungi alamat: PPPPTK Matematika, Jl. Kaliurang Km 6 Sambisari Condongcatur, Depok, Sleman, DIY, Kotak Pos 31 Yk-Bs 55281. Telpon: (0274) 881717, 885725. Fax: (0274) 885752, atau alamat email: p4tkmatematika@yahoo.com, ontongts@yahoo.com, dan agusdw70@yahoo.com.

I

PEMANFAATAN MATEMATIKA REKREASI DALAM PEMBELAJARAN ASPEK BILANGAN

I. Pemanfaatan Matematika Rekreasi dalam Pembelajaran Aspek Bilangan

Kompetensi Guru:

1. **Menyediakan berbagai kegiatan pembelajaran untuk mendorong peserta didik mencapai prestasi belajar secara optimal (6.1)**
2. **Menyediakan berbagai kegiatan pembelajaran untuk mengaktualisasikan potensi peserta didik, termasuk kreativitasnya (6.2)**
3. **Mampu menggunakan matematisasi horizontal dan vertikal untuk menyelesaikan masalah matematika dan masalah dalam dunia nyata (20.8)**
4. **Bangga menjadi guru dan percaya pada diri sendiri (14.2)**
5. **Berkomunikasi dengan teman sejawat dan komunitas ilmiah lainnya secara santun, empatik, dan efektif. (17.1)**

Apakah Anda sudah pernah membelajarkan kepada siswa Anda tentang bilangan *amicable*, bilangan sempurna, dan barisan bilangan *Fibonacci*? Materi tersebut anda belajarkan pada saat Anda membelajarkan materi pada Standar Kompetensi (SK) dan Kompensi Dasar (KD) apa?

Materi-materi yang dibahas dalam modul ini berkaitan tidak secara langsung pada standar kompetensi dan kompetensi dasar topik bilangan, yaitu lebih merupakan bahan pengungkit motivasi belajar atau pengayaan materi belajar tentang bilangan untuk siswa Anda. Untuk itu semua materi-materi yang disajikan bersifat *recreational mathematics* atau matematika rekreasi. Dengan mempelajari modul ini Anda akan mendapatkan bahan-bahan matematika rekreasi yang dapat dijadikan referensi dalam pembelajaran.

Dalam modul ini terdapat dua kegiatan belajar, yaitu:

Kegiatan Belajar 1: Sejarah matematikawan terkait dengan bilangan, dan

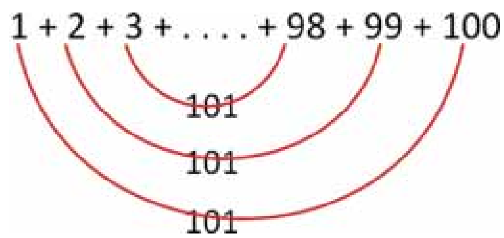
Kegiatan Belajar 2: Berbagai topik matematika rekreasi tentang bilangan.

Dalam mempelajari modul ini, disarankan Anda melakukan secara berurutan dimulai dari Kegiatan Belajar 1, dan Kegiatan Belajar 2. Bacalah dengan seksama materi-materi yang ada pada modul ini. Kerjakan semua tugas/latihan yang ada di modul ini. Bila dalam mengerjakan latihan/tugas materi tertentu Anda masih merasa kesulitan, sebaiknya Anda mempelajari lagi materi tersebut dengan lebih seksama. Pembahasan yang ada dalam modul ini hanyalah merupakan salah satu alternatif jawaban atas soal/masalah yang ada. Dengan demikian Anda boleh menjawab soal/masalah yang ada dengan cara yang lain, asalkan dapat dipertanggungjawabkan kebenarannya.

A. Kegiatan Belajar 1: Sejarah Matematikawan Terkait dengan Bilangan

Dalam mempelajari topik bilangan atau matematika pada umumnya Anda pasti sering menemui penggunaan simbol, dan rumus di dalamnya. Digunakannya simbol dan rumus pada masa sekarang ini tidak lepas dari peran matematikawan pada masa dahulu yang telah memperkenalkan atau menemukannya. Pada kegiatan belajar 1 ini Anda dikenalkan dengan matematikawan yang telah berjasa dalam memperkenalkan atau menemukan simbol dan rumus yang berkaitan dengan materi bilangan.

Karl Friedrich Gauss (1777-1855) adalah seorang matematikawan kelahiran Jerman tanggal 30 April 1777. Sejak masih sekolah dasar Gauss sudah terlihat sangat berbakat pada matematika. Sewaktu Guru sekolah dasarnya meminta Gauss untuk menulis bilangan 1 sampai 100 dan menghitung jumlahnya. Dengan cepat Gauss menjawab 5050. Ia menghitung dengan cepat di luar kepala mengikuti pola sebagai berikut:



$1 + 100 = 101$

$2 + \ \ 99 = 101$

$3 + \ \ 98 = 101$

. . . .

Karena ada 50 pasang bilangan, masing-masing dengan jumlah 101, maka jumlah totalnya adalah $50 \times 101 = 5050$. Cara tersebut digunakan untuk mendapatkan rumus jumlah n suku barisan aritmatika seperti berikut ini.

$$
\begin{array}{l}
S = (a + (n-1)b) + (a + (n-2)b) + ... + (a + b) + a \\
S = a + (a + b) + ... + (a + (n-2)b) + (a + (n-1)b) \\
\hline
2S = (2a + (n-1)b) + (2a + (n-1)b) + ... + (2a + (n-1)b) + (2a + (n-1)b) \quad + \\
\Leftrightarrow 2S = n \times (2a + (n-1)b)) \\
\Leftrightarrow S = \dfrac{n \times (2a + (n-1)b))}{2}
\end{array}
$$

Dengan mengganti a dengan 1, dan b dengan 1 didapatkan rumus $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Rumus tersebut merupakan rumus jumlah n bilangan asli pertama.

Leonhard Euler (1707-1783) merupakan matematikawan yang paling produktif sepanjang masa, lahir pada tanggal 15 April 1707. Sumbangannya begitu luas sehinggga dapat ditemui di berbagai tingkat pelajaran matematika. Gambar dirinya diabadikan dalam prangko di beberapa negara antara lain Uni Soviet dan Republik Demokratik Jerman.

Beberapa sumbangan Leonhard Euler dalam bidang matematika adalah sebagai berikut: (1) Merupakan orang yang pertama kali menggunakan simbol "*i*" untuk $\sqrt{-1}$, dan simbol "*e*" untuk *euler number* yang merupakan bilangan irasional yang istimewa 2,718281…, (2) Mempublikasikan daftar 30 pasang bilangan ***amicable*** .

B. Kegiatan Belajar 2: Berbagai Topik Matematika Rekreasi Tentang Bilangan

Siswa Anda tentunya sudah mengenal beberapa macam bilangan mulai dari bilangan asli, cacah, bulat (bulat positif, bulat negatif, nol), prima, pecahan, dan lain sebagainya.

Untuk menambah wawasan atau pengayaan pengetahuan siswa tentang berbagai macam bilangan yang lain Anda dapat juga mengenalkan bilangan sempurna, bilangan *amicable*, barisan bilangan *Fibonacci*, dan bilangan *palindromik*. Dalam kegiatan belajar 2 ini dibahas mengenai bilangan sempurna, bilangan *amicable*, dan barisan bilangan *Fibonacci.* Sedangkan bilangan *palindromik* pembahasannya ada di modul "Pemanfaatan Matematika Rekreasi dalam Pembelajaran Matematika di SD".

1. Bilangan sempurna (*perfect numbers*)

Pembagi sejati (*proper divisor*) dari suatu bilangan adalah semua pembagi/faktor dari bilangan tersebut selain bilangan itu sendiri. Misalnya pembagi sejati dari 8 adalah 1, 2, dan 4. Suatu bilangan disebut bilangan sempurna apabila jumlah semua pembagi sejatinya sama dengan bilangan itu sendiri. Contoh: 28 merupakan bilangan sempurna karena jumlah semua pembagi sejatinya yaitu 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28 sama dengan bilangan itu sendiri.

2. Bilangan amicable (*friendly numbers*)

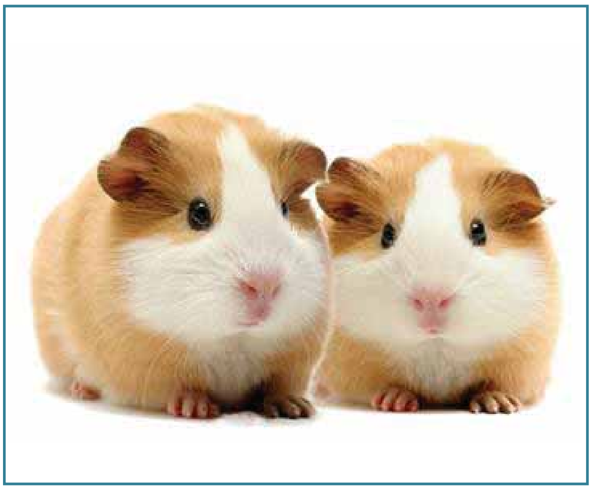
Dua bilangan dinamakan bilangan ***amicable*** jika jumlah dari pembagi-pembagi sejatinya dari salah satu bilangan sama dengan bilangan yang lainnya. Bilangan 220 dan 284 merupakan contoh bilangan *amicable*. Untuk menunjukkan bahwa kedua bilangan 220 dan 284 adalah bilangan *amicable* adalah sebagai berikut:

Pembagi-pembagi sejati 220 adalah 1, 2, 4, 5,10, 11, 20, 22, 44, 55, dan 110. Jumlah Pembagi-pembagi sejati 220 adalah 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284. Sedangkan pembagi-pembagi sejati 284 adalah 1, 2, 4, 71, 142. Jumlah Pembagi-pembagi sejati 284 adalah 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.

3. Barisan bilangan *Fibonacci*

Berikut ini diberikan sebuah masalah perkembangbiakan sepasang marmut. Pada awal bulan Januari 2011 Angga membeli sepasang bayi marmut (jantan dan betina).

Seandainya bayi marmut menjadi dewasa setelah tepat satu bulan dan setiap tepat satu bulan sepasang marmut dewasa akan mempunyai sepasang bayi marmut. Bila tidak ada marmut yang mati, ada berapa pasang marmut (berapa pasang marmut dewasa dan berapa pasang bayi marmut) yang dimiliki Angga pada awal bulan Januari, Februari, Maret, dan seterusnya sampai awal bulan Desember?



Gambar 1.2 Sepasang Marmut

Cobalah Anda selesaikan masalah di atas secara individual maupun berkelompok. Setelah selesai Anda baru boleh melihat pembahasan yang ada di bawah ini sebagai bahan perbandingan. Jika Anda mendapati permasalahan cobalah berdiskusi dengan teman sejawat Anda.

Pembahasan:

Misalkan B menyatakan banyak pasangan marmut bayi, D menyatakan banyak pasangan marmut dewasa, dan T menyatakan banyak total keseluruhan pasangan marmut bayi dan pasangan marmut dewasa. Perhatikan tabel 1.1 di bawah ini.

Tabel 1.1 Banyaknya Pasangan Marmut

BULAN	ILUSTRASI BANYAK PASANGAN MARMUT BAYI DAN PASANGAN MARMUT DEWASA	B	D	T
Januari	B	1	0	1
Februari	D	0	1	1
Maret	D B	1	1	2
April	D B D	1	2	3
Mei	D B D D B	2	3	5
Juni	D B D D B D B D	3	5	8
Juli	....	5	8	13
Agustus		8	13	21

BULAN	ILUSTRASI BANYAK PASANGAN MARMUT BAYI DAN PASANGAN MARMUT DEWASA	B	D	T
September		13	21	34
Oktober		21	34	55
November		34	55	89
Desember		55	89	144

Perhatikan bilangan pada tabel 1.1 di atas khususnya pada kolom T (total pasangan marmut). Bilangan-bilangan itu urut dari atas ke bawah adalah 1,1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. Barisan bilangan dengan pola seperti itu disebut barisan bilangan *Fibonacci*. Bilangan *Fibonacci* (*fibonacci numbers*) untuk n=1, 2, 3, ... adalah 1,1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...

Materi barisan *Fibonacci* dapat dijadikan materi pengayaan pada saat membelajarkan SK 6. yaitu memahami barisan dan deret bilangan serta penggunaannya dalam pemecahan masalah, pada KD 6.4 yaitu memecahkan masalah yang berkaitan dengan barisan dan deret

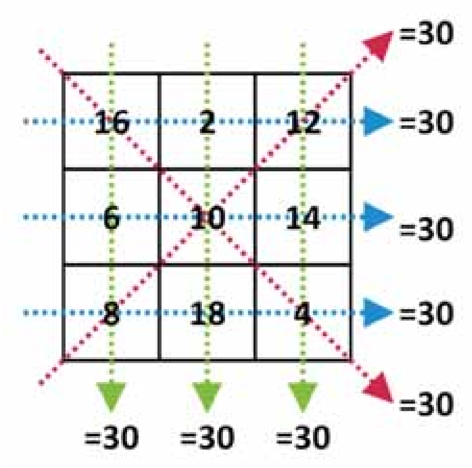
4. Persegi ajaib (*magic squares*)

Perhatikan gambar 1.3 yaitu persegi yang didalamnya terdapat susunan bilangan-bilangan 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, dan 18.

16	**2**	**12**
6	**10**	**14**
8	**18**	**4**

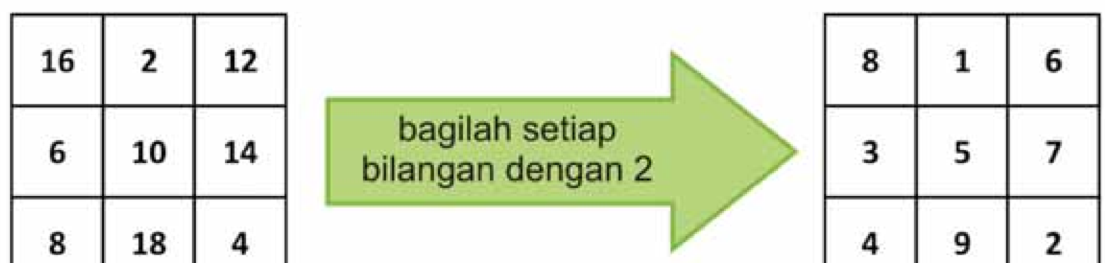
Gambar 1.3
Susunan Bilangan

Apa yang menarik pada gambar 1.3 di samping? Coba Anda Jumlahkan bilangan-bilangan yang terdapat pada setiap baris, setiap kolom dan setiap diagonal. Apa yang terjadi? Ternyata jumlah bilangan-bilangan pada setiap baris, setiap kolom, dan setiap diagonalnya sama besar yaitu 30. Susunan bilangan-bilangan berbentuk persegi dimana jumlah bilangan-bilangan pada setiap baris, setiap kolom, dan setiap diagonalnya adalah sama disebut persegi ajaib.



Gambar 1.4 Persegi Ajaib

Apa yang terjadi jika persegi ajaib di atas Anda rotasi atau refleksi? Apakah hasil rotasi atau refleksi yang Anda lakukan juga merupakan persegi ajaib? Jika ya, dengan merotasi, atau merefleksi persegi ajaib di atas susunlah persegi ajaib yang lain! Terdapat berapa susunan persegi ajaib yang berbeda? Setiap persegi ajaib mempunyai delapan operasi simetri (simetri putar dan simetri cermin). Selain itu pesegi-persegi ajaib yang baru dapat dibentuk dari persegi ajaib yang sudah ada dengan menggunakan satu atau lebih dari empat operasi aritmatika dasar (yaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian). Perhatikan bahwa persegi ajaib pada gambar 1.4 di atas dapat ditransformasikan untuk memperoleh persegi ajaib 3 × 3 dengan mengunakan bilangan-bilangan 1 sampai dengan 9. Perhatikan gambar 1.5 di bawah ini.



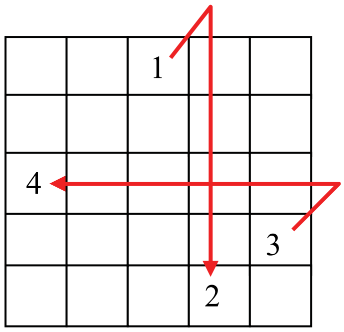
Gambar 1.5 Transformasi Persegi Ajaib

Pada gambar di atas, transformasi aljabar apa yang mengubah persegi ajaib sebelah kanan kembali menjadi persegi ajaib pada gambar di sebelah kiri? Bilangan-bilangan pada persegi ajaib dapat berupa bilangan desimal, bilangan pecahan, bilangan bulat (positif dan atau negatif), dan dapat juga berupa variabel.

Berikut ini sebuah metode yang dapat digunakan untuk mengonstruksi persegi ajaib terurut ganjil, yaitu persegi ajaib dengan banyak baris dan kolom ganjil. Misalkan bilangan yang akan disusun dalam persegi ajaib adalah 1, 2, 3, 4, 5, ... , 25.

Tahap I:

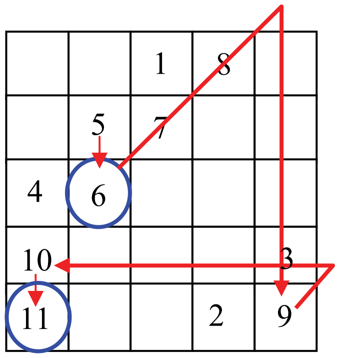
Pertama-tama tuliskan bilangan pertama yaitu 1, ditengah-tengah baris paling atas. Selanjutnya isikan bilangan-bilangan 2, 3, 4, 5, ... , 25 secara berurutan dengan bergerak secara diagonal ke kanan atas. Jika posisi berikutnya tidak pada persegi, masukkan bilangan pada petak paling ujung pada baris atau kolom yang berlawanan. Perhatikan gambar 1.6, terlihat bahwa bilangan 2 dan 4 telah dituliskan berdasarkan tahap I ini.



Gambar 1.6 Ilustrasi Tahap I

Tahap II:

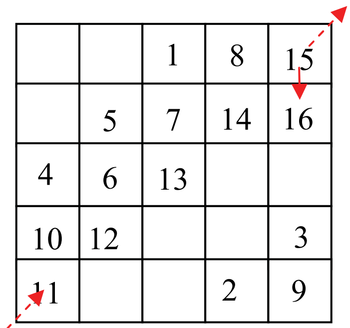
Teruskan bergerak secara diagonal ke kanan atas. Bila Anda menjumpai posisi yang sudah terisi masukkan bilangan di petak terdekat di bawahnya. Tahap ini telah dilakukan untuk menempatkan bilangan 6 dan 11. Perhatikan gambar 1.7 di samping ini.



Gambar 1.7: Ilustrasi Tahap II

Tahap III:

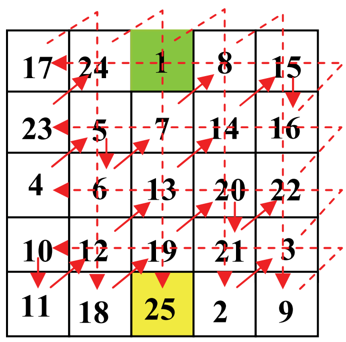
Ruang yang mengikuti sudut kanan atas adalah ruang di sudut kiri bawah. Karena ruang ini telah diisi 11 maka bilangan 16 ditempatkan di bawah 15 dengan mengikuti aturan tahap II.



Gambar 1.8 Ilustrasi Tahap III

Tahap IV:

Teruskan prosesnya sampai persegi berukuran 5 × 5 terisi penuh. Sebuah persegi ajaib 5 × 5 mempunyai sebanyak 5 × 5 atau 25 bilangan. Karena 1 adalah bilangan yang pertama, maka bilangan yang terakhir adalah 25.



Gambar 1.9
Ilustrasi Tahap IV

Untuk meyakinkan bahwa tidak terdapat kesalahan dalam menyusun bilangan-bilangan tersebut, sebaiknya anda ulangi dan perhatikan lagi langkah demi langkah dengan seksama. Periksalah, jumlah bilangan pada setiap baris, setiap kolom, dan setiap diagonalnya sama dengan $\frac{1+2+3+....+25}{5}=65$.

SK dan KD yang dapat dikaitkan dengan persegi ajaib (*magic square*) adalah SK 1 yaitu memahami sifat-sifat operasi hitung bilangan dan penggunaannya dalam pemecahan masalah pada KD 1.1 yaitu melakukan operasi hitung bilangan bulat dan pecahan, dan KD 1.2 yaitu menggunakan sifat-sifat operasi hitung bilangan bulat dan pecahan dalam pemecahan masalah.

5. Trik matematika

Trik matematika berikut masih berkaitan dengan SK 1. Memahami sifat-sifat operasi hitung bilangan dan penggunaannya dalam pemecahan masalah pada KD1.1 Melakukan operasi hitung bilangan bulat dan pecahan, dan KD 1.2 Menggunakan sifat-sifat operasi hitung bilangan bulat dan pecahan dalam pemecahan masalah. Dalam pembelajaran, materi tersebut dapat digunakan untuk memotivasi siswa .

Dalam trik matematika yang disajikan Anda diminta untuk menyelidiki mengapa trik tersebut berlaku dan bagaimana alur penalarannya. Di bawah ini diberikan contoh instruksi dan ilustrasi yang dapat Anda praktekkan langsung di dalam pembelajaran. Anda membacakan instruksinya satu persatu dari instruksi langkah pertama sampai dengan langkah ke keempat. Di langkah kelima Anda yang menebak hasilnya sesuai dengan yang ada pada kolom ilustrasi langkah kelima.

Tabel 1.2: Instruksi dan Ilustrasi Trik Matematika

INSTRUKSI	ILUSTRASI
1. Tuliskan sebuah bilangan dua angka antara 50 dan 100 (biarkan setiap siswa menentukan bilangan sendiri-sendiri, misalnya diambil 69)	69
2. Kemudian tambahkan dengan 55	69 + 55 = 124

3. Coretlah angka ratusannya, dan tambahkan ke bilangan yang terbentuk dari dua digit yang tersisa	$\cancel{1}24 + 1$ $= (69 + 55) - 100 + 1$ $= (69 + 55) - 99$
4. Kurangkanlah hasilnya dari bilangan yang semula	$69 - ((69 + 55) - 99)$ $= 69 - 69 - 55 + 99$ $= - 55 + 99$ $= 99 - 55$
5. Berapakah hasilnya? Hasilnya akan selalu 44, merupakan hasil dari pengurangan 99 dengan bilangan yang ditambahkan pada instruksi langkah kedua	44

Mengapa bisa demikian? Kunci pertama dari trik ini ada pada instruksi langkah kedua. Saat menambahkan suatu bilangan pilihlah bilangan dengan dua digit yang apabila ditambah dengan bilangan pertama (yang terdiri dari dua digit antara 50 dan 100) hasilnya lebih dari 100. Mengapa? Karena pada instruksi yang ketiga harus menyoret angka ratusannya. Angka ratusan yang mungkin adalah 1, karena penjumlahan dua bilangan yang masing-masing mempunyai dua digit hasilnya pasti kurang dari 200.

Pada langkah ketiga Anda harus menyoret angka ratusannya dan menambahkan kebilangan yang terbentuk dari dua digit yang tersisa, ini berarti anda mengurangi 100 dan menambah 1 sama dengan mengurangi 99, ini merupakan kunci yang kedua. Penyelesainya selalu merupakan hasil dari pengurangan 99 dengan bilangan yang ditambahkan pada instruksilangkah kedua.

C. Ringkasan

1. Karl Friedrich Gauss (1777-1855) adalah seorang matematikawan kelahiran Jerman tanggal 30 April 1777. Sejak masih sekolah dasar sudah mampu menghitung jumlah bilangan 1 sampai 100. Sekarang untuk menghitung jumlah n bilangan asli pertama digunakan rumus $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Leonhard Euler (1707-1783) merupakan matematikawan yang paling produktif sepanjang masa lahir pada tanggal 15 April 1707. Beberapa sumbangannya adalah sebagai berikut: (1) Merupakan orang yang pertama kali menggunakan simbol "*i*" untuk $\sqrt{-1}$, dan simbol "*e*" untuk bilangan irasional yang istimewa 2,718281…. (2) Mempublikasikan daftar 30 pasang bilangan *amicable* .

3. Pembagi sejati (*proper divisors*) dari suatu bilangan adalah semua pembagi/faktor dari bilangan tersebut selain bilangan itu sendiri. Suatu bilangan disebut Bilangan Sempurna (*perfect numbers*) apabila jumlah semua pembagi sejatinya sama dengan bilangan itu sendiri. Dua bilangan dinamakan Bilangan Amicable (*friendly numbers*) jika jumlah dari semua pembagi sejati bilangan pertama sama dengan bilangan kedua dan sebaliknya.

4. Barisan bilangan *fibonacci*: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
   Bentuk umumnya adalah $f(1)=1$, $f(2)=1$, $f(n)=f(n-2)+f(n-1)$, untuk $n \geq 3$

5. Persegi ajaib (*magic squares*) adalah susunan bilangan-bilangan berbentuk persegi dimana jumlah bilangan-bilangan pada setiap baris, setiap kolom, dan setiap diagonalnya sama. Metode menyusun persegi ajaib terurut ganjil (misalnya persegi ajaib 5 × 5 terurut mulai dari 1) sebagai berikut. Tahap I: Pertama-tama tuliskan bilangan pertama yaitu1, ditengah-tengah baris paling atas. Selanjutnya isikan bilangan-bilangan asli secara berurutan dengan bergerak secara diagonal ke kanan atas. Jika posisi berikutnya tidak pada persegi, masukkan bilangan pada petak paling ujung pada baris atau kolom yang berlawanan. Tahap II: Teruskan bekerja secara diagonal ke kanan atas. Bila anda menjumpai posisi yang sudah terisi masukkan bilangan di petak terdekat di bawahnya. Tahap III: Ruang yang mengikuti sudut kanan atas adalah ruang di sudut kiri bawah. Jika sudah terisi bilangan sebelumnya maka bilangan berikutnya ditempatkan di bawah bilangan tersebut. Tahap IV: Teruskan prosesnya sampai persegi berukuran 5 × 5 terisi penuh.

D. Tugas/Latihan

1. Tunjukkan bahwa 1184 dan 1210 adalah bilangan-bilangan *amicable*!

2. a. Konstruksi persegi ajaib 7×7 dengan bilangan-bilangan mulai dari 1, 2, 3, ... , 49.
   b. Konstruksi persegi ajaib 7×7 yang lain (dimana bilangan-bilangannya berbeda dengan soal 2.a).

3. Perhatikan Tabel 1.2 (halaman 15). Jika pada langkah pertama ditulis bilangan 57 dan pada langkah kedua ditambah dengan bilangan 63, dengan mengikuti instruksi langkah ketiga dan langkah keempat sama seperti dalam tabel, maka berapakah hasil dari langkah kelima?

Untuk menilai hasil pengerjaan tugas/latihan Anda, Anda dapat menilainya sendiri dengan mencocokkan hasil pekerjaan Anda dengan kunci jawaban atau petunjuk yang ada di bagian umpan balik di bawah ini. Anda juga dapat bekerjasama dengan teman seprofesi Anda di sekolah maupun di MGMP untuk mengoreksi pekerjaan Anda.

E. Umpan Balik

Pada bagian ini diberikan kunci jawaban atau petunjuk yang digunakan dalam menilai tugas/latihan yang sudah Anda kerjakan di atas.

Kunci jawaban/petunjuk:

1. Buatlah daftar semua faktor dari 1184 dan 1210. Pilihlah faktor-faktor sejatinya kemudian jumlahkan semua faktor-faktor sejati dari 1184 dan 1210. Jumlah faktor-faktor sejati dari 1184 sama dengan 1210 dan jumlah faktor-faktor sejati dari 1210 sama dengan 1184. Terbukti.

2. a. Konstruksi persegi ajaib 7×7 dengan bilangan-bilangan mulai dari 1, 2, 3, ... , 49 adalah sebagai berikut.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

b. Petunjuk: Transformasikan persegi ajaib 7×7 dengan bilangan-bilangan mulai dari 1, 2, 3, ... , 49 di atas dengan salah satu dari $5x$, $-3x$, $-4x+7$, $(x+8,5)$, $\frac{1}{2}x$, atau yang lainnya.

3. Hasilnya adalah 36

Anda dinilai sudah berhasil dalam mempelajari modul ini apabila Anda berhasil menjawab/mengerjakan dengan benar minimal 75% dari tugas/latihan yang diberikan di atas. Selamat bagi Anda yang sudah berhasil mengerjakan dengan benar lebih dari 75%, Anda dapat melanjutkan mempelajari modul berikutnya/yang lain. Buat Anda yang nilainya belum mencapai 75% jangan berkecil hati, silahkan Anda pelajari lagi bagian mana yang masih kurang, setelah itu kerjakan kembali tugas/latihan yang belum bisa Anda kerjakan dengan benar. Dengan usaha keras dan kesungguhan Anda dalam mempelajari modul ini, “Anda pasti Bisa”.

F. Daftar Pustaka

Alfred S. Possamentier. 2007. *Math Wonders.* Alexandria: ASCD.

Cooper R.F. 1979. *Recreational Mathematics*. Hongkong: Wing Tai Cheung Printing Co. Ltd.

Max A. Sobel dan Evan M. Maletsky. 2001. *Mengajar Matematika.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Pravin Chandra & Eric W. Weisstein. *Fibonacci Number*. http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html. diakses pada 22 April 2011.

Sulaiman R., dkk. 2008.*Contextual Teaching and Learning Matematika: Sekolah Menengah Pertama/Madrasah Tsanawiyah Kelas IX Edisi 4*. Jakarta:Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional.

II

PEMANFAATAN MATEMATIKA REKREASI DALAM PEMBELAJARAN ASPEK ALJABAR

II. Pemanfaatan Matematika Rekreasi dalam Pembelajaran Aspek Aljabar

Kompetensi Guru:

1. **Menyediakan berbagai kegiatan pembelajaran untuk mendorong peserta didik mencapai prestasi belajar secara optimal (6.1).**
2. **Menyediakan berbagai kegiatan pembelajaran untuk mengaktualisasikan potensi peserta didik, termasuk kreativitasnya (6.2).**
3. **Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi aritmatika, aljabar, geometri, trigonometri, pengukuran, statistika, dan logika matematika (20.7).**
4. **Bangga menjadi guru dan percaya pada diri sendiri (14.2).**
5. **Berkomunikasi dengan teman sejawat dan komunitas ilmiah lainnya secara santun, empatik, dan efektif. (17.1).**

Modul ini disusun untuk memberikan bahan untuk memotivasi belajar siswa dalam aspek aljabar. Setelah mempelajari modul ini, diharapkan guru memiliki tambahan wawasan tentang perkembangan aljabar, beberapa topik menarik berkaitan dengan aljabar, dan memanfaatkan dalam proses pembelajaran.

Modul ini berisi 2 kegiatan belajar. Kegiatan belajar yang pertama membahas tentang sejarah singkat perkembangan aljabar. Di dalamnya juga termuat beberapa contoh masalah yang dapat diangkat ke dalam materi pembelajaran SMP. Kegiatan belajar kedua berisi tentang materi rekreasi matematika yang berkaitan dengan aljabar. Dalam topik ini diberikan berbagai permainan bilangan yang melibatkan aljabar, tafsiran geometris dari operasi aljabar, paradoks, dan aplikasi aljabar untuk memudahkan perhitungan.

Untuk mempelajari modul, lakukan secara berurutan dari Kegiatan Belajar 1 kemudian Kegiatan Belajar 2. Bacalah modul dengan seksama. Jika di tengah terdapat soal, teka-teki, paradoks, atau aplikasi aljabar, cobalah menyelesaikan sebelum membaca penjelasannya (jika diberikan). Ada kemungkinan Anda memiliki cara penyelesaian yang berbeda. Pada bagian akhir, diberikan soal latihan yang berupa soal atau tugas. Untuk latihan berupa soal, kerjakan dengan cermat. Untuk latihan berupa tugas, diskusikan dengan teman sejawat hasil pekerjaan Anda.

A. Kegiatan Belajar 1: Sejarah Matematika Terkait Aljabar

Tahukah Anda, sejak kapan aljabar muncul? Dari sejarah perkembangannya, beberapa masalah yang terdapat dalam naskah-naskah kuno dapat diangkat menjadi soal-soal untuk siswa SMP. Manakah diantara masalah-masalah tersebut yang dapat digunakan?

Dalam Kegiatan Belajar 1, diharapkan Anda mendapatkan jawaban dari pertanyaan-pertanyaan di atas.

1. Perkembangan Aljabar

Istilah aljabar berasal dari judul sebuah buku 'Al-Kitab Al-Mukhtasar Fi Hisab Al-Jabr Wa'l-Muqabala' yang ditulis oleh matematikawan Arab bernama Muhammad Ibnu Musa Al-Khwarizmi sekitar tahun 825 M. Aljabar dapat dibedakan menjadi 'aljabar klasik' yang memuat penyelesaian suatu persamaan atau masalah mencari bilangan yang belum diketahui dan 'aljabar abstrak', atau dikenal sebagai 'aljabar modern'. Aljabar klasik telah dikembangkan dalam periode lebih dari 4000 tahun. Sampai dengan abad pertengahan, pembahasan dalam aljabar umumnya masih terbatas pada penyelesaian polinomial berderajat tiga atau kurang. Sementara itu aljabar abstrak yang mempelajari tentang struktur aljabar baru muncul sekitar 200 tahunan.

James R, dalam *Mathematics Dictionary* menjelaskan bahwa aljabar merupakan studi tentang sifat-sifat operasi yang dilakukan terhadap himpunan bilangan. Aljabar merupakan generalisasi dari aritmatika dimana simbol, biasanya berupa abjad, digunakan untuk menggantikan bilangan.
Dasar aljabar telah diketahui sejak jaman Mesir kuno, Babilonia, Yunani, China, India, Arab dan kebudayaan-kebudayaan lain. Sejarah telah mencatat bahwa

perkembangan aljabar berlangsung lambat sampai dengan jaman Renaissance di Eropa yang ditandai dengan lahirnya aljabar modern.
Sebagai contoh, solusi persamaan linear dan kuadratik telah diketahui sejak jaman Babilonia, namun demikian penyelesaian umum persamaan kubik (berderajat tiga) tidak ditemukan sampai masa *renaissance* di Itali.

Sesuai dengan karakteristiknya, beberapa masalah yang muncul pada manuskrip/buku kuno dapat diberikan kepada siswa sebagai bahan motivasi. Melalui masalah-masalah tersebut siswa dapat mengetahui bahwa matematika merupakan salah satu hasil peradaban dan berkembang sesuai dengan kebutuhan manusia.

2. Masalah dalam Manuskrip untuk Matematika SMP

a. Tablet Babylon (sekitar 2000 SM)

Peradaban Babylon telah berkembang sebelum 3500 SM. Mereka telah membangun kota yang memiliki sistim irigasi, sistim hukum, administrasi bahkan pelayanan pos. Masyarakat Babylon telah mengenal tulisan berbentuk baji. Naskah mereka ditulis pada tanah liat basah yang kemudian dijemur di bawah terik matahari. Naskah ini disebut sebagai tablet. Di antara tablet-tablet yang ditemukan, beberapa ratus tablet tentang matematika berhasil diperbaiki. Dalam tablet ditemukan fakta bahwa perhitungan bangsa Babylon mengunakan sistem seksagesimal (basis 60).

Gambar 2.1 Tablet Babylon

Beberapa masalah aljabar dari tablet-tablet Babylon.

1) Saya menemukan sebuah batu tetapi tidak menimbangnya; setelah menambahkan $\frac{1}{7}$ (nya) dan menambahkan $\frac{1}{11}$ (nya), saya timbang: [hasilnya] 1 *mina*. Berapakah berat mula-mula batu tersebut? Berat mula-mula batu adalah $\frac{2}{3}$ *mina*, 8 *sheqel* dan $22\frac{1}{2}$ *se*. (1 *mina* = 60 *sheqel* dan 1 *sheqel* = 180 *se*).

Bantuan: Misalkan berat batu mula-mula adalah x, bentuk aljabar yang dapat disusun adalah $\left(x+\frac{x}{7}\right)+\frac{1}{11}\left(x+\frac{x}{7}\right)=60$.

2) Terdapat dua cincin perak; $\frac{1}{7}$ dari cincin pertama dan $\frac{1}{11}$ cincin kedua patah, sehingga patahannya memiliki berat 1 *sheqel*.
3) Cincin pertama dikurangi $\frac{1}{7}$ beratnya sebanyak cincin kedua dikurangi $\frac{1}{11}$ beratnya. Berapakah berat cincin mula-mula?
Bantuan: misalkan x dan y berat kedua cincin, sistim persamaannya adalah $\frac{x}{7}+\frac{y}{11}=1$, $\frac{6x}{7}=\frac{10y}{11}$.

b. Papyrus Rhind / Papyrus Ahmes (sekitar 1650 SM).


Gambar 2.2 Papyrus Rhind

Bangsa Mesir telah memiliki peradaban yang tinggi sejak lama. Mereka membutuhkan aritmatika untuk transaksi komersial, menentukan pajak, menghitung bunga pinjaman, perhitungan gaji, dan menyusun kalender. Jejak matematika di Mesir tersimpan dalam papyrus. Dua papyrus yang terkenal adalah Papyrus Rhind atau Papyrus Ahmes yang ditulis sekitar 1650 SM dan Papyrus Moscow.

Berikut ini beberapa masalah Aljabar yang terdapat dalam Papyrus Rhind. Materi ini dapat diberikan ke kelas VII semester 1 pada kompetensi dasar 3.2 yaitu membuat model matematika dari masalah yang berkaitan dengan persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel.

1) Pikirkan sebuah bilangan, tambahkan $\frac{2}{3}$ dari bilangan tersebut ke dirinya sendiri. Dari jumlah ini, kurangi $\frac{1}{3}$ nya dan katakan hasilnya. Misalkan jawaban yang diberikan adalah 10, ambil $\frac{1}{10}$ nya menghasilkan 9. Inilah bilangan yang dipikirkan mula-mula.

Penjelasan:

Jika bilangan awal yang dipikirkan adalah 9, maka $\frac{2}{3}$ nya adalah 6. Jumlah kedua bilangan ini $9 + 6 = 15$. Sepertiga dari 15 adalah 5. Hasil pengurangan 15 oleh 5 adalah 10. Untuk mendapatkan bilangan yang dipikirkan, $\frac{1}{10}$ dari 10 adalah 1. Hasil pengurangan 10 oleh 1 adalah 9.

Jika dalam papyrus diberi contoh bilangan yang dipikirkan adalah 9, Anda dapat mengajak siswa membuktikan kebenaran pernyataan untuk bilangan-bilangan yang lain. Secara umum, misalkan n adalah bilangan yang dipikirkan mula-mula, maka bentuk aljabar yang dapat disusun adalah :

$$\left(n+\frac{2n}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(n+\frac{2n}{3}\right)-\frac{1}{10}\left[\left(n+\frac{2n}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(n+\frac{2n}{3}\right)\right]=n.$$

2) Sebuah kuantitas (bilangan) dan setengahnya dijumlahkan bersama menghasilkan 16. Berapakah kuantitas tersebut?
3) Sebuah kuantitas (bilangan), duapertiganya, setengahnya dan sepertujuhnya dijumlahkan menghasilkan 33. Berapakah kuantitas tersebut?

c. Kitab Al-Mukhtasar Fi Hisab Al-Jabr Wa-l-Muqabala

Kitab Al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala merupakan buku metematika yang ditulis sekitar tahun 830 M. Buku yang ditulis pada masa kekhalifahan Al-Ma'mum tersebut berisi tentang perhitungan dengan contoh-contoh aplikasi dalam perdagangan, pemetaan, dan hukum warisan. Istilah Aljabar muncul dari buku ini. Pada tahun 1145 Robert of Chester (Robertus Castrensis) menerjemahkannya ke bahasa Latin dengan judul *Liber et Algebrae Almucabala*.

Gambar 2.3 Salah satu halaman buku Al-Khwarizmi

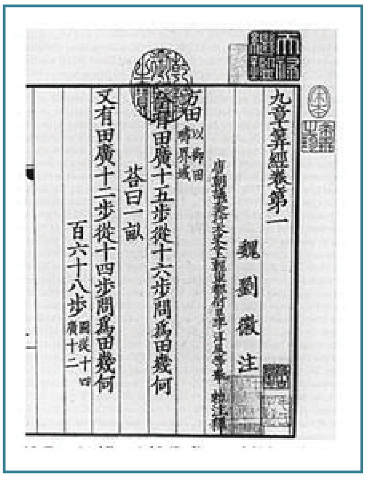
Beberapa masalah aljabar terdapat dalam Al-Jabr Wa-l-Muqabala. Di antara masalah-masalah tersebut, masalah berikut ini berkaitan dengan materi kelas VIII semester 1 untuk kompetensi dasar 2.3 yaitu menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear dua variabel dan penafsirannya.

Sepuluh buah benda dikelompokkan menjadi dua bagian. Perbandingan banyaknya bagian yang besar dengan banyaknya bagian yang kecil adalah $4:1$. (Berapakah masing-masing banyaknya bagian benda tersebut? Selesaikan sebagai latihan)

1) Jika seseorang mengatakan ada 10 benda dikelompokkan menjadi dua bagian, pembagian banyaknya salah satu bagian benda oleh bagian benda yang lain menghasilkan 4 dan $\frac{1}{4}$. (Berapakah banyaknya masing-masing bagian benda itu? Selesaikan sebagai latihan)
2) Jika seseorang mengatakan ada 10 benda dibagi sama banyak ke beberapa orang. Ketika banyaknya orang yang menerima ditambah 6 orang, benda yang harus dibagikan di antara mereka agar masing-masing menerima benda sama banyak dengan yang diterima mula-mula, adalah berjumlah 40 benda. (Berapakah banyaknya orang mula-mula? Selesaikan sebagai latihan)

d. Masalah dalam *Nine Chapter* (China, 150 SM)

Asal-usul *Jiŭzhāng Suànshù* (*The Nine Chapters on the Mathematical Art*) tidak diketahui. Tetapi diyakini bahwa buku tersebut mewakili pemikiran kolektif selama beberapa abad. Naskah aslinya telah rusak akibat kebakaran pada tahun 213 SM. Beberapa bagiannya kemudian berhasil diperbaiki. Naskah yang bertahan sampai saat ini disusun oleh Liu Hui pada tahun 263 M.


九章算經卷第一
魏 劉徽 注
方田
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
百六十八步

Gambar 2.4 Salah satu halaman pada *The Nine Chapters*.

Beberapa masalah dari *Nine Chapters*.

1) Seseorang membawa sejumlah bahan makanan

melalui tiga gerbang. Pada gerbang terluar, sepertiga diambil sebagai pajak. Pada gerbang tengah, seperlima diambil lagi. Pada gerbang terdalam, sepertujuh diambil. Misalkan sisa sereal adalah 5 *dou*. Berapakah sereal yang dibawa mula-mula? Jawaban yang diberikan adalah 10 *dou* $9\frac{3}{8}$ *sheng*. (1 dou = 10 $sheng$).

2) Sejumlah orang membeli ayam secara bersama-sama. Jika setiap orang iuran 9 *wen*, uang yang tersisa adalah 11 *wen*. Jika setiap orang iuran 6 *wen*, uang mereka kurang 16 wen. Berapakah banyak orang, dan harga seluruh ayam? Jawaban yang diberikan adalah banyak orang 9, dan harga seluruh ayam 70 *wen*.

Masalah 1) dapat diberikan di kelas VII semester 1, Kompetensi Dasar (KD) 3.2, sedangkan masalah 2) dapat diberikan di kelas VIII semester 1, KD 2.3.

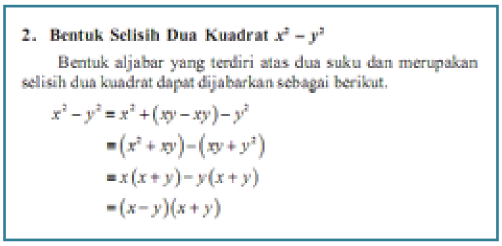
B. Kegiatan Belajar 2: Topik Matematika Rekreasi dalam Aljabar

Teka-teki bilangan apa yang dapat dimainkan bersama siswa? Bagaimana permainan tersebut dapat bekerja dengan baik? Dalam beberapa kasus, operasi bilangan dapat lebih mudah dikerjakan tanpa alat bantu, apa betul seperti itu? Bagaimana penjelasan dari semua itu?

Setelah mempelajari bagian ini, diharapkan guru menguasai beberapa contoh materi matematika rekreasi yang dapat digunakan dalam pembelajaran beserta dengan penjelasan matematisnya. Contoh topik yang diberikan berupa dan fakta menarik, teka-teki, paradoks, dan aplikasi aljabar.

1. Tafsiran Geometris Perkalian dan Pemfaktoran Bentuk-Bentuk Aljabar.

Bagaimanakah cara mengalikan atau memfaktorkan bentuk aljabar? Berikut ini adalah salah satu contoh pemfaktoran yang terdapat dalam salah satu Buku Sekolah Elektronik (BSE).



2. Bentuk Selisih Dua Kuadrat $x^2 - y^2$

Bentuk aljabar yang terdiri atas dua suku dan merupakan selisih dua kuadrat dapat dijabarkan sebagai berikut.

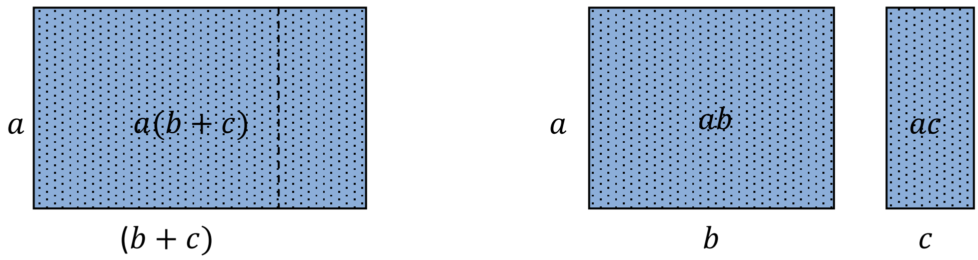
$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= x^2 + (xy - xy) - y^2 \\ &= (x^2 + xy) - (xy + y^2) \\ &= x(x+y) - y(x+y) \\ &= (x-y)(x+y) \end{aligned}$$

Gambar 2.5 Penjelasan pada salah satu BSE

Perhatikan bahwa dalam menguraikan bentuk aljabar di atas, diperlukan trik menambahkan bentuk $(xy - xy)$. Dibutuhkan kreatifitas untuk memunculkan bentuk ini. Sebagai alternatif dalam pembelajaran, beberapa operasi bentuk aljabar dapat dijelaskan melalui tafsiran geometris dalam bentuk luasan. Melalui visualisasi tafsiran geometris, sifat-sifat operasi tersebut dapat langsung terlihat.

Bentuk $\boldsymbol{a(b+c) = ab+ac}$

Untuk menjelaskan sifat di atas, bimbinglah siswa untuk menentukan luas persegipanjang yang diberikan dengan dua cara yang berbeda.

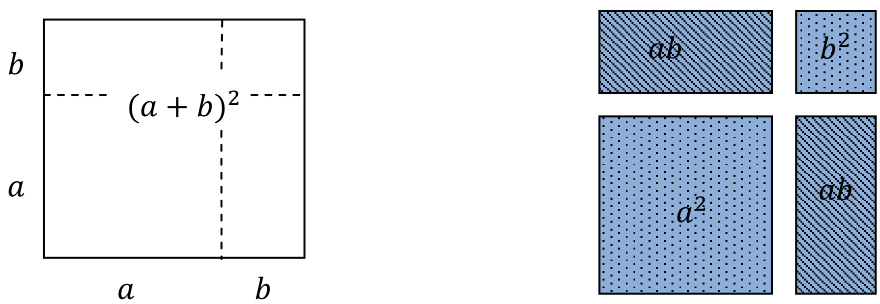


Gambar 2.6 Bentuk $a(b+c) = ab+ac$

Persegipanjang pada gambar kiri memiliki panjang sisi a dan $(b+c)$. Luas daerah persegipanjang tersebut $a(b+c)$. Perhatikan jika luas daerah persegipanjang tersebut dihitung per bagian, diperoleh luas daerah bagian pertama ab, dan luas daerah bagian kedua ac. Dengan demikian $a(b+c) = ab+ac$.

Bentuk $\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$

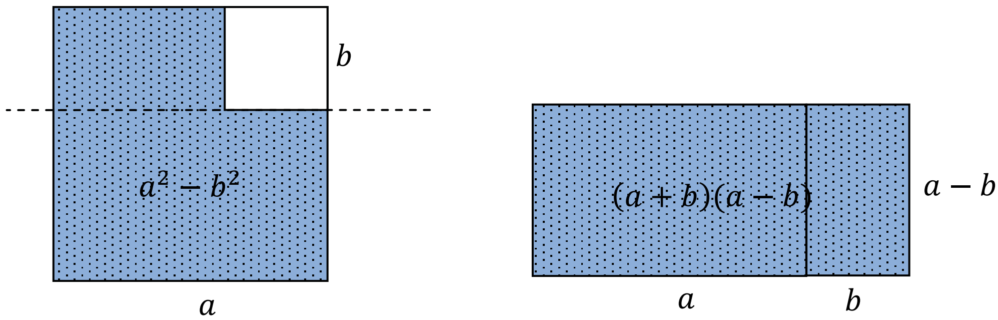
Sama seperti pada kasus sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan, berikan siswa diagram persegi yang panjang sisinya $(a+b)$. Jelas luas daerah persegi tersebut $(a+b)^2$. Kemudian bimbinglah siswa mencari luas daerah dengan cara menentukan luas per bagian sehingga diperoleh jumlah luas daerah dari keempat bagian tersebut adalah $a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2$. Dengan demikian dapat disimpulkan $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.



Gambar 2.7 Bentuk $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

Bentuk $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$

Pada gambar 2.8, luas daerah pada gambar yang diarsir di sebelah kiri adalah luas daerah persegi besar dengan panjang sisi a dikurangi luas daerah persegi kecil dengan panjang sisi b atau $Luas = a^2 - b^2$.



Gambar 2.8 Bentuk $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Potong daerah tersebut menurut garis putus-putus dan susun menjadi persegipanjang seperti pada gambar di sebelah kanan. Persegipanjang ini memiliki panjang sisi $(a + b)$ dan $(a - b)$ serta memiliki $Luas\ daerah = (a + b)(a - b)$. Akibatnya $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

2. Keterbagian dengan 9

Bilangan dua angka yang diakhiri dengan 9 dapat dinyatakan dengan cara yang berbeda. Bimbinglah siswa untuk menguji pernyataan berikut dengan mencoba beberapa kasus.

Setiap bilangan dua angka yang diakhiri dengan 9 dapat dinyatakan sebagai jumlah dari hasil kali angka-angkanya dan jumlah angka-angkanya.

Dengan cara lain,

Setiap bilangan dua angka yang diakhiri dengan 9

= [*hasil kali angka-angkanya*] + [*jumlah angka-angkanya*]

Contoh:

29 = [2×9] + [2 + 9]

79 = [7×9] + [7 + 9]

Apakah pernyataan di atas benar? Berikut ini adalah penjelasan matematisnya. Anda dapat mengajak siswa untuk membuktikan. Bilangan dua angka yang diakhiri dengan 9 dapat dituliskan dalam bentuk “$x9$” yang bernilai $10x + 9$ dengan x bilangan asli, $1 \leq x \leq 9$. Hasil kali angka-angkanya ditambah jumlah angka-angkanya adalah: $(x \times 9) + (x + 9) = 9x + x + 9 = 10x + 9$

Hasil terakhir jika ditulis, maka lambang bilangannya berbentuk “$x9$”. Jadi pernyataan di atas benar. Materi ini dapat diberikan di kelas VII semester 1 pada KD 2.2 melakukan operasi pada bentuk aljabar.

3. Keterbagian 12

Mintalah siswa untuk menuliskan tiga bilangan ganjil berurutan kemudian menyelidiki pernyataan berikut:

Satu ditambah jumlah kuadrat tiga bilangan ganjil berurutan selalu dapat dibagi dengan 12.

Dengan kata lain, satu ditambah jumlah kuadrat tiga bilangan ganjil berurutan merupakan kelipatan 12. Sebagai contoh, untuk tiga bilangan ganjil berurutan 11, 13, dan 15.

$$
\begin{aligned}
1 + 11^2 + 13^2 + 15^2 &= 1 + 121 + 169 + 225 \\
&= 516 \\
&= 12 \times 43
\end{aligned}
$$

Bimbinglah siswa untuk membuktikan pernyataan di atas. Untuk setiap bilangan asli n, maka $2n + 1$ merupakan bilangan ganjil. Dengan mengambil $2n + 1$ sebagai bilangan ganjil yang di tengah, maka tiga bilangan ganjil berurutan adalah $2n - 1$, $2n + 1$ dan $2n + 3$. Sementara itu suatu bilangan dapat dibagi oleh 12 jika bilangan tersebut dapat dinyatakan dengan $12P$ dengan P suatu bilangan asli.

$$
\begin{aligned}
&1 + (2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 \\
&\quad = 1 + (4n^2 - 4n + 1) + (4n^2 + 4n + 1) + (4n^2 + 12n + 9) \\
&\quad = 12n^2 + 12n + 12 \\
&\quad = 12(n^2 + n + 1)
\end{aligned}
$$

Untuk n bilangan asli, maka $n^2 + n + 1$ juga bilangan asli, sehingga bentuk terakhir di atas dapat dinyatakan dalam bentuk $12P$ dengan P suatu bilangan asli. Dengan demikian pernyataan di atas selalu benar.

4. Misteri 22

Materi berikut ini dapat diberikan di kelas VII semester 1 pada KD 2.2 melakukan operasi bentuk aljabar.

Mintalah siswa bekerja individual dengan perintah lisan sebagai berikut:

a. Tuliskan sebarang bilangan yang lambangnya terdiri dari tiga angka berbeda.
b. Dengan menggunakan angka-angka di atas, susunlah semua bilangan yang terdiri dari dua angka berbeda yang dapat dibentuk kemudian jumlahkan.
c. Bagilah hasil yang diperoleh pada langkah ke-2 dengan jumlah tiga bilangan penyusun bilangan mula-mula.

Contoh, jika seorang siswa memulai dengan 587, bilangan dua angka yang dapat dibentuk adalah 58, 85, 57, 75, 87, dan 78.

Langkah berikutnya diperoleh $\frac{58+85+57+75+87+78}{5+8+7} = \frac{440}{20} = 22.$

Mintalah siswa membandingkan dengan hasil akhir yang diperoleh teman-temannya. Siswa akan terkesan, karena mereka memperoleh hasil akhir yang sama, yaitu 22. Bagaimana hal ini bisa terjadi? Ajak siswa untuk menyelidikinya.

Misalkan bilangan yang dipilih berbentuk "abc" maka nilai bilangan tersebut adalah $100a + 10b + c$. Sementara itu nilai semua bilangan dua angka yang dapat dibentuk adalah $10a + b$, $10b + a$, $10a + c$, $10c + a$, $10b + c$, dan $10c + b$. Jumlah keenam bilangan tersebut dibagi dengan jumlah angka bilangan semula adalah $\frac{10a+b+10b+a+10a+c+10c+a+10b+c+10c+b}{a+b+c} = \frac{22(a+b+c)}{a+b+c} = 22$ dengan $1 \le a \le 9,\ 0 \le b \le 9,\ 0 \le c \le 9,\ a \ne b,\ a \ne c$ dan $b \ne c$.

5. Tebak Umur

Kamu tidak mau menyebutkan umurmu? Baiklah, katakan kepadaku hasil hitungan berikut: (1) tambahkan 90 pada umurmu, (2) coret angka pertama, dan tambahkan ke bilangan dua angka yang tersisa (3) Katakan hasilnya. Aku bisa menebak usiamu. Untuk menebak umur, caranya adalah dengan menambahkan 9 ke hasil terakhir yang dikatakan. Anda bisa menebak umurnya. (Berlaku untuk umur 10 tahun atau lebih)

Mengapa trik di atas dapat digunakan untuk menebak umur? Ajak siswa menyelidiki bagaimana cara tersebut bekerja.

Karena umur yang ditebak harus di atas 10 tahun, maka bilangan yang menyatakan umur dapat dinyatakan dalam bentuk "ab" yang bernilai $10a + b$ dengan a, b bilangan asli, $1 \leq a \leq 9$ dan $0 \leq b \leq 9$.

Menambah umur dengan 90, diperoleh bilangan yang bernilai $10a + b + 90$. Bentuk ini dapat diubah menjadi $100 - 10 + 10a + b = 100 + (a - 1)10 + b$, penulisan bilangannya adalah "$1cb$" dengan $c = a - 1$.

Mencoret angka pertama dan menambahkan ke bilangan yang tersisa berarti mencoret 1 kemudian ditambahkan ke "cb", diperoleh nilai $10(a - 1) + b + 1 = 10a + b - 9$. Untuk mengetahui umur yang dirahasiakan, dari jawaban terakhir ini cukup ditambahkan 9, $10a + b - 9 + 9 = 10a + b$. Cocok dengan umur yang dirahasiakan.

6. Kuadrat Bilangan Berakhiran 5

Menguadratkan suatu bilangan adalah mengalikan bilangan tersebut dengan dirinya sendiri. Sebagai contoh, kuadrat dari 6 adalah 6×6 = 36. Biasanya siswa tidak mengalami kesulitan menghitung kuadrat bilangan yang terdiri dari satu angka. Kuadrat bilangan dua angka atau tiga angka yang berakhiran dengan 5 ternyata juga mudah dilakukan.

Hanya tiga langkah yang perlu diingat: (1) Hilangkan angka 5, sehingga diperoleh sebuah bilangan baru. (2) Kalikan bilangan ini dengan bilangan yang satu lebihnya dari bilangan tersebut. (3) Tambahkan di belakangnya bilangan 25.

Contoh:
Untuk menentukan kuadrat dari 65, langkah pertama adalah hilangkan angka 5, diperoleh bilangan 6. Selanjutnya bilangan yang satu lebihnya dari 6 adalah 7. Kalikan kedua bilangan ini, diperoleh $6 \times 7 = 42$. Dari hasil yang diperoleh, akhiri dengan 25, sehingga kuadrat dari 65 adalah 4225.

Bagaimana dengan bilangan yang terdiri dari 3 angka? Misalkan kuadrat dari 115.

Hilangkan 5, diperoleh	11
Kalikan dengan bilangan berikutnya, diperoleh	$11 \times 12 = 132$
Akhiri dengan 25, sehingga	$115 \times 115 = 13225$.

Periksalah dengan menggunakan kalkulator atau perkalian bersusun. Benarkah cara di atas berlaku untuk semua bilangan berakhiran 5? Anda dapat mengajak siswa untuk menyelidikinya.

Materi ini dapat dikaitkan dengan materi kelas VII semester 1 pada KD 2.2 yaitu melakukan operasi pada bentuk aljabar, kelas VIII semester 1 pada KD 1.1 tentang melakukan operasi aljabar, atau KD 1.2 tentang menguraikan bentuk aljabar ke faktor-faktornya.

Penjelasan:
Bilangan yang berakhiran dengan 5 memiliki bentuk $(x \times 10) + 5$ atau jika disederhanakan menjadi $(10x + 5)$, untuk bilangan asli $x \geq 1$. Kuadrat dari bentuk ini adalah

$$\begin{aligned}(10x+5)^2 &= 100x^2 + 100x + 25 \\ &= 100x(x+1) + 25 \\ &= x(x+1) \times 100 + 25\end{aligned}$$

Perhatikan bentuk $x(x+1) \times 100 + 25$ identik dengan "kalikan x dengan $x + 1$ kemudian akhiri dengan 25". Jadi cara di atas dapat dilakukan untuk menentukan kuadrat bilangan yang diakhiri dengan 5.

7. Cara Mudah Menguadratkan Bilangan

Tanyakan kepada siswa, manakah yang lebih mudah, mengalikan 94×94 atau 100×88? Tentu siswa akan menjawab perkalian yang terakhir adalah yang lebih mudah. Berikut ini adalah contoh kegunaan operasi bentuk aljabar untuk mempermudah penguadratan suatu bilangan dua angka. Misalkan akan dicari kuadrat dari 94.

Langkah pertama adalah tambahkan 6 ke 94 agar menjadi 100. Langkah kedua, kurangi 94 dengan 6, diperoleh 88. Kalikan 100 dengan 88, diperoleh 8800 kemudian tambahkan dengan 6^2. Sehingga $94^2 = 8836$. Perhatikan ilustrasi berikut.

$$94^2 \rightarrow \begin{cases} 94 + 6 = 100 \\ 94 - 6 = 88 \end{cases} \rightarrow 8800 + 6^2 = 8836.$$

Sehingga $94^2 = 8836$.

Contoh: berapakah nilai 26^2?

Tambahkan 26 dengan 4, diperoleh 30.

Kurangi 26 dengan 4, diperoleh 22.

Kalikan kedua bilangan diatas, diperoleh 30×22 = 660.

Terakhir tambahkan $4^2 = 16$. Sehingga $26^2 = 676$.

$$26^2 \rightarrow \begin{cases} 26 + 4 = 30 \\ 26 - 4 = 22 \end{cases} \rightarrow 660 + 4^2 = 676.$$

Dapatkah cara di atas diterapkan untuk menguadratkan semua bilangan dua angka? Ajak siswa untuk menyelidiki.

Materi ini dapat digunakan untuk siswa kelas VII semester 1 pada KD 2.2. melakukan operasi bentuk aljabar, kelas VIII semester 1 pada KD 1.1 tentang melakukan operasi aljabar, atau KD 1.2 tentang menguraikan bentuk aljabar ke faktor-faktornya.

Penjelasan:
Misalkan bilangan yang akan dikuadratkan adalah x. Langkah berikutnya adalah memilih sebuah bilangan, namakan d yang digunakan untuk menambah dan mengurangi x. Dari proses ini diperoleh $(x + d)$ dan $(x - d)$.
Hasil kali kedua bilangan ini ditambah dengan d^2 adalah

$$(x - d)(x + d) + d^2 = x^2 - d^2 + d^2 = x^2$$

Dari penjelasan ini tampak bahwa proses di atas dapat digunakan untuk menguadratkan suatu bilangan, bahkan tidak hanya bilangan dua angka, namun berlaku secara umum.

8. Aplikasi $(x - y)(x + y)$.

Masalah berikut sering muncul dalam pembahasan teorema Pythagoras. Sebagai contoh, untuk menghitung $25^2 - 15^2$ biasanya dilakukan dengan menguadratkan 25 dan 15, baru kemudian dicari hasil pengurangannya. Bandingkan dengan cara berikut.

$25^2 - 15^2 = (25 - 15)(25 + 15) = 10 \times 40 = 400$.

Dalam perhitungan tanpa alat, jelas cara terakhir lebih mudah dan cepat dibandingkan dengan cara pertama.

Contoh lain:

$37^2 - 36^2 = (37 - 36)(37 + 36) = 1 \times 73 = 73$. Bandingkan dengan cara menguadratkan 37 dan 36 terlebih dahulu.

Mengapa cara tersebut dapat dilakukan? Perhatikan bahwa untuk x, y bilangan real, berlaku

$$(x-y)^2 = (x-y)(x+y)$$

Cara di atas merupakan salah satu kegunaan dari faktorisasi bentuk aljabar untuk mempermudah dalam melakukan *mental calculation*. Materi di atas dapat diberikan kepada siswa SMP kelas VIII semester 1 pada kompetensi dasar Menguraikan bentuk aljabar ke dalam faktor-faktornya.

9. Paradoks 1 = 2

Benarkah $1 = 2$? Seseorang berhasil membuktikan bahwa $1 = 2$. Berikut adalah buktinya.

$x^2 - x^2 = x^2 - x^2$	ruas kiri sama dengan ruas kanan
$x(x-x) = (x-x)(x+x)$	kedua ruas difaktorkan
$\dfrac{x(x-x)}{(x-x)} = \dfrac{(x-x)(x+x)}{(x-x)}$	
$x = x + x$	kedua ruas dibagi dengan $(x-x)$
$x = 2x$	
$1 = 2$	kedua ruas dibagi x, terbukti

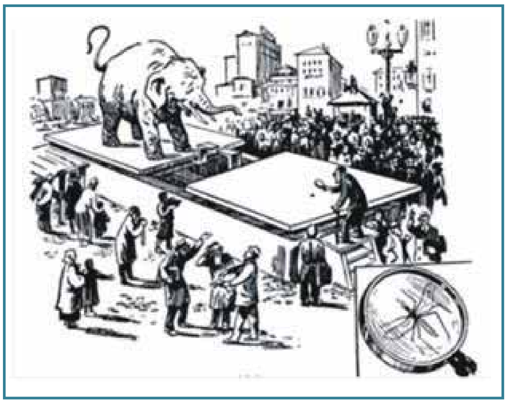
Pembuktian di atas tentu saja tidak benar. Padahal sekilas tidak ada yang salah pada alur pembuktiannya. Dimanakah letak kesalahannya?

Letak kesalahan yang dilakukan adalah membagi kedua ruas dengan $(x-x)$ yang bernilai 0. Proses di atas, disamping siswa belajar tentang operasi aljabar, mereka juga mendapatkan tambahan pemahaman bahwa dalam matematika, pembagian dengan 0 tidak diperbolehkan.

10. Paradoks Berat Gajah = Berat Nyamuk

Berikan masalah berikut ini kepada siswa. Pernyataan yang jelas salah, tetapi seakan-akan alur pembuktiannya benar. Untuk menentukan letak kesalahan alur logika pembuktian di bawah selain dibutuhkan ketelitian juga pemahaman tentang sifat-sifat operasi aljabar dan syarat-syaratnya.

Mungkinkah berat seekor gajah sama dengan berat seekor nyamuk?



Gambar 2.9 Berat Gajah = Berat Nyamuk

Seorang siswa berhasil menyatakan bahwa ia berhasil membuktikan bahwa berat seekor gajah sama dengan seekor nyamuk secara matematis. Berikut ini bukti yang ia berikan.

Misalkan berat seekor gajah dinyatakan sebagai x, dan berat seekor nyamuk dinyatakan dalam y. Nyatakan jumlah berat keduanya dinyatakan dalam $2z$, maka $x + y = 2z$.

Dari persamaan di atas diperoleh

$x - 2z = -y;$ .... (1)

$x = -y + 2z$ .... (2)

kalikan ruas kiri dengan ruas kiri, ruas kanan dengan ruas kanan

$x^2 - 2xz = y^2 - 2yz$ .... (3)

tambahkan z^2 ke kedua ruas

$x^2 - 2xz + z^2 = y^2 - 2yz + z^2,$ (4)

atau

$(x - z)^2 = (y - z)^2$ .... (5)

tarik akar pada kedua ruas

$x - z = y - z$ .... (6)

$x = y$ .... (7)

Dengan demikian berat seekor gajah (x) sama dengan berat seekor nyamuk (y). Terbukti!

Kenyataannya berat seekor gajah tidak mungkin dengan berat seekor nyamuk. Tentunya ada yang salah dengan bukti yang disampaikan. Dimanakah letak kesalahannya?

Beri kesempatan siswa untuk berpikir dan berdiskusi menemukan letak kesalahannya. Kesalahan terletak pada langkah keenam. Sebenarnya ada dua kemungkinan setelah langkah ke-5, yaitu $x - z = y - z$ dan $x - z = -(y - z)$. Dari dua kemungkinan ini seharusnya diselidiki semua dan dipilih mana yang memenuhi. Pada kasus di atas, hanya kemungkinan pertama yang diulas, sementara kemungkinan kedua tidak. Padahal justru kemungkinan kedualah yang memenuhi. Perhatikan untuk kemungkinan kedua $x - z = -(y - z)$, bentuk aljabar $(x - z)$ menyatakan berat gajah dikurangi setengah jumlah berat seekor gajah dan seekor nyamuk bernilai positif. Sementara itu $(y - z)$ yang menyatakan berat seekor nyamuk dikurangi setengah jumlah berat seekor gajah dan seekor nyamuk bernilai negatif.

C. Ringkasan

Aljabar merupakan generalisasi dari aritmatika dimana bilangan-bilangan digantikan oleh simbol. Berbagai manuskrip peninggalan masa lalu seperti Papyrus Rhind, tablet-tablet Babylon, dan kitab-kitab lain telah menunjukkan bahwa dasar-dasar Aljabar telah dikembangkan sejak dahulu. Beberapa masalah yang tercantum pada masa itu dapat digunakan sebagai topik bahasan/soal dalam pembelajaran matematika SMP. Diperlukan usaha mencari dan memilih agar sesuai dengan kompetensi dasar yang ada dalam Standar Isi.

Berbagai fakta menarik dalam aljabar di antaranya (1) tafsiran geometris dari bentuk-bentuk aljabar, (2) keterbagian dengan 9, (3) keterbagian dengan 12. Permainan teka-teki aljabar seperti (1) misteri 22 dan (2) tebak umur. Beberapa cara mudah operasi bilangan pada dasarnya merupakan aplikasi dari aljabar. Pada modul ini telah dibahas (1) penguadratan bilangan berakhiran 5, (2) cara mudah menguadratkan bilangan dan (3) aplikasi $(x - y)(x + y)$. Sementara itu paradoks aljabar yang telah dibahas adalah (1) paradoks 1=2 dan (2) paradoks berat gajah = berat nyamuk.

Fakta menarik, teka-teki, aplikasi, dan paradoks yang telah disampaikan dapat digunakan sebagai sarana untuk belajar aljabar. Siswa dapat diajak menyelidiki mengapa teka-teki dan teknik hitung cepat tersebut dapat dilakukan. Paradoks 1 = 2 dan berat gajah = berat nyamuk merupakan sarana yang baik bagi siswa untuk bersikap teliti dalam melakukan operasi aljabar.

Masih banyak topik menarik berkaitan dengan Aljabar. Guru dapat mencarinya melalui internet, membaca buku, atau bertukar pengalaman dengan teman sejawat.

D. Latihan

1. Dalam *Tractatus algorismi* (1307) terdapat masalah sebagai berikut: Kelompokkan 10 buah benda menjadi dua bagian, sehingga banyaknya benda bagian besar dibagi dengan banyaknya benda bagian yang kecil menghasilkan 100. Susunlah bentuk aljabarnya kemudian selesaikan.

2. Kerjakan/berikan penjelasan masalah-masalah dari *The Nine Chapter* yang diberikan di depan.

3. Dua siswa bermain tebak angka. Siswa 1 meminta siswa 2 menulis sebuah bilangan yang dirahasiakan kemudian memintanya untuk melakukan serangkaian operasi sebagai berikut: (1) Tambahkan 2. (2) Kalikan hasilnya dengan 3, (3) kurangi hasilnya dengan 4, (4) kalikan hasilnya dengan 3, (5) tambahkan hasilnya dengan bilangan semula. (6) Selanjutnya siswa 1 meminta siswa 2 untuk menyebutkan hasil terakhir yang diperoleh. Ternyata siswa 1 dapat menebak bilangan yang disembunyikan dengan cara mengurangi hasil terakhir dengan 6 kemudian membaginya dengan 10. Jelaskan mengapa permainan tebak angka tersebut dapat dilakukan.

4. Siswa 1 dan Siswa 2 bermain tebak tanggal lahir, bulan lahir dan umur. Siswa 1 meminta siswa 2 dengan perintah sebagai berikut: (1) Kalikan bilangan bulan

kelahiran dengan 100, (2) tambahkan dengan tanggalnya, (3) kalikan hasilnya dengan 2, (4) tambahkan hasilnya dengan 8, (5) kalikan hasilnya dengan 5, (6) tambahkan hasilnya dengan 4, (7) kalikan jumlahnya dengan 10, (8) tambahkan hasilnya dengan 4, (9) tambahkan hasilnya dengan umurnya.

Selanjutnya siswa 1 meminta siswa 2 untuk menyebutkan hasil akhirnya. Cara yang digunakan siswa 1 untuk menebak tanggal, bulan, dan umur siswa 2 adalah dengan mengurangi hasil terakhir dengan 444, kemudian mengelompokkan masing-masing 2 angka. Dua angka paling kiri menunjukkan bulan, dua angka di tengah menunjukkan tanggal, dan dua angka terakhir menunjukkan umurnya. Jelaskan mengapa permainan tebak-tebakan tersebut dapat bekerja.

E. Umpan Balik

Sampai di sini, Anda telah selesai mempelajari modul ini. Anda dinyatakan berhasil jika mampu mengerjakan dan menjelaskan 75% dari latihan yang diberikan. Jika Anda belum berhasil, pahami lagi masalah yang ada, kemudian cobalah mencari penyelesaiannya. Bekal untuk menyelesaikan soal latihan adalah materi matematika SMP. Untuk itu jangan segan-segan kembali mendalami materi tersebut. Bagi yang sudah bisa menyelesaikan, teruslah mencari aspek-aspek menarik lain dalam aljabar dengan banyak membaca buku, mencari di internet, dan saling bertukar pengalaman dengan teman sejawat.

Kunci Jawaban/Bantuan

1. Bantuan: misalkan dua bagian tersebut a dan b dengan $a > b$. Diperoleh sistem persamaan $10 = a + b$ dan $\frac{a}{b} = 100$.
2. a. Bantuan: misalkan banyak makanan yang dibawa adalah x. Bentuk persamaan yang diperoleh adalah $x - \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{7}x\right) = 5$.
   b. Bantuan: misalkan banyak orang dinyatakan dengan n dan harga seluruh ayam dengan y, diperoleh persamaan $9n = y + 11,$ dan $6n = y - 16$.
3. Misal bilangan yang dirahasiakan x. Bentuk akhir jawaban siswa 1 adalah $3(3(x + 2) - 4) + x$. Dengan mengurangi 6 dan membagi 10 diperoleh

$\frac{1}{10}(3(3(x+2)-4)+x-6)$. Jika disederhanakan diperoleh hasil akhir x, sesuai dengan bilangan yang dirahasiakan.

4. Bantuan: misal tanggal lahir, bulan lahir, dan umur (diasumsikan bilangan umur siswa terdiri dari 2 angka) berturut-turut memiliki bentuk "ab", "cd", dan "um" dengan a, b, c, d, u, m bilangan cacah dan $0 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$, $0 \leq d \leq 9$, $0 \leq u \leq 9$, serta $0 \leq m \leq 9$. Hasil akhir proses tebakan adalah $100000c + 10000d + 1000a + 100b + 444 + 10u + m$. Dengan mengurangi 444 diperoleh bilangan dengan bentuk "$cdabum$". Dua angka paling kiri, dua angka di tengah, dan dua angka terakhir berturut-turut menunjukkan bilangan bulan lahir, tanggal lahir, dan umur.

F. Daftar Pustaka

Albrecht Heeffer. *Source in the History of Algebra: arithmetical and recreational problems*. http://logica.ugent.be/albrecht/problems.php?code=AKH. Diakses pada 11 April 2011.

Alfred S. Posamentier. 2003. *Math Wonders to Inspire Teachers and Students*. Alexandria, Virginia: Association for Supervision and Curriculum Development.

Boreis A. Kordemsky. 1972. *Moscow Puzzles, 359 Mathematical Recreations* (diterjemahkan dari bahasa Russia oleh Albert Parry). New York: Charles Scribner's Sons.

David Burton. 2006. *The History of Mathematics: An Introduction*. McGraw-Hill

Robert C. James. 1992. *Dictionary of Mathematics*. New York: Chapman & Hall.

Roger B. Nelsen. 1993. *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. Washington, DC: Math. Assoc. of America.

Steven Schwartzman. 1994. *The Words of Mathematics*. Washington DC: Mathematical Association of America.

http://www.brusselsjournal.com/node/4131. Diakses pada April 2011.

http://www.history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Babylonian_mathematics.html. Diakses pada April 2011

http://en.wikipedia.org/wiki/Mu%E1%B8%A5ammad_ibn_M%C5%ABs%C4%81_al-Khw%C4%81rizm%C4%AB. Diakses pada April 2011.

http://en.wikipedia.org/wiki/The_Nine_Chapters_on_the_Mathematical_Art. Diakses pada April 2011.

III

PEMANFAATAN MATEMATIKA REKREASI DALAM PEMBELAJARAN ASPEK GEOMETRI

III. Pemanfaatan Matematika Rekreasi dalam Pembelajaran Aspek Geometri

Kompetensi Guru:

1. **Menyediakan berbagai kegiatan pembelajaran untuk mendorong peserta didik mencapai prestasi belajar secara optimal (6.1).**
2. **Menyediakan berbagai kegiatan pembelajaran untuk mengaktualisasikan potensi peserta didik, termasuk kreativitasnya (6.2).**
3. **Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi aritmatika, aljabar, geometri, trigonometri, pengukuran, statistika, dan logika matematika (20.7).**
4. **Mampu menggunakan matematisasi horizontal dan vertikal untuk menyelesaikan masalah matematika dan masalah dalam dunia nyata (20.8).**
5. **Bangga menjadi guru dan percaya pada diri sendiri (14.2).**
6. **Berkomunikasi dengan teman sejawat dan komunitas ilmiah lainnya secara santun, empatik, dan efektif. (17.1).**

Banyak materi-materi menarik dalam geometri dan sejarah perkembangannya yang dapat diberikan kepada siswa sebagai bahan motivasi dalam belajar. Modul ini disusun untuk memberikan wawasan kepada guru tentang hal tersebut. Agar Anda lebih mudah mempelajari modul ini, maka modul ini dibagi menjadi dua kegiatan belajar. Kegiatan belajar pertama berisi tentang sejarah ringkas perkembangan geometri, serta beberapa contoh masalah yang bersesuaian dengan kompetensi dasar di tingkat SMP. Pada kegiatan belajar kedua, diberikan beberapa contoh topik matematika rekreasi seperti paradoks luas, masalah minimalisasi jarak, dan parameterisasi rumus Pythagoras.

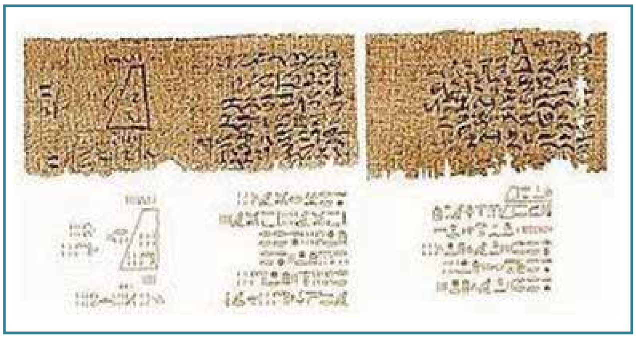
Disarankan untuk mempelajari kegiatan belajar 1 dan 2 secara berurutan. Jika diberikan soal/masalah, usahakan untuk mencermati dan mengerjakan terlebih dahulu sebelum membaca penjelasan yang diberikan (jika ada). Setelah mempelajari modul ini, diharapkan guru memiliki tambahan wawasan tentang perkembangan geometri, beberapa topik matematika rekreasi berkaitan dengan geometri untuk dimanfaatkan dalam proses pembelajaran.

A. Kegiatan Belajar 1: Sejarah Matematika Terkait Geometri

Tahukah Anda, sejak kapan geometri muncul? Pernahkah Anda mendengar bahwa rumus piramida terpancung telah ditemukan 4000 tahun lalu? Sebenarnya banyak bahan dalam sejarah geometri yang dapat dijadikan bahan pembelajaran. Pernahkah anda menemukannya?

1. Perkembangan Geometri

Istilah geometri berasal dari kata Yunani *geo-* (bumi) dan *metron* (pengukuran). Dari istilah ini geometri diindikasikan memiliki hubungan dengan pengukuran tanah. Diyakini geometri digunakan penguasa Mesir untuk menentukan pajak tanaman petani di sepanjang sungai Nil. Untuk menghitung pajak tersebut pegawai pajak harus mampu menentukan luas lahan yang dikerjakan.



Gambar 3.1 Papirus Moscow

Sekitar tahun 2900 SM, piramida Mesir yang pertama dibangun. Pengetahuan tentang geometri merupakan modal dasar untuk membangunnya. Salah satu bukti kemajuan ilmu geometri bangsa Mesir tercatat dalam papyrus Moscow (papirus Golenischev) yang dibuat sekitar 1850 SM. Dalam papyrus ini termuat 25 masalah atau contoh yang salah satu diantaranya adalah rumus untuk mencari volum limas persegi terpancung (*frustum*). Jika a, b, dan h berturut-turut menyatakan panjang sisi alas, sisi atas, dan tinggi limas terpancung, maka volum limas terpancung tersebut adalah $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$. Rumus ini terbukti benar.

Geometri juga berkembang di Babylon. Dalam tablet yang dikenal dengan *Plimpton* 322 termuat 15 baris susunan bilangan yang merupakan tripel Pythagoras. Tiga bilangan asli (a, b, c) dikatakan sebagai tripel Pythagoras jika memenuhi $a^2 + b^2 = c^2$. Meskipun terdapat 4 baris yang salah, namun diyakini hal tersebut hanya dikarenakan kesalahan penulisan.

Gambar 3.2 Plimpton 322.

Thales dari Miletus (624 – 475 SM) diyakini membawa ilmu geometri dari Mesir ke Yunani. Geometri di Yunani mengawali pengembangan prinsip-prinsip geometri yang lebih modern. Thales mempelajari segitiga-segitiga yang sebangun dan menulis bukti-buktinya. Tooh geometri selanjutnya adalah Pythagoras (569 – 475 SM). Pythagoras memiliki suatu perkumpulan yang disebut sebagai perkumpulan Pythagoras (*Pythagoreans*). Perkumpulan ini menekuni matematika, sains, dan filsafat. Kontribusi yang terkenal dari perkumpulan Pythagoras adalah Teorema Pythagoras. Mereka juga menyatakan bahwa jumlah sudut-sudut segitiga sama dengan dua kali sudut siku-siku.

Euclid dari Alexandria (325 – 265 SM) dikenal sebagai "bapak dari geometri modern". Euclid dikenal dengan 13 buku yang berjudul "*The Elements*". Buku ini memuat definisi-definisi fundamental dan aksioma. Euclid mengawali dengan sesuatu yang mendasar, 23 definisi, lima postulat, dan lima *common notions* (aksioma). Dari definisi, postulat dan *common notions* ini Euclid membangun geometri secara keseluruhan. Hingga saat ini, geometri Euclid menjadi dasar bagi geometri yang diajarkan di sekolah dasar dan menengah.

Tokoh Yunani adalah Archimedes dari Syracuse (287 – 212 SM). Selain dikenal sebagai penemu berbagai peralatan mekanis, Archimedes juga memiliki kontribusi terhadap geometri. Dengan menggunakan poligon beraturan, ia berhasil menemukan pendekatan nilai π. Ia juga menemukan hubungan bahwa luas permukaan bola sama dengan empat kali luas lingkaran terbesar pada bola tersebut. Dalam dimensi tiga, Archimedes menemukan ke-13 bangun ruang semi beraturan (*semiregular polyhedra*) sehingga bangun-bangun tersebut disebut juga sebagai *Archimedian Solids*.

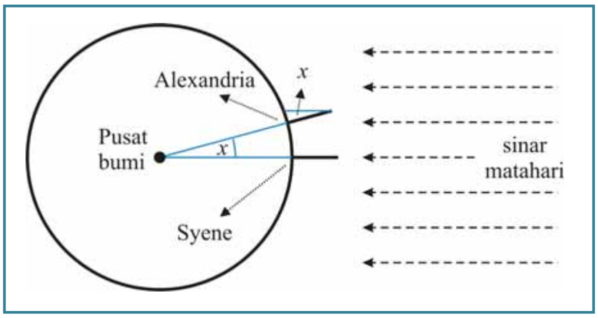
Selain berkembang di Babylon, Mesir, Yunani, geometri juga berkembang di China, India, dan daerah lain. Namun demikian sebelum abad ke-19 geometri hanya berhubungan dengan aksioma yang berhubungan dengan dunia fisik yang ada di bumi. Dalam terminologi modern, geometri tidak selalu membutuhkan representasi fisik. Perkembangan geometri yang lebih maju adalah munculnya geometri non-Euclid. Geometri non-Euclid merupakan geometri yang tidak didasarkan pada postulat-postulat Euclid, termasuk geometri dimana postulat kesejajaran dari Euclid tidak berlaku. Postulat kesejajaran menyatakan bahwa melalui sebuah titik di luar sebuah garis, dapat dibuat satu dan hanya satu garis yang sejajar dengan garis yang diberikan. Tokoh yang mengembangkan geometri non-Euclid di antaranya Janos Bolyai (1802 – 1860), Nikolai Lobachevsky (1792 – 1896), Bernhard Riemann, dll. Dalam perkembangannya, geometri non-Euclid merupakan dasar matematis dari Teori Relativitas Einstein. Materi geometri non-Euclid merupakan materi tingkat lanjut yang tidak diajarkan di sekolah dasar dan sekolah menengah.

2. Topik Geometri dari Naskah-Naskah Kuno.

Ternyata pada tahun 230 SM, manusia berhasil menentukan keliling bumi. Siapakah orang tersebut, dan bagaimana caranya? Berapakah nilai π? Sejak kapan simbol tersebut digunakan? Di antara masalah dalam naskah-naskah kuno, adakah yang dapat digunakan sebagai bahan pembelajaran geometri di SMP?

a. Mengukur Keliling Bumi

Pada masa sekarang, dengan teknologi yang maju, mengukur keliling bumi bukanlah hal yang sulit. Dapatkah anda membayangkan, bagaimana mengukur keliling bumi pada masa sebelum masehi? Eratosthenes, seorang matematikawan Yunani, sekitar tahun 230SM berhasil mengukur keliling bumi dengan tingkat kesalahan kurang dari 2%. Untuk melakukan hal tersebut, Eratosthenes menggunakan hubungan sudut dalam berseberangan pada garis-garis yang sejajar.



Gambar 3.3 Mengukur keliling bumi.

Sebagai pengelola perpustakaan di Alexandria, Eratosthenes memiliki akses terhadap catatan kejadian-kejadian sepanjang tahun. Ia menemukan bahwa pada waktu tertentu dalam satu tahun, di kota Syene (sekarang bernama Aswan), sinar matahari tepat di atas kepala. Akibatnya, pada sumur yang dalam, sinar matahari jatuh tepat di dasar sumur tanpa ada bayangan. Pada saat yang sama, di kota Alexandria, sinar matahari membentuk bayangan. Ketika hari yang demikian datang lagi, ia mengukur sudut yang dibentuk oleh sinar matahari terhadap benda yang dipasang tegak (lihat gambar 3.3). Ia mendapati, besar sudut tersebut sekitar 7° 12', atau $\frac{1}{50}$ dari 360°. Dengan mengasumsikan sinar matahari yang mengenai bumi membentuk garis-garis sejajar, maka sudut pada pusat bumi haruslah sama dengan 7° 12' (perhatikan ilustrasi gambar). Karena Syene dan Alexandria terletak pada garis bujur yang hampir sama, kemudian Eratosthenes menurunkan bahwa jarak antara kedua kota tersebut $\frac{1}{50}$ keliling bumi. Sementara itu telah diketahui bahwa jarak kedua kota adalah 5.000 *stadia* (satuan pengukuran yang ada saat itu). Selanjutnya Eratosthenes menyimpulkan bahwa keliling bumi adalah 250.000 stadia, atau dalam ukuran sekarang 24.660 mil. Hasil ini sangat dekat dengan perhitungan modern.

b. Nilai π

Berapakah nilai π? Nilai eksak π tidak pernah ditemukan, yang dapat dihitung adalah hanyalah pendekatannya. Berikut ini nilai pendekatan π untuk 50 tempat desimal.

$$\pi = \mathbf{3.14159265358979323846264338327950288419716939937510}\ldots$$

Rekor terbaru untuk pendekatan nilai π telah mencapai 51,539,600,000 angka di belakang koma. (http://www.cecm.sfu.ca/~jborwein/Kanada_50b.html. Diakses April 2011).

Ketika manusia menemukan roda (atau benda-benda berbentuk lingkaran), penentuan keliling lingkaran barangkali mulai digunakan. Ada kemungkinan mereka membutuhkan ukuran berapa jauh jarak yang bisa ditempuh jika roda berputar sekali. Cara termudah untuk menentukan hal ini adalah dengan memberi tanda pada roda, kemudian memutar tepat satu kali (tanpa selip) kemudian mengukur jarak yang ditempuh. Cara kedua adalah dengan melilitkan tali ke sekeliling roda kemudian mengukur panjangnya. Dibandingkan dengan mengukur keliling, mengukur diameter lingkaran tentunya jauh lebih mudah. Orang tinggal mengambil batang yang lurus, menempelkan ke lingkaran kemudian menandainya. Ternyata hasil bagi antara keliling lingkaran dengan diameternya memiliki nilai yang tetap. Nilai ini dilambangkan dengan π. Simbol ini diperkenalkan pertama kali oleh matematikawan Inggris William Jones pada tahun 1706 yang kemudian juga diadopsi oleh Euler pada tahun 1737.

1) Nilai π dalam Papirus Rhind.

Dalam Papirus Rhind yang ditulis oleh Ahmes dinyatakan:

Jika kita melukis persegi dengan panjang sisi $\frac{8}{9}$ *kali diameter suatu lingkaran, maka luas persegi tersebut sama dengan luas lingkaran.*

Meskipun dari pernyataan tersebut tidak disebutkan nilai π secara langsung, namun dengan menggunakan rumus luas lingkaran dan persegi yang telah kita kenal saat ini, dimungkinkan untuk menentukannya. Sebagai latihan bersama siswa , dengan memisalkan d sebagai diameter lingkaran, tentukan nilai π. Anda akan mendapatkan $\pi = \frac{256}{81} = 3{,}16049$ .... Sebuah pendekatan yang cukup baik untuk saat itu.

2) Nilai π oleh Archimedes dan Heron

Dalam buku Archimedes *Measurement of the Circle*, terdapat hubungan antara keliling suatu lingkaran dengan luasnya. Pada buku tersebut terdapat tiga proposisi:

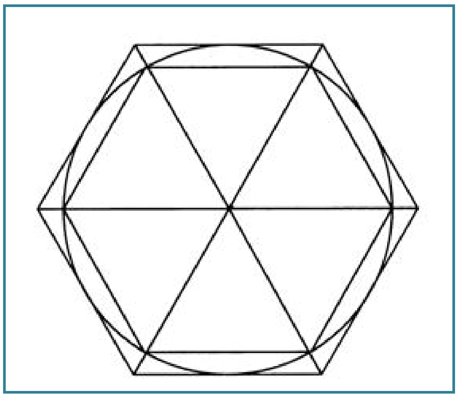
a) Luas suatu lingkaran sama dengan luas segitiga siku-siku dimana kaki-kaki siku-sikunya berturut-turut sama dengan jari-jari dan keliling lingkaran.

b) Perbandingan luas lingkaran terhadap persegi yang panjang sisinya sama dengan diameter lingkaran mendekati 11:14. (Dari pernyataan ini, diperoleh hasil bagi keliling dengan diameter lingkaran $\pi = \frac{22}{7}$).

c) Keliling suatu lingkaran kurang dari $3\frac{1}{7}$ kali diameternya tetapi lebih dari $3\frac{10}{71}$ kali diameternya.

Archimedes mencari pendekatan nilai π dengan cara menjepit lingkaran dengan poligon beraturan di dalam dan diluarnya.

Diawali dengan menggunakan heksagon beraturan, Archimedes dapat menentukan bahwa luas lingkaran berada di antara luas heksagon dalam dan luas heksagon luar. Bagaimana Archimedes Ia kemudian memperbanyak sisi poligon beraturan menjadi 12, 24, 48, dan terakhir 96 sisi. Dengan cara ini Archimedes mendapatkan nilai π.



Gambar 3.4 Lingkaran yang dijepit poligon dari dalam dan luar.

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Pendekatan nilai π yang cukup bagus juga ditemukan oleh Heron dari Alexandria (75 – 110 M) dengan nilai

$$\frac{211.872}{67.441} < \pi < \frac{195.882}{62.351}$$

Dalam bentuk desimal, $3{,}141590 \ldots < \pi < 3{,}141601 \ldots$. Pendekatan ini lebih baik daripada pendekatan nilai π oleh Archimedes.

3) Nilai π di China dan Arab

Secara terpisah di China, Liu Hui pada tahun 263 juga menggunakan poligon beraturan untuk menentukan nilai π. Tidak seperti Archimedes, Liu Hui hanya mengunakan lingkaran dalam.

Nilai pendekatan π oleh Liu Hui adalah

$$\frac{3927}{1250} = 3{,}1416$$

Nilai pendekatan yang lebih akurat diberikan oleh Zu Chongzhi (429 – 500), ia mendapatkan nilai

$$\pi = \frac{355}{113} = 3{,}1415929203 \ldots$$

Sementara itu, Giyath al-Din al-Kashi (meninggal 1429) astronom dan matematikawan Persia dalam buku "*Treatise on the Circumference*" didapatkan nilai

$$\pi = 3{,}14159265358979324.$$

Pendekatan ini benar sampai 16 tempat desimal.

4) Nilai π setelah Setelah Abad Ke- 16.

Jika sebelumnya nilai π dicari menggunakan objek-objek geometris, maka mulai abad ke-16 pencarian nilai π berkembang dengan menggunakan cara yang berbeda. Untuk mendapatkan hal ini, dibutuhkan matematika tingkat lanjut yang tidak dipelajari di sekolah menengah. Berikut beberapa metode untuk mendapatkan nilai π.

James Gregory pada tahun 1671 dan Gottried Leibniz pada tahun 1674 menemukan sebuah persamaan yang kemudian dikenal sebagai Deret Leibniz – Gregory. Deret ini menghasilkan nilai π dengan sangat lambat. Dibutuhkan 600 suku hanya untuk mendapatkan nilai π dengan ketelitian dua angka di belakang koma.

$$\frac{\pi}{3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots \qquad \text{(Deret Leibniz – Gregory)}$$

Leonhard Euler (1707 – 1783), seorang matematikawan Swiss merupakan matematikawan terbesar sepanjang sejarah.

Ia memiliki kontribusi besar dalam berbagai cabang matematika yang berbeda. Pada tahun 1734 Euler menemukan deret yang kemudian dikenal sebagai Deret Euler.

Berikut ini dua di antara deret yang ditemukan.

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \qquad \text{(Deret Euler)}$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots \qquad \text{(Deret Euler)}$$

Francois Viete (1540 – 1603) merupakan pengacara, politikus, diplomat dan matematikawan amatir. Kontribusinya dalam matematika adalah menyatakan π sebagai hasil kali tak hingga suku-suku yang hanya memuat angka 2 dan tanda akar.

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\ldots \qquad \text{(Persamaan Viete)}$$

John Wallis (1616 – 1702), matematikawan Inggris merupakan orang kedua yang berhasil menemukan persamaan untuk π dalam bentuk perkalian sebanyak tak hingga suku-suku. Persamaannya dipublikasikan tahun 1655. Wallis merupakan matematikawan pertama yang menggunakan "∞" sebagai lambang tak hingga.

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\cdot\frac{9\cdot9}{8\cdot10}\cdot\ldots \qquad \text{(Persamaan Wallis)}$$

$$\frac{\pi}{3}=\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\cdot\frac{12\cdot12}{11\cdot13}\cdot\frac{18\cdot18}{17\cdot19}\cdot\ldots \qquad \text{(Persamaan Wallis)}$$

Deret di atas merupakan beberapa contoh cara untuk mendapatkan nilai π. Anda dapat mencoba mengeksplorasi dengan menggunakan program aplikasi *spreadsheet* (misal Microsoft Excel). Gunakan perintah "=Pi()" untuk mendapatkan nilai π dalam Excel.

3. Soal-soal dari Sejarah Geometri

Berikut ini beberapa contoh masalah/pernyataan yang terdapat dalam berbagai naskah peninggalan masa lalu. Beberapa pernyataan dan masalah/pernyataan tersebut dapat digunakan dalam pembelajaran matematika SMP.

a. Dalam papyrus Rhind terdapat masalah: Jika sebuah piramida (persegi) memiliki tinggi $93\frac{1}{3}$ *cubit* dan panjang sisi alas 140 *cubit*, berapakah *seked*? Catatan: misalkan segitiga samakaki memiliki alas s dan tinggi h, maka $seked\ =\frac{s}{2h}$.

b. Bangsa Babylon biasa menentukan luas lingkaran sebagai seperduabelas kuadrat kelilingnya. Dari sini dapat diturunkan nilai π = 3.

c. Pada abad ke-6, matematikawan India Aryabhata menentukan luas lingkaran dengan cara: setengah keliling lingkaran dikalikan dengan setengah diameternya merupakan luas lingkaran tersebut.

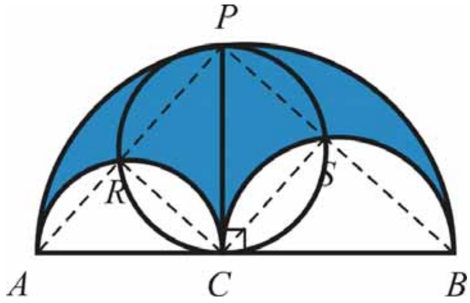
d. Dalam papyrus Moscow dinyatakan, Jika a, b, dan h berturut-turut menyatakan panjang sisi alas, sisi atas, dan tinggi limas terpancung, maka volum limas terpancung tersebut adalah $V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$.

e. Bangsa Babylon mengetahui rumus untuk mencari luas piramida terpancung dengan tinggi h, panjang sisi alas dan sisi atas berturut-turut a dan b.

$$V = h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$$

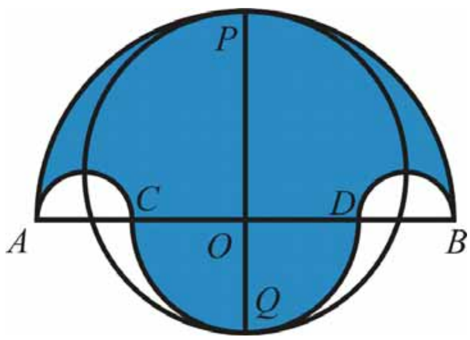
f. Dapat ditunjukkan bahwa rumus tersebut ekivalen dengan rumus yang terdapat pada Papyrus Moscow.

g. Dalam "*Book of Lemmas*" (koleksi 13 proposisi geometri), Archimedes memperkenalkan gambar yang dinamakan sebagai arbelos (pisau tukang sepatu) seperti pada gambar 3.5. AB diameter setengah lingkaran, C pada AB, kemudian dibuat setengah lingkaran dengan diameter AC dan CB. Daerah antara setengah lingkaran berdiameter AB dan dua setengah lingkaran berdiameter AC dan CB dinamakan sebagai arbelos. Tunjukkan bahwa jika PC garis tegak lurus AB, maka luas daerah arbelos sama dengan luas daerah lingkaran berdiameter PC.



Gambar 3.5 Arbelos

h. Dalam "*Book of Lemmas*" terdapat bangun geometri yang dinamakan "*salinon*" atau *salt cellar* (gudang garam). Misalkan $AC = DB$ pada AB, AB diameter suatu lingkaran, kemudian dibuat setengah lingkaran dengan AC, DB sebagai diameter pada bagian yang memuat setengah lingkaran yang diberikan, selanjutnya dibuat juga setengah lingkaran berdiameter CD bada bagian yang tidak memuat setengah lingkaran mula-mula (lihat gambar 3.6). Daerah yang dibatasi oleh keempat setengah lingkaran dinamakan sebagai *salinon*. Tunjukkan bahwa jika

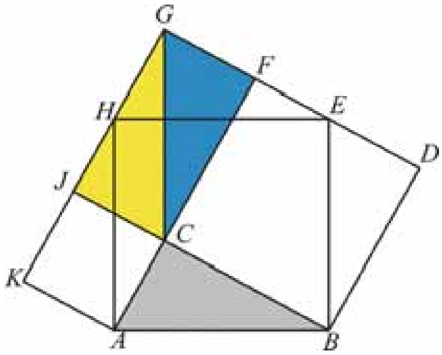


Gambar 3.6 Salinon.

PQ sumbu simetri dari *salinon*, maka luas daerah *salinon* sama dengan luas daerah lingkaran yang berdiameter PQ.

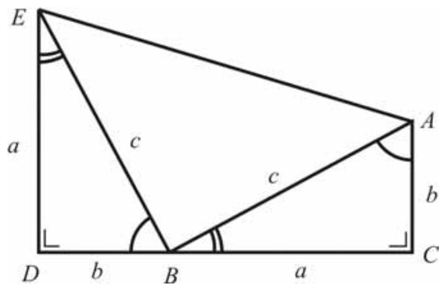
i. Dalam "*Nine Chapters*" termuat masalah: diberikan segitiga siku-siku dengan *kou* (lebar) 6 dan *ku* (tinggi) 8, carilah lingkaran terbesar yang dapat dibuat di dalam segitiga.

j. Tsabit-Ibnu-Qurra (sekitar 826-901 M) memberikan sebuah bukti teorema Pythagoras dengan menggunakan perhitungan luas daerah seperti pada Gambar 3.7. Dengan bantuan gambar tersebut, bagaimana Anda menjelaskan pembuktiannya?



Gambar 3.7 Bukti Teorema Pythagoras oleh Tsabit-ibnu-Qurra

k. James A. Garfield (1831-1881) salah seorang presiden Amerika Serikat, memiliki kontribusi dalam pembuktian teorema Pythagoras. Pada gambar 3.8 diberikan segitiga siku-siku ABC.



Gambar 3.8 Bukti Teorema Pythagoras oleh Garfield

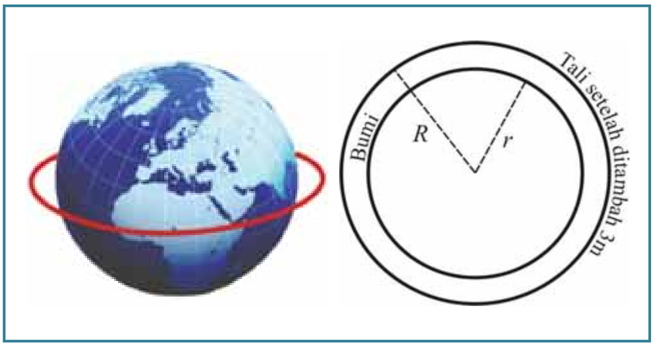
Perpanjang BC sampai D dengan $AB = AC = b$. Lukis $DE = CB = a$ dan tegaklurus terhadap BD. Segitiga ACB dan EBD kongruen. Luas trapesium $ACDE$ sama dengan dua kali luas segitiga ABC ditambah luas segitiga ABE. Dari sini dapat dibuktikan teorema Pythagoras yang berlaku untuk segitiga ABC.

B. Kegiatan Belajar 2: Topik Matematika Rekreasi dalam Geometri

Salah satu peninggalan Babylon memuat tripel-tripel Pythagoras. Tidak sembarangan, salah satu tripel yang mereka berikan adalah (12709, 13500, 18541). Dapatkah Anda menentukan dengan cepat tripel-tripel Pythagoras? Selain membahas hal tersebut, pada bagian ini diberikan materi mengikat bumi, paradoks luas dan masalah pipa air.

1. Mengikat Bumi

Penjelasan di bawah ini dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa intuisi tidak selalu benar. Berikan masalah berikut ke siswa. Biarkan mereka berpikir menemukan jawaban berdasarkan intuisi.



Gambar 3.9

Diasumsikan bumi sebagai bola sempurna, kemudian diikat dengan tali erat-erat di sepanjang katulistiwa. Keliling bumi adalah 40.075 km, maka sepanjang itulah tali yang dibutuhkan. Misalkan tali tersebut ditambah dengan 3 meter kemudian seluruh bagian tali diangkat sehingga ketinggian tali di semua tempat sama, dapatkah kamu menerobos melewati di bawahnya tanpa menyentuh tali?

Sebagian besar siswa akan menjawab "tidak". Selanjutnya ajak mereka menyelidiki secara matematis. Misalkan K menyatakan keliling bumi, r jari-jari bumi, dan R menyatakan jari-jari bumi setelah tali diperpanjang 3 m, maka panjang tali menjadi

$(K + 3)$.

Dengan menggunakan rumus keliling diperoleh

$$K = 2\pi r \text{ atau } r = \frac{K}{2r}$$

dan

$$K + 3 = 2\pi R \quad \text{atau} \quad R = \frac{K+3}{2\pi}$$

Lebar celah antara bumi dan tali merupakan selisih antara R dan r.

$$R - r = \frac{K+3}{2\pi} - \frac{K}{2\pi} = \frac{3}{2\pi} \approx 0{,}477 \ldots$$

Dengan demikian lebar celah antara bumi dan tali adalah 47,7 cm. Celah yang cukup lebar bagi anak untuk merangkak di bawahnya. Materi ini dapat diberikan kepada siswa ketika mereka belajar tentang lingkaran.

2. Parameterisasi Rumus Pythagoras

Teorema Pythagoras menyatakan, kuadrat sisi miring (hipotenusa) suatu segitiga siku-siku sama dengan jumlah kuadrat sisi siku-sikunya. Dalam pembahasan sebelumnya telah disinggung tripel Pythagoras yang terdapat dalam tablet Plimpton 322. Diperkirakan bangsa Babylon telah mengenal metode untuk mencari tripel Pythagoras. Pertanyaan yang muncul adalah, adakah rumus untuk menghasilkan tripel-tripel ini? Perhatikan penjelasan berikut:

$(u^2 + v^2)^2 = u^4 + v^4 + 2u^2v^2$ ………………. (1)

$(u^2 - v^2)^2 = u^4 + v^4 - 2u^2v^2$ ………………. (2)

Dengan mengeliminisi $u^4 + v^4$ dari kedua persamaan di atas diperoleh

$$(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$$

Dari persamaan terakhir, dengan mengambil u, v bilangan asli dan $u > v$, dapat dibentuk tripel bilangan asli (a, b, c) dengan

$$a = u^2 - v^2,\ b = 2uv, \text{ dan } c = u^2 + v^2$$

yang memenuhi $a^2 + b^2 = c^2$.

Contoh: untuk $u = 2, v = 1$ diperoleh $(a, b, c) = (3, 4, 5)$.

Kembali ke tablet Plimpton 322, dengan mengecualikan tripel yang salah, berikut ini nilai-nilai (u, v) untuk menghasilkan tripel Pythagoras (a, b, c).

Baris	u	v
1	12	5
2	64	27
3	75	32
4	125	54
5	9	4

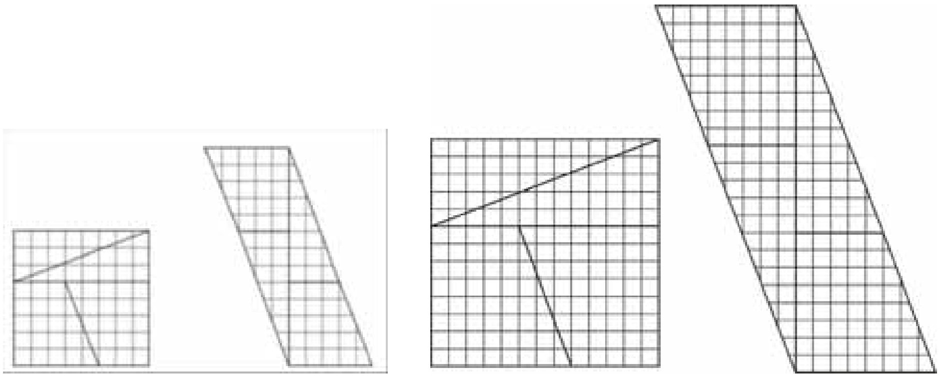
Baris	u	v
6	20	9
7	54	25
8	32	15
9	25	12
10	81	40

Baris	u	v
11	2	1
12	48	25
13	15	8
14	50	27
15	9	5

Cobalah untuk mensubstitusikan u dan v pada tabel di atas untuk mendapatkan tripel Pythagoras yang tercantum dalam Plimpton 322.

3. Paradoks Luas, Apakah 64=65?

Masihkah Anda ingat barisan bilangan Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … ? Cobalah mengambil 3 suku berurutan, misal 3, 5, 8, kemudian buat potongan persegi pada kertas berpetak dengan ukuran 8×8, potong menurut garis-garis yang diberikan (perhatikan komposisi sisi-sisi bangun yang baru, 3, 5, dan 8). Dengan menganggap luas 1 petak sebagai 1 satuan luas, maka luas persegi tersebut 64 satuan. Ketika persegi yang dipotong-potong tersebut disusun ulang menjadi bentuk yang lain di sebelah kanan, berapakah luasnya? Dengan menggunakan rumus luas jajargenjang, diperoleh luas $\text{alas} \times \text{tinggi} = 5 \times 13 = 65$ satuan. Tanyakan kepada siswa , manakah luas yang benar, 64 atau 65?



Gambar 3.10 Paradoks Luas

Cobalah juga mengambil tiga suku berurutan yang lain, misal 5, 8, 13. Sediakan petak-petak 13×13 kemudian potong menurut komposisi 5, 8, 13 seperti pada gambar 3.10. Luas daerah mula-mula adalah 169, tetapi ketika dibentuk menjadi bangun lain seperti gambar sebelah kanan, dengan menggunakan rumus luas jajargenjang diperoleh luas $\text{alas} \times \text{tinggi} = 8 \times 21 = 168$. Mengapa hal ini dapat terjadi? Manakah ukuran luas yang benar, 169 atau 168 ?

Teka-teki di atas menunjukkan bahwa mengambil kesimpulan hanya berdasarkan apa yang dilihat terkadang dapat menyesatkan. Perbedaan luas pada kedua kasus di atas terjadi karena siswa melihat bahwa bentuk di sebelah kanan adalah jajargenjang. Dua sisi pada ‘jajargenjang’ tersebut bukan garis lurus, melainkan terdapat belokan di pertemuan kedua potongan. Anda dapat memeriksanya secara visual dengan penggaris atau dengan menggunakan prinsip kemiringan (gradien) suatu garis. Karena bangun tersebut bukan jajargenjang, tentu saja akan diperoleh hasil yang salah ketika siswa menghitung luasnya dengan rumus luas jajargenjang.

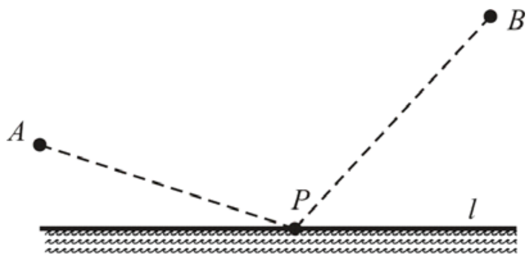
Jika di atas telah dicoba untuk komposisi (3, 5, 8) dan (5, 8, 13) lalu bagaimana dengan tiga suku berurutan yang lain? Apakah nanti akan menghasilkan selisih 1? Jawabanya adalah ya. Dasar dari teka-teki di atas adalah teorema Cassini yang dibuat oleh Giovanni Cassini (1625 – 1712). Teorema tersebut menyatakan

$$|(F_n)^2 - F_{n-1} \times F_{n+1}| = 1$$

Dengan F_n suku ke-n barisan bilangan Fibonacci. Pada teka-teki di atas, F_n menyatakan luas persegi, sedangkan $F_{n-1} \times F_{n+1}$ menyatakan luas 'jajargenjang'. Anda dapet menginformasikan bahwa siswa dapat membuktikan teorema ini setelah mereka belajar tentang induksi matematika di SMA.

4. Masalah Pipa Air

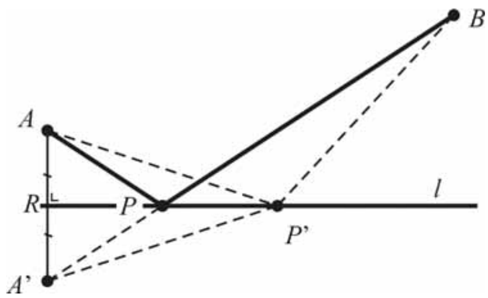
Seorang petani memiliki dua petak sawah A dan B yang lokasinya jauh dari saluran irigasi. Agar sawahnya dapat lebih sering ditanami, ia berniat memasang pompa dan pipa untuk mengalirkan air dari saluran irigasi ke sawah-sawahnya.



Gambar 3.11 Problem pipa air

Pompa tersebut akan diletakkan di pinggir saluran irigasi. Karena lubang pengeluaran pompa ada 2, ia berniat memasang pipa dengan susunan seperti huruf 'V' (lihat gambar). Masalah yang timbul adalah, misalkan P menyatakan posisi pompa, dimanakah P agar pipa yang dibutuhkan sependek mungkin?

Beri kesempatan kepada siswa untuk menemukan posisi titik P dengan cara mereka sendiri. Mungkin mereka akan mencoba menentukan beberapa posisi titik P, mengukur panjang AP dan PB, menjumlahkan dan kemudian membandingkannya.



Gambar 3.12 Penyelesaian problem pipa air.

Bagaimana solusi yang benar-benar tepat? Misalkan tepi saluran dinyatakan sebagai garis l, Cerminkan titik A terhadap l, misalkan cerminnya adalah A' kemudian tarik garis $A'B$. Garis ini akan memotong l di suatu titik. Di titik inilah petani harus meletakkan pompa. Bagaimana penjelasannya? Perhatikan diagram di atas, karena A' merupakan cermin dari A terhadap garis l maka $AP = A'P$, sehingga $AP + PB = A'P + PB = A'B$.

Untuk menunjukkan bahwa $AP + PB$ minimum, dimisalkan ada titik lain, namakan titik P' sehingga $AP' + P'B < AP + PB$. Karena A' cermin dari A terhadap l, maka $AP' + P'B = A'P + P'B$. Pandang segitiga $A'P'B$. Dalam segitiga berlaku sifat panjang suatu sisi segitiga selalu lebih kecil daripada jumlah dua sisi yang lain. Akibatnya berlaku $A'B < AP' + P'B$. Karena $A'B = AP + PB$, maka $AP + PB < AP' + P'B$.

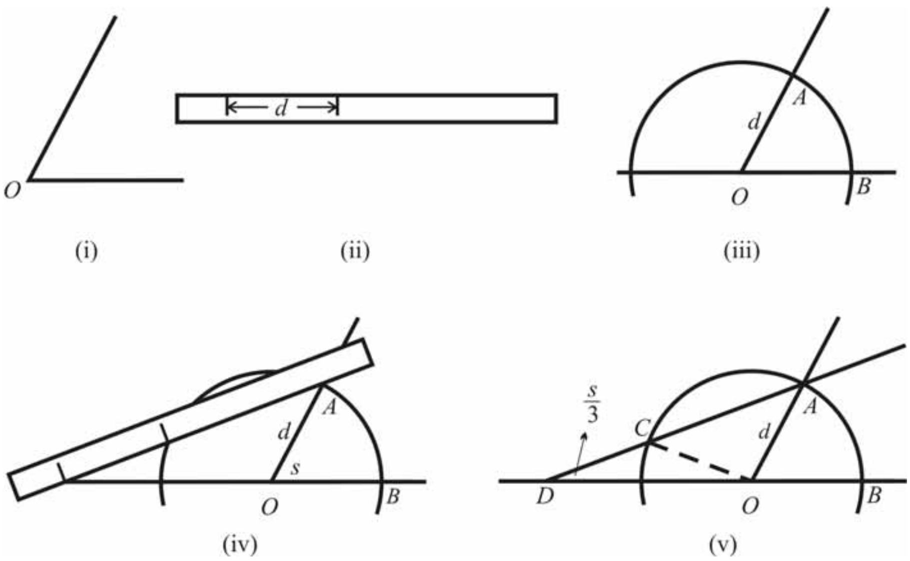
Dari sini ternyata kontradiksi dengan pemisalan bahwa $AP' + P'B < AP + PB$. Dengan demikian, pemisalan salah, yang benar adalah tidak ada titik lain selain P sehingga $AP + PB$ minimum.

Masalah ini dapat digunakan unuk menunjukkan kepada siswa bahwa matematika bermanfaat dalam kehidupan. Pemahaman tentang sifat-sifat segitiga dibutuhkan untuk menjelaskan cara di atas.

5. Membagi Sudut Menjadi Tiga Bagian Sama Besar (*Trisecting Angle*)

Dengan menggunakan jangka dan penggaris, membagi ruas garis menjadi dua bagian sama panjang adalah hal yang mudah. Penggaris dalam hal ini adalah alat untuk membuat garis, sama sekali tidak memuat tanda atau ukuran. Membagi sama panjang suatu ruas garis menjadi 3, 4, 5 bagian, meskipun sedikit lebih kompleks, tetap masih bisa dilakukan. Membagi sebarang sudut menjadi dua sama besar juga dapat dilakukan. Namun demikian, untuk membagi sebarang sudut menjadi tiga bagian (yang dimaksud pada pembahasan ini adalah sudut sama besar) menjadi masalah tersendiri. Masalah ini tidak terselesaikan oleh matematikawan Yunani disamping dua masalah yang lain yaitu mengonstruksi kubus dengan volum dua kali kubus yang diberikan, dan melukis persegi dengan luas sama dengan luas lingkaran yang diberikan.

Tidak berhasil membagi tiga suatu sudut dengan jangka dan penggaris, Archimedes berhasil melakukan dengan cara lain. Ia menggunakan jangka dan penggaris bertanda (diberi tanda). Misalkan gambar (i) merupakan sudut yang akan dibagi dan gambar (ii) penggaris yang diberi tanda (marka) dengan jarak d.



Gambar 3.13 Membagi sudut menjadi tiga.

Langkah-langkah: (1) Buat busur dengan jari-jari d, sehingga memotong kaki-kaki sudut di A dan B. (2) Perpanjang BO hingga memotong busur (gambar iii). (3) Tempelkan penggaris bermarka sehingga salah satu marka terletak pada garis OB, marka yang lain pada busur dan perpanjangan penggaris menempel di A (gambar iv). Tarik garis pada sisi penggaris yang melalui titik A, sehingga menjadi seperti gambar (v). Dapat dibuktikan bahwa besar $\angle CDO$ sepertiga besar $\angle AOB$.

C. Ringkasan

Geometri telah berkembang karena kebutuhan manusia. Di Mesir, geometri digunakan untuk keperluan pengukuran tanah dan pembangunan Piramid.

Peninggalan geometri di Mesir dapat dilacak dari papyrus. Selain Mesir, masyarakat Babylon juga memiliki peran dalam sejarah geometri. Berbagai masalah geometri ditemukan dalam tablet-tablet peninggalan mereka yang telah berusia ribuan tahun. Geometri di Yunani diyakini berkembang karena jasa Thales. Ia membawa ilmu geometri dari Mesir ke Yunani. Tokoh-tokoh geometri Yunani yang lain adalah Pythagoras, Euclid, dan Archimedes. Sumbangan besar dari geometri Yunani adalah buku "*The Elements*". Buku karya Euclid ini menjadi dasar geometri yang diajarkan di sekolah dasar dan sekolah menengah hingga saat ini. Geometri tidak hanya berkembang di Barat, tetapi geometri juga berkembang di Timur seperti China dan India.

Berbagai masalah, pernyataan, dan fakta peninggalan masa lalu seperti bagaimana Eratosthenes mengukur keliling bumi, bagaimana manusia menentukan nilai π, fakta tentang *salinon* dan *arbelos*, berbagai bukti teorema Pythagoras, dan lain-lain dapat dijadikan sebagai bahan pembelajaran di kelas. Untuk itu perlu dipilih topik-topik yang berhubungan dengan standar kompetensi dan kompetensi dasar yang terdapat dalam Standar Isi.

Beberapa masalah geometri memiliki penyelesaian yang tidak terduga dan kadang-kadang tidak sesuai dengan intuisi. Contoh kasus ini adalah masalah mengikat bumi dimana hanya dengan menambah 3 meter, tali yang semula mengikat erat bumi kemudian diangkat dengan ketinggian sama maka seorang anak dapat menerobos masuk tanpa menyentuh tali.

Keberadaan Plimpton 322 yang memuat tripel Pythagoras dengan nilai mencapai ribuan menimbulkan dugaan bahwa mereka mengenal cara untuk menentukan tripel-tripel tersebut.

Jika bangsa Babylonb ribuan tahun yang lalu mampu menemukan tripel Pythagoras, dapatkah kita menemukan dengan mudah? Melalui parameterisasi rumus Pythagoras kita dapat menemukan tripel Pythagoras dengan cepat.

Paradoks 64 = 65, menuntut pemahaman siswa tentang luas bangun datar. Siswa mendapatkan pengalaman bahwa dalam matematika, tampilan fisik kadang-kadang menyesatkan. Hal ini melatih siswa untuk berpikir kritis. Siswa juga diberi tantangan tentang teorema Cassini yang baru dapat mereka buktikan setelah mempelajari matematika di SMA. Secara tidak langsung, siswa yang tertantang akan serius dalam mempelajari matematika selanjutnya agar dapat membuktikannya kelak.

Melalui masalah pipa air, siswa akan merasakan manfaat langsung geometri bagi manusia. Melalui sifat pencerminan dan konsep segitiga masalah meminimalkan panjang pipa dapat diselesaikan.

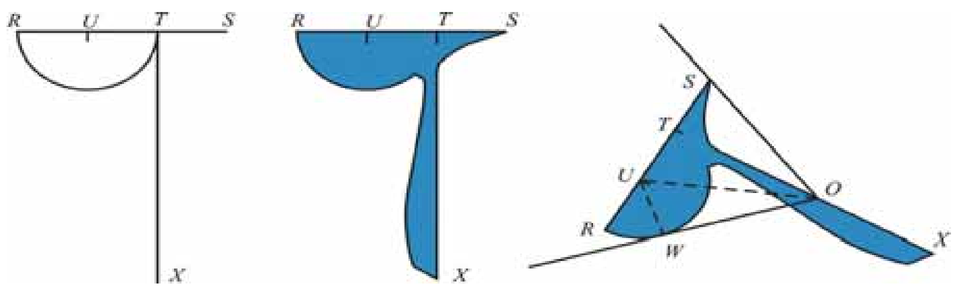
Masih banyak topik menarik berkaitan dengan geometri. Untuk itu guru harus rajin membaca, mencari di internet, bertukar pengalaman dengan teman sejawat, dan kemudian memilih materi yang dapat diberikan di SMP disesuaikan dengan standar kompetensi dan kompetensi dasar yang berlaku.

D. Latihan

1. Kerjakan/jelaskan/buktikan masalah pada topik bahasan soal-soal dari sejarah geometri dalam bagian B di atas.

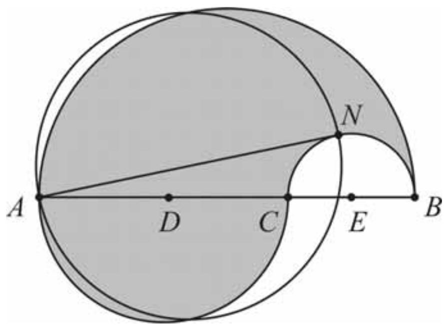
2. Salah satu peralatan untuk membagi sudut menjadi tiga bagian sama besar diberi nama sebagai *kapak tomahawk*. Konstruksi dasar kapak ini berupa ruas garis RS yang terbagi menjadi tiga bagian oleh titik U dan T. Lukis setengah lingkaran berpusat di U, jari-jari UT dan lukis garis TX tegaklurus terhadap RS. Peralatan yang sudah jadi terlihat dalam gambar di bawah.

   Untuk membagi tiga $\angle AOB$, pasang alat sedemikian hingga busur menyinggung AO, titik S terletak pada BO, dan titik O terletak pada garis TX.

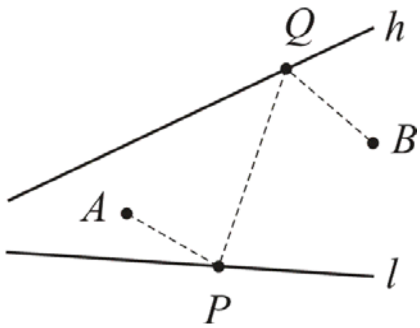


   Buktikan bahwa besar $\angle BOT$ sepertiga besar $\angle BOA$.

3. Diberikan setengah lingkaran berdiameter AB, AC, dan CB dengan posisi seperti pada gambar. Diberikan juga AN, menyinggung setengah lingkaran berdiameter CB. Buktikan bahwa luas daerah yang diarsir sama dengan luas daerah lingkaran berdiameter AN.



4. Dengan menggunakan prinsip refleksi, tentukan posisi P pada garis l dan R pada garis h agar diperoleh panjang $AP + PQ + QB$ minimum.



E. Umpan Balik

Anda telah selesai mempelajari bagian modul ini. Anda dinyatakan berhasil jika mampu mengerjakan dan menjelaskan 75% dari latihan yang diberikan. Jika Anda belum berhasil, pahami lagi masalah baru kemudian mencari penyelesaiannya. Bekal untuk menyelesaikan soal latihan adalah materi matematika SMP. Untuk itu jangan segan-segan kembali mendalami materi tersebut. Bagi yang sudah bisa menyelesaikan, teruslah mencari aspek-aspek menarik lain dalam geometri dengan banyak membaca buku, mencari di internet, dan saling bertukar pengalaman dengan teman sejawat.

Kunci Jawaban/Petunjuk:

1. a. cukup jelas.

   b. Dari $Luas = \pi r^2$ dan $Luas = \frac{1}{12}(2\pi r)$, diperoleh $\pi = 3$.

   c. $Luas = \frac{1}{2}(2\pi r) \times r = \pi r^2$. Cara sesuai dengan perhitungan modern.

   d. Buat sketsa limas utuh, kemudian dipotong bagian atasnya, sehingga volum limas terpancung = volum limas besar – volum limas kecil. Tinggi limas kecil dapat dicari melalui kesebangunan dua segitiga.

   e. Gunakan manipulasi aljabar.

f. $L_{arbelos} = \frac{1}{2}\pi\left(\left(\frac{AC+AB}{2}\right)^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2 - \left(\frac{CB}{2}\right)^2\right) = \frac{\pi}{4}AC.CB$. Karena segitiga APB siku-siku di P, maka berlaku $AC.CB = CP^2$, sehingga $L_{arbelos} = \frac{\pi}{4}AC.CB = \frac{\pi}{4}CP^2 = \pi\left(\frac{CP}{2}\right)^2 = Luas\ lingkaran\ berdiameter\ CP.$

g. Misal L_1 dan L_2 berturut-turut menyatakan luas salinon dan lingkaran berdiameter PQ. $AO = OP = OB,\ OQ = OC = OD, AC = OP - OQ$.

$L_1 = \frac{1}{2}\pi\left(OP^2 + OQ^2 - 2\left(\frac{AC}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\pi\left(OP^2 + OQ^2 - \frac{(OP-OQ)^2}{2}\right) = \frac{1}{4}\pi(OP + OQ)^2 = \pi\left(\frac{OP+OQ}{2}\right)^2 = L_2.$

h. Lingkaran terbesar merupakan lingkaran dalam segitiga.

i. Segitiga ABC siku-siku di C. $ACJK$ dan $BCFD$ persegi. Daerah yang tidak diarsir memiliki luas $AC^2 + CB^2$. Translasikan segitiga ABC ke HEG, GFC ke EDB, dan GCJ ke HAK. Daerah yang tidak diarsir menjadi persegi $ABEH$ yang luasnya AB^2. Dengan demikian $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

j. Cukup jelas.

2. Bantuan: tunjukkan bahwa segitiga SOT, UOT dan UOW sebangun. Sehingga $\angle SOT = \angle UOT = \angle UOW = \frac{1}{3}\angle SOW$.

3. Bantuan: Tentukan luas daerah yang diarsir, tentukan AN^2 dengan menggunakan teorema Pythagoras. Tunjukkan bahwa daerah yang diarsir dan lingkaran berdiameter AN memiliki luas yang sama.

4. Bantuan: Refleksikan A terhadap l sehingga diperoleh A', refleksikan B terhadap h sehingga diperoleh B'. Tarik garis $A'B'$, sehingga memotong l di P dan memotong h di Q. Maka $AP + PQ + QB$ memiliki total panjang yang minimum.

F. Daftar Pustaka

Alfred S. Posamentier. 2003. *Math Wonders to Inspire Teachers and Students*. Alexandria, Virginia: Association for Supervision and Curriculum Development.

Alfred S. Posamentier & Ingmar Lehmann. 2004. *Pi: A Biography of the World's Most Mysterious Number*. New York: Prometheus Books.

Alfred S. Posamentier & Jay Stepelman. 1999. *Teaching Secondary School Mathematics: Techniques and Enrichment*. New Jersey: Prentice Hall.

Audun Holme. 2010. *Geometry: Our Cultural Heritage*. Berlin: Springer.

David Burton. 2006. *The History of Mathematics: An Introduction*. McGraw-Hill.

Eli Maor. 2007. *The Pythagorean Theorem: A 4000-Year History*. New Jersey: Princenton University Press.

Y.E.O. Adrian. 2006. *The Pleasures of Pi, e and Other Interesting Numbers*. Singapore: World Scientific Publ.Co.Pte.Ltd.

http://www.thegeodes.com/templates/geometryhistory.asp, diakses 12 April 2011.

http://ualr.edu/lasmoller/pi.html, diakses 12 April

IV

PEMANFAATAN MATEMATIKA REKREASI DALAM PEMBELAJARAN ASPEK STATISTIKA DAN PELUANG

IV. Pemanfaatan Matematika Rekreasi dalam Pembelajaran Aspek Statistika dan Peluang

Kompetensi Guru:

1. **Menyediakan berbagai kegiatan pembelajaran untuk mendorong peserta didik mencapai prestasi belajar secara optimal (6.1).**
2. **Menyediakan berbagai kegiatan pembelajaran untuk mengaktualisasikan potensi peserta didik, termasuk kreativitasnya (6.2).**
3. **Menguasai pengetahuan konseptual dan prosedural serta keterkaitan keduanya dalam konteks materi aritmatika, aljabar, geometri, trigonometri, pengukuran, statistika, dan logika matematika (20.7).**
4. **Mampu menggunakan matematisasi horizontal dan vertikal untuk menyelesaikan masalah matematika dan masalah dalam dunia nyata (20.8).**
5. **Bangga menjadi guru dan percaya pada diri sendiri (14.2).**
6. **Berkomunikasi dengan teman sejawat dan komunitas ilmiah lainnya secara santun, empatik, dan efektif. (17.1).**

Materi statistika dan peluang SMP diajarkan pada kelas IX semester I mencakup dua standar kompetensi dengan empat kompetensi dasar. Standar kompetensi 3 yaitu melakukan pengolahan dan penyajian data memuat dua kompetensi dasar yaitu: 3.1 menentukan rata-rata, median, dan modus data tunggal serta penafsirannya, dan 3.2 menyajikan data dalam bentuk tabel dan diagram batang, diagram garis, dan diagram lingkaran. Standar kompetensi 4 yaitu memahami peluang kejadian sederhana memuat dua kompetensi dasar yaitu: 4.1 menentukan ruang sampel suatu percobaan, dan 4.2 menentukan peluang suatu kejadian sederhana.

Semua materi dalam modul ini masih berkaitan dengan SK dan KD di atas. Sesuai dengan judul modul tersebut di atas, materi yang ada dalam modul ini bersifat *recreational mathematics* atau matematika rekreasi. Modul ini memuat aktifitas setatistika, contoh menggunakan masalah yang tidak biasa, contoh pembelajaran kejadian dan peluang yang melibatkan siswa secara aktif dalam melakukan percobaan, dan contoh pembelajaran dalam bentuk permainan.

Dengan mempelajari modul ini dapat menambah pengetahuan Anda tentang matematika rekresi, terutama yang berkaitan dengan topik statistika dan peluang. Dengan demikian Anda dapat menambah antusiasme dan motivasi siswa dalam belajar matematika.

Modul ini terdiri dari dua kegiatan belajar, yaitu:
Kegiatan Belajar 1: Sejarah Matematika terkait dengan Statistika dan Peluang,
Kegiatan Belajar 2: Berbagai topik matematika rekreasi tentang Statistika dan Peluang

Dalam mempelajari modul ini, disarankan Anda melakukan secara berurutan dimulai dari Kegiatan Belajar 1, dan Kegiatan Belajar 2. Pelajarilah dengan seksama materi-materi yang ada pada modul ini. Kerjakan semua tugas/latihan yang ada di modul ini. Bila dalam mengerjakan latihan/tugas materi tertentu Anda masih merasa kesulitan, sebaiknya Anda pelajari lagi materi tersebut dengan lebih seksama. Pembahasan yang ada dalam modul ini hanyalah merupakan salah satu alternatif jawaban atas soal/masalah yang ada. Dengan demikian Anda boleh menjawab soal/masalah yang ada dengan cara yang lain, selagi dapat dipertanggungjawabkan kebenarannya.

A. Kegiatan Belajar 1: Sejarah Matematika Terkait dengan Statistik dan Peluang

Sekitar tahun 3500 SM, sebuah papan permainan telah muncul di Mesir. Pemain melemparkan tulang dengan 4 sisi disebut sebagai *astragalus*, yang merupakan pendahulu dari dadu yang kita kenal saat ini. Abad ke-16, Gerolamo Cardano (1501-1576) menyelidiki permainan dadu dan menulis buku untuk penjudi dengan judul "*Liber de Ludo Aleae"* (*The Book of Games of Chance*). Cardano memperkenalkan konsep himpunan semua kemungkinan yang bisa muncul dan membuat definisi peluang. Abad ke-17 Christiaan Huygen meletakkan dasar untuk teori kemungkinan melalui tulisannya "*Van Rekeningh in Spelen van Geluck*" (*On Reasoning in Games of Chance*). Huygen memperkenalkan konsep nilai harapan (*expected valu*e). Pada tahun 1713 Jacob Bernoulli mempublikasikan "*Ars Conjectandi*" (*The Art of Conjecturing*), ia memperkenalkan teori untuk menghitung peluang. Pada tahun 1812 Pierre Simon Laplace mempublikasikan teori *analytique des probabilites*. Fermat dan Pascal, berkorespondensi menyusun prinsip-prinsip dasar peluang pada tahun 1654. Tahun 1933, Andrej Nikolajevitsch Kolmogorov (1903-1987) meletakkan dasar teori peluang dengan memberikan landasan aksiomatik untuk teori peluang.

B. Kegiatan Belajar 2: Berbagai Topik Matematika Rekreasi tentang Statistik dan Peluang

1. Membandingkan Tinggi Badan dengan Panjang Rentangan Tangan

Anda dapat memberikan pertanyaan berikut kepada siswa Anda. Apakah tinggi badan seseorang sama dengan panjang rentang kedua tangannya? Bagaimanakah dengan rata-rata (rata-rata), median, dan modus dari tinggi badan dan panjang rentang tangan siswa satu kelas? Perhatikan jawaban spontan dari semua siswa. Untuk menunjukkan kebenaran jawaban mereka bimbinglah mereka melakukan kegiatan berikut.

Mintalah semua siswa Anda mengukur tinggi badan dan panjang rentangan tangan mereka dari ujung jari tangan kiri ke ujung jari tangan kanan sampai satuan centi meter terdekat. Apakah ada siswa yang mempunyai tinggi badan dan panjang rentangan tangan sama panjang? Mintalah kepada mereka untuk mengumpulkan data tinggi badan dan panjang rentangan tangan semua siswa satu kelas dan membuat tabel distribusi frekuensi kemudian menghitung rata-ratanya. Kemudian bandingkan rata-rata tinggi badan dan rata-rata panjang rentangan tangan, dan perhatikan kesimpulan apa yang dapat mereka ambil dari data yang terkumpul untuk mendukung dugaan bahwa: rata-rata tinggi badan sama dengan rata-rata panjang rentangan tangan.

Berikut ini diberikan contoh data nyata yang diambil dari siswa tingkat delapan. Perhatikan berapa dekatnya data mendukung dugaan.

Tabel 4.1 Tinggi Badan dan Panjang Rentangan Tangan dalam Centimeter.

Tinggi Badan	*f*		Rentangan Tangan	*f*
140	3		140	4
145	6		145	6
150	7		150	7
155	4		155	2
160	1		160	2
165	5		165	2
170	3		170	4
175	0		175	2
	29			29

Tabel 4.2 Rata-rata dan Simpangan Baku dari Tinggi Badan dan Rentangan Tangan.

	Rata-rata	Simpangan baku
Tinggi badan	153,62	9,63
Rentangan tangan	154,14	11,34

Selain menghitung rata-ratanya, Anda juga dapat meminta siswa Anda untuk menghitung/menentukan median dan modusnya.

Aktivitas siswa pada kegiatan tersebut di atas akan bebeda apabila anda yang menyediakan bilangan-bilangan tertentu kemudian siswa hanya menghitung nilai rata-rata, median, dan modusnya.

Standar Kompetensi (SK) dan Kompetensi Dasar (KD) yang bersesuaian dengan kegiatan pembelajaran di atas adalah:

SK 3 yaitu melakukan pengolahan dan penyajian data

KD 3.1 yaitu menentukan rata-rata, median, dan modus data tunggal serta penafsirannya

KD 3.2 yaitu menyajikan data dalam bentuk tabel dan diagram batang, garis, dan lingkaran

2. Menggunakan Persoalan yang Tidak Biasa.

Di bawah ini diberikan suatu masalah yang sederhana tentang peluang tetapi mungkin tidak biasa bagi siswa Anda. Masalah seperti ini dapat Anda berikan kepada siswa Anda dengan tujuan untuk melatih berpikir kritis.

Masalah:

Sebuah keluarga mempunyai dua orang anak. Diketahui bahwa dari dua anak itu satu diantaranya laki-laki. Berapa peluang kedua anak dari keluarga itu adalah laki-laki?

Pembahasan:

Masalah biasanya adalah: Sebuah keluarga mempunyai dua orang anak. Berapa peluang kedua anaknya adalah laki-laki?

Ruang sampelnya adalah $\{PP, LP, PL, LL\}$, dengan P menyatakan perempuan, dan L menyatakan laki-laki. Banyaknya anggota ruang sampel (titik sampel) sama dengan empat. Kejadian kedua anaknya laki laki adalah $\{LL\}$. Banyaknya titik sampel sama dengan satu. Dengan demikian peluang kedua anaknya laki-laki adalah $\frac{1}{4}$.

Dalam masalah di atas terdapat tambahan keterangan “dari dua anak itu satu diantaranya laki-laki”. Dengan demikian tidak mungkin kedua anaknya adalah perempuan (PP), sehingga PP bukan anggota ruang sampel. Dengan demikian ruang sampelnya adalah menjadi: $\{LP, PL, LL\}$. Banyaknya titik sampel sama dengan tiga. Kejadian kedua anaknya laki laki adalah $\{LL\}$. Banyaknya titik sampel sama dengan satu. Dengan demikian peluang dari masalah di atas yang benar $\frac{1}{3}$ (bukan $\frac{1}{4}$).

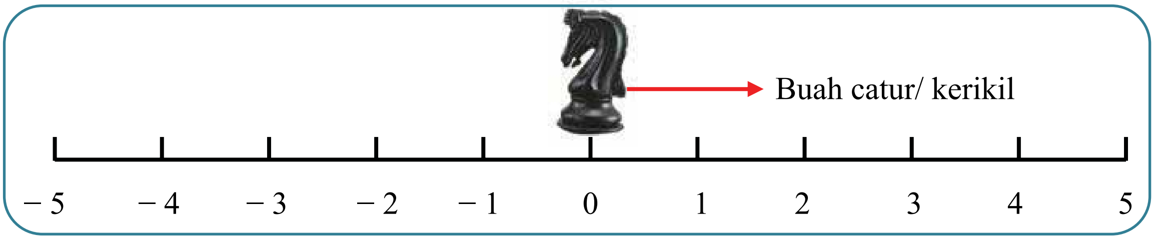
Masalah di atas hanyalah salah satu contoh saja. Apabila menurut Anda masalah tersebut terlalu sederhana dan mudah bagi siswa Anda, Anda dapat mengembangkannya sesuai dengan kemampuan yang dimiliki siswa Anda.

3. Jalan Acak

Pada pembelajaran kali ini Anda meminta siswa untuk menyiapkan penggaris, kertas, buah catur (kerikil/potongan kapur tulis/yang lainnya yang mudah didapatkan), dan koin.

Petunjuk

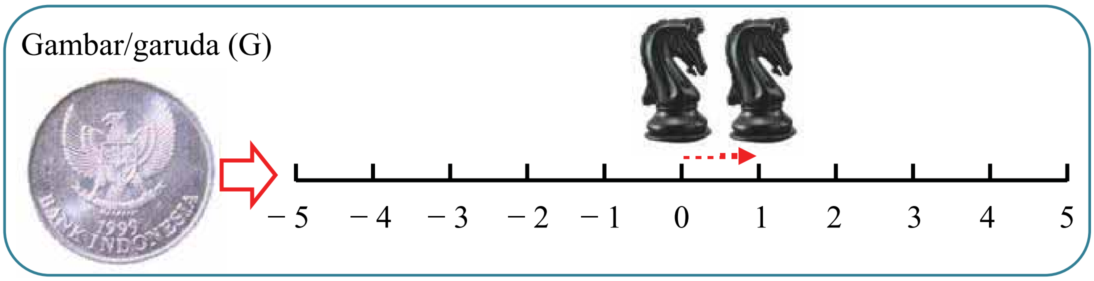
Sebelum memulai percobaan siswa diminta untuk menggambar garis bilangan dari -5 sampai 5 , seperti gambar 4.1 di bawah ini.



Gambar 4.1 Garis Bilangan dan Buah Catur

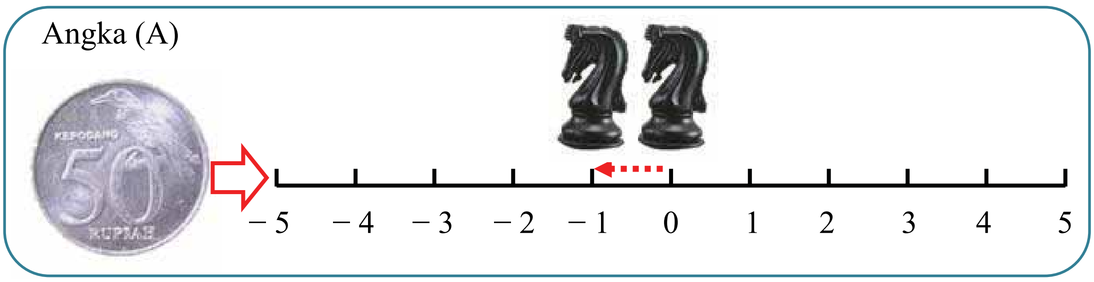
Permainan dimulai dengan meletakkan buah catur di titik 0 (nol). Aturan permainannya adalah:

a. jika hasil percobaan melempar koin muncul gambar/garuda (G) maka buah catur digeser satu satuan ke kanan.



Gambar 4.2.a Ilustrasi Penggeseran Buah Catur ke Kanan

b. Jika hasil percobaan melempar koin muncul angka (A) maka buah catur digeser satu satuan ke kiri.



Gambar 4.2.b Ilustrasi Penggeseran Buah Catur ke Kiri

Pemain yang berhasil paling cepat menggeser buah catur (dengan mengikuti hasil pelemparan koin) mencapai -5 atau 5 menjadi pemenang.

Biarkan siswa Anda melakukan percobaan berkali-kali sampai semua siswa berhasil menggeser buah caturnya mencapai -5 atau 5. Tanyakan kepada mereka, dalam berapa kali lemparan mereka mencapai -5 atau 5? Adakah yang dapat mencapainya dalam 5 kali lemparan?

Pembahasan:

Untuk mencapai angka 5 atau -5 paling sedikit diperlukan lima kali lemparan. Agar mencapai angka 5 dalam lima kali lemparan diperlukan semua lemparan muncul G, sedangkan untuk mencapai angka -5 dalam lima kali lemparan diperlukan semua lemparan muncul A.

Semua hasil percobaan yang mungkin terjadi dalam lima kali lemparan koin (di kelompokkan dalam enam kejadian) seperti tabel 4.3 di bawah ini.

Tabel 4.3 Semua Hasil yang Mungkin dari Pelemparan Koin Sebanyak Lima Kali .

KEJADIAN	SUSUNAN	BANYAKNYA CARA
Muncul angka semua	AAAAA	1 cara
Muncul angka 4 kali dan muncul gambar 1 kali	AAAAG AAAGA AAGAA AGAAA GAAAA	5 cara
Muncul angka 3 kali dan muncul gambar 2 kali	AAAGG AAGAG AGAAG GAAAG AAGGA AGAGA GAAGA AGGAA GAGAA GGAAA	10 cara
Muncul angka 2 kali dan muncul gambar 3 kali	GGGAA GGAGA GAGGA AGGGA GGAAG GAGAG AGGAG GAAGG AGAGG AAGGG	10 cara
Muncul angka 1 kali dan muncul gambar 4 kali	GGGGA GGGAG GGAGG GAGGG AGGGG	5 cara
Muncul gambar semua	GGGGG	1 cara _______ + 32 cara

Dengan demikian ruang sampelnya adalah: {AAAAA, AAAAG, AAAGA, AAGAA, AGAAA, GAAAA, AAAGG, AAGAG, AGAAG, GAAAG, AAGGA, AGAGA

GAAGA, AGGAA, GAGAA, GGAAA, GGGAA, GGAGA, GAGGA, AGGGA, GGAAG, AGAG, AGGAG, GAAGG, AGAGG, AAGGG, GGGGA, GGGAG, GGAGG, GAGGG, AGGGG, GGGGG}. Banyaknya anggota ruang sampel adalah 32. Kejadian semua muncul G adalah {GGGGG}. Banyaknya titik sampel adalah satu. Peluang semua muncul G sama dengan $\frac{1}{32}$. Dengan cara yang sama, peluang semua muncul A sama dengan $\frac{1}{32}$.

Sehingga dalam lima kali lemparan peluang mencapai −5 atau 5 adalah $\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{16}$.

Pada kelas dengan banyak siswa tidak terlalu sedikit diharapkan ada siswa yang akan memenangkan permainan hanya dalam lima kali lemparan. Dalam lima kali lemparan, peluang mencapai 5 yaitu $P(5) = \frac{1}{32}$, peluang mencapai −5 yaitu $P(-5) = \frac{1}{32}$, dan peluang mencapai (5 atau −5) yaitu $P(5 \text{ atau } -5) = \frac{1}{16}$.

Perhatikan hubungan bilangan-bilangan pada tabel 4.2 di atas khususnya pada kolom banyaknya cara. Bandingkan dengan baris ke-5 dari segitiga pascal pada gambar 4.3 berikut ini.

1
1 1 → Baris ke-1
1 2 1 → Baris ke-2
1 3 3 1 → Baris ke-3
1 4 6 4 1 → Baris ke-4
1 5 10 10 5 1 → Baris ke-5
....

Gambar 4.3 Segitiga Pascal

Ternyata terdapat kesamaan antara bilangan pada tabel 4.2 dengan baris ke-5 segitiga pascal yaitu 1, 5, 10, 10, 5, 1.

Sebuah tindak lanjut yang menarik adalah menemukan berapa banyak cara jalan acak berhenti pada setiap angka sesudah lima kali lemparan, dan membandingkan hasilnya dengan ke-32 hasil yang mungkin dari lima kali lemparan koin.

Tabel 4.4 Banyak Cara untuk Berhenti dalam Lima Kali Geser

BANYAK CARA UNTUK BERHENTI	PELUANG
Terdapat 1 cara untuk berhenti pada −5 yaitu: AAAAA	$\frac{1}{32} = 0{,}03125$
Terdapat 5 cara untuk berhenti pada −3 yaitu: AAAAG, AAAGA, AAGAA, AGAAA, GAAAA	$\frac{5}{32} = 0{,}15625$
Terdapat 10 cara untuk berhenti pada −1 yaitu: AAAGG, AAGAG, AGAAG, GAAAG, AAGGA, AGAGA, GAAGA, AGGAA, GAGAA, GGAAA	$\frac{10}{32} = 0{,}31250$
Terdapat 10 cara untuk berhenti pada 1 yaitu: GGGAA, GGAGA, GAGGA, AGGGA, GGAAG GAGAG, AGGAG, GAAGG, AGAGG, AAGGG	$\frac{10}{32} = 0{,}31250$
Terdapat 5 cara untuk berhenti pada 3 yaitu: GGGGA, GGGAG, GGAGG, GAGGG, AGGGG	$\frac{5}{32} = 0{,}15625$
Terdapat 1 cara untuk berhenti pada 5 yaitu: GGGGG	$\frac{1}{3} = 0{,}03125$ ______ + 1,00000

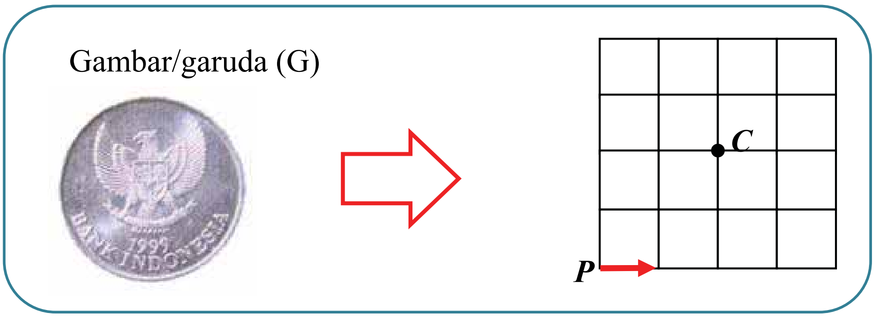
4. Lintasan pada Persegi Berpetak

Selain permainan diatas Anda dapat juga mencoba permainan berikut di dalam kelas. Sebelum kegiatan dimulai, mintalah siswa Anda untuk menyiapkan kertas berpetak berbentuk persegi besar berukuran 4 × 4 satuan dan sebuah koin.

Petunjuk:

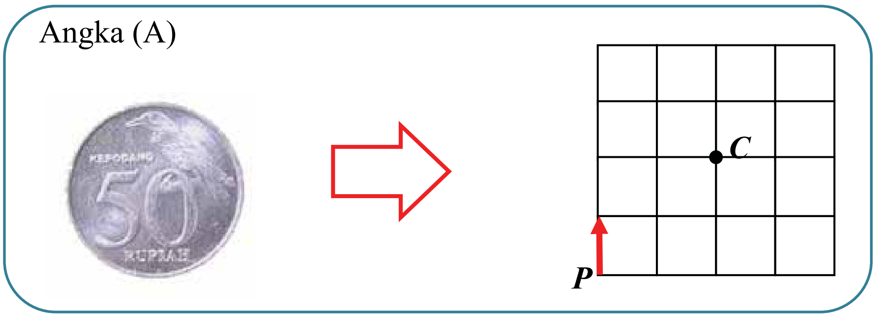
Letakkan kertas berpetak berbentuk persegi besar berukuran 4 × 4 satuan di meja dan anggaplah garis-garis yang membatasi ke-16 persegi kecil sebagai jalan. Mulai pada titik *P* dan lakukan jalan acak sejauh 4 blok/kotak. Tentukan langkah Anda mengikuti hasil pelemparan sebuah koin sebanyak 4 kali. Gunakan pensil berwarna, spidol atau alat tulis yang lainnya untuk menandai jalan yang sudah dilewati. Aturan permainannya adalah:

a. Jika muncul gambar (G), maka jalan satu blok ke kanan



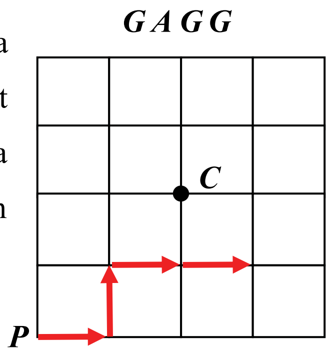
Gambar 4.4.a Ilustrasi Jalan ke Kanan

b. Jika muncul angka (A), maka jalan satu blok ke atas



Gambar 4.4.b Ilustrasi Jalan ke Atas

Sebelum melakukan percobaan lebih jauh sebaiknya Anda terlebih dulu menjelaskan aturan main tersebut kepada siswa sampai benar-benar paham. Berapa peluang dalam perjalanan sejauh empat blok akan mencapai titik C?



Gambar 4.5 Ilustrasi Jalan/Lintasan dalam Empat Langkah

Lintasan yang ditunjukkan pada gambar di samping ini merupakan hasil pelemparan sebuah koin sebanyak empat kali dengan hasil lemparannya adalah gambar, angka, gambar, gambar (GAGG).

Lakukan percobaan beberapa kali dan ikuti lintasan yang dilalui. Kemudian buat pembahasan secara matematis.

Pembahasan:

Semua hasil percobaan yang mungkin dari pelemparan sebuah koin sebanyak empat kali adalah sebagai berikut:

AAAA = 1cara

GAAA, AGAA, AAGA, AAAG = 4 cara

GGAA, GAGA, GAAG, AGGA, AAGG, AGAG = 6 cara

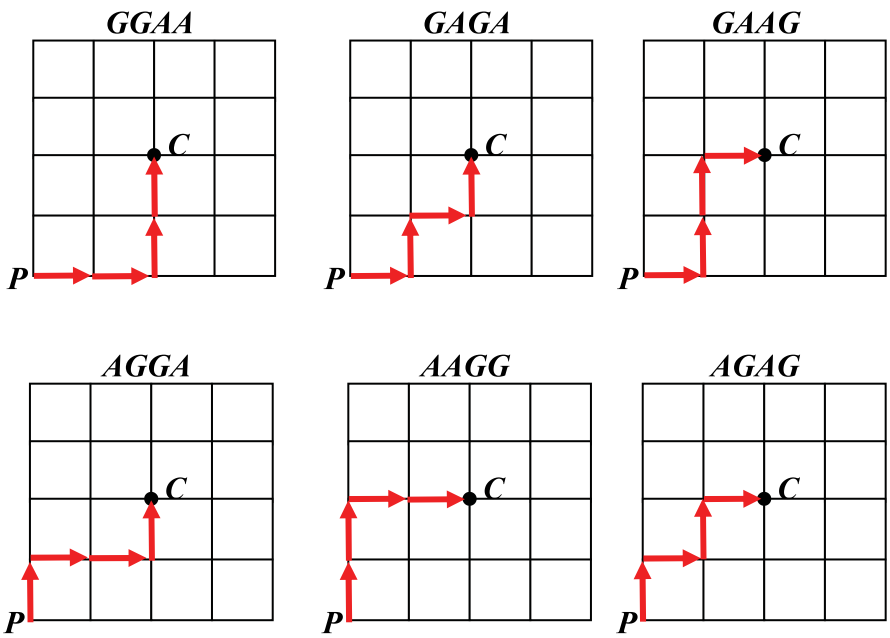
GGGA, GGAG, GAGG, AGGG = 4 cara

GGGG = 1 cara

Perhatikan hasil percobaan di atas kemudian bandingkan dengan baris keempat segitiga Pascal. Banyak hasil percobaan yang mungkin terjadi dari pelemparan sebuah koin sebanyak empat kali adalah 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 hasil percobaan yang berbeda. Dari semua hasil percobaan yang mungkin, hanya sebagian hasil percobaan saja yang akan mencapai titik *C* yaitu:

GGAA, GAGA, GAAG, AGGA, AAGG, AGAG = 6 cara.

Peluang mencapai titik *C* dalam empat kali lemparan sama dengan $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.



Gambar 4.6 Ilustrasi Jalan/Lintasan yang Mencapai Titik *C* dalam Empat Langkah

Secara isi, masalah di atas mungkin merupakan masalah yang sangat biasa, tetapi karena penyampaiannya mengunakan permainan/percobaan secara langsung diharapkan pembelajaran akan menjadi lebih menarik dan antusiasme siswa mengikuti pembelajaran (berikutnya) menjadi lebih meningkat.

Standar Kompetensi (SK) dan Kompetensi Dasar (KD) yang bersesuaian dengan kegiatan pembelajaran di atas adalah: SK 4 yaitu memahami peluang kejadian sederhana, dengan KD sebagai berikut ini.

KD 4.1 yaitu menentukan ruang sampel suatu percobaan

KD 4.2 yaitu menentukan peluang suatu kejadian sederhana.

5. Permainan Dadu

Pembahasan secara rinci tentang matematika dibalik permainan dadu yang dinamakan *craps* (permainan dengan dua dadu) dapat menjelaskan dengan bagus sekali tentang peluang bersyarat. Permainan ini dimainkan dengan bantuan sepasang dadu dengan aturan sebagai berikut:

Gambar 4.7 Dadu

Lambungkan dua buah dadu pada alas yang keras, kemudian amatilah bilangan yang ditunjukkan oleh banyaknya bulatan pada sisi kedua dadu yang ada di bagian atas. Jika bilangan yang muncul berjumlah 7 atau 11, maka anda menang. Jika bilangan yang muncul berjumlah 2, 3, atau 12 maka anda kalah. Jika bilangan yang muncul berjumlah 4, 5, 6, 8, 9, atau 10, maka anda melempar lagi sampai muncul jumlah 7 dan anda kalah atau sampai muncul jumlah seperti semula dan anda menang.

Kasus yang ketiga memunculkan peluang bersyarat. Anggap lemparan pertama menghasilkan jumlah angka 4 yang mempunyai 3 cara diantara 36 cara keseluruhan kejadian. Maka permainan akan berakhir sampai muncul jumlah angka 4 atau 7. Terdapat 3 cara untuk mendapatkan jumlah 4 dan terdapat 6 cara untuk mendapatkan jumlah 7. Jadi setelah muncul jumlah 4 pada lemparan dadu pertama, maka peluang untuk memenangkan permainan dengan memperoleh jumlah empat lagi adalah $\frac{3}{9}$. Semua kejadian lain yang mungkin di sini diabaikan.

DADU PERTAMA

DADU KEDUA

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Jumlah dadu 1 + dadu 2 = 4

Jumlah dadu 1 + dadu 2 = 7

Gambar 4.8 Jumlah Dadu Pertama dan Dadu Kedua

Tabel 4.5 Peluang Memenangkan Permainan

Menang dengan jumlah 7 atau 11	$P(7 \text{ atau } 11) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36}$
Menang dengan jumlah 4	$P(4) \times P\,(4 \text{ diberikan } 4 \text{ atau } 7) = \frac{3}{36} \times \frac{3}{9} = \frac{9}{324}$
Menang dengan jumlah 5	$P(5) \times P\,(5 \text{ diberikan } 5 \text{ atau } 7) = \frac{4}{36} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{360}$
Menang dengan jumlah 6	$P(6) \times P\,(6 \text{ diberikan } 6 \text{ atau } 7) = \frac{5}{36} \times \frac{5}{11} = \frac{25}{396}$
Menang dengan jumlah 8	$P(8) \times P\,(8 \text{ diberikan } 8 \text{ atau } 7) = \frac{5}{36} \times \frac{5}{11} = \frac{25}{396}$
Menang dengan jumlah 9	$P(9) \times P\,(9 \text{ diberikan } 9 \text{ atau } 7) = \frac{4}{36} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{360}$
Menang dengan jumlah 10	$P(10) \times P\,(10 \text{ diberikan } 10 \text{ atau7}) = \frac{3}{36} \times \frac{3}{9} = \frac{9}{324}$

Tambahkan peluang-peluang ini untuk mendapatkan peluang menang pada lemparan pertama atau lemparan-lemparan berikutnya.

$P(\text{menang}) = \frac{8}{36} + \frac{9}{324} + \frac{16}{360} + \frac{25}{396} + \frac{25}{396} + \frac{16}{360} + \frac{9}{324} = \frac{244}{495} = 0{,}4929$. Peluangnya mendekati $\frac{1}{2}$.

Standar Kompetensi (SK) dan Kompetensi Dasar (KD) yang bersesuaian dengan kegiatan pembelajaran di atas adalah: SK 4 yaitu memahami peluang kejadian sederhana, dengan KD sebagai berikut.

KD 4.1 yaitu menentukan ruang sampel suatu percobaan

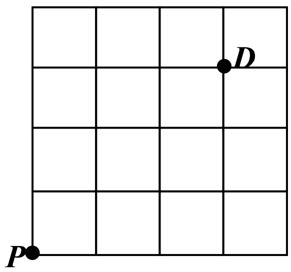
KD 4.2 yaitu menentukan peluang suatu kejadian sederha

C. Ringkasan

Modul ini berisi tentang sekilas sejarah perkembangan teori peluang, kegiatan-kegiatan pembelajaran tentang: membandingkan tinggi badan dengan panjang rentangan tangan, menggunakan persoalan yang tidak biasa, jalan acak, lintasan persegi berpetak, dan permainan dadu.

D. Tugas/Latihan

1. Dengan mengikuti petunjuk dan aturan di topik lintasan pada persegi berpetak di atas, mulai pada titik P dan lakukan jalan acak sejauh 6 blok/kotak mengikuti hasil pelemparan sebuah koin sebanyak 6 kali. Tentukan langkah Anda dengan menggambarkannya pada kotak persegi!



   Berapakah peluang dalam perjalanan sejauh enam blok/kotak dimulai pada titik P akan mencapai titik D?

2. Perhatikan topik permainan dadu di atas.

   Dengan aturan sebagai berikut:

   Jika bilangan yang muncul berjumlah 9 atau 10, maka anda menang.

   Jika bilangan yang muncul berjumlah 2, 3, atau 4 maka anda kalah.

Jika bilangan yang muncul berjumlah 5, 6, 7, 8, 11 atau 12, maka anda melempar lagi sampai muncul jumlah 9 dan anda kalah atau sampai muncul jumlah seperti semula dan anda menang.

Berapakah peluang menang pada lemparan pertama atau lemparan-lemparan berikutnya?

Untuk menilai hasil pengerjaan tugas/latihan Anda, Anda dapat menilainya sendiri dengan mencocokkan hasil pekerjaan Anda dengan kunci jawaban atau petunjuk yang ada di bagian umpan balik di bawah ini. Anda juga dapat bekerjasama dengan teman seprofesi Anda di sekolah maupun di MGMP untuk saling mengoreksi pekerjaan Anda.

E. Umpan Balik

Pada bagian ini diberikan kunci jawaban atau petunjuk yang digunakan dalam menilai tugas/latihan yang sudah Anda kerjakan di atas.

Kunci jawaban/petunjuk:

Hasil percobaan yang mungkin dari pelemparan sebuah koin sebanyak enam kali adalah sebagai berikut:

Enam kali percobaan muncul angka semua = 1 cara

Enam kali percobaan muncul angka lima kali dan muncul gambar satu kali = 6 cara

Enam kali percobaan muncul angka empat kali dan muncul gambar dua kali = 15 cara

Enam kali percobaan muncul angka tiga kali dan muncul gambar tiga kali = 20 cara

Enam kali percobaan muncul angka dua kali dan muncul gambar empat kali = 15 cara

Enam kali percobaan muncul angka satu kali dan muncul gambar lima kali = 6 cara

Enam kali percobaan muncul gambar semua = 1 cara

Jumlah semua cara yang mungkin adalah 1+ 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 cara.

Dari semua hasil percobaan yang mungkin, hanya sebagian hasil percobaan saja yang akan mencapai titik D yaitu hasil percobaan yang muncul angka tiga kali dan muncul gambar tiga kali = 20 cara.

Peluang mencapai titik D dalam enam kali lemparan sama dengan $\frac{20}{64} = \frac{5}{16}$.

Perhatikan tabel 4.6 di bawah ini:

Tabel 4.6 Peluang Memenangkan Permainan dengan Jumlah Tertentu.

Menang dengan jumlah 9 atau 10	$P(9 \text{ atau } 10) = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{7}{36}$
Menang dengan jumlah 5	$P(5) \times P\ (5 \text{ diberikan } 5 \text{ atau } 9) = \frac{4}{36} \times \frac{4}{8} = \frac{16}{288}$
Menang dengan jumlah 6	$P(6) \times P\ (6 \text{ diberikan } 6 \text{ atau } 9) = \frac{5}{36} \times \frac{5}{9} = \frac{25}{324}$
Menang dengan jumlah 7	$P(7) \times P\ (7 \text{ diberikan } 7 \text{ atau } 9) = \frac{6}{36} \times \frac{6}{10} = \frac{30}{360}$
Menang dengan jumlah 8	$P(8) \times P\ (8 \text{ diberikan } 8 \text{ atau } 9) = \frac{5}{36} \times \frac{5}{9} = \frac{25}{324}$
Menang dengan jumlah 11	$P(11) \times P\ (11 \text{ diberikan } 11 \text{ atau } 9) = \frac{2}{36} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{216}$
Menang dengan jumlah 12	$P(12) \times P\ (12 \text{ diberikan } 12 \text{ atau } 9) = \frac{1}{36} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{180}$

Peluang menang pada lemparan pertama atau lemparan-lemparan berikutnya:

$$P(\text{menang}) = \frac{7}{36} + \frac{16}{288} + \frac{25}{324} + \frac{30}{360} + \frac{25}{324} + \frac{4}{216} + \frac{1}{180} = 0{,}5117$$

Anda dinilai sudah berhasil dalam mempelajari modul ini apabila Anda berhasil menjawab/mengerjakan dengan benar minimal 75% dari tugas/latihan yang diberikan di atas. Selamat bagi Anda yang sudah berhasil mengerjakan dengan benar lebih dari 75%, Anda dapat melanjutkan mempelajari modul yang lain. Buat Anda yang nilainya belum mencapai 75% jangan berkecil hati, silahkan Anda pelajari lagi bagian mana yang masih kurang, setelah itu kerjakan kembali tugas/latihan yang belum bisa Anda kerjakan dengan benar. Dengan usaha keras dan kesungguhan Anda dalam mempelajari modul ini, “Anda pasti Bisa”.

F. DAFTAR PUSTAKA

Alfred S. Possamentier. 2007. *Math Wonders.* Alexandria: ASCD.

Cooper R.F. 1979. *Recreational Mathematics*. Hongkong: Wing Tai Cheung Printing Co. Ltd.

Max A. Sobel dan Evan M. Maletsky. 2001. *Mengajar Matematika.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

Sulaiman R., dkk. 2008.*Contextual Teaching and Learning Matematika: Sekolah Menengah Pertama/Madrasah Tsanawiyah Kelas IX Edisi 4*. Jakarta:Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional.

PENUTUP

PENUTUP

A. Rangkuman

Siswa mencintai matematika, itulah tujuan akhir setelah guru memberikan matematika rekreasi. Anda telah mempelajari berbagai topik dalam matematika rekreasi yang dapat digunakan sebagai wahan untuk menjadikan siswa lebih mencintai matematika. Semakin awal mereka mencintai matematika, akan semakin baik dalam menjaga motivasi mereka dalam mempelajari matematika yang pada akhirnya diharapkan dapat meningkatkan prestasi belajar matematika. Tidak dapat dipungkiri bahwa siswa dengan kemampuan matematika yang tinggi memiliki kesempatan yang lebih besar untuk sukses dalam bidang ilmu yang lain.

Terdapat berbagai materi menarik yang dapat diambil dari aspek sejarah matematika. Dalam aspek bilangan, kisah Gauss yang berhasil menjumlahkan bilangan asli 1 sampai 100 ketika masih di sekolah dasar dapat dijadikan kisah menarik untuk memotivasi siswa. Untuk mendukung pembelajaran aljabar di SMP, berbagai masalah aljabar dapat diambil dari naskah-naskah kuno seperti papyrus-papyrus Mesir, tablet-tablet Babylonia, naskah-naskah Yunani, China, dan India. Tidak hanya untuk aljabar, naskah-naskah kuno tersebut juga memuat masalah-masalah/fakta-fakta geometri. Kisah Eratosthenes mengukur keliling bumi, proses manusia menemukan nilai π, bukti-bukti teorema Pythagoras oleh tokoh-tokoh matematika termasuk presiden Amerika Garfield dapat disampaikan kepada siswa SMP. Pada aspek teori peluang dan statistika, meskipun permainan menggunakan astragalus telah muncul pada tahun 3500 SM, namun perkembangan yang lebih cepat baru terjadi pada abad ke-16. Pada saat itu Gerolamo Cardano menyelidiki permainan dadu. Berawal dari permainan inilah teori peluang muncul.

Selain dari aspek sejarah, matematika juga memiliki berbagai fakta menarik. Dalam aspek bilangan, dikenal berbagai nama bilangan dengan keunikannya masing-masing seperti: (1) Bilangan sempurna yaitu bilangan yang besarnya sama dengan jumlah pembagi-pembagi sejatinya.

(2) Bilangan *amicable*, dua bilangan a dan b dikatakan bilangan *amicable* (bersahabat) jika jumlah pembagi-pembagi sejati dari a sama dengan b, dan jumlah pembagi-pembagi sejati dari b sama dengan a, (3) Barisan bilangan Fibonacci, barisan yang merupakan penyelesaian dari masalah perkembangan marmut ini memiliki penyelesaian $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, dan $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ untuk $n \geq 3$. (4) Persegi Ajaib merupakan susunan bilangan asli berurutan pada persegi sehingga jumlah bilangan-bilangan pada setiap baris, setiap kolom, dan setiap diagonalnya sama. Terdapat bermacam-macam cara untuk menyusun bilangan-bilangan tersebut. Salah satu yang telah dibahas berlaku untuk persegi ajaib dengan sisi ganjil. Pada aspek aljabar fakta menarik yang telah diberikan meliputi (1) tafsiran geometris bentuk-bentuk aljabar, (2) keterbagian dengan 9 dan (3) keterbagian dengan 12. Sementara itu dalam geometri telah diberikan fakta unik tentang mengikat bumi dan cara cepat menentukan tripel Pythagoras.

Pada pembahasan aspek bilangan, telah diberikan salah satu teka-teki yaitu trik matematika. Permainan ini dapat digunakan pada kompetensi dasar melakukan operasi hitung bilangan bulat dan pecahan. Pada aspek aljabar, diberikan materi misteri 22 dan tebak umur. Tidak sekedar bermain, diharapkan setelah menyajikan teka-teki, siswa dapat diajak untuk menyelidiki, mengapa teka-teki tersebut dapat dilakukan.

Disamping dapat digunakan sebagai hiburan seperti teka-teki, matematika juga berguna bagi manusia untuk menyelesaikan masalah yang dihadapi. Berbagai metode hitung cepat ternyata dapat dijelaskan secara aljabar. Masalah pipa air, dan membagi sudut menjadi tiga bagian sama besar merupakan contoh aplikasi geometri dalam kehidupan.

Mungkinkah sebuah proses yang logis menghasilkan kesimpulan yang bertentangan? Tentu saja tidak. Beberapa paradoks yang telah diberikan, seperti (1) paradoks 1=2, (2) paradoks berat gajah = berat nyamuk (3) paradoks 64=65 merupakan contoh meskipun penjelasan yang diberikan terlihat runtut dan logis namun sebenarnya terdapat kesalahan. Masalah tersebut dapat diberikan kepada siswa untuk berlatih berpikir kritis dan teliti.

Pada akhirnya, kami menyadari bahwa modul ini hanya memuat sedikit materi rekreasi matematika. Anda dapat memperkaya koleksi tersebut dengan banyak membaca buku, *searching* di internet maupun saling bertukar pengetahuan bersama teman sejawat.

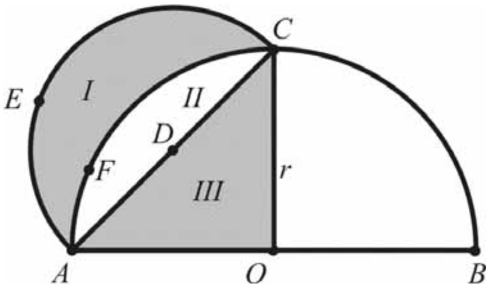
B. Penilaian

Tugas/soal

1. Diskusilah dengan teman sejawat Anda untuk menunjukkan bahwa jumlah dari bilangan-bilangan pada setiap baris, setiap kolom, dan setiap diagonal di dalam persegi ajaib $n \times n$ (order-*n*) n ganjil yang dibuat dengan bilangan bulat secara berurutan mulai dari 1 adalah $\frac{n(n^2+1)}{2}$. Kemudian tentukan bentuk umum/rumus untuk bilangan yang berada ditengah-tengah persegi ajaib tersebut.
2. Sebuah kerangka persegi 3×3 diletakkan pada susunan angka pada kalender. Pada gambar, jumlah bilangan yang terletak dalam kerangka adalah 135 dan bilangan yang di tengah adalah 15. Ketika kerangka tersebut digeser ke posisi baru, jumlah semua bilangan yang ada di dalamnya menjadi 189. Pada posisi ini, berapa bilangan yang ada di tengah? Kerjakan disertai dengan penjelasan secara aljabar, bukan dengan cara coba-coba.

3. Hippocrates (sekitar 470 – 410 SM) telah menyelidiki bentuk bulan sabit yang dikenal dengan *Lune of Hippocrates*. Gambar di bawah (kiri) menunjukkan bangun tersebut. Titik A, C, B terletak pada setengah lingkaran berdiameter AB, O titik tengah AB, OC tegak lurus AB, D titik tengah AC, dan titik A, E, C terletak pada setengah lingkaran berdiameter AC.

Tunjukkan bahwa luas daerah bulan sabit (daerah I) sama dengan luas daerah segitiga AOC (daerah III).



4. Masih ingat aturan permainan sepasang dadu pada pembahasan di atas? (lihat halaman 72). Buatlah aturan permainan dan masalah yang lebih menarik dan lebih menantang yang berhubungan dengan permainan dengan sepasang dadu (atau alat peraga yang lain).
5. Pada gambar di bawah, titik M terletak pada setengah lingkaran berdiameter KL, titik N pada setengah lingkaran berdiameter KM, dan titik P pada setengah lingkaran berdiameter ML. Untuk daerah-daerah yang diarsir, tunjukkan bahwa jumlah luas daerah I dan II sama dengan luas daerah segitiga KLM (daerah III).

Selamat! Anda telah mempelajari seluruh isi modul, mengerjakan latihan dan soal yang diberikan. Anda berhasil mempelajari modul ini jika minimal dapat menyelesaikan 75% dari latihan dan soal yang diberikan pada setiap modul. Jika mendapatkan kesulitan, diskusikan dengan teman sejawat, atau mempelajari kembali materi-materi matematika SMP yang dibutuhkan untuk menyelesaikan soal. Apabila masih juga mendapatkan kesulitan Anda dapat menghubungi penulis melalui alamat e-mail ontongts@yahoo.com atau agusdw70@yahoo.com.

C. Lampiran

Kunci Jawaban/Bantuan.

1. Gunakan rumus jumlah n bilangan asli pertama. Rumus untuk bilangan yang berada ditengah-tengah persegi ajaib persegi ajaib $n \times n$ (order-n) n ganjil adalah $\frac{n^2+1}{2}$.
2. Bantuan: misalkan bilangan yang ditengah adalah x, maka bilangan pada baris kedua adalah $(x-1)$, x, dan $(x+1)$, bilangan pada baris pertama $(x-8)$, $(x-7)$ dan $(x-6)$ serta bilangan pada baris ketiga $(x+6)$, $(x+7)$, dan $(x+8)$.
3. Bantuan: Luas I = Luas setengah lingkaran berdiameter AC – Luas II. Luas II = Luas seperempat lingkaran berjari-jari r – luas segitiga AOC.
4. Adopsi atau adaptasi aturan permainan yang sudah ada kemudian kembangkan dan eksplorasi kemungkinan-kemungkinan yang lainnya.
5. Bantuan: Segitiga KLM siku-siku di M. Luas I = Luas setengah lingkaran berdiameter KM – Luas V. Luas II = Luas setengah lingkaran berdiameter ML – Luas IV. Luas V + Luas IV = Luas setengah lingkaran berdiameter KL – Luas III.

PPPPTK MATEMATIKA

Jl. Kaliurang Km. 6 Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, Yogyakarta
Kotak Pos 31 YKBS Yogyakarta 55281
Telp. (0274) 885752, 881717, 885725, Fax. (0274) 885752
Website: www.p4tkmatematika.org
E-mail: p4tkmatematika@yahoo.com