Untung Trisna Suwaji

Tempat/Tanggal Lahir	: Sleman, 7 Januari 1961
Pendidikan	: S1 Pendidikan Matematika, IKIP Yogyakarta, 1993 S2 Matematika, ITB, Bandung, 2006
Pengalaman sebagai penyaji Seminar/ Workshop	: 1. Seminar dan Workshop "Mathemagics&Internalisasi Alat Peraga sebagai Media Pembelajaran", BEM Pendidikan Matematika, Fak. Tarbiyah, UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta, 2007 2. "Fun Math Seminar", Himpunan Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta, 2008
Pengalaman sebagai Narasumber/Fasilitator	: 1. IHT Media Staf LPMP Pengelola Laboratorium Matematika Jenjang Dasar (2006) 2. Pemanfaatan Komputer sebagai Pembelajaran Matematika SMA (2007) 3. Pelatihan Matematika bagi guru SD Provinsi Riau (2008)

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA YOGYAKARTA

JL. Kaliurang Km.6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, Yogyakarta
KOTAK POS 31 YK-BS Yogyakarta 55281
Telephone : (0274) 885725, 881717, 885752
Faks : (0274) 885752
E-mail : p4tkmatematika@yahoo.com
Website : www.p4tkmatematika.com

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika

Permasalahan Pembelajaran Geometri Datar SMP dan Alternatif Pemecahannya

SMP

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

PAKET FASILITASI PEMBERDAYAAN KKG/MGMP MATEMATIKA

PERMASALAHAN PEMBELAJARAN GEOMETRI DATAR SMP DAN ALTERNATIF PEMECAHANNYA

Penulis:

Untung Trisna Swaji, S.Pd.,M.Si.

Penilai:

Winarno, M.Sc.

Editor:

Sri Wulandari Danubroto, S.Si, M.Pd.

Ilustrator:

Anang Heni Tarmoko

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
YOGYAKARTA 2008

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Dalam menghadapi berbagai permasalahan pendidikan matematika di sekolah, pertama-tama yang mesti dilakukan adalah bagaimana menumbuhkan minat siswa terhadap matematika. Tanpa adanya minat, siswa akan sulit untuk belajar dan kemudian menguasai matematika dengan baik. Berbagai upaya dapat dilakukan untuk menumbuhkan minat siswa terhadap matematika, salah satunya adalah dengan memberikan sesuatu yang menarik bagi siswa. Matematika khususnya geometri, sebenarnya memiliki banyak sisi menarik. Akan tetapi hal tersebut masih jarang ditunjukkan dalam proses pembelajaran matematika.

Upaya lain yang dapat digunakan untuk menumbuhkan minat adalah dengan memberikan kasus ringan yang dapat merangsang investigasi dalam geometri. Salah satu kasus yang sederhana adalah tentang kisah Thales (+/- 600 SM), yang ketika berada di Mesir diminta oleh raja untuk mengetahui tinggi sebuah piramid. Thales kemudian menanti di suatu tempat di siang hari hingga tinggi bayangan tubuhnya sama dengan tinggi tubuhnya sendiri. Pada saat itulah ia kemudian mengukur panjang banyangan piramid yang tentu saja sama dengan tinggi piramid.

Contoh di atas menunjukkan bahwa geometri dapat muncul untuk menjawab persoalan manusia di kehidupan nyata. Oleh karena itu pembelajaran geometri di sekolah yang mengabaikan sisi kemanfaatan dan keindahan menjadikan geometri dipandang sebagai ilmu yang kering dan membosankan.

B. Tujuan penulisan

Tujuan penulisan paket ini adalah agar pembaca mendapatkan bahan-bahan geometri yang menarik, yang dalam pembahasannya tetap menggunakan materi yang sudah tercantum dalam standar isi.

C. Ruang lingkup

Materi dalam modul ini meliputi:
Lintasan terpendek, transformasi bangun datar yang tidak merubah luas, kurva dengan lebar konstan, dan alternatif-alternatif pembuktian teorema Pythagoras.

D. Cara penggunaan paket

Dalam memahami modul ini diharapkan membaca dan mencermati materi yang dibahas dan menyelesaikan soal-soal latihan pada setiap akhir bab dengan urut tanpa melihat kunci jawaban. Dalam mengerjakan soal, jika diperlukan gunakan sketsa gambar sebaik-baiknya agar dapat mempermudah pemecahan permasalahan. Pada bagian akhir modul ini diberikan tes, dan Anda dianggap berhasil mempelajari modul ini jika kebenaran jawaban tesnya telah mencapai minimal 75%. Apabila dalam membaca paket ini mendapatkan kesulitan atau ingin menyampaikan kritik, guru dapat menghubungi penulis melalui e-mail ontongts@yahoo.com, atau melalui surat ke PPPPTK Matematika, Jl. Kaliurang KM 6, Sambisari, Condong Catur, Depok, Sleman, Yogyakarta dengan e-mail p4tkmatematika@yahoo.com.

BAB II

LINTASAN TERPENDEK

A. Tujuan Pembelajaran

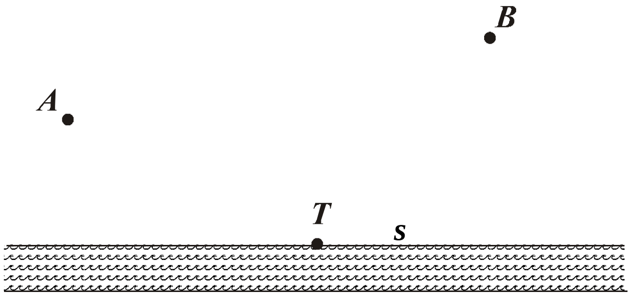
Setelah mempelajari bab ini, diharapkan pengguna modul dapat menyajikan pembelajaran geometri datar dengan pendekatan pemecahan masalah atau pendekatan kontekstual dan memahami alternatif pemecahan masalah lintasan terpendek yang terkait dengan pembelajaran geometri datar di SMP.

B. Permasalahan

Telah diketahui bahwa jarak terpendek antara dua titik adalah garis lurus yang menghubungkan keduanya. Sementara itu, jarak terpendek yang menghubungkan dua titik di permukaan bumi adalah panjang busur lingkaran terbesar di perrmukaan bumi yang melalui kedua titik tersebut. Dalam kehidupan sehari-hari, seringkali seseorang harus menentukan jalur terpendek dalam kaitannya dengan efisiensi waktu dan biaya. Pada bab ini akan diberikan beberapa permasalahan tentang lintasan terpendek yang dalam pembahasannya menggunakan materi geometri SMP.

C. Problem Penunggang Kuda

Problem penunggang kuda merupakan sebuah teka-teki geometri untuk menentukan jalur terpendek yang harus ditempuh. Teka-teki tersebut dapat disajikan dengan kisah sebagai berikut:

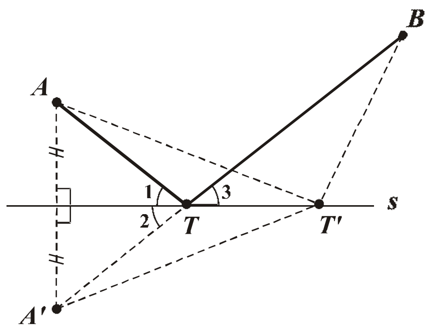


Gambar 2.1. Problem Penunggang Kuda

Seorang penunggang kuda akan berangkat dari kota A menuju kota B yang terletak pada sisi yang sama dari sebuah sungai. Selama dalam perjalanan, ia harus berhenti di tepi sungai (garis s) untuk memberi minum kudanya. Untuk menghemat waktu perjalanan, tentunya penunggang kuda menginginkan agar total jarak yang harus ditempuh seminimal mungkin. Bagaimana menentukan titik pemberhentian di tepi sungai agar total jarak perjalanan menjadi minimum? (Lihat gambar 2.1). Cobalah Anda diskusikan terlebih dahulu bagaimana cara penyelesaiannya!

Alternatif pemecahan

Permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan langkah sebagai berikut:



Gambar 2.2. Lintasan Terpendek AT +

cerminkan titik A terhadap garis s sehingga diperoleh titik A'. Tarik garis melalui A' dan B sehingga memotong s di titik T. Diperoleh titik T sedemikian sehingga $AT + TB$ minimum. Dengan kata lain, T merupakan tempat pemberhentian kuda agar total perjalanan mereka menjadi minimum.

Bagaimana penjelasannya? Untuk menjelaskan bahwa T merupakan titik pemberhentian yang dimaksud, harus dapat ditunjukkan bahwa untuk titik lain (misalkan T') di s yang bukan T akan diperoleh $AT' + T'B$ selalu lebih besar daripada $AT + TB$.

Sesuai dengan sifat pencerminan, maka garis s merupakan garis bagi tegak lurus terhadap AA' dan panjang $AT = A'T$. Untuk titik T' di s yang bukan T, perhatikan bahwa $AT' = A'T'$ dan $A'T + TB$ selalu lebih pendek dari $A'T' + T'B$. Hal ini sesuai dengan sifat segitiga bahwa jumlah dua sisi segitiga selalu lebih panjang daripada sisi yang ketiga. Oleh karena $AT = A'T$ dan $AT' = A'T'$ akibatnya $AT + TB$ selalu lebih pendek daripada $AT' + T'B$.

Bagaimana dengan sudut yang dibentuk oleh *AT* dan *TB* terhadap garis *s*? Perhatikan gambar 2.2, sesuai dengan sifat-sifat sudut dua garis yang berpotongan dan pencerminan dapat disimpulkan bahwa $\angle T_2 = \angle T_3$ dan $\angle T_3 = \angle T_1$ sehingga $\angle T_1 = \angle T_3$. Dengan kata lain, *T* adalah titik dimana *AT* dan *TB* membentuk sudut yang sama terhadap *s*.

D. Permasalahan Steiner (*Steiner's Problem*)

Sebuah permasalahan yang sederhana diutarakan oleh Jacob Steiner dari Universitas Berlin pada awal abad ke-19 sebagai berikut:

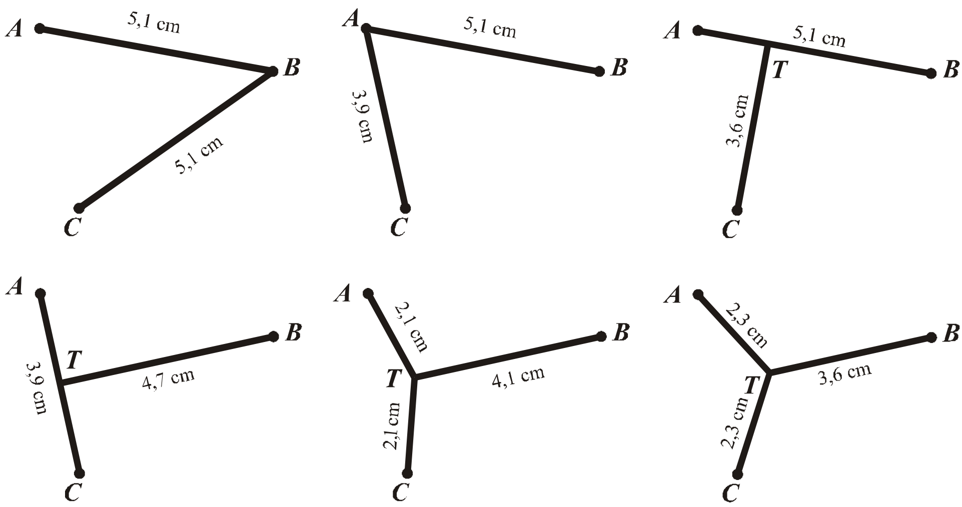
misalkan terdapat tiga desa yang belum terhubung satu sama lain. Suatu jaringan jalur jalan akan dibangun agar ketiga desa tersebut dapat saling berhubungan. Bagaimanakah bentuk jalur jalan agar total panjang jalan menjadi minimum? Cobalah Anda diskusikan terlebih dahulu bagaimana cara penyelesaiannya!

Petunjuk: Anda dapat mencoba berbagai kemungkinan letak ketiga desa tersebut dan mencoba berbagai kemungkinan jalur jalan untuk menghubungkan ketiga desa tersebut.

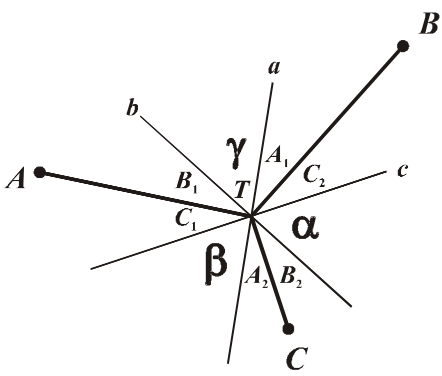
Alternatif pemecahan

Secara matematis, tiga desa pada permasalahan di atas diwakili oleh titik *A*, *B* dan *C* yang berada pada suatu bidang datar. Dalam hal ketiga titik ini membentuk segitiga tumpul dengan sudut lebih besar atau sama dengan 120°, katakanlah sudut itu terletak di titik *C*, maka jalur dengan total panjang minimum yang dapat menghubungkan adalah $AC + CB$. Sementara itu bagaimana dengan segitiga *ABC* yang semua sudutnya kurang dari 120°?

Permasalahan di atas dapat diberikan kepada siswa dalam suatu aktivitas, yaitu dengan memberikan sebuah kertas dengan tiga titik *A*, *B* dan *C* (yang mewakili tiga buah desa) di atasnya. Selanjutnya siswa diminta untuk membuat jalur jalan yang dapat menghubungkan ketiga titik tersebut dan mengukur total panjangnya. Sebagai contoh, pada gambar 2.3 diperlihatkan beberapa contoh jalur jalan yang dibuat siswa ketika kepadanya diberikan tiga buah titik *ABC* dengan jarak *AB* = 5,1 cm, *BC* = 5,1 cm dan *AC* = 3,9 cm. Melalui pengukuran sampai milimeter terdekat, total panjang jalur jalan yang mereka peroleh berturut-turut 10,2 cm, 9 cm, 8,7 cm, 8,6 cm, 8,3 cm dan terakhir 8,2 cm. Dari berbagai kemungkinan dengan cara mencoba-coba tersebut diperoleh hasil bahwa total panjang jalan yang minimum diperoleh jika jalur jalan yang dibuat berbentuk seperti huruf ”Y”.



Gambar 2.3. Kemungkinan Jalur Jalan yang Menghubungkan Tiga Titik *A*, *B* dan *C*.



Gambar 2.4. Lintasan dengan Total Panjang Minimum yang Menghubungkan *A*, *B* dan *C*

Dari contoh hasil pekerjaan di atas, timbul pertanyaan: Bagaimana bentuk jalur jalan agar diperoleh total panjang jalan minimum?

Untuk mendapatkan jawaban pertanyaan di atas, perhatikan gambar 2.4 dan uraian berikut.
Misalkan *T* merupakan titik dimana *TA* + *TB* + *TC* minimum. Lukis garis *a*, *b* dan *c* berturut-turut tegak lurus terhadap *AT*, *AB* dan *AC*.
Perhatikan garis *a*, *BT*, dan *CT*. Titik *T* haruslah terletak pada garis *a* sehingga $BT + TC$ minimum. Hal ini diperloleh jika $\angle A_1 = \angle A_2$ (lihat pembahasan pada problem penunggang kuda).

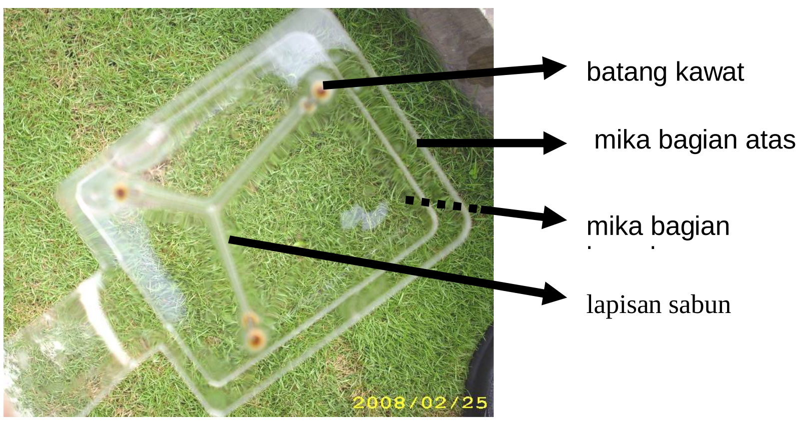
Perhatikan garis *b*, *AT*, dan *CT*. Titik *T* haruslah terletak pada garis *b* sehingga $AT + CT$ minimum. Hal ini diperoleh jika $\angle B_1 = \angle B_2$.
Dengan memperhatikan garis *c*, *BT* dan *AT*, serta dengan alasan yang sama diperoleh $\angle C_1 = \angle C_2$.
Perhatikan garis *a* tegak lurus *AT* dan garis *c* tegak lurus *CT*.

$$\angle C_1 + \beta = 90°$$
$$\angle A_2 + \beta = 90°$$

Akibatnya diperoleh $\angle C_1 = \angle A_2$. Dengan cara yang sama, diperoleh $\angle B_2 = \angle C_2$ dan $\angle A_1 = \angle B_1$. Sehingga diperoleh $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle B_1 = \angle B_2 = \angle C_1 = \angle C_2$. Perhatikan kembali garis a dan AT yang saling tegak lurus. Karena $\angle B_1 = \angle C_1$ akibatnya $\gamma = \beta$. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $\alpha = \beta$ sehingga $\alpha = \beta = \gamma$.

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa ketiga sudut *ATB*, *ATC* dan *BTC* mempunyai besar yang sama, yaitu 120°.
Dengan kata lain, *AT*, *BT* dan *CT* dengan *T* terletak sedemikian rupa sehingga $\angle ATB = \angle ATC = \angle BTC = 120°$ merupakan jalur dengan total panjang minimum yang menghubungkan ketiga titik *A*, *B* dan *C*.

Untuk menunjukkan kebenaran pernyataan di atas, siswa dapat diajak melakukan percobaan dengan menggunakan larutan air sabun dan sebuah alat seperti pada gambar 2.5. Alat ini terbuat dari dua lembaran mika bening yang disusun sejajar dan dihubungkan dengan tiga batang kawat yang tegak lurus terhadap mika. Ketiga batang kawat ini jika dilihat dari atas akan membentuk tiga buah titik yang mewakili titik *A*, *B* dan *C*. Ketika alat ini dimasukkan ke dalam larutan air sabun dan diangkat, maka akan terbentuk lapisan sabun yang menghubungkan batang-batang kawat pada mika. Sesuai dengan sifat fisika dari lapisan selaput air sabun yang stabil jika luas permukaannya minimal, maka jika dilihat dari atas akan terbentuk jalur dengan total panjang minimum yang menghubungkan ketiga titik *A*, *B* dan *C* (lihat gambar 2.5).



Gambar 2.5. Percobaan dengan Air Sabun

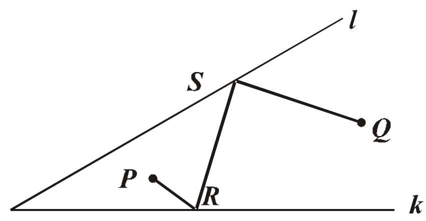
E. Refleksi

Setelah Anda membaca uraian materi di atas, beberapa pertanyaan yang dapat anda renungkan adalah:

1. Seberapa seringkah Anda telah menyampaikan permasalahan kehidupan sehari-hari dalam kaitannya dengan pembelajaran geometri datar?
2. Apakah materi di atas dapat digunakan untuk memberi motivasi kepada siswa agar lebih tertarik mempelajari geometri?

F. Latihan 1

1. Dari seluruh segitiga yang memiliki panjang alas 12 cm dan tinggi 8 cm, segitiga bagaimanakah yang jumlah panjang ketiga sisinya minimum? Berapa jumlah panjang ketiga sisinya?
2. Diberikan dua titik *P* dan *Q* serta dua garis *k* dan *l* seperti ditunjukkan pada gambar di samping. Tentukan titik *R* pada *k* dan *S* pada *l* sehingga *PR* + *RS* + *SQ* menjadi minimum.

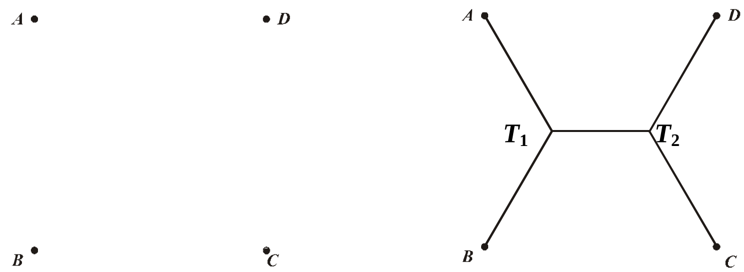


Gambar 2.6.

3. Diberikan sebuah segitiga *ABC* dimana semua sudutnya kurang dari 120°. Titik *T* disebut titik Steiner jika berlaku *AT* + *BT* + *CT* minimum. Berikut ini merupakan langkah untuk menentukan titik Steiner.
   a. Lukis segitiga sama sisi *ABD* dimana *D* dan *C* berseberangan terhadap garis *AB* dan lukis lingkaran luarnya.
   b. Lukis segitiga sama sisi *ACF* dimana B dan F berseberangan terhadap garis AC dan lukis lingkaran luarnya.
   c. Salah satu titik potong lingkaran ini merupakan titik Steiner.

   Lakukan langkah-langkah di atas dan tunjukkan bahwa $\angle ATB$ = 120°.
4. Diketahui tiga titik *A*, *B* dan *C* yang membentuk segitiga tumpul dengan sudut *C* lebih besar atau sama dengan 120°. Bagaimana bentuk jalur dengan total panjang minimum yang dapat menghubungkan ketiga titik tersebut?
5. Berikut ini diberikan empat buah titik *A*, *B*, *C* dan *D* (gambar atas), buatlah jalur jalan selain yang diberikan pada gambar bawah (Anda dapat mecoba beberapa macam jalur jalan). Ukur jalur yang Anda buat sampai ketelitian milimeter terdekat. Dapatkah Anda membuat jalur dengan

total panjang yang lebih pendek dari jalur yang diberikan? Ukurlah sudut AT_1B, AT_1T_2, CT_2D dan T_1T_2D, berapa besarnya?



Gambar 2.7.

BAB III

PROBLEM TRANSFORMASI BANGUN DATAR

A. Tujuan Pembelajaran

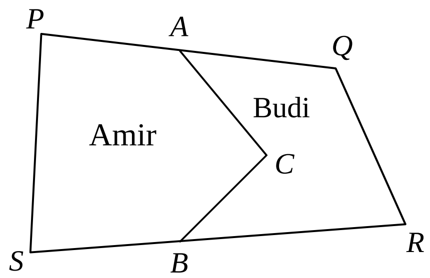
Setelah mempelajari bab ini, diharapkan pengguna modul dapat menyajikan materi luas bangun datar melalui pendekatan pemecahan masalah yang diharapkan akan lebih bermakna bagi siswa.

B. Permasalahan

Dalam pembelajaran tentang luas daerah, seringkali siswa hanya sekedar hafal rumus tanpa memahami maknanya. Akibatnya ketika dihadapkan pada soal *problem solving* tentang luas mereka mengalami kesulitan. Dalam bab ini akan dibahas alternatif pemecahan masalah menentukan luas bangun datar melalui transformasi bangun datar dan memahami paradoks geometri yang berkaitan dengan luas bangun datar.

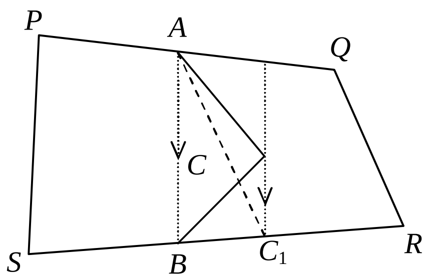
C. Transformasi Bangun Datar dengan Tidak Merubah Luas

Berikut ini adalah contoh masalah sederhana yang dapat dijumpai dalam kehidupan sehari-hari.



Gambar 3.1. Garis Batas yang Tidak Lurus

Pada gambar berikut diberikan denah tanah Pak Amir dan Pak Budi. Batas tanah mereka berupa garis yang tidak lurus. Mereka sepakat untuk mengubah batas tersebut sehingga menjadi sebuah garis lurus. Tunjukkan, bagaimana cara meluruskan batas tanah mereka tanpa mengubah luas tanah masing-masing.



Gambar 3.2. AC_1 merupakan Garis Batas yang Baru

Permasalahan di atas sebenarnya sangat mudah diselesaikan asalkan siswa memahami makna rumus luas segitiga. Pada sebarang segitiga *ABC*, untuk alas *AB* yang sudah ditentukan, kemanapun kita menggeser titik *C*, asalkan dalam arah sejajar dengan *AB*, maka luas segitiga tersebut tidak berubah. Dengan demikian permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan menggeser titik *C* sejajar dengan *AB* sehingga titik *C* terletak pada *SR* atau *PQ*. Pada gambar 3.2. ditunjukkan salah satu alternatif batas baru sebuah garis lurus AC_1. Dapatkah Anda menemukan alternatif yang lain? Cobalah!

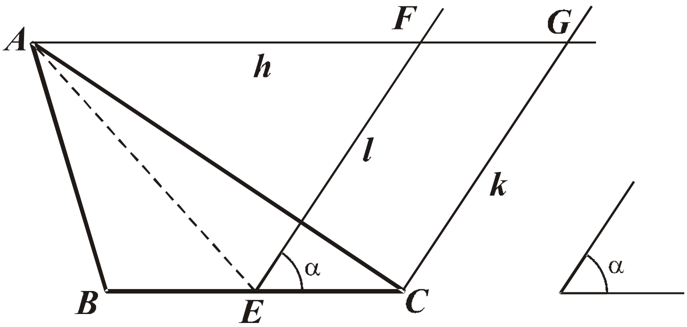
Untuk menambah wawasan dalam hal transformasi bangun datar, berikut ini diberikan beberapa permasalahan transformasi bangun datar ke bentuk yang lain tanpa mengubah luasnya.

Permasalahan 1

Diberikan sebuah segitiga *ABC* dan sebuah sudut α. Lukislah sebuah jajargenjang yang besar salah satu sudutnya sebesar sudut α dan luasnya sama dengan luas segitiga *ABC* yang diberikan.

Konstruksi :

1. Tentukan titik *E* yang merupakan titik tengah *BC*.
2. Lukis garis *l* melalui titik *E* dan membentuk sudut α terhadap garis *CE*.
3. Lukis garis *k* sejajar *l* melalui *C*.
4. Melalui *A* lukis garis *h* sejajar *BC*. Garis *h* memotong *l* di *F* dan memotong *k* di *G*.
5. *ECGH* merupakan jajargenjang yang diminta.



Gambar 3.2.

Bukti :
Segitiga *ABE* dan *AEC* mempunyai luas yang sama karena *BE* = *EC* dan kedua segitiga memiliki tinggi yang sama.

Luas ABE = *Luas AEC*
Luas ABC = 2 × *Luas AEC*.

Sesuai dengan konstruksi di atas, karena $k \,//\, l$ dan *EC* // *FG* maka *ECGF* merupakan jajargenjang dengan salah satu sudut antara dua sisi sebesar α. Misalkan *EC* alas jajargenjang, tinggi jajargenjang sama dengan tinggi segitiga *AEC*.

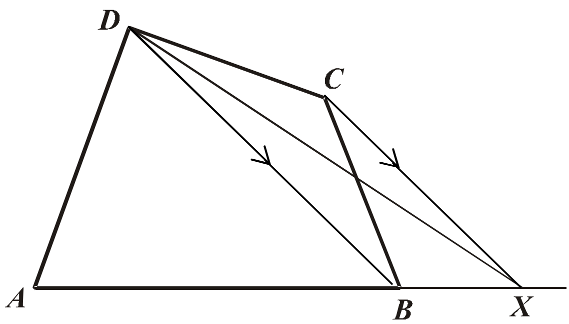
Luas *ECGF* = 2 × Luas *AEC* = Luas *ABC*.

Dengan demikian *ECGF* merupakan jajargenjang yang salah satu dari sudutnya adalah α dan mempunyai luas sama dengan luas segitiga *ABC*.

Permasalahan 2

Diberikan sebuah segiempat *ABCD*, lukislah sebuah segitiga yang luasnya sama dengan luas segiempat yang diberikan.

Konstruksi:



Gambar 3.2.

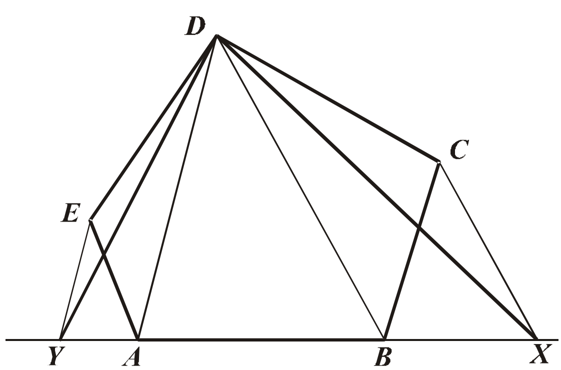
1. Lukis garis *DB*
2. Melalui titik *C* lukis garis sejajar *DB*, sehingga memotong perpanjangan *AB* di *X*.
3. Lukis garis *DX*, diperoleh segitiga *DAX* yang luasnya sama dengan luas segiempat *ABCD*.

Akibat dari pembahasan permasalahan 2 di atas adalah Bukti:
Perhatikan segitiga *DBC* dan *DBX* dengan alas *DB*. Karena *CX* sejajar *DB* maka tinggi kedua segitiga tersebut sama. Akibatnya luas kedua segitiga *DBC* dan *DBX* juga sama.

Luas *DBC* = Luas *DBX*
Luas *ABCD* = Luas *ABD* + Luas *DBC*
= Luas *ABD* + Luas *DBX*
= Luas *AXD*.

Catatan: Perhatikan bahwa penyelesaian permasalahan di atas tidak tunggal. Pembaca dapat mencari penyelesaian-penyelesaian yang lain. Cobalah!

Kita selalu dapat mengubah bentuk segibanyak menjadi sebuah segitiga tanpa merubah luasnya, dengan cara mereduksi sisinya satu per satu sampai akhirnya menjadi sebuah segitiga.
Sebagai contoh, sebuah segilima *ABCDE* dapat diubah menjadi segitiga *YXD* dengan luas yang tidak berubah. Langkah pertama tarik garis melalui *C* sejajar *DB* sehingga memotong perpanjangan *AB* di *X*. Perhatikan bahwa luas segilima



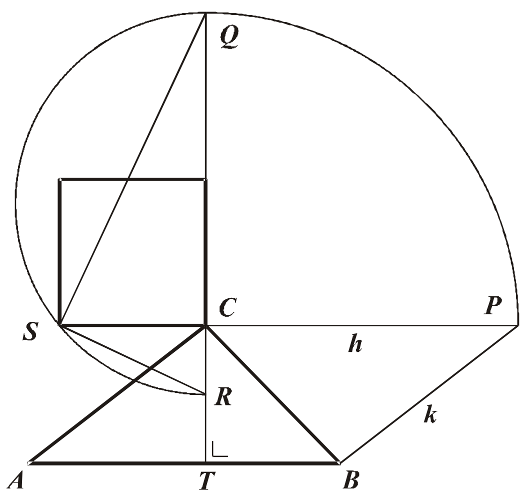
Gambar 3.4

ABCDE sama dengan luas segiempat *AXDE*. Sampai di sini kita sudah merubah bentuk segilima ke segiempat tanpa merubah luasnya. Langkah selanjutnya tarik garis melalui *E* sejajar *AD* sehingga memotong perpanjangan *BA* di *Y*. Didapatkan segitiga *YXD* yang luasnya sama dengan luas segilima *ABCDE*.

Permasalahan 3

Melukis persegi yang luasnya sama dengan luas segitiga yang diberikan.
Diberikan sebuah segitiga, lukislah sebuah persegi yang luasnya sama dengan luas segitiga yang diberikan.

Konstruksi:
Misalkan segitiga yang diberikan adalah segitiga *ABC* dengan alas *AB* dan tinggi *BT*.
Lukis garis *h* melalui *C* sejajar *AB*
Lukis garis *k* melalui *B* sejajar *AC*
Garis *h* dan *k* berpotongan di titik *P*.
Buat busur lingkaran yang berpusat di *C* dan berjari-cari *CP* sehingga memotong perpanjangan *TC* di *Q*, dengan demikian jarak *C* ke *P* sama dengan jarak *C* ke *Q*.
Tentukan titik *R* yang merupakan titik tengah *CT*.
Buat setengah lingkaran dengan diameter *RQ*.
Busur setengah lingkaran ini akan memotong garis *h* di *S*.
Diperoleh ruas garis *CS* yang merupakan sisi persegi yang dimaksud.



Gambar 3.5

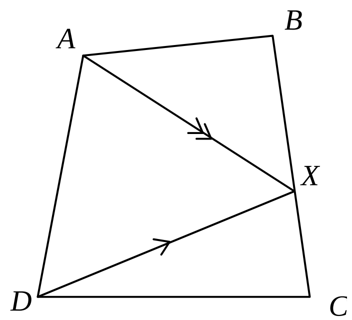
Bukti:

Luas segitiga $ABC = \frac{1}{2} \times AB \times CT$

Perhatikan bahwa $CP = AB = CQ$, $RT = CR$, sehingga
Luas segitiga $ABC = AB \times RT = CQ \times CR$.
QR diameter setengah lingkaran yang melalui Q, S dan R sehingga segitiga QSR siku-siku di S dan berlaku $CS^2 = RC \times CQ$ (mengapa?).
Sementara itu CS^2 merupakan luas persegi dengan sisi CS, akibatnya
Luas segitiga ABC sama dengan luas persegi dengan sisi CS.

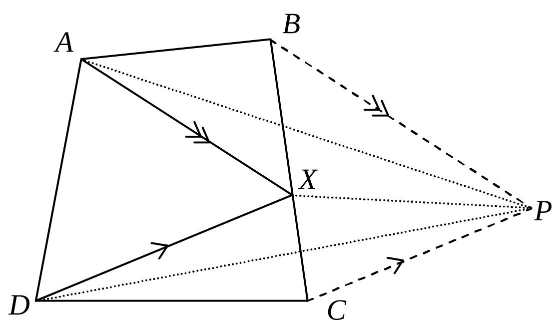
Permasalahan 4

Diketahui X sebarang titik yang terletak di antara B dan C pada sisi BC dari segiempat konvek $ABCD$ (seperti gambar 3.6). Lukis garis melalui B sejajar AX dan garis l yang melalui C sejajar DX. Dua garis ini berpotongan di P. Buktikan bahwa luas segitiga APD sama dengan luas segiempat $ABCD$.



Gambar 3.6

Bukti:



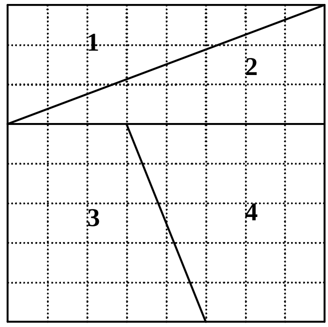
Gambar 3.7

Perhatikan segitiga AXB dan AXP dengan alas AX. Karena BP sejajar AX maka
Luas AXB = Luas AXP.
Perhatikan segitiga DXC dan DXP dengan alas DX. Karena CP sejajar DX maka
Luas AXC = Luas AXP.

Perhatikan segiempat $ABCD$.

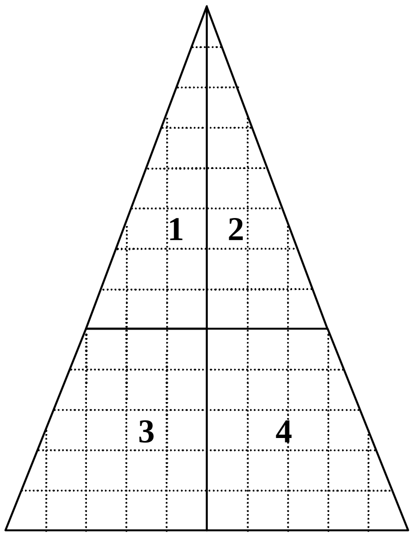
Luas $ABCD$ = Luas AXB + Luas ADX + Luas DXC
= Luas AXP + Luas ADX + Luas DXP
= Luas APD

D. Paradoks Geometri



Gambar 3.8

Sediakan sebuah kertas berpetak dengan ukuran 8×8, potong menjadi empat bagian, 1, 2, 3, dan 4 seperti pada gambar 3.8. Dengan mudah kita dapat menentukan bahwa luas persegi ini adalah 64 satuan. Berikutnya susun kembali potongan-potongan ini sehingga membentuk susunan seperti gambar 3.9. Mungkin sebagian besar dari kita dengan cepat dapat menghitung luas terakhir ini dan mendapatkan hasil 63 satuan luas dengan menggunakan rumus luas segitiga. Dengan kata lain, dengan memotong bangun persegi dan menyusunnya kembali menjadi bangun yang lain (tanpa mengurangi potongan) kita akan mendapatkan luas kedua bangun yang tidak sama. Sebelum Anda membaca lebih lanjut, diskusikan, mengapa hal ini dapat terjadi? Apakah benar potongan-potongan ini dapat membentuk segitiga seperti pada gambar 3.9?



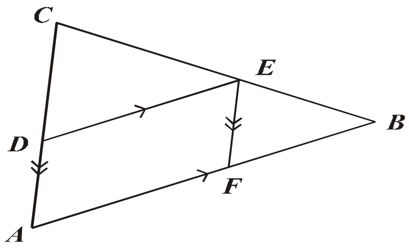
Gambar 3.9

Untuk menyelidiki keanehan di atas, materi-materi prasyarat yang dibutuhkan di antaranya adalah materi tentang sifat garis sejajar, kesebangunan, dan luas-luas bangun datar.

Perhatikan gambar 3.10. Jika pada segitiga *ABC*, dibuat garis *DE* sejajar *AB* dan garis *EF* sejajar *AC*, maka akan didapat:
Perhatikan segitiga *ABC* dan segitiga *DEC*.

$\angle ACB = \angle DCE$ ……………. (1)

Garis *AB* sejajar dengan garis *DE*, akibatnya



Gambar 3.10

$\angle CDE = \angle CAB$ ……………. (2)
$\angle CED = \angle CBA$ ……………. (3)
Dari (1), (2), dan (3) dapat disimpulkan bahwa
ΔABC dan Δ DEC sebangun. …(4)

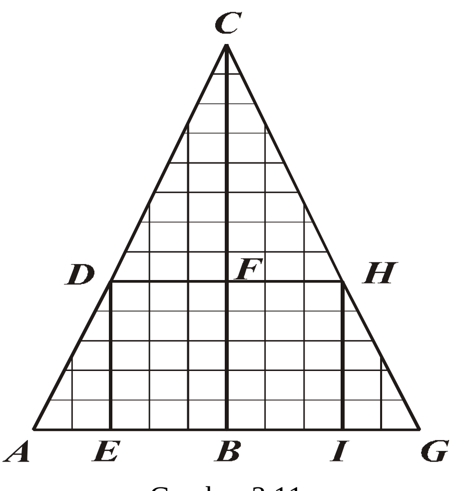
Perhatikan segitiga *ABC* dan segitiga *FBE*
$\angle ABC = \angle FBE$ ....(5)

Garis *EF* sejajar dengan *AC*, akibatnya
$\angle ACB = \angle FEB$..........................(6)
$\angle CAB = \angle EFB$ .... (7)
Dari (5), (6), dan (7) dapat disimpulkan bahwa ΔABC dan Δ DEC sebangun. ……. (8)

Berdasarkan (4) dan (8) maka ΔDEC sebangun dengan ΔFBE. Sebagai akibat dari kesebangunan kedua segitiga ini, dipenuhi $\frac{DE}{FB} = \frac{EC}{BE} = \frac{DC}{FE}$. 9)

Dari uraian di atas kita dapat menyusun suatu pernyataan:

Jika diketahui segitiga *ABC*, *D* terletak pada *AC*, *E* pada *CB* dan *F* pada *AB* sehingga *DE* sejajar *AB* dan *EF* sejajar *AC* (gambar 3.10) maka berlaku $\frac{DE}{FB} = \frac{EC}{BE} = \frac{DC}{FE}$. 10)



Gambar 3.11

Kembali ke masalah perbedaan luas di awal.
Jika tidak diperhatikan secara teliti, maka dengan cepat sebagian besar orang akan menyimpulkan bawa bangun pada gambar 3.11 berbentuk segitiga. Sehingga ketika ditanyakan mengenai luasnya, dengan cepat pula mereka mengaplikasikan rumus luas segitiga.
Andaikan bangun pada gambar 3.11 suatu segitiga, *D* pada *AC*, *F* pada *BC* dan *E* pada *AB*, garis *DE* sejajar *BC* dan garis *DF* sejajar *AB*. Menurut pernyataan 10 haruslah berlaku

$\frac{AE}{ED} = \frac{DF}{FC}$. Sementara itu kalau diperhatikan pada segitiga *AED* dan segitiga *DFC*.

$\frac{AE}{ED} = \frac{2}{5}$, sementara itu $\frac{DF}{FC} = \frac{3}{8}$ sehingga $\frac{AE}{ED} \neq \frac{DF}{FC}$.

Selanjutnya, bagian manakah yang tidak memenuhi? Kalau diselidiki lebih lanjut, jelas *E* pada *AB*, *F* pada *BC*, *DF* sejajar *AB* dan *DE* sejajar *CB*. Dengan demikian satu-satunya kondisi yang tidak dipenuhi adalah *D* terletak pada *AC*. Dengan kata lain *ADC* tidak segaris. Garis *AD* dan *DC* membentuk sudut yang mendekati 180°, sehingga bangun *ABC* pada gambar 4 sebenarnya bukanlah sebuah segitiga *ABC*, melainkan sebuah segiempat *ABCD*. Hal yang sama juga terjadi pada bentuk mirip segitiga *GBC* yang sebenarnya juga merupakan segiempat *BGHC*.

Lebih lanjut, berapakah luas bangun segilima *AGHCD*?

Luas segilima *AGHCD* = luas trapesium *AGHD* + luas segitiga *DHC*

$$= \frac{1}{2} \times (10 + 6) \times 5 + \frac{1}{2} \times 6 \times 8$$

$$= 40 + 24$$

$= 64$ satuan luas.

Cara lain yang mungkin lebih mudah untuk menunjukkan bahwa bangun pada gambar 4 bukan suatu segitiga adalah dengan menggunakan konsep gradien. Pada sebuah garis lurus, dimanapun kita menentukan dua titik yang berbeda maka gradien garis yang menghubungkan kedua titik tersebut selalu sama. Perhatikan bahwa gradien garis *AD* dan *DC* tidak sama sehingga *ADC* tidak segaris.

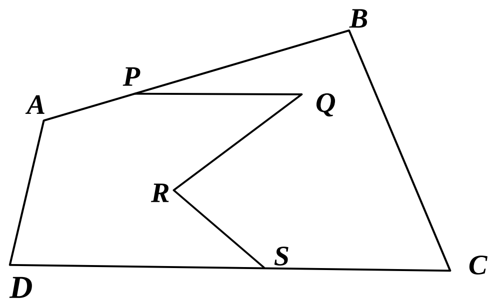
E. Refleksi

Uraian materi di atas adalah mengubah bentuk sebuah bangun menjadi bentuk lain tanpa mengubah luasnya. Cobalah mengidentifikasi, materi dan ketrampilan apa yang diperlukan untuk dapat melakukan transformasi di atas.

Dalam materi tentang paradoks geometri, dengan eksperimen merubah bentuk persegi menjadi “segitiga”, akan terlihat bahwa kadang-kadang indera penglihatan kita tertipu atau kurang cermat dalam mengamati obyek-obyek geometri. Apakah hal ini dapat dijadikan pelajaran bagi siswa bahwa dalam belajar geometri, selain gambar/sketsa yang bagus dibutuhkan pula ketajaman dalam menganalisa obyek geometri?

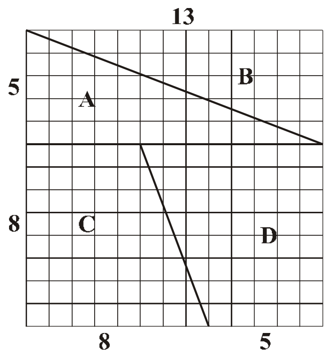
F. Latihan 3

1. Ubahlah segilima *ABCDE* menjadi sebuah persegi tanpa mengubah luasnya.
2. Batas antara sawah Cipto dan sawah Dirman dibatasi oleh garis yang melalui titik *P*, *Q*, *R* dan *S* seperti pada gambar. Untuk memudahkan dalam menggarap sawah, mereka sepakat untuk mengubah batas tersebut sehingga menjadi sebuah garis yang lurus saja. Ternyata hal ini menjadi permasalahan yang sulit bagi mereka. Selanjutnya mereka berdua mendatangi Anda untuk meminta bantuan. Jelaskan bagaimana cara Anda meluruskan batas sawah mereka?

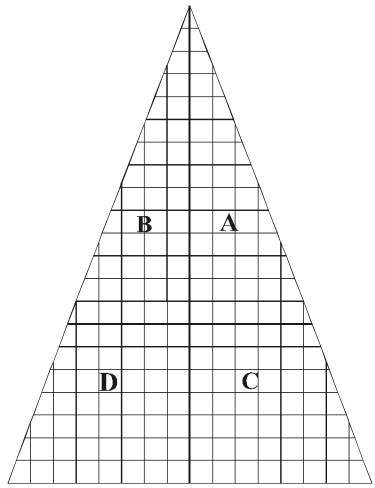


Gambar 3.12

3. a. Ditentukan sebuah persegi dengan ukuran 13×13 satuan dan potong menurut garis tebal seperti yang terlihat pada gambar 3.13. Pindahkan potongan-potongan tersebut sehingga membentuk bangun seperti pada gambar 3.14. Andaikan kita menganggap gambar bagian 3.14 sebagai segitiga, dan menghitung luasnya dengan menggunakan rumus luas segitiga, tentukan luasnya dan bandingkan dengan luas persegi pada gambar 3.13.



Gambar 3.13



Gambar 3.14

b. Tentukan tiga suku berikutnya dari barisan bilangan berikut 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... dan jelaskan bagaimana Anda mendapatkan tiga suku berikutnya. Disebut barisan bilangan apakah ini?

c. Perhatikan panjang sisi siku-siku pada segitiga, panjang sisi sejajar dan tinggi trapesium yang terdapat pada gambar 3.8 dan 3.13 adalah 3, 5, 8 dan 5, 8, 13. Tampak bahwa komposisi panjang sisi segitiga dan trapesium tersebut merupakan tiga suku berurutan dari barisan bilangan pada soal 3.b. Cobalah untuk membuat teka-teki seperti di atas dengan persegi berukuran 21×21 dan dipotong seperti pada gambar 3.13 dengan komposisi panjang sisi segitiga dan trapesium 8, 13 dan 21. Bentuklah potongan-potongan tersebut menjadi ”segitiga” seperti gambar 3.14. Berapakah selisih luas antara bentuk persegi dan ”segitiga” jika dihitung menggunakan rumus luas segitiga?

BAB IV

BANGUN DENGAN LEBAR KONSTAN

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan pengguna modul dapat menyajikan materi bangun datar yang memiliki sifat lebar konstan. Materi ini sebagai alternatif materi pembelajaran geometri datar yang diharapkan menarik bagi siswa.

B. Permasalahan

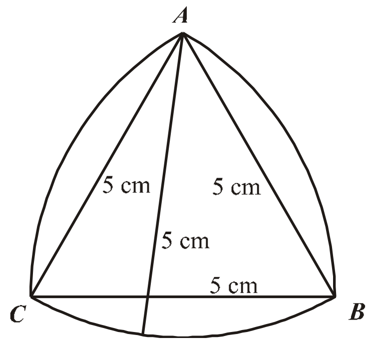
Jika sebuah benda yang sangat berat akan dipindahkan ke tempat yang lain pada sebuah lantai datar, kadang-kadang dibutuhkan sebuah silinder yang penampang melintangnya berbentuk lingkaran sebagai bantalan. Ketika benda tersebut didorong ke depan, ia akan bergerak dengan mulus tanpa ada gerakan naik dan turun. Hal ini karena pada silinder lingkaran, bagaimanapun kita mengukur lebarnya akan selalu memiliki lebar yang konstan.

Benarkah bahwa lingkaran adalah satu-satunya kurva tertutup (bangun) yang memiliki lebar konstan? Ternyata ada tak terhingga banyak bangun-bangun yang memiliki sifat demikian.

C. Konstruksi Bangun dengan Lebar Konstan

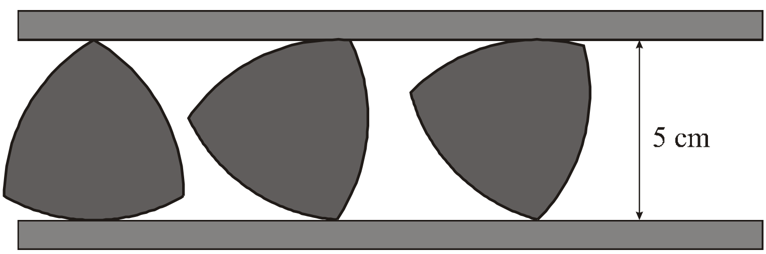
Salah satu kurva tertutup yang memiliki lebar konstan di antaranya adalah segitiga Reuleaux. Pembuktian bahwa segitiga Reuleaux memiliki lebar konstan dapat dilakukan oleh siswa melalui aktivitas *hands on mathematics* sebagai berikut:

Segitiga ini mudah dibuat dengan menggunakan karton. Pertama-tama buat sebuah segitiga sama kaki *ABC* dengan panjang sisi 5 cm. Lukis busur yang berpusat di *A*, dengan ujung-ujung busur di titik *B* dan *C*. Lukis busur yang berpusat di *B*, dengan ujung-ujung busur di titik *A* dan *C*. Lukis busur yang berpusat di *C*, dengan ujung-ujung busur di titik *A* dan *B*. Potong bangun yang telah kita buat.



Gambar 4.1. Konstruksi segitiga Reuleaux.

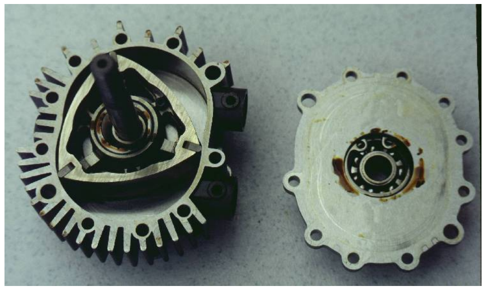
Selanjutnya bagaimana kita mengamati bahwa bangun tersebut memiliki lebar konstan? Ambil dua buah penggaris dan letakkan dengan posisi sejajar dan berjarak 5 cm. Letakkan segitiga Reuleaux di antara dua penggaris dan putarlah. Perhatikan bahwa segitiga tersebut, bagaimanapun posisinya selalu menyinggung kedua penggaris. Hal ini menunjukkan bahwa lebar bangun tersebut selalu tetap.



Gambar 4.2. Segitiga Reuleaux yang digelindingkan di antara dua penggaris sejajar selalu menyinggung kedua penggaris.

Sebagai tambahan, bangun dengan bentuk seperti segitiga Reuleaux telah dijumpai sejak lama. Pada abad ke-13 katedral Notre Dame di Bruges, Belgia memiliki beberapa jendela berbentuk segitiga Reuleaux (Gambar 4.3). Akan tetapi Franz Reuleaux-lah yang pertama kali mendemonstrasikan bahwa segitiga Reuleaux memiliki lebar yang konstan. Aplikasi segitiga Reuleaux yang lebih modern dapat ditemukan pada mesin rotari Wankel (Gambar 4.4) dan penggali Watts, sebuah peralatan teknik (semacam bor) untuk membuat lubang berbentuk persegi.

Gambar 4.3. Jendela di katedral Notre Dame



Gambar 4: Mesin Rotari Wankel

(Sumber Gambar: http://kmoddl.library.cornell.edu/tutorials/02/)

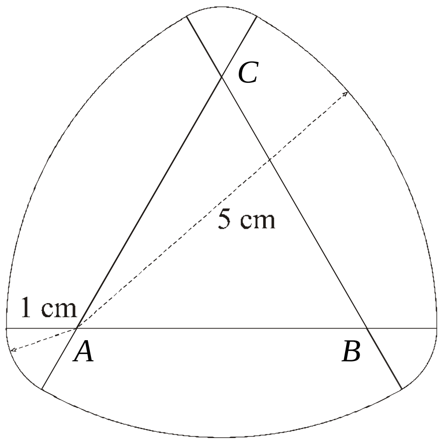
Bangun-bangun serupa dapat dibuat dengan bangun dasar poligon teratur dengan syarat bahwa banyak sisinya ganjil. Salah satu di antaranya adalah koin Inggris yang bernilai nominal 50p (*fifty pence*) dan 20p (*twenty pence*). Koin-koin ini dibuat dengan bentuk dasar heptagon (segitujuh teratur). Karena sifatnya yang memiliki lebar konstan, koin ini dapat digunakan di dalam mesin-mesin slot yang dirancang khusus untuk menerima koin dengan diameter tertentu.

Gambar 4.5. Mata uang Inggris 20p dan 50p.

(Sumber gambar: http://www.ukcoinpics.co.uk)

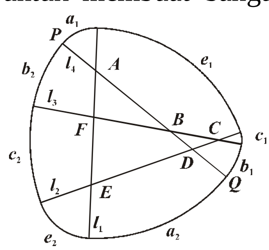
Berikut ini cara lain untuk membuat bangun dengan lebar konstan.

Sebagai contoh, kita awali dengan sebuah segitiga samasisi *ABC* dengan panjang sisi 4 cm. Ketiga sisi ini kemudian diperpanjang pada kedua arah masing-masing 1 cm. Selanjutnya pada masing-masing titik *A*, *B* dan *C* dibuat busur dengan jari-jari 1 cm dan 5 cm, sehingga gambar akhirnya seperti Gambar 4.6 di bawah ini.



Gambar 4.6. Bangun dengan lebar 6 cm

Jika kita perhatikan bangun-bangun yang dibahas di atas mempunyai simetri putar. Yang lebih menarik lagi ternyata kurva dengan lebar konstan tidak selalu memiliki simetri putar. Salah satu cara yang mudah untuk membuat bangun demikian adalah dengan menggambar empat garis berpotongan l_1, l_2, l_3 dan l_4. Beri nama titik potong garis-garis tersebut dengan notasi *A*, *B*, *C*, *D*, *E* dan *F*. Selanjutnya kita gambar busur yang berawal dan berakhir di titik potong busur dengan garis yang membatasinya. Sebagai contoh buat busur a_1 dengan jari-jari sebarang yang berawal dari garis l_4 dan berakhir di garis l_1. Lanjutkan dengan busur e_1 yang berpusat di *E* berawal dari garis l_1 dan berakhir di garis l_2. Berikutnya berturut-turut buat busur b_1 yang berpusat di *B*, busur a_2 yang berpusat di *A*, busur e_2 yang berpusat di *E*, busur c_2 yang berpusat di *C* dan terakhir busur b_2 yang berpusat di *B*. Setiap kali membuat busur-busur tersebut ubahlah jari-jari jangka agar ujung-ujung busur saling bertemu.



Gambar 4.7. Bangun dengan Lebar Konstan yang Tidak Memiliki Simetri

Untuk bangun seperti pada gambar 4.7 yang tidak memiliki simetri putar, kita dapat menunjukkan bahwa bangun tersebut memiliki lebar yang konstan. Perhatikan titik P dan Q yang merupakan perpotongan kurva dengan garis l_4. Dengan rotasi searah jarum jam, putar l_4 dengan pusat rotasi A sehingga berimpit dengan garis l_1, berikutnya putar l_1 dengan pusat E sehingga berimpit dengan l_2, putar l_2 dengan pusat rotasi di C sehingga berimpit dengan l_3 dan terakhir putar l_3 dengan pusat rotasi di B sehingga berimpit di l_4. Selama proses rotasi berlangsung titik P dan Q selalu menyusuri kurva ini. Hal ini menunjukkan bahwa lebar kurva tersebut selalu tetap yaitu sepanjang ruas garis PQ.

D. Keliling Bangun dengan Lebar Konstan

Joseph Emile Barbier menyatakan bahwa semua bangun datar dengan lebar konstan d mempunyai keliling yang sama yaitu πd. Pernyataan ini dikenal sebagai Teorema Barbier (http://www.cut-the-knot.org/ctk/Barbier.shtml). Bukti tentang Teorema Barbier tidak kita bahas dalam modul ini.

Khusus pada segitiga Reuleaux dengan lebar d, dapat dengan mudah dicari kelilingnya.

Perhatikan gambar 4.8,

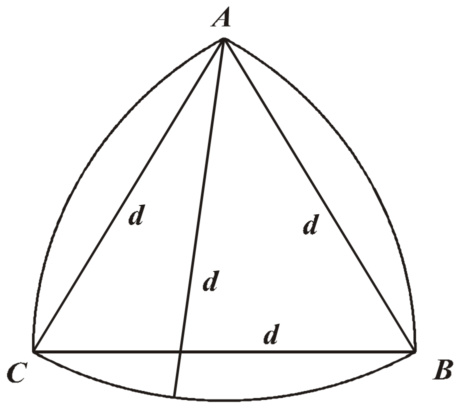
Panjang busur AB = panjang busur BC = panjang busur AC.

Sementara itu segitiga ABC merupakan segitiga sama sisi sehingga $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

Panjang busur $AB = \dfrac{60}{180} \times$ *keliling lingkaran*

$$= \frac{60}{180} \times \pi \times d$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times d$$



Gambar 8. Segitiga Reuleaux dengan lebar d.

Keliling segitiga *Reuleaux* = panjang busur AB + panjang busur AC + panjang busur BC

$= 3 \times$ panjang busur AB

$$= 3 \times \frac{1}{3} \times \pi \times d$$

$= \pi d$

E. Refleksi

Segitiga *Reuleaux* telah dikenal lama, walaupun sebatas sebagai jendela yang artistik pada sebuah bangunan. Namun ternyata di kemudian hari orang menemukan manfaat lain dari segitiga *Reuleaux* yang digunakan pada mesin rotari *Wankel* dan penggali *Watts*. Dalam sejarah peradaban manusia, kadang-kadang konsep matematika ditemukan jauh sebelum manusia mengetahui kegunaannya. Demikian juga dalam belajar matematika di sekolah, terkadang siswa tidak tahu apa kegunaan materi yang dipelajarinya. Namun demikian, materi yang mereka dapatkan suatu saat tentu akan berguna. Apakah fakta tentang segitiga *Reuleaux* dapat digunakan untuk memotivasi siswa dalam belajar matematika?

F. Latihan 3

1. Untuk segitiga *Reuleaux* dengan lebar d, tentukan luasnya. Apakah luasnya lebih besar daripada luas lingkaran dengan diameter d?
2. Sudut antara dua buah kurva yang berpotongan didefinisikan sebagai sudut antara garis singgung kedua kurva pada titik potong tersebut. Tentukan sudut bagian dalam pada segitiga *Reuleaux*.
3. Misalkan sisi sebuah segitiga sama sisi adalah 50 cm. Jika segitiga ini diperbesar sehingga setiap sisi segitiga bertambah 10 cm, dan kemudian dibentuk menjadi bangun dengan lebar konstan, berapakah lebar bangun yang dihasilkan?
4. Dengan sebuah pentagon (segilima teratur) sebagai dasar, buatlah sebuah bangun yang memiliki lebar konstan.

BAB V

BUKTI-BUKTI TEOREMA PYTHAGORAS

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan pengguna modul dapat menjelaskan berbagai pembuktian teorema Pythagoras dan perluasan teorema tersebut pada segitiga sebarang.

B. Permasalahan

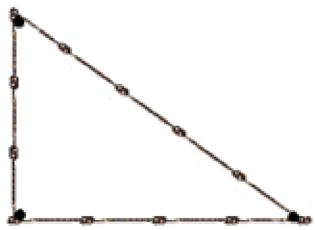
Seringkali siswa hanya sekedar hafal rumus Pythagoras tanpa memahami maknanya dan tidak memahami dari mana rumus tersebut diperoleh. Bagaimana pembuktian teorema Pythagoras? Tahukah Anda bahwa terdapat banyak pembuktian teorema Pythagoras? Apa yang didapatkan jika teorema Pythagoras diperluas tidak hanya untuk segitiga siku-siku?

C. Sekilas mengenai Sejarah Pythagoras

Teorema Pythagoras merupakan salah satu teorema yang telah dikenal manusia sejak peradaban kuno. Nama teorema ini diambil dari nama seorang matematikawan Yunani yang bernama Pythagoras. Pythagoras lahir di pulau Samos, Yunani, sekitar tahun 570 SM. Sesuai dengan nasehat gurunya Thales, Pythagoras muda mengunjungi Mesir sekitar tahun 547 SM dan tinggal di sana.

Selama 21 tahun tinggal di Mesir, ia belajar banyak hal, termasuk geometri. Kemungkinan besar di Mesir pulalah ia mempelajari teorema yang kemudian dinamakan sesuai dengan namanya.

Pythagoras kembali ke tanah kelahiran dan mendirikan sekolah ketika berusia sekitar 55 tahun. Namun karena kekurangan siswa, ia memutuskan untuk pindah ke Croton di selatan Itali dan mendirikan sekolah. Di sekolah ini diajarkan matematika, musik, filsafat serta astronomi dan dikaitkan dengan agama. Sekolah ini mempunyai kurang lebih 600 siswa dan mencapai puncak kejayaannya sekitar tahun 490 SM.



Gambar 5.1. Segitiga Siku-siku yang Dibentuk dari Seutas Tali.

Kembali ke teorema pythagoras. Bangsa Mesir kuno telah mengetahui bahwa segitiga dengan panjang sisi 3, 4 dan 5 akan membentuk sebuah sudut siku-siku. Mereka menggunakan tali yang diberi simpul pada beberapa tempat seperti pada gambar 5.1 dan menggunakannya untuk membentuk sudut siku-siku pada bangunan-bangunan mereka termasuk piramid.

Diyakini bahwa mereka hanya mengetahui tentang segitiga dengan sisi 3, 4 dan 5 yang membentuk segitiga siku-siku, sedangkan teorema yang berlaku secara umum untuk segitiga siku-siku belum mereka ketahui.

Di Cina, Tschou-Gun yang hidup sekitar 1100 SM juga mengetahui teorema ini. Demikian juga di Babylonia, teorema ini telah dikenal pada masa lebih dari 1000 tahun sebelum Pythagoras. Sebuah keping tanah liat dari Babilonia pernah ditemukan dan memuat naskah yang kira-kira berbunyi sebagai berikut: "*4 is length and 5 the diagonal. What is the breadth*?"

Mengapa teorema ini dinamakan sebagai teorema Pythagoras? Walaupun kenyataannya telah dikenal jauh sebelumnya, Pythagoras-lah yang telah membuat generalisasi dan membuat teorema ini menjadi populer.

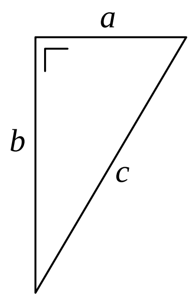
Selanjutnya, bagaimanakah bunyi teorema Pythagoras? Secara singkat teorema Pythagoras berbunyi:

Pada sebuah segitiga siku-siku, kuadrat sisi miring (sisi di depan sudut siku-siku) sama dengan jumlah kuadrat sisi-sisi yang lain.

Perhatikan gambar 5.2, misalkan c merupakan panjang sisi miring sebuah segitiga siku-siku serta a dan b panjang dua sisi yang lain, akan dipenuhi hubungan

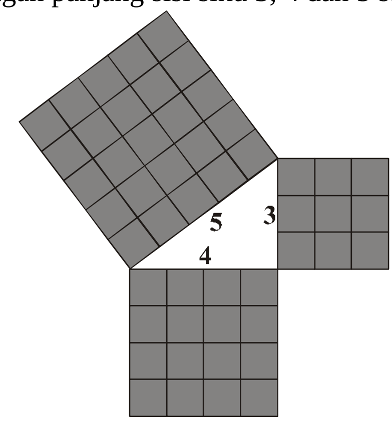
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Sampai saat ini terdapat banyak sekali bukti-bukti teorema Pythagoras baik secara geometri maupun aljabar.



Gambar 5.2.
Segitiga Siku-siku

Berbagai aktivitas dapat dilakukan oleh siswa untuk menunjukkan kebenaran teorema Pythagoras. Selain menggunakan tali seperti bangsa Mesir kuno dan mengukur sudut-sudut segitiga yang terbentuk, dapat juga dilakukan percobaan dengan menggunakan potongan-potongan persegi satuan. Percobaan dilakukan dengan memberikan sebuah segitiga siku-siku dengan panjang sisi siku 3, 4 dan 5 satuan.



Gambar 5.3. Segitiga Siku-siku
dengan panjang sisi 3, 4 dan 5.

Dengan menggabungkan dan memindahkan persegi satuan pada sisi siku ke sisi miring diperoleh hubungan $3^2 + 4^2 = 5^2$. Namun demikian percobaan-percobaan menggunakan persegi satuan hanya dapat digunakan untuk segitiga yang panjang sisi-sisinya memenuhi tripel Pythagoras yaitu bilangan bulat positif a, b dan c yang mempunyai sifat $a^2 + b^2 = c^2$. Komposisi bilangan-bilangan yang membentuk tripel pythagoras diantaranya :

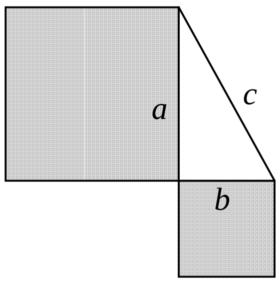
(3, 4, 5)	(5, 12, 13)	(7, 24, 25)	(8, 15, 17)
(9, 40, 41)	(11, 60, 61)	(12, 35, 37)	(13, 84, 85)
(16, 63, 65)	(20, 21, 29)	(28, 45, 53)	(33, 56, 65)
(36, 77, 85)	(39, 80, 89)	(48, 55, 73)	(65, 72, 97)

D. Beberapa Bukti Teorema Pythagoras

Selanjutnya bagaimana kalau segitiga siku-siku yang digunakan tidak memenuhi tripel Pythagoras? Dari sekian banyak bukti dan aktivitas yang menunjukkan kebenaran teorema Pythagoras beberapa di antaranya akan diberikan di sini.

Bukti 1

Bukti teorema Pythagoras dimulai dengan dua buah persegi yang diletakkan berimpit. Perhatikan bahwa jumlah luas kedua persegi adalah $a^2 + b^2$ (Gambar 5.4).

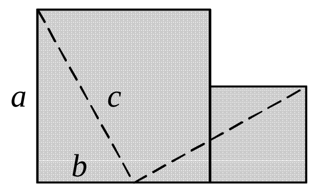


Gambar 5.4

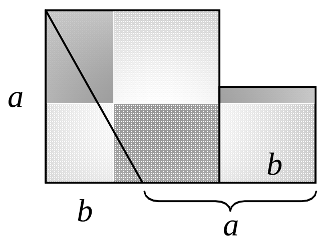
Pindahkan persegi sehingga tampak seperti gambar 5.5.

Potong menurut garis putus-putus seperti pada gambar 5.6.

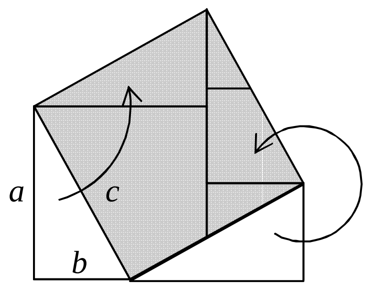
Rotasikan kedua potongan segitiga sehingga membentuk persegi dengan sisi c seperti pada gambar 5.7.



Gambar 5.6



Gambar 5.5

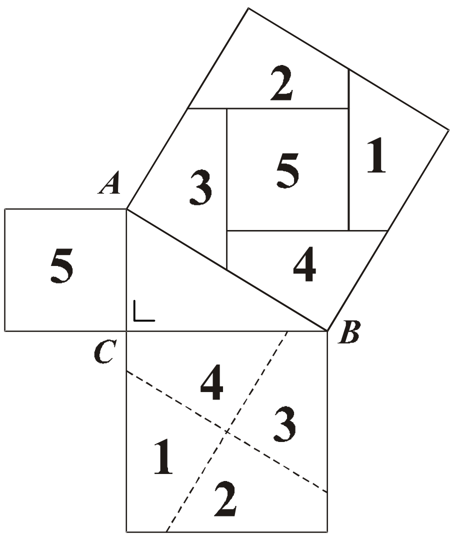


Gambar 5.7

Dengan demikian kedua persegi dengan luas a^2 dan b^2 dapat digabungkan menjadi sebuah persegi dengan luas c^2 melalui pemotongan dan rotasi, sehingga diperoleh hubungan $a^2 + b^2 = c^2$. Terbukti.

Bukti 2

Lukis sebarang segitiga siku-siku *ABC* dengan sudut siku-siku di *C*. Lukis persegi dengan sisi-sisi *AC*, *BC* dan sisi miring *AB* seperti pada gambar 5.8.



Gambar 5.8

Pada persegi dengan sisi *BC*, melalui titik potong kedua diagonalnya buat garis yang sejajar *AC* dan garis yang tegak lurus *AC*. Potong persegi ini menjadi empat buah segiempat yang kongruen.

Pindahkan keempat segiempat kongruen tersebut ke persegi dengan sisi *AB*. Pindahkan juga persegi dengan sisi *AC* ke dalam persegi dengan sisi *AB* sehingga tampak seperti gambar 5.8.

Perhatikan bahwa potongan-potongan persegi dengan sisi *BC* bersama dengan persegi dengan sisi *AC* dapat tepat menempati persegi dengan sisi *AC*.

Dua percobaan pemotongan di atas menunjukkan bahwa jumlah luas kedua persegi pada sisi siku sebuah segitiga akan sama dengan luas persegi pada sisi miringnya. Sementara itu beberapa bukti formal teorema Pythagoras akan diberikan pada bagian berikut.

Bukti 3

Titik-titik *B*, *C* dan *D* terletak segaris Diberikan segitiga *ABC* siku-siku di *C*. Akan ditunjukkan bahwa luas persegi pada sisi miring segitiga *ABC* sama dengan jumlah luas kedua persegi pada sisi siku-sikunya, atau

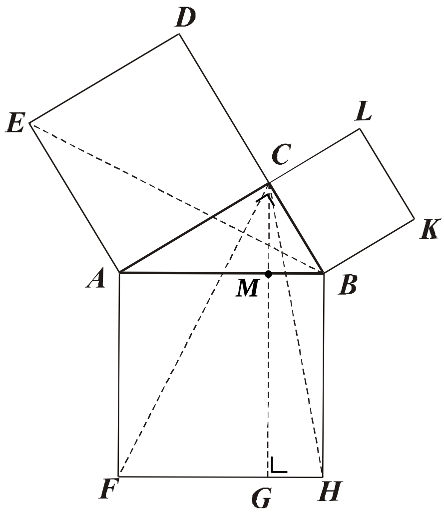
Luas *ABHF* = Luas *ACDE* + Luas *BCKL*

$AB^2 = AC^2 + CB^2$

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa

Luas *ACDE* = Luas *AMGF*, dan Luas *BCLK* = Luas *BMGH*.



Gambar 5.9

Melalui titik C lukis garis CG tegak lurus HF. Lukis garis CF dan BE.

Perhatikan bahwa $\angle BCA$, $\angle ACD$ dan $\angle BCL$ siku-siku, akibatnya dan titik-titik A, C dan L juga segaris.

$\angle EAC = \angle BAF = 90°$

$\angle EAC + \angle CAB = \angle BAF + \angle CAB$

$\angle EAB = \angle CAF$

$CA = EA$, $AB = AF$,

Perhatikan segitiga EAB dan CAF,

$EA = CA$, $AB = AF$ dan $\angle EAB = \angle CAF$. Akibatnya kedua segitiga EAB dan CAF sebangun (sisi-sudut-sisi).

Perhatikan segitiga EAB dengan alas EA. Tinggi segitiga ini sama dengan AC, sehingga luasnya sama dengan setengah luas persegi $ACDE$. Pada bagian lain, tinggi segitiga CAF dengan alas AF, sama dengan AM dimana M titik potong antara AB dengan garis CG. Akibatnya luas segitiga CAF sama dengan luas segitiga MAF atau sama dengan setengah dari luas persegi panjang $AMGF$. Dengan demikian luas persegi $ACDE$ sama dengan luas persegi panjang $AMGF$.

Luas $ACDE$ = Luas $AMGF$.

Dengan cara yang sama, melalui kesebangunan antara segitiga ABK dengan segitiga HBC dapat ditunjukkan pula bahwa

Luas $BCLK$ = Luas $BMGH$.

Dari uraian di atas, diperoleh

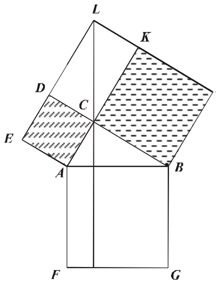
Luas $ABHF$ = Luas $AMGF$ + Luas $BMGH$ = Luas $ACDE$ + Luas $BCLK$

$AB^2 = AC^2 + CB^2$

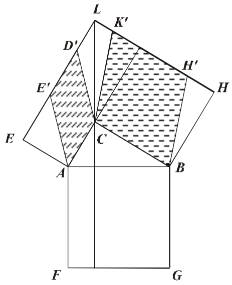
Bukti 4

Bukti berikut merupakan variasi dari bukti nomor 3.

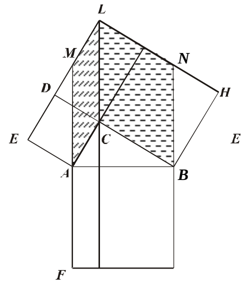
Dimulai dari persegi $ACDE$ dengan luas AC^2 dan $BCKH$ dengan luas BC^2 seperti pada Gambar 5.10.a.



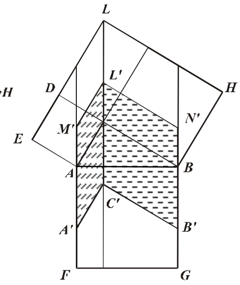
Gambar 5.10.a



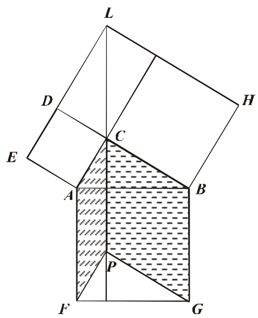
Gambar 5.10.b



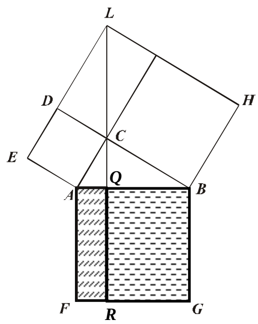
Gambar 5.10.c



Gambar 5.10.d



Gambar 5.10.e



Gambar 5.10.f

Luas persegi *ACDE* tidak berubah jika ditransformasi menjadi jajargenjang $ACDE'$ karena jajar genjang ini mempunyai alas *AC* dan tinggi *AE*. Demikian juga luas persegi *BCKH* tidak berubah ketika ditransformasi menjadi jajargenjang $BCKH'$ (Gambar 5.10.b). Transformasi kedua persegi di atas dapat dilanjutkan tanpa mengubah luas, menjadi jajargenjang *ACLM* dan *BCLN* (Gambar 5.10.c). Sehingga

Luas *ACDE* = Luas *ACLM*
Luas *BCKH* = Luas *BCLN*

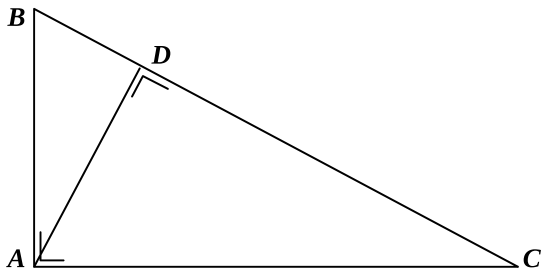
Perhatikan bahwa segitiga *ACB* kongruen dengan segitiga *CDL* (mengapa?). Akibatnya panjang *CL* sama dengan panjang *AF* sehingga jajar genjang *ACLM* dan *BCLN* dapat ditranslasikan tanpa mengubah luas menjadi jajargenjang *ACPF* dan *BCPG* (Gambar 5.10.d dan 5.10.e).

Langkah terakhir dilakukan tranformasi tanpa mengubah luas dari jajargenjang *ACPF* menjadi persegipanjang *AQRF* dan jajargenjang *BCPG* menjadi persegipanjang *BQRG*. Sehingga,

Luas *ACDE* + Luas *BCKH* = Luas *AQRF* + Luas *BQRG*
= Luas *ABGF*

Akibatnya untuk segitiga *ABC* siku-siku di *C* berlaku $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Bukti 5



Gambar 5.11

Bukti ini dimulai dengan sebuah segitiga *ABC* siku-siku di *A*. Lukis garis tinggi *AD*. Dengan menggunakan kesamaan sudut yang bersesuaian dapat dibuktikan bahwa segitiga *ABC*, *BDA* dan *ADC* sebangun. Akibatnya berlaku

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} \quad \text{dan} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC}$$

Bentuk di atas dapat juga dituliskan dalam bentuk yang lain sebagai

$$AB.AB = BC.BD \quad \text{dan} \quad AC.AC = DC.BC$$

Dengan menjumlahkan kedua persamaan di atas diperoleh

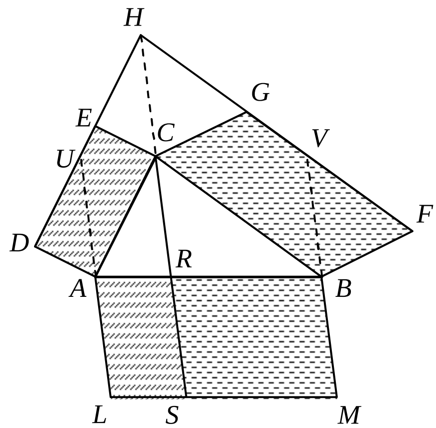
$$\begin{aligned} AB.AB + AC.AC &= BC.BD + DC.BC \\ AB^2 + AC^2 &= (BD + DC).BC \\ AB^2 + AC^2 &= BC.BC \end{aligned}$$

Sehingga $AB^2 + AC^2 = BC^2$

E. Perluasan Teorema Pythagoras

Dengan menggunakan langkah-langkah seperti pada bukti nomor 4, berikut ini merupakan perluasan dari Teorema Pythagoras untuk segitiga *ABC* (tidak harus siku-siku) dan bangun yang terletak pada sisi-sisi segitiga berupa jajargenjang (tidak harus persegi).

Pada segitiga *ABC* yang diberikan, buat jajargenjang *ACED* dan *BCGF*. Perpanjang sisi *DE* dan *GF* sehingga berpotongan di *H*. Lukis jajargenjang *ABML* dengan *AL* sejajar *HC* dan panjang *AL* sama dengan panjang *HC*.



Gambar 5.12. Perluasan Teorema Pythagoras

Dapat dibuktikan bahwa

Luas *ACED* + Luas *BCGF* = Luas *ABML*.

Bukti :

Perpanjang *AL* sehingga memotong *DE* di *U* dan perpanjang pula *BM* sehingga memotong *GF* di *V*. Perpanjang *HC* sehingga memotong *AB* di *R* dan *LM* di *S*.

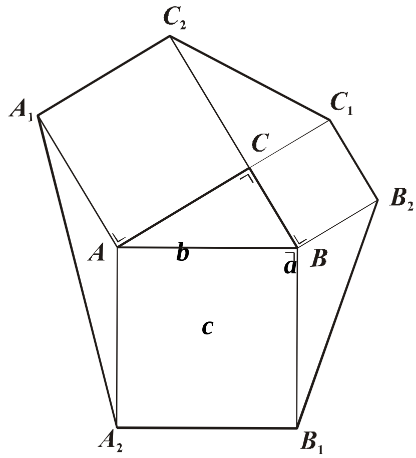
Luas *ACED* = Luas *AUHC* = Luas *ARSL* (mengapa?)
Luas *BCGF* = Luas *BCHV* = Luas *RBMS* (mengapa?)
Sehingga
Luas *ACED* + Luas *BCGF* = Luas *ARSL* + Luas *RBMS*
= Luas *ABML*.

F. Refleksi

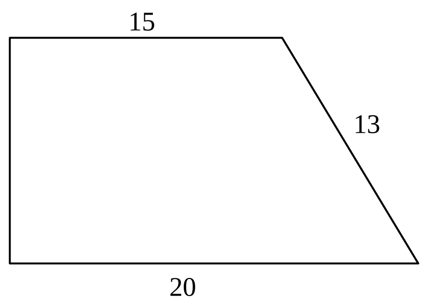
Terdapat banyak cara untuk menunjukkan kebenaran teorema Pythagoras. Dalam salah satu situs internet (http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml) telah disajikan lebih dari 70 pendekatan untuk membuktikan teorema Pythagoras. Cobalah untuk mengakses situs-situs internet untuk mencari alternatif-alternatif pembuktian teorema Pythagoras. Dengan banyaknya pembuktian teorema Pythagoras, dapat menjadi pelajaran bagi kita semua bahwa dalam menyelesaikan persoalan matematika, dapat dilakukan dengan bermacam-macam cara. Apakah Anda akan memberikan penghargaan khusus kepada siswa yang dapat menyelesaikan permasalahan matematika dengan cara yang tidak seperti biasanya?

G. Latihan 4

1. Pada gambar berikut diberikan sebuah segitiga siku-siku *ABC* dan persegi yang terletak pada sisi-sisi segitiga *ABC*. Perhatikan bahwa titik-titik “terluar” ketiga persegi ini membentuk segienam $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$. Jika panjang sisi segitiga dinyatakan dengan *a*, *b*, dan *c*, nyatakan luas segienam $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ dalam *a*, *b* dan *c*.

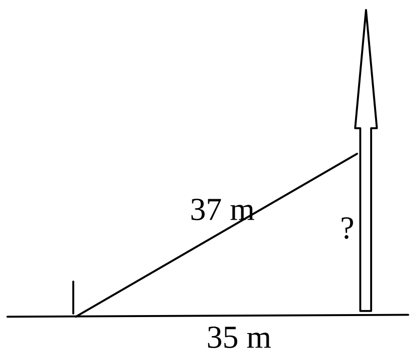


2. Pak Hasan memiliki kolam berbentuk trapesium siku-siku dengan ukuran seperti pada gambar. Ia ingin menabur benih ikan dengan kepadatan 200 ekor per meter persegi. Berapa banyak ikan yang dapat dipeliharanya?

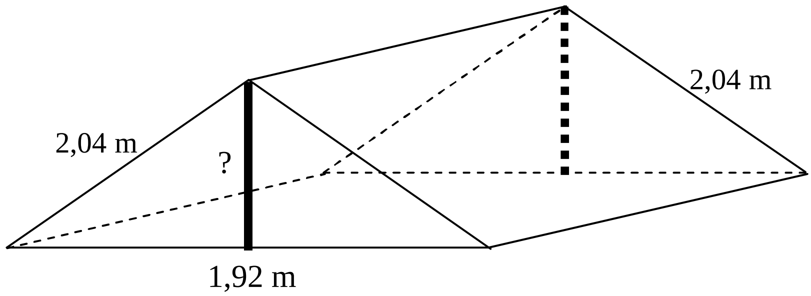


3. Gunakan teorema Pythagoras untuk mencari luas segitiga samasisi dengan panjang sisi 8 satuan panjang.

4. Dalam suatu kegiatan pramuka, para siswa harus merayap pada tali yang dikaitkan pada sebuah pasak dari permukaan tanah ke batang pohon. Jika panjang bentangan tali 37 meter dan jarak antara pasak ke pohon adalah 35 meter, berapakah ketinggian ketinggian kaitan tali di pohon?



5. Pada suatu kegiatan perkemahan,
Budi akan mendirikan sebuah tenda dengan menggunakan tali dan tongkat dengan bentuk seperti pada gambar di bawah ini. Ketika akan dipasang sebagai tiang, ternyata tongkat Budi terlalu pendek. Berapakah panjang tongkat yang seharusnya Budi gunakan?

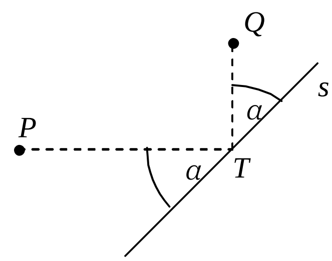

2,04 m
2,04 m
?
1,92 m

BAB VI

PENUTUP

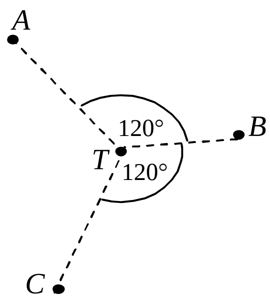
A. Kesimpulan

1. Jika diberikan dua titik *P* dan *Q* yang terletak pada sisi yang sama dari sebuah garis s, maka jalur terpendek yang menghubungkan titik *P* – garis *s* – titik *Q* adalah ruas garis *PT* + *TQ* dengan titik *T* terletak pada *s* sedemikian sehingga sudut antara garis *PT* dan *s* sama dengan sudut antara garis *TQ* dan *s*. Permasalahan ini dapat diselesaikan dengan prinsip pencerminan.



Gambar 6.1. *PT* + *TQ* MerupakanJalur Terpendek yang Menghubungkan *P* – garis *s* – *Q*.

2. Jalur dengan total panjang terpendek yang dapat menghubungkan tiga titik *A*, *B* dan *C*, dengan *ABC* tidak membentuk segitiga yang sudutnya lebih besar atau sama dengan 120° adalah *AT* + *TB* + *TC* dengan titik *T* sedemikian rupa sehingga $\angle ATB = \angle ATC = \angle BTC = 120°$. Sementara itu untuk titik-titik *A*, *B*, dan *C* yang membentuk segitiga dengan sudut yang lebih besar atau sama dengan 120° (misalkan $\angle C \geq 120°$) maka



Gambar 6.2. *AT* + *BT* + *CT* Merupakan Jalur dengan Total Panjang Minimal yang Menghubungkan titik *A*, *B* dan *C*.

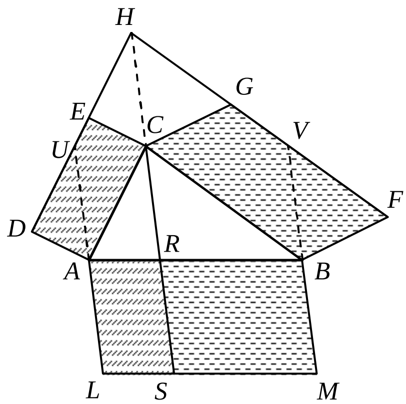
jalur dengan total panjang terpendek yang menghubungkan titik *A*, *B* dan *C* adalah *AC* + *CB*.

3. Jika diberikan sebuah segitiga *ABC* dan sebuah sudut α, maka dapat dilukis sebuah jajar genjang yang salah satu sudutnya α dan luasnya sama dengan luas segitiga *ABC*.
4. Jika diberikan sebarang segiempat *ABCD*, maka dapat dilukis segitiga yang luasnya sama dengan luas segiempat *ABCD*.
5. Jika diberikan sebarang segibanyak, maka dapat dilukis suatu segitiga yang luasnya sama dengan segibanyak yang diberikan.
6. Terdapat tak berhingga bangun-bangun dengan lebar konstan.
7. Bangun dengan lebar konstan *d*, memiliki keliling πd.
8. Teorema Pythagoras dapat dibuktikan kebenarannya dengan banyak cara.
9. Perluasan Teorema Pythagoras:

   Misalkan pada sebarang segitiga *ABC* dibuat jajargenjang *ACED* dan *BCGF*. Titik *H* merupakan perpotongan *DE* dan *FG*.

   Jika dibuat jajar genjang *ABML* dengan *BM* sejajar *HC* dan panjang *BM* = panjang *HC*, maka dapat dibuktikan bahwa

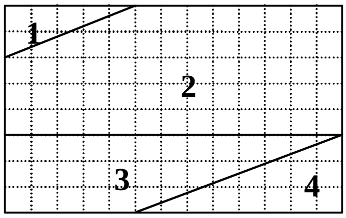
   Luas *BCGF* + Luas *ACED* = Luas *ABML*



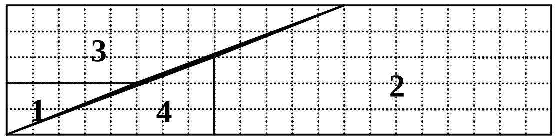
Gambar 6.3. Perluasan Teorema Pythagoras

B. Tes

1. Dengan menggunakan jangka dan penggaris, tentukan tiga titik *A*, *B* dan *C* dengan jarak *AB*, *BC* dan *AC* berturut-turut 10 cm, 9 cm dan 7 cm. Tentukan juga titik Steiner *T*, sehingga *AT* + *BT* + *CT* minimum.
2. Perhatikan kembali soal latihan 1 nomor 2. Setelah Anda menemukan titik-titik *R* pada *K* dan *S* pada *l* yang dimaksud, jelaskan mengapa nilai *PR* + *RS* + *SQ* minimum!
3. Berikut ini diberikan ilustrasi paradoks Langman. Ambil kertas berpetak dengan ukuran 8 × 13 satuan dan buatlah potong menurut garis-garis tebal seperti yang ditunjukkan pada gambar 1.



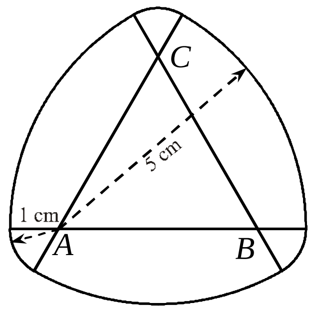
Gambar 1



Gambar 2

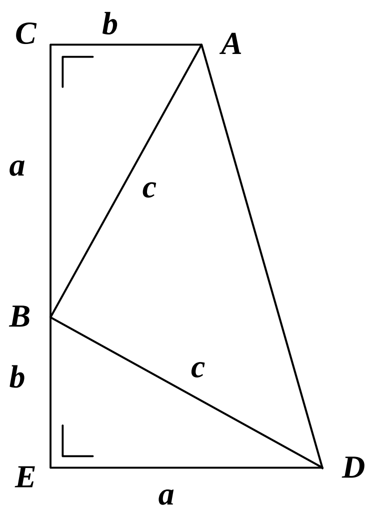
Ubah susunan menjadi seperti pada gambar 2. Hitung luas bangun ini dengan menggunakan rumus luas persegi panjang. Jelaskan mengapa terdapat perbedaan luas antara persegi panjang pada gambar 1 dan gambar 2?

4. Berikut ini diberikan sebuah bangun dengan lebar konstan. Bangun ini berasal dari segitiga samasisi yang diperpanjang sisi-sisinya sehingga membentuk bangun seperti pada gambar. Tentukan luas daerah dan keliling bangun tersebut?



5. Perhatikan dua buah segitiga berikut. Titik C, B, E segaris dan segitiga ABC kongruen dengan segitiga BED. Perhatikan bahwa $ACED$ membentuk trapesium. Misalkan L_{ACED} menyatakan luas trapesium $ACED$,

   a. Tentukan L_{ACED} berdasarkan panjang sisi sejajar dan tinggi trapesium.
   b. Tentukan L_{ACED} dengan cara menjumlahkan luas segitiga-segitiga ABC, BED dan ABD.
   c. Dengan mengeliminasi L_{ACED} dari hasil yang diperoleh pada kedua pertanyaan di atas, hubungan apa yang Anda dapatkan?



(langkah di atas merupakan salah satu bukti teorema Pythagoras yang ditemukan oleh presiden Amerika Serikat J.A. Garfield pada tahun 1876).

Daftar Pustaka

Barbeau, E.J.. Klamkin, M.S.. Moser, W.O.J.. *Five Hundred Mathematical Challenges*. Washington DC: The Mathematical Association of America.

Bogomolny, Alex. 2001. Pythagorean Theorem. http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/ diakses pada Maret 2008.

_______________. 2001. The Theorem of Barbier. http://www.cut-the-knot.org/ctk/Barbier.shtml. diakses pada Maret 2008.

Bolt, Brian. 1994. *Teka-teki dan Permainan Matematika yang Mengasyikkan*. (alih bahasa: Bambang Sumantri). Jakarta: Gramedia.

Courant, H. & Robbins, H.. 1981. *What is Mathematics?*. New York: Oxford University Press.

Daina Taimina & Henderson, D.W.. Reuleaux Triangle. http://kmoddl.library.cornell.edu/tutorials/02/. diakses pada Maret 2008.

Gellert, W.. Kastner, H.. & Helwich, M.. 1977. *The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics*. New York: Van Nostrand Reinhold Company.

Hall, H.S. & Steven, F.H.. 1949. *A School Geometry Parts LVI*. MacMillan and Co. Ltd..

Jim Loy. 1997. The Pythagorean Theorem. http://www.jimloy.com/geometry/ pythag.htm. diakses pada Maret 2008.

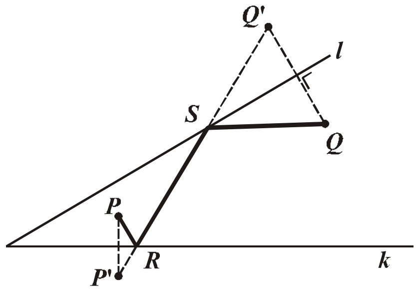
Lampiran

Kunci Jawaban

Latihan 1

1. Segitiga samakaki. Jumlah panjang ketiga sisinya 10 + 10 + 12 = 32 cm.

2. Tentukan titik P' yang merupakan hasil pencerminan titik P terhadap garis k, dan titik Q' yang merupakan hasil pencerminan titik Q terhadap garis l. Titik R dan S berturut-turut terletak pada perpotongan antara $P'Q'$ dengan garis k dan l.



3. Gunakan sifat-sifat sudut keliling dan sudut pusat lingkaran.

4. Jalur dengan total panjang terpendek adalah $AC + CB$.

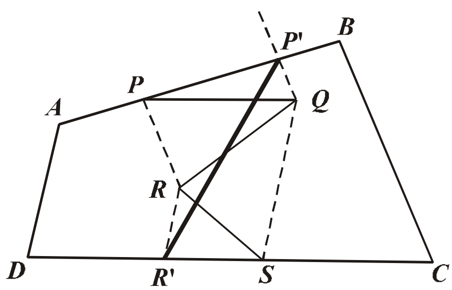
5. Besar $\angle AT_1B = \angle AT_1T_2 = \angle CT_2D = \angle T_1T_2D = 120°$.

Latihan 2

1. Ubah bentuk segilima ke bentuk segitiga tanpa mengubah luasnya seperti pada bab II permasalahan 2. Lanjutkan dengan mengubah segitiga ke persegi seperti pada permasalahan 3.

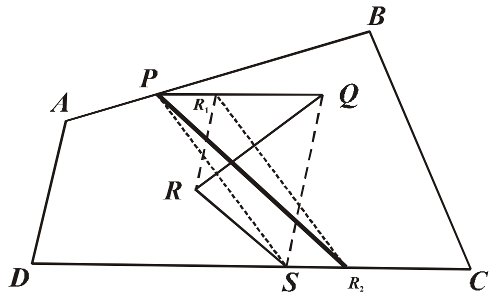
2. Cara 1:

   Tarik garis melalui R sejajar QS sehingga memotong DC di R'. Tarik garis melalui Q sejajar PR sehingga memotong AB di Q'. Batas sawah mereka yang baru adalah garis $P'Q'$.



Cara 2:

Tarik garis melalui R sejajar QS sehingga memotong PQ di R_1. Tarik garis melalui R_1 sejajar PS sehingga memotong DC di R_2. Batas sawah mereka yang baru adalah garis PR_2.



Cara lain masih dapat dilakukan, cobalah!

3a. Luas Persegi = 13 × 13 = 169

Luas "Segitiga" = $\frac{1}{2} \times 16 \times 21 = 8 \times 21 = 168$

Antara luas Persegi dan luas "segitiga" mempunyai selisih 1.

3b. 21, 34, 55.

Suku pertama dan kedua barisan di atas adalah 1, selanjutnya untuk suku ketiga dan seterusnya diperoleh dengan menjumlahkan tepat dua suku sebelumnya (salah satu alternatif jawaban).

Disebut barisan bilangan Fibonacci.

3c. Selisih luas antara bentuk persegi dan "segitiga adalah 1.

Latihan 3:

1. *Luas Segitiga Reuleaux* = 3 × *Luas Juring ABC* – 2 × *Luas segitiga ABC*.

$$= 3 \times \frac{60}{180} \times \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times d \times \frac{1}{2} \times d \times \sqrt{3}$$

$$= \frac{d^2}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}d^2$$

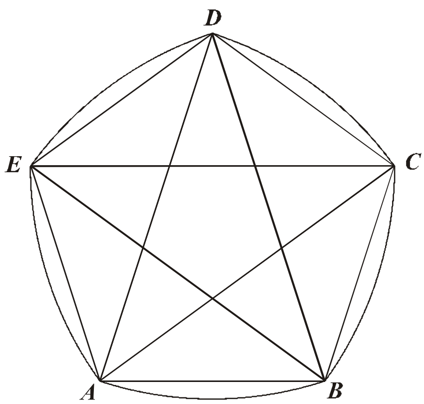
Luas lingkaran dengan diameter $d = \frac{d^2}{4}\pi$

Dengan lebar yang sama, luas segitiga Reuleaux lebih kecil daripada luas lingkaran.

2. 120°.

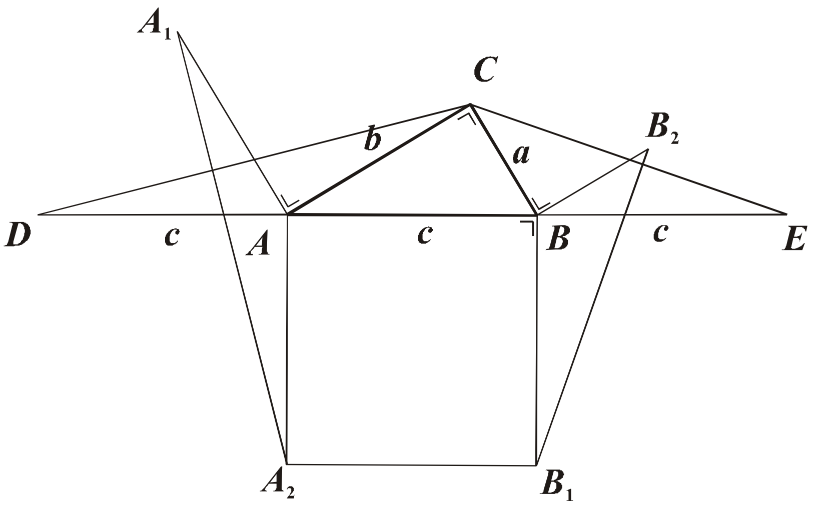
3. 60 cm.

4.



Latihan 4

1. Untuk menentukan luas segienam $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$, terlebih dahulu akan dicari luas segitiga-segitiga CC_1C_2, A_1AA_2 dan B_1BB_2.



Jelas bahwa segitiga *ABC* sama dan sebangun dengan segitiga CC_1C_2 (sisi-sudut-sisi), akibatnya Luas CC_1C_2 = Luas ABC = $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.

Perpanjang sisi AB dengan Panjang *AD* = *BE* = *c*.

Perhatikan segitiga A_1AA_2 dan CAD . Dengan kesamaan sisi-sudut-sisi dapat ditunjukkan bahwa kedua segitiga ini sama dan sebangun.

Sehingga

Luas A_1AA_2 = Luas CAD .

Sementara itu Luas CAD = Luas ABC , akibatnya

Luas A_1AA_2 = Luas ABC = $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa

Luas B_1BB_2 = Luas EBC = Luas ABC = $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.

Luas $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ = Luas ABC + Luas ABB_1A_2 + Luas AA_1C_2C + Luas AA_1C_2C + Luas CC_1C_2 + Luas A_1AA_2 + Luas B_1BB_2

$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + c^2 + b^2 + a^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b$ s

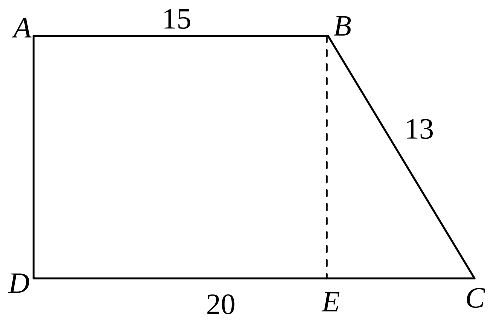
2. Diketahui: Trapesium siku-siku dengan panjang dengan panjang sisi sejajar 15 dan 20 meter, sisi miring 13 meter.

   Kepadatan benih ikan 200 ekor per meter persegi.

   Ditanyakan: Berapakah banyak ikan yang dapat dipelihara?

   Jawab:

   Untuk mengetahui banyak ikan yang dapat dipelihara terlebih dahulu harus dihitung luas kolam.

   Panjang $EC = 5$

   $BE^2 + EC^2 = BC^2$

   $BE^2 + 5^2 = 13^2$

   $BE^2 + 25 = 169$

   $BE^2 = 144$

   $BE = 12$

   Luas $ABCD$ = Luas $ABED$ + Luas BEC

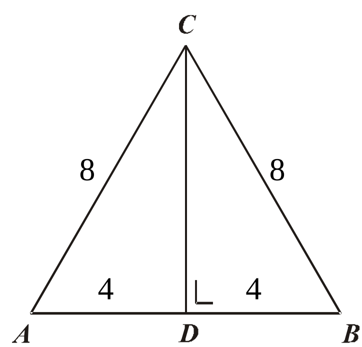
   $$= AB \times BE + \frac{1}{2} \times EC \times BE$$

   $$= 15 \times 12 + \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 180 + 30 = 210 \text{ m}^2$$

   Banyak ikan per meter persegi 200 ekor.

   Jadi banyak ikan yang dapat dipelihara sebanyak 200 × 210 = 42000 ekor.

3. Diketahui: $AB = BC = AC = 8$
   Ditanyakan: Luas segitiga ABC
   Jawab:

   Luas segitiga = $\frac{1}{2} \times AB \times CD$

   $AD = \frac{AB}{2} = 4$

   $CD^2 = AC^2 - AD^2$

   $CD^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$

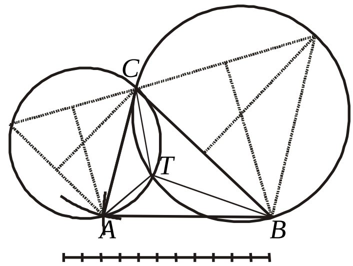
   $CD = \sqrt{48}$

   Jadi Luas segitiga = $\frac{1}{2} \times AB \times CD = \frac{1}{2} \times 8 \times \sqrt{48} = 4 \times \sqrt{48}$.

4. 12 m.
5. 1,8 m.

Tes

1. Langkah:
   a. Lukis segitiga *ABC* dengan panjang sisi 10 cm, 9 cm dan 7 cm.
   b. Lukis segitiga samasisi dengan sisi *BC*, dan lukis lingkaran luarnya.
   c. Lukis segitiga samasisi dengan sisi *AC*, dan lukis lingkaran luarnya.



   d. Salah satu titik potong kedua lingkaran tersebut merupakan titik Steiner T.

2. Petunjuk : Andaikan terdapat titik lain R' pada garis k dan titik S' pada garis l sedemikian rupa sehingga $PR' + RS' + S'Q$ minimum. Dengan menggunakan sifat segitiga dan membandingkan posisi titik R' dan S' dengan titik R dan S, akan diperoleh hasil nilai $PR' + RS' + S'Q$ lebih besar dari $PR + RS + SQ$. Sehingga yang benar adalah **tidak ada** titik lain R' pada garis k dan titik S' pada garis l sedemikian rupa sehingga $PR' + RS' + S'Q$ minimum. Dengan kata lain $PR + RS + SQ$ yang minimum.

3. Petunjuk : perhatikan bahwa garis miring pada gambar 1 tidak sejajar, sehingga ketika dipindahkan susunannya seperti pada gambar 2, terdapat celah yang berbentuk jajar genjang.

4. Petunjuk : Misalkan

   L = Luas bangun dimaksud

   L_1 = Luas sektor berjari-jari 5 cm dan bersudut pusat 60°.

   L_2 = Luas sektor berjari-jari 1 cm dan bersudut pusat 60°.

   L_{ABC} = Luas segitiga *ABC*

   Maka $L = 3L_1 - L_{ABC} + 3L_2$

   Keliling $= 6 \times \pi$ cm

5. a. $L_{ACED} = \frac{1}{2} \times (a+b) \times (a+b)$

   b. $L_{ACED} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$

   c. $a^2 + b^2 = c^2$