Untung Trisna Suwaji

Tempat/Tanggal Lahir	: Sleman, 7 Januari 1961
Pendidikan	: S1 Pendidikan Matematika, IKIP Yogyakarta, 1993 S2 Matematika, ITB, Bandung, 2006
Pengalaman sebagai penyaji Seminar/ Workshop	: 1. Seminar dan Workshop “Mathemagics&Internalisasi Alat Peraga sebagai Media Pembelajaran”, BEM Pendidikan Matematika, Fak. Tarbiyah, UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta, 2007 2. “Fun Math Seminar”, Himpunan Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta, 2008
Pengalaman sebagai Narasumber/Fasilitator	: 1. IHT Media Staf LPMP Pengelola Laboratorium Matematika Jenjang Dasar (2006) 2. Pemanfaatan Komputer sebagai Pembelajaran Matematika SMA (2007) 3. Pelatihan Matematika bagi guru SD Provinsi Riau (2008)

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA YOGYAKARTA

JL. Kaliurang Km.6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, Yogyakarta
KOTAK POS 31 YK-BS Yogyakarta 55281
Telephone : (0274) 885725, 881717, 885752
Faks : (0274) 885752
E-mail : p4tkmatematika@yahoo.com
Website : www.p4tkmatematika.com

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK
DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika

Permasalahan Pembelajaran Geometri Ruang SMP dan Alternatif Pemecahannya

SMP

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK
DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

PAKET FASILITASI PEMBERDAYAAN KKG/MGMP MATEMATIKA

Permasalahan Pembelajaran Geometri Ruang SMP dan Alternatif Pemecahannya

Penulis:
Untung Trisna Suwaji, S.Pd.,M.Si.
Penilai:
Dra. Pujiati, M.Ed.
Editor:
Titik Sutanti, S.Pd.Si.
Ilustrator
Cahyo Sasongko, S.Sn.

Dicetak oleh **Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika**
Tahun 2008

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
YOGYAKARTA

KATA PENGANTAR

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika dalam melaksanakan tugas dan fungsinya mengacu pada tiga pilar kebijakan pokok Depdiknas, yaitu: 1) Pemerataan dan perluasan akses pendidikan; 2) Peningkatan mutu, relevansi dan daya saing; 3) Penguatan tata kelola, akuntabilitas, dan citra publik menuju insan Indonesia cerdas dan kompetitif.

Dalam rangka mewujudkan pemerataan, perluasan akses dan peningkatan mutu pendidikan, salah satu strategi yang dilakukan PPPPTK Matematika adalah meningkatkan peran Kelompok Kerja Guru (KKG) dan Musyawarah Guru Mata Pelajaran (MGMP) serta pemberdayaan guru inti/ guru pemandu/guru pengembang yang ada pada setiap kecamatan, kabupaten dan kota.

Sebagai upaya peningkatan mutu dimaksud maka lembaga ini diharapkan mampu memfasilitasi kegiatan-kegiatan yang terkait dengan implementasi pengembangan pembelajaran matematika di lapangan. Guna membantu memfasilitasi forum ini, PPPPTK Matematika menyiapkan paket berisi kumpulan materi/bahan yang dapat digunakan sebagai referensi, pengayaan, dan panduan di KKG/MGMP khususnya pembelajaran matematika, dengan topik-topik/bahan atas masukan dan identifikasi permasalahan pembelajaran matematika di lapangan.

Berkat rahmat Tuhan Yang Maha Esa, atas bimbingan-Nya penyusunan Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika dapat diselesaikan dengan baik. Untuk itu tiada kata yang patut diucapkan kecuali puji dan syukur kehadirat-Nya.

Dengan segala kelebihan dan kekurangan yang ada, paket fasilitasi ini diharapkan bermanfaat dalam mendukung peningkatan mutu pendidik dan tenaga kependidikan melalui forum KKG/MGMP Matematika yang dapat berimplikasi positif terhadap peningkatan mutu pendidikan.

Sebagaimana pepatah mengatakan, tiada gading yang tak retak, demikian pula dengan paket fasilitasi ini walaupun telah melalui tahap identifikasi, penyusunan, penilaian, dan editing masih ada yang perlu disempurnakan. Oleh karena itu saran, kritik, dan masukan yang bersifat membangun demi peningkatan kebermaknaan paket ini, diterima dengan senang hati teriring ucapan terima kasih. Ucapan terima kasih dan penghargaan setinggi-tingginya kami sampaikan pula kepada semua pihak yang membantu mewujudkan paket fasilitasi ini, mudah-mudahan bermanfaat untuk pendidikan di masa depan.

Yogyakarta,
Kepala,

KASMAN SULYONO
NIP.130352806

DAFTAR ISI

PENDAHULUAN BAB I

A. Latar belakang

Geometri ruang telah diajarkan sejak SD, namun ternyata kemampuan siswa dalam menyelesaikan soal-soal dimensi tiga masih rendah. Sebagai contoh, kadang-kadang siswa tidak dapat mengidentifikasi gambar limas persegi hanya karena penyajian dalam gambar mengharuskan bentuk persegi menjadi bentuk jajargenjang.

Hasil survey *Programme for International Student Assessment* (PISA) 2000/2001 menunjukkan bahwa siswa lemah dalam geometri, khususnya dalam pemahaman ruang dan bentuk. Sebagai ilustrasi, siswa menghadapi kesukaran dalam membayangkan suatu balok yang berongga di dalamnya. Bila dikaitkan dengan kurikulum yang berlaku, porsi geometri memang tidak banyak dan biasanya hanya diajarkan sebagai hafalan dan perhitungan semata (Hendra Gunawan, 2006: 14). Lebih lanjut, dalam hasil *Training Need Assessment* (TNA) Calon Peserta Diklat Guru Matematika SMP yang dilaksanakan PPPPTK Matematika tahun 2007 dengan sampel sebanyak 268 guru SMP dari 15 propinsi menunjukkan bahwa untuk materi luas selimut, volume tabung, kerucut dan bola sangat diperlukan oleh guru, 48,1% guru menyatakan sangat memerlukan. Sementara itu untuk materi luas permukaan dan volume balok, kubus, prisma serta limas, 43,7 % guru menyatakan sangat memerlukan. Sedangkan untuk materi:

1. Sifat-sifat kubus, balok, prisma, dan limas serta bagian-bagiannya,
2. Pembuatan jaring-jaring kubus, balok, prisma, dan limas,
3. Unsur-unsur tabung, kerucut, dan bola,

guru menyatakan memerlukan, dengan prosentase berturut-turut 48,1%, 48,1%, dan 45,9%. (Markaban, dkk., 2007:15).

Sehubungan dengan hal di atas, penulis berusaha memberikan dasar-dasar dimensi tiga terutama yang berkaitan dengan Standar Isi matematika SMP. Untuk masing-masing jenis bangun ruang, diawali dengan konsep dan istilah-istilahnya kemudian dilanjutkan dengan pembahasan tentang luas permuka-an dan volum. Pada beberapa bagian diberikan materi pengayaan seperti bangun ruang terpancung.

B. Tujuan Penulisan

Paket ini disusun dengan harapan dapat memberikan tambahan dan pendalaman materi geometri ruang yang dibutuhkan bagi guru matematika SMP. Penurunan rumus-rumus bangun ruang selain dapat dilakukan secara induktif dapat pula dilakukan secara deduktif terutama dalam hal penurunan rumus-rumus bangun ruang. Dalam pelaksanaan pembelajaran di kelas hendaknya guru dapat menerapkan secara proporsional sesuai dengan kondisi dan standar kompetensi yang akan dicapai siswa. Siswa hendaknya juga memahami proses penurunan rumus agar mereka tidak sekedar hafal rumus.

C. Ruang Lingkup Penulisan

Materi dalam paket ini meliputi materi yang terdapat dalam standar isi ditambah dengan beberapa materi pengayaan. Materi-materi tersebut meliputi bangun-bangun ruang dengan sisi datar seperti kubus, balok, prisma, dan limas, serta bangun-bangun ruang dengan sisi lengkung seperti kerucut, tabung, dan bola. Pada kedua jenis bangun ruang tersebut dibahas tentang konsep, istilah-istilah, luas permukaan, dan volum. Sedangkan materi pengayaan meliputi luas permukaan dan volum bangun ruang terpancung.

D. Cara Pemanfaatan Paket

Paket ini dimulai dengan pembahasan tentang bangun ruang. Pembaca diharapkan mempelajari dengan seksama dan mengkritisi materi yang diberikan serta melakukan refleksi pada setiap akhir bab untuk mengukur sejauh mana materi dapat diserap. Pada bagian akhir bab II dan III diberikan beberapa soal latihan. Kerjakanlah semua soal dan gunakan sketsa gambar sebaik-baiknya agar mempermudah pengerjaannya. Pada bagian akhir paket juga diberikan beberapa soal tes. Anda dianggap berhasil dalam mempelajari paket ini jika mendapatkan skor minimal 75% dari semua soal yang diberikan. Apabila pembaca menemukan kekurangan, mendapatkan kesulitan, atau ingin memberikan kritik, pembaca dapat menghubungi penulis melalui PPPPTK Matematika dengan alamat Jl. Kaliurang KM 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, Yogyakarta, *e-mail* p4tkmatematika@yahoo.com, atau melalui *e-mail* penulis ontongts@yahoo.com.

BANGUN RUANG DENGAN SISI DATAR

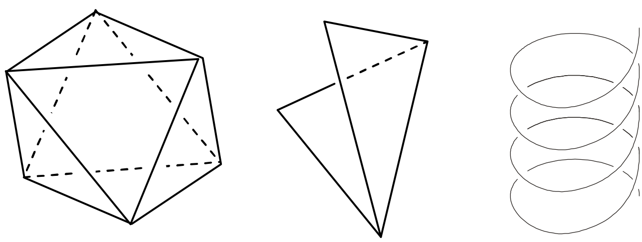
BAB II

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bagian ini, diharapkan pengguna paket lebih menguasai konsep-konsep bangun ruang dengan sisi datar. Beberapa bangun ruang mungkin sulit didefinisikan secara tepat, namun bangun ruang tersebut dapat diidentifikasi melalui sifat-sifat atau proses terbentuknya. Terdapat banyak jenis bangun ruang dengan sisi datar seperti bangun ruang beraturan (*platonic solid*), bangun ruang semi beraturan (*archimedian solid*), prismoid, dan sebagainya, namun dalam bagian ini hanya akan dibahas materi bangun ruang yang terkait dengan geometri ruang di SMP dengan tambahan materi pengayaan di beberapa bagian.

B. Permasalahan

Apakah yang dimaksud bangun ruang (*solid*) dalam konteks geometri dimensi tiga (geometri ruang)? Manakah di antara gambar-gambar di bawah ini yang merupakan bangun ruang?



(i) (ii) (iii)

Gambar A

Sebuah bangun ruang, dalam konteks geometri ruang, adalah himpunan semua titik, garis, dan bidang dalam ruang berdimensi tiga yang terletak dalam bagian tertutup beserta seluruh permukaan yang membatasinya.

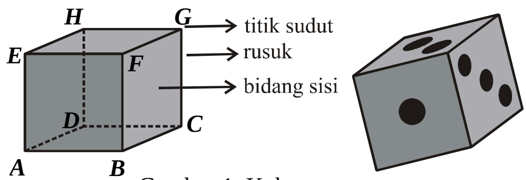
Sesuai dengan ketentuan di atas, maka yang termasuk dalam bangun ruang pada gambar di atas adalah gambar A.(i). Lebih jauh, yang dimaksud dengan bangun ruang dengan sisi datar adalah bangun ruang yang dibatasi oleh bidang datar. Bangun ruang dengan sisi datar disebut juga sebagai bidang banyak atau polihedron yang berasal dari bahasa Yunani *polys* yang berarti banyak dan *hedron* yang berarti permukaan. Bidang-bidang datar pembatas bangun ruang dinamakan sebagai bidang sisi. Ruas garis yang terbentuk oleh perpotongan antara dua bidang sisi bangun ruang disebut rusuk. Ujung-ujung dari rusuk ini dinamakan sebagai titiksudut.

Kembali ke gambar A, dalam konteks geometri ruang, benda seperti pada gambar A.(ii) disebut sebagai permukaan dalam ruang berdimensi tiga, dan gambar A.(iii) disebut sebagai kurva dalam ruang berdimensi tiga.

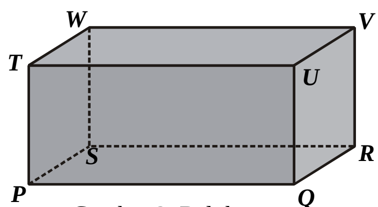
Selanjutnya apakah yang dimaksud dengan kubus, prisma, limas? Bagaimana menentukan volum dan luas permukaannya? Pada bagian ini akan dibahas lebih jauh mengenai kubus, prisma, dan limas.

C. Kubus dan Balok

Kubus merupakan bangun ruang yang dibatasi oleh enam buah persegi yang kongruen. Pada gambar 1 dapat dilihat bahwa kubus memiliki 8 titiksudut dan 12 rusuk dengan panjang yang sama. Contoh yang paling sederhana dari kubus adalah dadu.



Gambar 1. Kubus



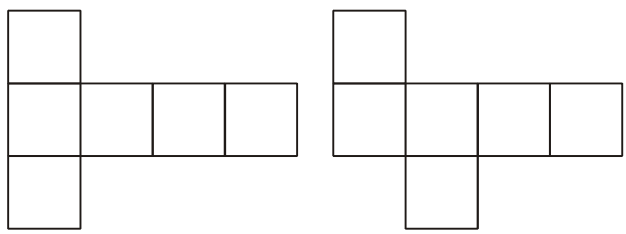
Gambar 2. Balok

Perhatikan gambar 2. Balok mirip dengan kubus, memiliki 8 titiksudut dan 12 rusuk. Balok dibatasi oleh tiga pasang persegipanjang yang kongruen dan masing-masing pasangan yang kongruen ini terletak sejajar. Kubus merupakan kasus khusus dari balok, dengan kata lain, kubus dapat dikatakan sebagai balok yang semua sisinya berupa persegi. Contoh balok dalam kehidupan sehari-hari di antaranya adalah ruang kelas, kotak kemasan karton, dan balok kayu.

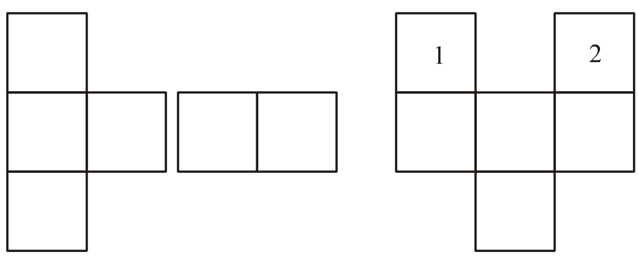
Penamaan kubus dan balok dibuat berdasarkan titik-titiksudutnya. Sebagai contoh kubus pada gambar 1 dapat dituliskan sebagai kubus *ABCDEFGH* (atau *ABCD.EFGH*). Balok pada gambar 2 dapat dinamakan sebagai balok *PQRSTUVW* (atau *PQRS.TUVW*).

1. Jaring-jaring Kubus dan Balok

Jika sebuah polihedron dipotong pada beberapa rusuknya dan dapat dibuka untuk diletakkan pada suatu bidang datar sehingga membentuk susunan yang saling terhubung maka susunan yang terbentuk disebut sebagai jaring-jaring. Sebaliknya, suatu jaring-jaring polihedron dapat dilipat dan disambung untuk membentuk suatu polihedron. Aktivitas untuk menyelidiki jaring-jaring balok dan kubus dapat dilakukan siswa dengan memanfaatkan kotak karton bekas.



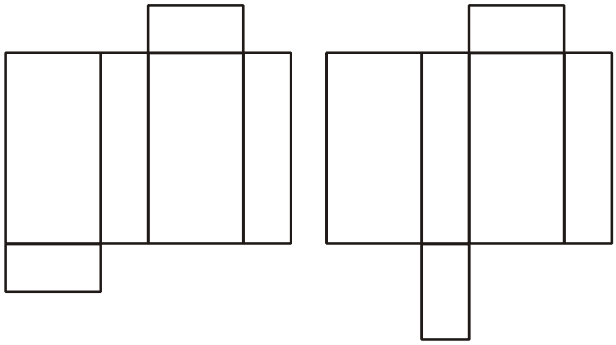
Gambar 3. contoh jaring-jaring kubus



(i) (ii)

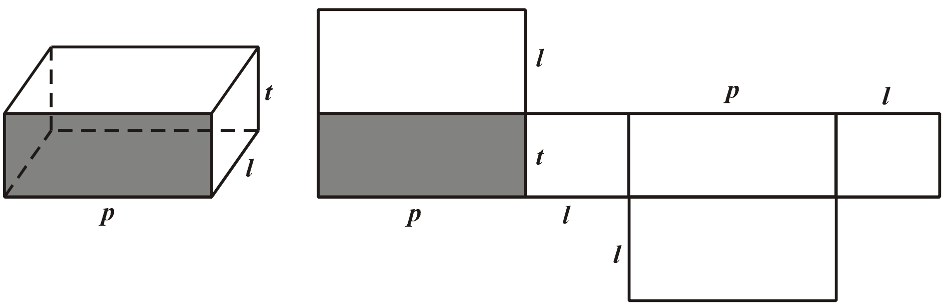
Gambar 4. contoh bukan jaring-jaring kubus

Gambar 4 bukan merupakan jaring-jaring kubus. Pada gambar 4.(i), terdapat bagian yang terpisah, sedangkan pada gambar 4.(ii) jika dilipat, maka terdapat bagian yang saling menumpuk, yaitu persegi 1 dan persegi 2.



Gambar 5. Contoh jaring-jaring balok

2. Luas permukaan balok dan kubus



Gambar 6. Balok dengan ukuran $p \times l \times t$ dan salah satu jaring-jaringnya

Perhatikan gambar 6, jika panjang rusuk balok adalah p, l, dan t, maka

$$\text{Luas permukaan balok} = 2pl + 2pt + 2lt = 2(pl + pt + lt)$$

Untuk kubus, dimana semua panjang rusuknya sama $p = l = t = a$, diperoleh

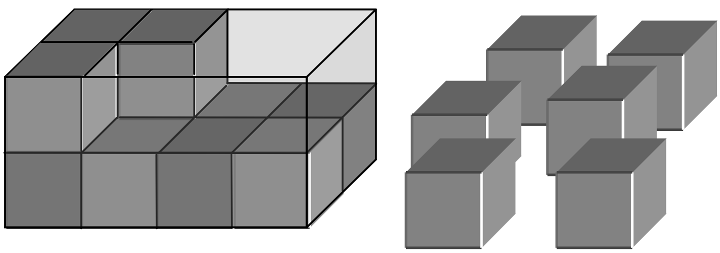
$$\text{Luas permukaan kubus} = 6a^2.$$

3. Volum kubus dan balok

Jika pada geometri datar, luas suatu bangun dinyatakan sebagai banyaknya satuan luas yang dapat menutup bangun datar, maka dalam geometri ruang, volum atau isi bangun ruang dinyatakan sebagai banyaknya satuan isi yang dapat mengisi bangun ruang tersebut. Volum diukur dalam satuan kubik, seperti centimeter kubik (cm^3), inchi kubik (in^3) atau meter kubik (m^3). Satu cm^3 menyatakan volum kubus dengan panjang rusuk 1 cm. Satuan lain untuk volum di antaranya adalah liter (1000 cc), gallon, barel, dan sebagainya. Selain ukuran baku untuk menyatakan volum, dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai juga ukuran-ukuran tidak baku seperti:

- sendok makan (takaran dosis obat)
- tetes (takaran untuk percobaan kimia)
- gelas (dalam masak-memasak)

Pada sebuah balok, percobaan paling mudah untuk menentukan volum adalah dengan menggunakan kubus satuan. Sebagai contoh balok dengan ukuran panjang 3 satuan, lebar 2 satuan dan tinggi 4 satuan dapat diisi dengan menggunakan kubus satuan sebanyak $3 \times 2 \times 4$ buah. Sehingga dikatakan balok tersebut mempunyai volum 24 satuan volum.



Gambar 7. Percobaan Menentukan Volum Balok $3 \times 2 \times 4$ dengan Kubus Satuan

Melalui proses percobaan mengisi kubus satuan ke balok dalam berbagai ukuran, secara umum volum balok dengan panjang p, lebar l, dan tinggi t dapat dinyatakan sebagai

$$Volum\ Balok = p \times l \times t$$

Mengingat bahwa alas balok berbentuk persegipanjang dengan luas $A = p \times l$, maka volum balok dapat juga dinyatakan sebagai hasil kali luas alas dengan tinggi balok.

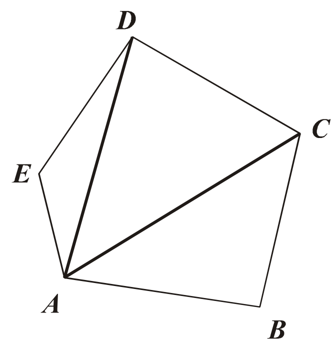
$$Volum\ Balok = A \times t$$

Oleh karena pada kubus dengan panjang rusuk a berlaku $p = l = t = a$, maka volum kubus dapat dinyatakan sebagai

$$Volum\ Kubus = a^3$$

4. Diagonal sisi, diagonal ruang dan bidang diagonal

Dalam geometri datar, diagonal pada sebuah segi-banyak (poligon) merupakan garis yang menghubungkan dua titiksudut yang tidak berdekatan. Sebagai contoh, pada segilima *ABCDE* (gambar 8), garis *AD* merupakan diagonal. Demikian juga dengan *AC*. Sementara itu *AE* bukan diagonal dari segilima, karena titik *A* dan *E* terletak berdekatan (terletak pada ruas garis yang sama). Diagonal ruang suatu bangun ruang merupakan garis yang menghubungkan dua titiksudut yang tidak berdekatan (tidak terletak pada satu bidang sisi). Sebagai contoh, pada gambar 9, *HB* merupakan diagonal ruang dari balok *ABCDEFGH*. Oleh karena itu dalam kubus dan balok terdapat tiga istilah diagonal, yaitu diagonal sisi, diagonal ruang, dan bidang diagonal.



Gambar 8. Diagonal Segilima

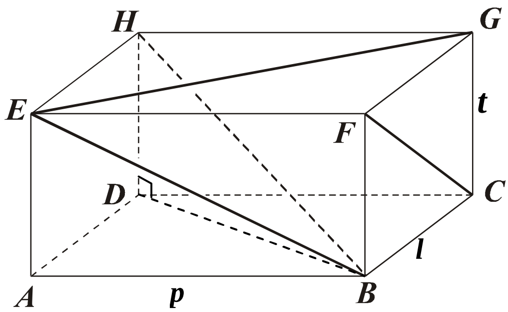
Terdapat 12 diagonal sisi dan 6 diagonal ruang pada balok dan kubus. Keduabelas diagonal sisi pada balok dan kubus membentuk enam buah bidang diagonal.

Perhatikan balok dengan ukuran $p \times l \times t$ pada gambar 9, ruas garis *EB*, *EG,* dan *FC* merupakan tiga dari duabelas diagonal sisi pada balok *ABCDEFGH*. Dengan menggunakan teorema Pythagoras, dapat ditentukan

$$\begin{aligned} Panjang\ EB &= \sqrt{p^2 + t^2} \\ Panjang\ EG &= \sqrt{p^2 + l^2} \\ Panjang\ FC &= \sqrt{l^2 + t^2} \end{aligned}$$

Pada gambar 9, *HB* merupakan satu di antara empat buah diagonal ruang balok *ABCDEFGH*. Perhatikan bahwa segitiga *HDB* siku-siku di *D*, akibatnya panjang diagonal ruang suatu balok dapat ditentukan dengan menggunakan teorema Pythagoras.

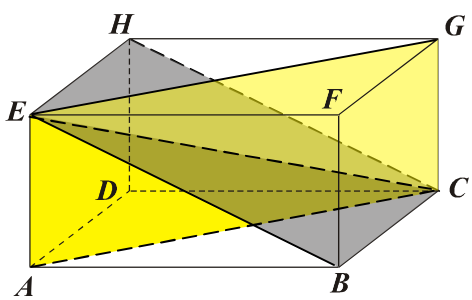
$$HB = \sqrt{DB^2 + DH^2} = \sqrt{(AB^2 + AD^2) + DH^2} = \sqrt{p^2 + l^2 + t^2}$$



Gambar 9. Diagonal sisi dan diagonal ruang balok

Bidang
diagonal suatu balok berbentuk persegipanjang. Pada gambar 10 diberikan dua dari tiga pasang bidang diagonal balok *ABCDEFGH*. Perhatikan bahwa setiap pasang bidang diagonal tersebut kongruen. Akibatnya:

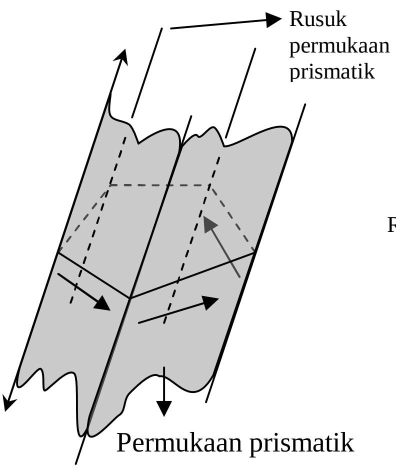
$$\begin{aligned} Luas\ BCHE = Luas\ ADGF &= BC \times EB = l \times \sqrt{p^2 + t^2} \\ Luas\ ACGE = Luas\ DBFH &= GC \times AC = t \times \sqrt{p^2 + l^2} \\ Luas\ ABGH = Luas\ CDEF &= AB \times BG = p \times \sqrt{l^2 + t^2} \end{aligned}$$



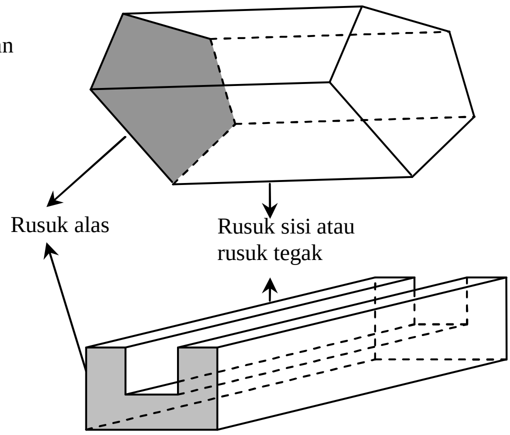
Gambar 10. Bidang diagonal *ACGE* dan *BCHE* .

D. Prisma

Perhatikan gambar 11! Jika sebuah garis lurus bergerak dalam ruang, tanpa perubahan arah garis dan mengikuti keliling suatu segi-*n*, maka jejak yang terbentuk dinamakan permukaan prismatik (*prismatic surface*). Ketika garis yang bergerak ini tepat melalui titiksudut segi-*n*, maka garis ini merupakan rusuk permukaan prismatik.



Gambar 11. Permukaan Prismatik



Gambar 12. Prisma dan bagian-bagiannya

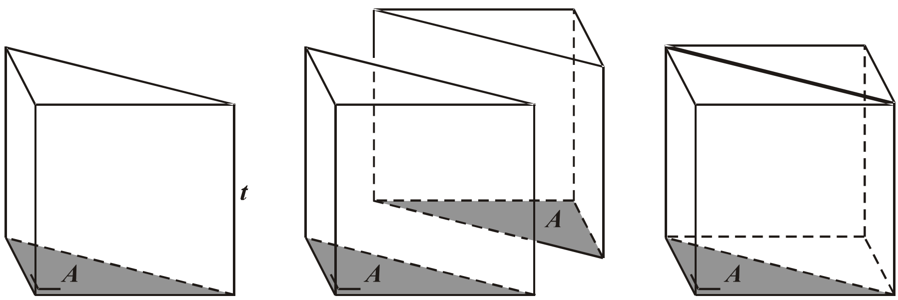
Jika sebuah bidang datar memotong permukaan prismatik beserta seluruh rusuk-rusuknya, maka akan terbentuk sebuah segi-*n*. Jika terdapat sebuah bidang lain yang sejajar bidang pertama memotong permukaan prismatik, maka perpotongan yang terbentuk akan kongruen dengan segi-*n* yang pertama. Dua segi-*n* yang kongruen dari hasil perpotongan di atas, bagian permukaan prismatik yang berada di antara keduanya, beserta seluruh ruang tertutup yang dibatasinya membentuk prisma segi-*n* (gambar 12). Dua segi-*n* ini disebut alas dan tutup, sedangkan permukaan prismatik di antara keduanya disebut sisi prisma. Tinggi prisma dinyatakan sebagai jarak antara bidang alas dan bidang tutup. Rusuk-rusuk yang terletak pada sisi prisma dinamakan rusuk sisi dan rusuk yang terletak bagian alas dinamakan sebagai rusuk alas. Jarak antara bidang alas dan tutup merupakan tinggi prisma. Apabila rusuk-

rusuk sisi prisma tegak lurus terhadap alas, maka dinamakan sebagai prisma tegak, dan selain yang demikian, dinamakan sebagai prisma miring.

Jika tanpa penjelasan, maka yang dimaksud dengan prisma dalam paket ini adalah prisma tegak, yaitu prisma dengan rusuk sisi tegak lurus bidang alas. Perhatikan bahwa balok juga termasuk prisma, yaitu prisma yang alasnya berbentuk persegipanjang. Demikian juga dengan kubus. Prisma diberi nama menurut bentuk alasnya. Contoh: prisma segitiga samasisi, prisma segienam beraturan, prisma segilima beraturan.

1. Volum prisma segitiga siku-siku

Volum prisma segitiga siku-siku dapat dicari dengan membuat dua buah prisma segitiga siku-siku yang kongruen sehingga dapat dibentuk menjadi sebuah balok.



Gambar 13. Proses menentukan Volum prisma segitiga siku-siku

Perhatikan gambar 13! Misalkan V merupakan volum prisma segitiga siku-siku dengan luas alas A. Jika dua buah prisma segitiga siku-siku digabungkan menurut sisi miring alas maka akan terbentuk sebuah balok dengan luas alas $2 \times A$.

$$\begin{aligned} 2 \times V &= \text{volum balok} \\ &= \text{luas alas} \times \text{tinggi} \\ &= (A + A) \times t \\ &= 2A \times t \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

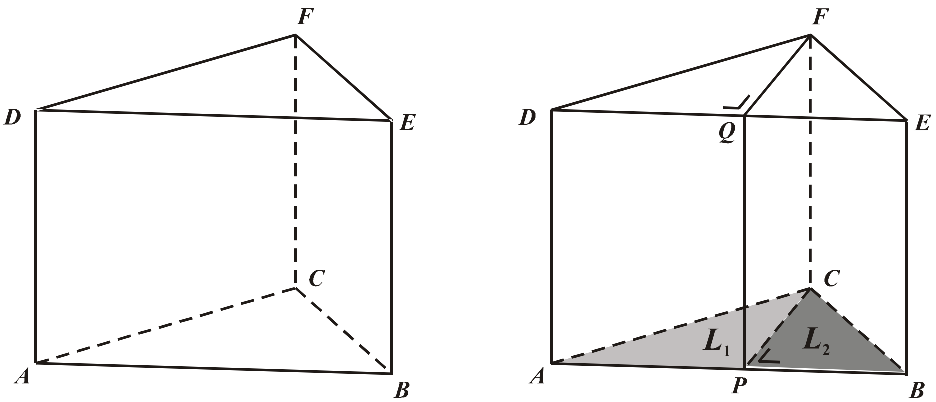
$$V = A \times t,$$

atau

Volum prisma segitiga siku-siku = luas alas × tinggi.

2. Volum prisma segitiga sebarang

Berdasarkan volum prisma segitiga siku-siku yang telah diperoleh, selanjutnya volum prisma segitiga sebarang dapat ditentukan dengan cara membagi prisma tersebut menjadi dua buah prisma segitiga siku-siku. Sebagai ilustrasi, pada gambar 14 diberikan prisma segitiga sebarang dengan alas segitiga *ABC* yang dibagi menjadi dua prisma segitiga siku-siku dengan alas segitiga *APC* dan *CPB*.



Gambar 14. Volum prisma segitiga sebarang diperoleh dengan membagi prisma menjadi dua buah prisma segitiga siku-siku.

Misalkan volum prisma *ABCDEF*, *APCDQF*, dan *CPBFQE* berturut-turut dinyatakan sebagai Vol_{ABCDEF}, Vol_{APCDQF} dan Vol_{CPBFQE} maka

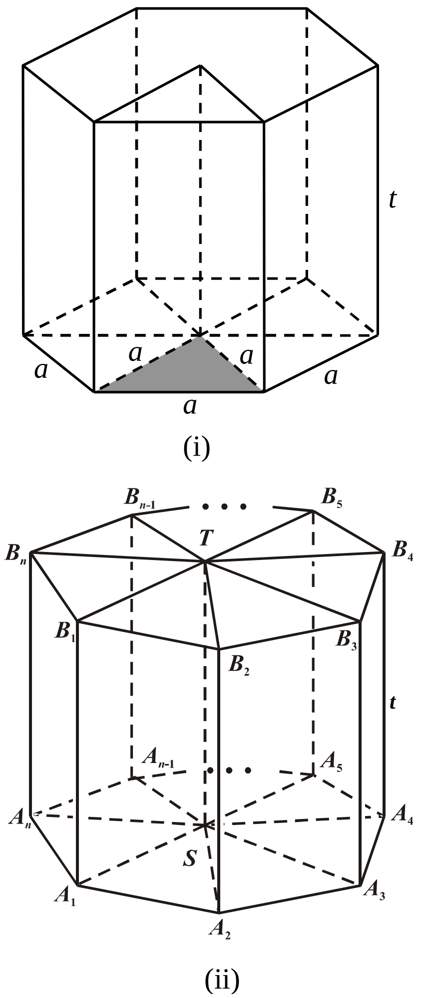
$$\begin{aligned} Vol_{ABCDEF} &= Vol_{APCDQF} + Vol_{CPBFQE} \\ &= Luas\ \ APC \times t + Luas\ \ PCB \times t \\ &= L_1 \times t + L_2 \times t \\ &= (L_1 + L_2) \times t \\ &= Luas\ segitiga\ ABC \times tinggi \end{aligned}$$

Jadi, secara umum

$$\textit{Volum prisma segitiga} = \textit{Luas alas} \times \textit{tinggi}$$

3. Volum prisma segi enam dan segi-*n*

Setelah rumus volum prisma segitiga sebarang diketahui, selanjutnya dapat diturunkan rumus untuk prisma segi-*n* dengan jalan membaginya menjadi prisma-prisma segitiga. Sebagai contoh, misal diketahui prisma segi enam beraturan dengan panjang rusuk alas *a* dan tinggi prisma *t* (gambar 15.(i)). Perhatikan bahwa alas segi enam ini dapat dipecah menjadi enam buah segitiga samasisi dengan panjang sisi *a*. Dengan menggunakan teorema Pythagoras untuk menentukan tinggi segitiga, luas masing-masing segitiga dapat ditentukan yaitu



Gambar 15. Volum prisma segi enam dan segi-*n*

$\textit{Luas segitiga} = \dfrac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

$\textit{Luas segienam} = 6 \times \textit{Luas segitiga}$

$= 6 \times \dfrac{a^2}{4}\sqrt{3}$

$= \dfrac{3}{2}a^2\sqrt{3}$

Sehingga,

$\textit{Volum prisma segienam} = \dfrac{3}{2}a^2\sqrt{3} \times t$

$\textit{Volum prisma segienam} = \dfrac{3}{2}a^2 t\sqrt{3}$

Secara umum untuk prisma segi-n, misalkan:
V menyatakan volum prisma segi-n,
V_1 menyatakan volum prisma segitiga $A_1A_2SB_1B_2T$, dan L_1 menyatakan luas A_1A_2S,
V_2 menyatakan volum prisma segitiga $A_2A_3SB_2B_3T$, dan L_2 menyatakan luas A_2A_3S,
dan seterusnya untuk V_3, V_4, ...
V_n menyatakan volum prisma segitiga $A_nA_1SB_nB_1T$, dan L_n menyatakan luas A_nA_1S, dan
L menyatakan luas segi-n, maka

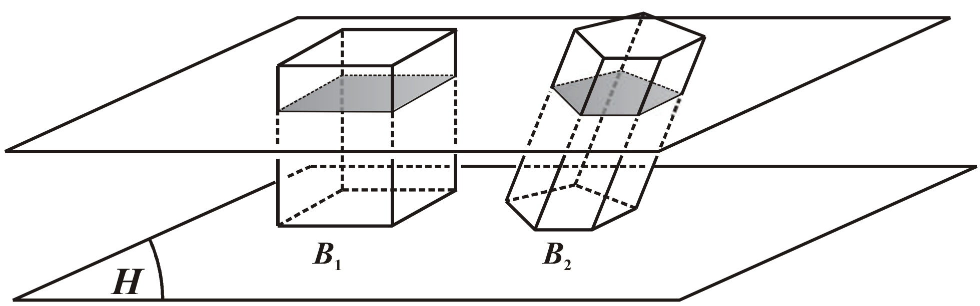
$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n \\ &= L_1 \times t + L_2 \times t + L_3 \times t + \ldots + L_n \times t \\ &= (L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_n) \times t \\ &= L \times t \end{aligned}$$

Jadi secara umum berlaku

Luas prisma segi-n = Luas alas prisma × tinggi.

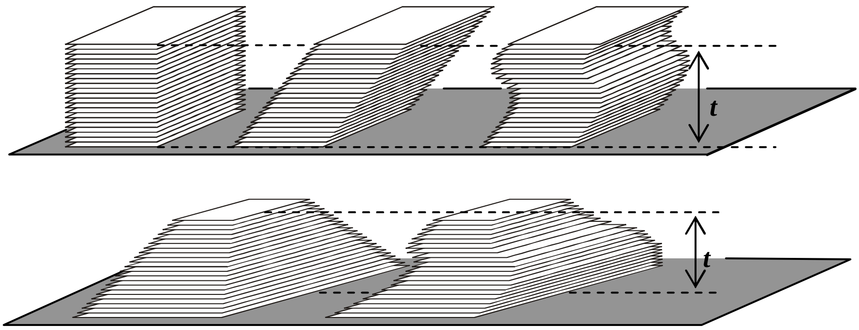
4. Prinsip Cavalieri

Misalkan dua bangun ruang B_1 dan B_2 terletak pada suatu bidang datar H. Jika setiap bidang yang sejajar H memotong kedua bangun ruang dan hasil perpotongannya mempunyai luas yang sama, maka Volum B_1 = Volum B_2



Gambar 16. Prinsip Cavalieri

Untuk memudahkan pemahaman tentang prinsip cavalieri gunakan dua tumpukan kertas dengan tinggi yang sama. Satu tumpukan membentuk balok, sedang satu tumpukan lagi dibuat berkelok atau miring.



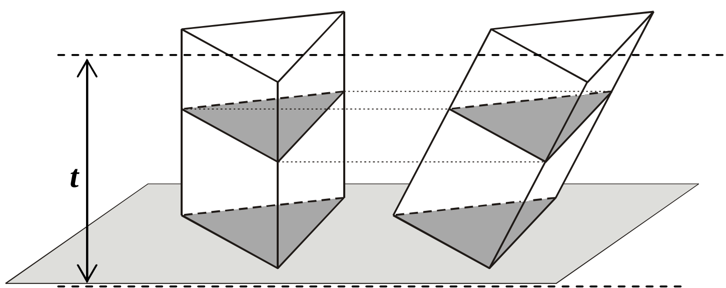
Gambar 17. Ilustrasi Prinsip Cavalieri dengan Tumpukan Kertas

Perhatikan contoh pada gambar 17, ketiga tumpukan kertas memiliki ketinggian yang sama. Jika setiap mengambil kertas ke-*n* dari bawah dari ketiga tumpukan diperoleh luas kertas yang sama, maka volum ketiga tumpukan tersebut sama besar.

5. Volum Prisma Miring

Untuk menentukan volum prisma miring, buat prisma tegak dengan alas dan tinggi yang sama. Setiap bidang sejajar alas memotong kedua prisma, diperoleh hasil perpotongan yang sama dan sebangun (sehingga luasnya sama). Sesuai dengan prinsip Cavalieri, maka volum kedua prisma sama. Dengan demikian diperoleh

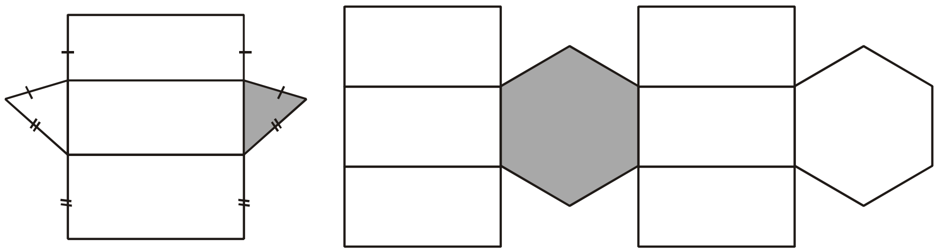
Volum prisma miring = *Luas Alas* × *tinggi*



Gambar 18. Volum Prisma Miring

6. Jaring-Jaring dan Luas Permukaan Prisma

Berikut ini merupakan contoh jaring-jaring prisma segitiga dan segienam beraturan.



Gambar 19. Jaring-jaring Prisma

Melalui ilustrasi dua jaring-jaring prisma di atas, maka luas permukaan prisma dapat ditentukan dengan jalan menjumlahkan luas sisi prisma, luas tutup, dan luas alas.

Luas permukaan prisma = luas sisi prisma + luas alas + luas tutup

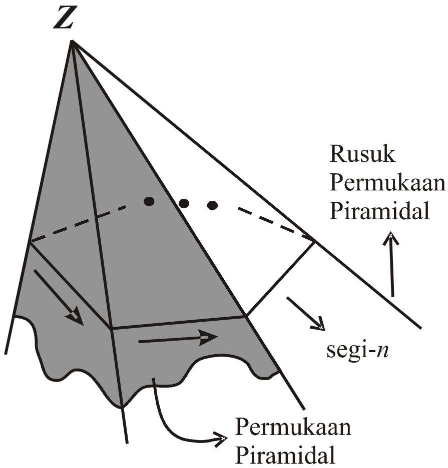
Luas permukaan prisma = (*keliling alas* × *tinggi prisma*) + 2 × *Luas alas*

E. Limas (Piramida)

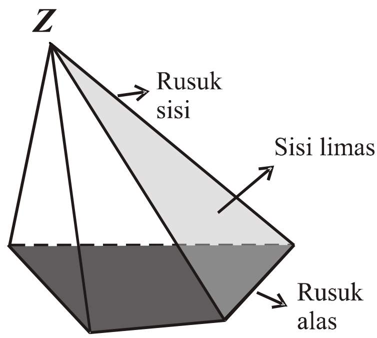
Jika sebuah sinar garis berpangkal di titik Z bergerak dengan titik pangkal tetap melalui ruas-ruas garis sisi segi-n, maka jejak yang terbentuk merupakan permukaan piramidal. Sinar garis yang melalui titiksudut segi-n dinamakan sebagai rusuk permukaan piramidal. Segi-n bersama titik Z dan bagian permukaan piramidal yang terletak di antara keduanya beserta seluruh titik yang dibatasinya membentuk limas.

Segi-n dari limas ini dinamakan sebagai alas, titik Z disebut puncak limas, dan permukaan piramidal yang menjadi bagian dari limas dinamakan sisi limas. Ruas garis yang menghubungkan puncak dengan sudut-sudut alas dinamakan rusuk sisi, untuk membedakan dengan rusuk alas. Tinggi limas dinyatakan sebagai jarak terpendek antara titik puncak dengan bidang alas. Limas segi-n memiliki n buah sisi yang berbentuk segitiga, n buah rusuk sisi dan n buah rusuk alas. Sehingga banyak rusuk limas segi-n adalah $2n$.

Jika alas limas berbentuk segi-*n* beraturan, maka dinamakan sebagai limas segi-*n* beraturan. Limas segi-*n* beraturan dikatakan sebagai limas tegak jika titik kaki garis tingginya terletak pada pusat alasnya. Limas segi-*n* beraturan memiliki *n* sisi berbentuk segitiga samakaki.

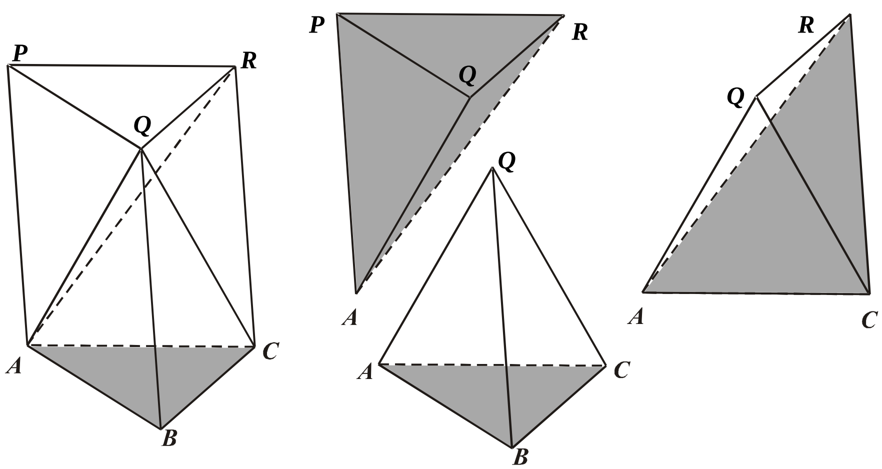


Gambar 20. Permukaan Piramidal



Gambar 21. Limas Segiempat

1. Volum Limas Segitiga



Gambar 22. Volum Limas *Q.ABC*

Berawal dari limas *Q.ABC*, lukis prisma segitiga *ABC.PQR* dengan rusuk sisi sejajar *BQ*. Volum prisma yang terbentuk ini sama dengan hasil kali luas segitiga *ABC* dengan tinggi limas.

$$Volum\ Prisma = Luas\ ABC \times tinggi\ limas$$

Lukis digonal *AR* pada jajargenjang *ACRP*. Selanjutnya prisma ini dipecah menjadi 3 limas yaitu limas *Q.ABC*, *Q.APR* dan *Q.ACR*.

Perhatikan limas *Q.APR*, limas ini dapat dipandang sebagai limas dengan puncak *A* dan alas segitiga *PQR*. Karena segitiga *PQR* kongruen dengan segitiga *ABC*, dan tinggi limas *A.PQR* dengan *Q.ABC* sama, maka dengan prinsip Cavalieri diperoleh

$$Volum\ Q.ABC = Volum\ A.PQR = Volum\ Q.APR$$

Berikutnya perhatikan limas *Q.APR* dan *Q.ACR*. Kedua limas ini merupakan hasil pemisahan limas *Q.ACRP* dengan alas berbentuk persegipanjang *ACRP* menurut bidang *AQR*. Dengan demikian kedua limas *Q.APR* dan *Q.ACR* memiliki alas yang kongruen dan tinggi yang sama sehingga

$$Volum\ Q.APR = Volum\ Q.ACR$$

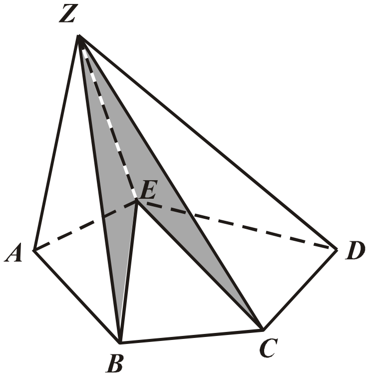
Akibatnya ketiga limas *Q.ABC*, *Q.APR* dan *Q.ACR* memiliki volum yang sama. Dengan demikian

$$Volum\ Q.ABC = \frac{1}{3} \times volum\ prisma\ ABC.PQR$$

$$Volum\ Q.ABC = \frac{1}{3} \times luas\ alas \times tinggi.$$

2. Volum Limas segi-*n*

Seperti pada penurunan rumus prisma, setelah ditemukan rumus volum limas segitiga, selanjutnya volum limas segi-*n* dapat diturunkan dengan jalan memecah limas ini menjadi limas-limas segitiga.



Gambar 23. Limas segilima yang dipecah menjadi tiga limas segitiga.

Sebagai contoh perhatikan limas segilima $Z.ABCDE$.
Misalkan:
V menyatakan volum limas $Z.ABCDE$
V_1 menyatakan volum limas $Z.ABE$
V_2 menyatakan volum limas $Z.BEC$
V_3 menyatakan volum limas $Z.ECD$
t menyatakan tinggi limas.

Maka

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V = \frac{1}{3} \times Luas\ ABE \times t + \frac{1}{3} \times Luas\ BCE \times t + \frac{1}{3} \times Luas\ CDE \times t$$

$$V = \frac{1}{3} \times (Luas\ ABE + Luas\ BCE + Luas\ CDE) \times t$$

$$V = \frac{1}{3} \times Luas\ ABCDE \times t$$

Secara umum limas segi-n selalu dapat dipecah menjadi limas-limas segitiga yang mempunyai tinggi sama dengan tinggi limas yang diberikan. Dengan demikian volum prisma segi-n dengan tinggi t adalah

$$Volum\ Limas = \frac{1}{3} \times Luas\ alas \times t$$

Percobaan untuk menunjukkan kebenaran rumus volum limas dapat dilakukan melalui peragaan menakar menggunakan sebuah limas dan sebuah prisma pasangannya. Dalam hal ini dikatakan limas dan prisma yang berpasangan jika kedua alas bangun tersebut kongruen dan tinggi kedua bangun sama.
Melalui praktek didapatkan bahwa ternyata prisma dipenuhi oleh tiga takaran limas. Akibatnya

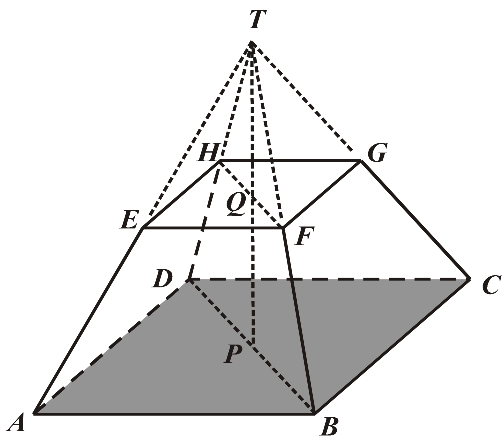
$$Volum\ prisma = 3 \times Volum\ limas$$

$$Volum\ limas = \frac{1}{3} \times Volum\ prisma$$

$$Volum\ limas = \frac{1}{3} \times luas\ alas \times tinggi$$

3. Volum Limas Terpancung

Misalkan α bidang sejajar alas yang terletak di antara puncak dan alas limas, maka yang dimaksud dengan limas terpancung adalah hasil perpotongan limas dengan bidang α bersama-sama dengan alas dan sisi limas yang terletak di antara bidang α dan alas. Pada gambar 24 diberikan limas tegak persegi yang dipotong oleh bidang sejajar alas sehingga membentuk limas terpancung *ABCD.EFGH*.



Gambar 24. Limas Persegi Terpancung

Untuk mencari volum limas terpancung, diperlukan teorema berikut. Bukti teorema diserahkan ke pembaca sebagai bahan latihan tentang geometri datar.

Teorema 1
Misalkan *ABC* dan *DEF* dua segitiga yang sebangun dengan *AB* dan *DE* sisi-sisi yang bersesuaian, maka berlaku

$$Luas\ ABC : luas\ DEF = AB^2 : DE^2$$

Teorema 2
Misalkan *ABCDE* dan *FGHKL* dua segibanyak yang sebangun dengan *AB* dan *FG* sisi-sisi yang bersesuaian, maka berlaku

$$Luas\ ABCDE : Luas\ FGHKL = AB^2 : FG^2$$

Pandang limas terpancung *ABCDE.FGHIJ*. Segibanyak *ABCDE* sebangun dengan *FGHIJ*, akibatnya menurut teorema 2 berlaku

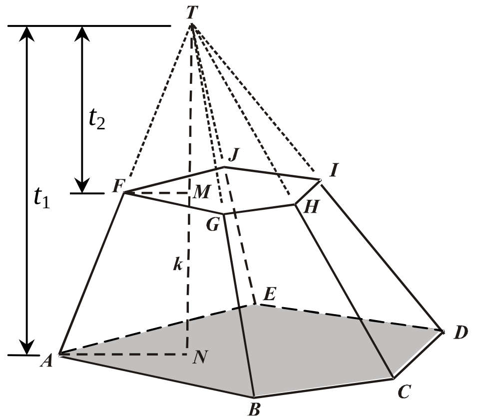
Luas ABCDE : *Luas FGHIJ* = $AB^2 : FG^2$. (i)

Perhatikan bahwa segitiga *TAB* sebangun dengan *TFG*, sehingga berlaku

$AB^2 : FG^2 = TA^2 : TF^2$. (ii)

TN merupakan tinggi limas, perhatikan bahwa segitiga *TAN* sebangun dengan segitiga *TFM*, akibatnya

$TA^2 : TF^2 = TN^2 : TM^2$ (iii)



Gambar 25. Limas segilima terpancung

Dari (i), (ii), dan (iii) dapat disimpulkan

Luas ABCDE : *Luas FGHIJ* = $TN^2 : TM^2$. (iv)

Tanpa mengurangi keumuman untuk limas segi-n, misalkan limas segilima terpancung pada gambar 25 diketahui

$TN = t_1$, $TM = t_2$, $k = t_1 - t_2$, *Luas ABCDE* = L_1 dan *Luas FGHIJ* = L_2,

Menurut persamaan (iv) berlaku $L_1 : L_2 = t_1^2 : t_2^2$. Misalkan $\frac{L_1}{t_1^2} = \frac{L_2}{t_2^2} = m$,

untuk suatu nilai m, akibatnya $L_1 = mt_1^2$ dan $L_2 = mt_2^2$

Volum limas terpancung = *Volum limas TABCDE* – *Volum limas TFGHIJ*.

$$= \frac{1}{3}L_1t_1 \quad \frac{1}{3}L_2t_2$$

$$= \frac{1}{3}(t_1^3 - t_2^3)m$$

$$= \frac{1}{3}(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2)m$$

$$= \frac{1}{3}k(mt_1^2 + \sqrt{mt_1^2 mt_2^2} + mt_2^2)$$

$$= \frac{1}{3}k(L_1 + \sqrt{L_1L_2} + L_2)$$

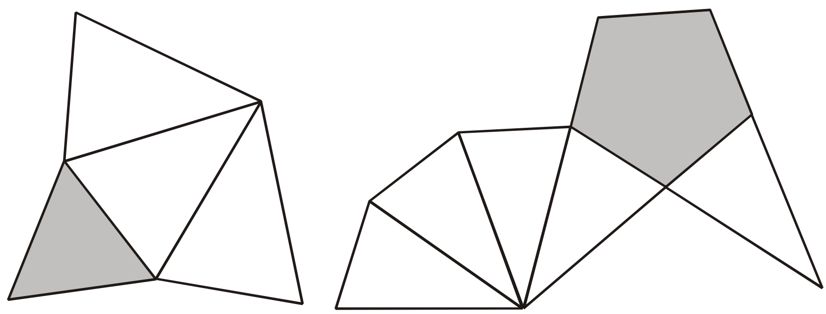
Jadi

$$Volum\ limas\ terpancung = \frac{1}{3}k(L_1 + \sqrt{L_1L_2} + L_2)$$

Dengan k = jarak tutup ke bidang alas,
L_1 = Luas tutup
L_2 = Luas alas

4. Jaring-jaring Limas dan Luas Permukaan Limas

Berikut ini merupakan contoh jaring-jaring limas segitiga dan segilima beraturan.



Gambar 26. Jaring-jaring Limas Segitiga dan Segilima

Melalui ilustrasi dua jaring-jaring limas di atas, luas permukaan limas dapat ditentukan dengan menjumlahkan luas sisi limas dan alasnya.

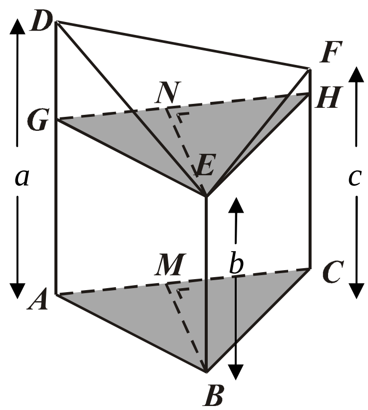
Luas permukaan limas = Luas seluruh sisi limas + Luas alas

5. Volum Prisma Segitiga Terpancung

Jika sebuah prisma segitiga dipotong oleh bidang yang tidak sejajar alas, maka diperoleh bangun yang dinamakan prisma segitiga terpancung. Pada gambar 27 diberikan prisma tegak segitiga terpancung. Misalkan luas alas prisma dinyatakan sebagai L_{ABC} serta panjang AD, BE, dan CF berturut-turut sebagai a, b, dan c.

Pandang segitiga *ABC* dengan alas *AC* dan tinggi segitiga *MB*. Maka luas segitiga *ABC* dapat dinyatakan sebagai

$$L_{ABC} = \frac{AC \times MB}{2} \quad \text{atau} \quad MB = \frac{2L_{ABC}}{AC} \qquad \text{(i)}$$



Gambar 27. Prisma Segitiga Terpancung

Untuk mencari volum prisma terpancung, terlebih dahulu prisma ini dipisah menjadi dua bagian dengan membentuk sebuah prisma dengan rusuk sisi terpendek sebagai rusuk sisinya (dalam hal ini rusuk *BE* sehingga terbentuk prisma *ABCGEH*) dan sebuah limas (dalam hal ini limas trapesium siku *E.DGHF*).

Volum prisma ABCGEH = *Luas ABC* × *BE*

= $L_{ABC} \times BE$

Perhatikan limas *E.DGHF*, bidang *GEH* tegak lurus terhadap bidang *DGHF*, sehingga garis tinggi segitiga *GEH* sekaligus menjadi garis tinggi limas *E.DGHF*. Sementara itu *GEH* kongruen dengan *ABC*, sehingga

Tinggi limas E.DGHF = *NE* = *MB*.

Panjang $AG = BE = CH = b$, sehingga $DG = a - b$ dan $HF = c - b$.
Dari sini diperoleh

Luas trapesium DGHF $= \frac{1}{2} \times (DG + FH) \times GH$

Luas DGHF $= \frac{1}{2} \times \big((a-b) + (c-b)\big) \times GH$

$$= \frac{1}{2} \times (a - b + c - b) \times AC = \frac{1}{2} \times (a + c - 2b) \times AC$$

Volum limas E.DGFH $= \frac{1}{3} \times$ *Luas DGHF* $\times NE$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (a + c - 2b) \times AC \times MB$$

$$= \frac{1}{6} \times (a + c - 2b) \times AC \times \frac{2L_{ABC}}{AC}$$

$$= \frac{1}{3} \times (a + c - 2b) \times L_{ABC}$$

Volum prisma terpancung = *Volum prisma ABC.GEH* + *Volum limas E.DGHF*

$$= L_{ABC} \times b + \frac{1}{3} \times (a + c - 2b) \times L_{ABC}$$

$$= L_{ABC}b + \frac{1}{3}aL_{ABC} + \frac{1}{3}cL_{ABC} - \frac{2}{3}bL_{ABC}$$

$$= \frac{1}{3}(a + b + c)L_{ABC}$$

Jadi

$$\textit{Volum prisma segitiga terpancung} = \frac{1}{3}(a + b + c)L_{ABC}$$

Dengan a, b, c panjang rusuk-rusuk sisi dan L_{ABC} menyatakan luas penampang siku-siku prisma.

F. Refleksi

Setelah Anda membaca bahan di atas, beberapa pertanyaan berikut mungkin dapat anda renungkan sebagai bahan refleksi.

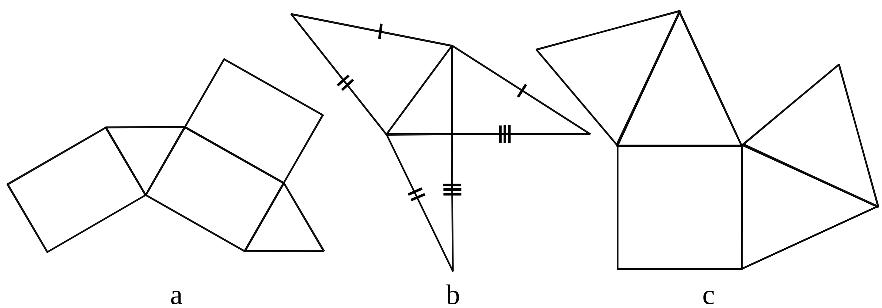
1. Dapatkah Anda menjelaskan apa yang dimaksud dengan bangun ruang sisi datar, kubus, limas, prisma, limas terpancung, dan prisma terpancung?
2. Dapatkah Anda menjelaskan bagian-bagian bangun ruang sisi datar?
3. Untuk memperagakan proses mendapatkan rumus volum bangun ruang, seringkali dilakukan percobaan empiris dengan menakar. Selain melalui percobaan tersebut, mampukah Anda menurunkan rumus-rumus volum bangun ruang secara deduktif?

G. Latihan 1

1. Disediakan kawat yang panjangnya 60 cm untuk membuat model kerangka balok.
   a. Jika panjang model kerangka tersebut 6 cm dan lebarnya 5 cm, berapakah tingginya?
   b. Jika lebar dan tinggi model kerangka tersebut sama, yaitu 4 cm, berapakah panjangnya?
   c. Jika akan dibuat model kerangka kubus, berapakah panjang rusuknya?

2. Sebuah kerangka kandang ayam berbentuk balok terbuat dari kayu dengan ukuran 3 m × 2 m × 0,8 m. Bila panjang kayu yang tersedia 25 m, berapa meter kayu yang tidak terpakai?

3. Dari rangkaian daerah gambar-gambar berikut, manakah yang bukan merupakan jaring-jaring suatu bangun ruang?

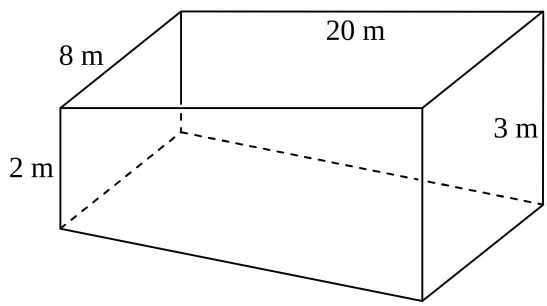


4. Gambarlah balok *PQRS.TUVW*. Gambarlah jaring-jaring balok serta beri nama untuk setiap titiksudutnya, jika balok itu diiris sepanjang rusuk-rusuk
   a. *UT*, *TP*, *UV*, *VW*, *WS*, *UQ*, dan *VR*
   b. *TU*, *UV*, *VR*, *TW*, *WS*, *TP*, dan *UQ*

5. Diketahui balok dengan ukuran panjang 6 cm, lebar 5 cm, dan tinggi 4 cm.
   a. Berapa volum balok tersebut?
   b. Jika panjang, lebar, dan tinggi balok bertambah 2 cm, berapakah volum balok sekarang? Berapa pertambahan volumnya?
   c. Jika panjang bertambah 4 cm, lebar bertambah 3 cm, dan tinggi bertambah 2 cm, berapakah volum balok sekarang? Berapakah pertambahan volumnya?

6. Diketahui balok dengan ukuran panjang p cm, lebar l cm, dan tinggi t cm.
   a. Berapa volum balok tersebut?
   b. Jika panjang, lebar, dan tinggi balok bertambah x cm, berapakah volum balok sekarang? Berapa pertambahan volumnya?
   c. Jika panjang bertambah x cm, lebar bertambah y cm, dan tinggi bertambah z cm, berapakah volum balok sekarang? Berapakah pertambahan volumnya?

7. Panjang dan lebar sebuah kolam renang berturut-turut adalah 20 meter dan 8 meter. Kedalaman paling dangkal dan paling dalam pada kolam renang ini berturut-turut adalah 2 meter dan 3 meter (lihat gambar).
   a. Berapakah volum air yang dapat ditampung?



   b. Jika kolam ini hanya diisi air sebanyak 90 persen dari volum yang dapat ditampung, berapakah ketinggian air di bagian yang paling dangkal?

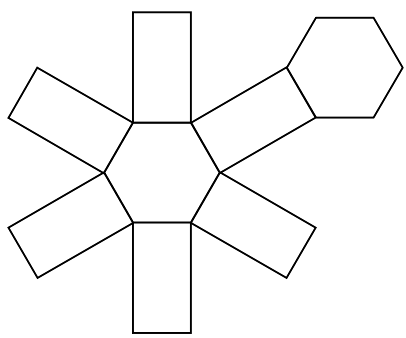
8. Sebuah limas tegak persegi mempunyai panjang rusuk alas 6 cm dan panjang rusuk sisi 5 cm. Berapakah luas permukaan dan volum limas tersebut?

9. Diberikan sebuah limas tegak persegi dengan tinggi t dan panjang rusuk alas $2a$. Nyatakan luas permukaan limas dalam a dan t.

10. Sebuah kubus dengan panjang rusuk 15 cm dicat pada seluruh permukaannya. Kubus ini selanjutnya dipotong-potong menjadi kubus kecil dengan panjang rusuk 5 cm.
    a. Ada berapa kubus kecil yang terbentuk?
    b. Berapa kubus kecil yang seluruh permukaannya tidak terkena cat?
    c. Berapa kubus kecil yang kena cat hanya pada satu sisinya?
    d. Berapa kubus kecil yang kena cat hanya pada dua sisinya?
    e. Berapa kubus kecil yang kena cat hanya pada tiga sisinya?
    f. Dari seluruh kubus kecil yang terbentuk, berapa total luas permukaan yang tidak terkena cat?

11. Sebuah bak air berbentuk limas persegi terpancung. Panjang rusuk alas 40 cm dan panjang rusuk bagian atas 20 cm. Jika tinggi limas terpancung 40 cm, berapa volum sampah yang dapat ditampung?

12. Berikut ini merupakan jaring-jaring yang disusun dari enam buah persegipanjang yang kongruen dan dua buah segienam beraturan yang kongruen. Berapakah banyak rusuk bangun ruang yang terbentuk?



BANGUN RUANG DENGAN SISI LENGKUNG

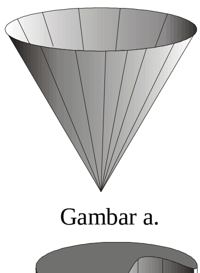
BAB III

A. Tujuan Pembelajaran

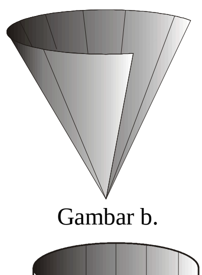
Setelah mempelajari bagian ini, diharapkan pengguna paket lebih menguasai konsep-konsep bangun ruang sisi lengkung. Yang termasuk dalam kategori bangun ruang sisi lengkung adalah bangun ruang yang paling tidak memiliki satu sisi lengkung. Beberapa bangun ruang sisi lengkung mungkin sulit didefinisikan secara tepat, namun bangun ruang tersebut dapat diidentifikasi melalui sifat-sifat atau proses terbentuknya. Selain konsep bangun ruang sisi lengkung, terutama kerucut, tabung, dan bola dibahas beberapa hal yang terkait dengannya seperti luas permukaan dan volum. Pada bagian ini juga akan dibahas materi pengayaan seperti kerucut terpancung dan tabung terpancung.

B. Permasalahan

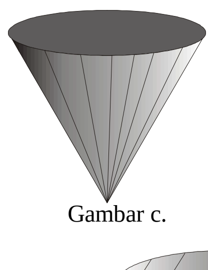
Perhatikan gambar berikut ini, manakah yang merupakan kerucut? Manakah yang merupakan tabung?



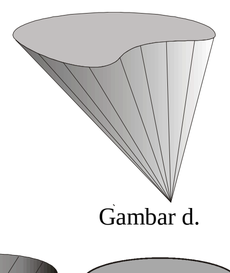
Gambar a.



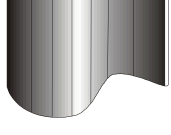
Gambar b.



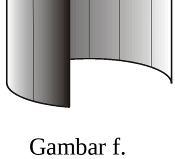
Gambar c.



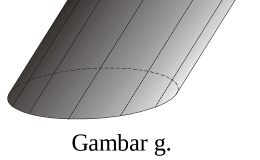
Gambar d.



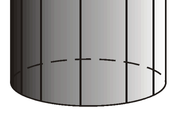
Gambar e.



Gambar f.



Gambar g.



Gambar h.

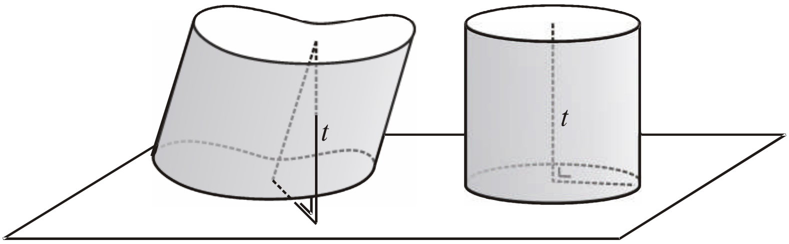
Dari gambar di atas, yang menunjukkan gambar kerucut adalah gambar c dan d, sementara itu yang menunjukkan gambar tabung adalah gambar e dan h. Menurut pengalaman penulis, masih terdapat guru/siswa yang beranggapan bahwa hanya gambar c saja yang merupakan kerucut. Lalu, apa yang dimaksud dengan kerucut atau tabung?
Apa yang disebut dengan selimut tabung, bagaimana menentukan volum tabung, kerucut, dan bola secara deduktif? Pada bagian ini akan dibahas mengenai bangun ruang sisi lengkung, khususnya tabung, kerucut, dan bola.

C. Tabung (Silinder)

Jika sebuah garis dengan arah yang tetap bergerak di dalam ruang sepanjang kurva lengkung, maka jejak yang ditimbulkan membentuk permukaan silindris. Kurva lengkung ini dinamakan garis arah dan garis yang bergerak dinamakan sebagai garis pelukis. Sama seperti prisma, jika permukaan silindris dengan garis arah kurva tertutup sederhana dipotong oleh dua buah bidang yang sejajar, maka kedua hasil perpotongan bersama-sama dengan permukaan silindris di antara keduanya beserta seluruh titik yang dibatasinya membentuk tabung. Bagian sisi silindris yang terletak di antara dua bidang sejajar dinamakan sebagai sisi tabung yang berupa sisi lengkung. Bagian silinder yang merupakan perpotongan permukaan silindris dengan dua bidang sejajar dinamakan sebagai alas dan tutup. Alas dan tutup tabung mempunyai bentuk kongruen. Jarak antara bidang alas dan bidang tutup dinyatakan sebagai tinggi tabung. Tabung memiliki dua rusuk berbentuk kurva lengkung yang sekaligus merupakan batas dari alas atau tutupnya.

Jika di setiap titik pada rusuk, sudut antara bidang alas dan sisi lengkung membentuk sudut siku-siku, maka tabung yang demikian dinamakan sebagai tabung tegak. Selain berdasarkan sudut antara alas dan sisi lengkung, jenis tabung ditentukan juga oleh bentuk alasnya. sebagai contoh tabung dengan alas berbentuk ellips dinamakan sebagai tabung ellips dan tabung dengan alas lingkaran dinamakan sebagai tabung lingkaran. Selanjutnya dalam paket ini, jika tidak diberi penjelasan, maka yang dimaksud dengan tabung adalah tabung lingkaran tegak.

Tabung lingkaran tegak dapat juga didefinisikan sebagai bangun ruang yang dihasilkan oleh perputaran dengan sumbu putar salah satu sisinya. Tabung dapat juga dipandang sebagai prisma segi-*n* beraturan dengan *n* tak hingga.



Gambar 28. Tabung Miring dan Tabung Lingkaran Tegak

1. Volum Tabung

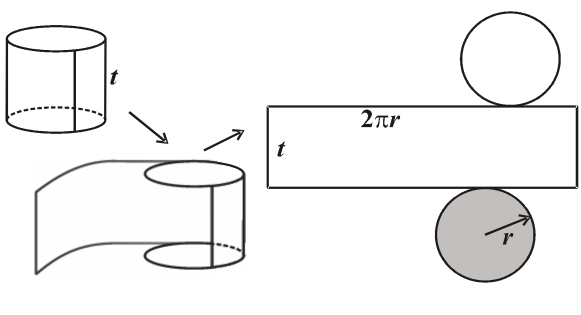
Pikirkan sebuah prisma tegak segi-*n* beraturan. Jika banyak rusuk alas diperbanyak tanpa batas, maka segi-*n* ini akan menjadi lingkaran. Dengan memandang tabung sebagai prisma segi-*n*, dengan *n* tak hingga, dapat diturunkan rumus untuk volum tabung dengan tinggi *t* dan jari-jari alas *r*.

Volum Tabung = *luas alas* × *tinggi*.

= *luas lingkaran* × *tinggi*

Volum Tabung = $\pi r^2 t$

2. Luas permukaan tabung



Gambar 29. Bukaan Tabung

Perhatikan gambar bukaan tabung pada gambar 29. Sisi lengkung (selimut) tabung, jika dibuka akan membentuk persegipanjang dengan panjang sisi keliling lingkaran alas dan *t*.

Sehingga

Luas sisi lengkung tabung $= 2\pi rt$.
Luas permukaan tabung = *Luas alas + luas tutup + luas sisi lengkung tabung*
$= 2\pi r^2 + 2\pi rt$

Jadi
Luas permukaan tabung $= 2\pi r(r + t)$

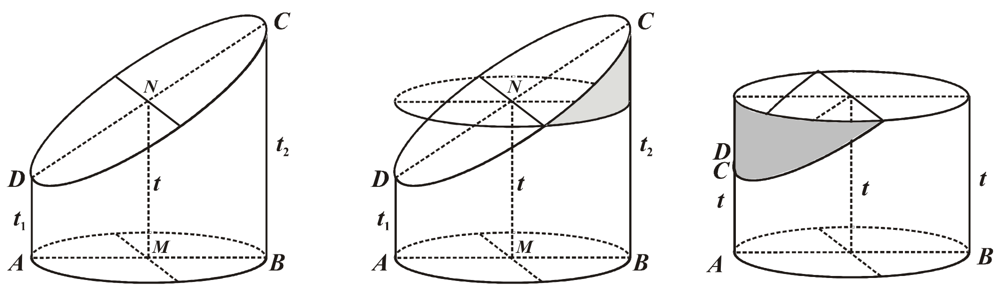
3. Tabung Terpancung

Jika sebuah tabung dipotong oleh bidang yang tidak sejajar alas, akan diperoleh tabung terpancung (gambar 30.(i)). Misalkan tabung terpancung dipotong oleh bidang sejajar alas melalui titik N (Gambar 30.(ii)) dan hasil potongannya diletakkan sehingga terbentuk sebuah tabung (gambar 30.(iii)). Akibatnya luas sisi lengkung bangun gambar 30.(i) dan (ii) sama besar. Demikian juga dengan volum kedua bangun ruang tersebut.

Luas sisi lengkung = $2\pi r \times \dfrac{t_1+t_2}{2}$

Luas sisi lengkung = $2\pi r \times (t_1+t_2)$

Volum tabung terpancung = $\pi r^2 \times \dfrac{t_1+t_2}{2}$

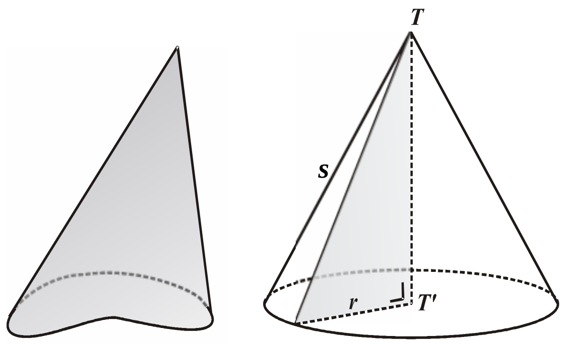


Gambar 30. Tabung Terpancung

D. Kerucut

Misalkan diberikan sebuah kurva lengkung yang terletak pada sebuah bidang datar dan sebuah titik T yang tidak sebidang denganya. Jika sebuah garis melalui titik T dan bergerak sepanjang kurva lengkung, maka jejak yang dihasilkan membentuk *conical survace.* Kurva lengkung ini diarahkan sebagai garis arah dan garis yang bergerak dinamakan garis pelukis.

Kerucut merupakan bangun yang dibatasi oleh kurva lengkung tertutup sederhana sebagai alas, bagian kurva lengkung yang terletak diantara T dan alas beserta seluruh daerah yang dibatasinya.



Gambar 31. Kerucut dan Kerucut Lingkaran egak

Kerucut dapat dipandang sebagai limas segi-n dengan n tak hingga. Pada gambar 31 di samping, titik T dinamakan sebagai titik puncak, garis s, yaitu garis yang menghubungkan puncak ke kurva alas dinamakan sebagai garis pelukis. Jenis kerucut dapat dibedakan berdasarkan bentuk alas, seperti kerucut lingkaran, kerucut ellips, dan kerucut jenis lainnya. Sementara itu, berdasarkan pusat alas kerucut T', jika TT' tegak lurus terhadap bidang alas, maka dikatakan sebagai kerucut tegak.

Kerucut lingkaran tegak dapat juga dipandang sebagai hasil rotasi satu putaran segitiga siku-siku dengan sumbu rotasi salah satu sisi siku-sikunya. Jika tanpa diberi keterangan, yang dimaksud kerucut dalam paket ini adalah kerucut lingkaran tegak.

1. Volum Kerucut

Dengan memandang kerucut dengan jari-jari alas *r* dan tinggi *t* sebagai limas segi-*n* beraturan untuk *n* tak hingga maka volum kerucut dapat ditentukan.

$$\textit{Volum kerucut} = \frac{1}{3} \times \textit{ luas alas} \times \textit{tinggi}.$$

$$\textit{Volum kerucut} = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times t\,.$$

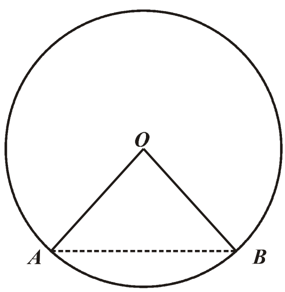
Kebenaran rumus volum kerucut ini dapat ditunjukkan dengan menggunakan peragaan menakar dengan menggunakan takaran kerucut dengan tabung pasangannya. Pasangan kerucut dan tabung ini memiliki alas yang kongruen dan tinggi yang sama. Melalui penakaran pasir ternyata tabung akan penuh setelah diisi 3 kali takaran kerucut. Dengan demikian

$$3 \times \textit{Volum kerucut} = \textit{Volum tabung}$$

$$\textit{Volum kerucut} = \frac{1}{3} \times \textit{Volum tabung} = \frac{1}{3} \times \textit{luas alas} \times \textit{tinggi} = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times t\,.$$

2. Luas Kermukaan Kerucut

Sebelum membahas luas permukaan kerucut, ingat kembali tentang luas sektor lingkaran.



Jika dua buah jari-jari lingkaran membentuk sudut 1° dan dipotong, maka

i. Busur *AB* mempunyai panjang $\frac{1}{360}$ keliling lingkaran, dan

ii. Luas sektor *AOB* = $\frac{1}{360}$ luas lingkaran.

Jadi jika sudut *AOB* memiliki besar *D*°, maka

i. *Panjang busur AB* $= \frac{D}{360} \times$ *keliling lingkaran*, dan

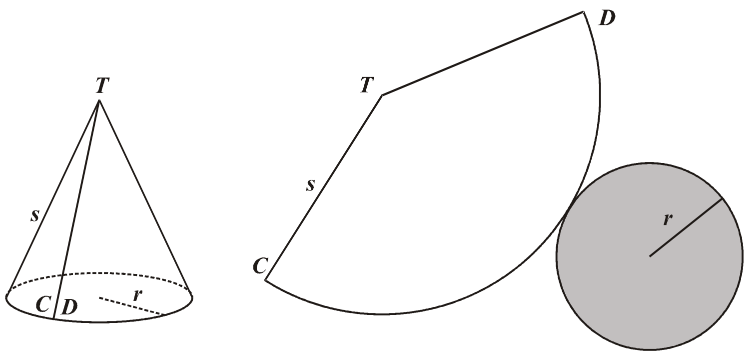
ii. $Luas\ sektor\ AOB = \frac{D}{360} \times luas\ lingkaran$

$$= \frac{D}{360} \times \pi \times r \times r$$

$$= \frac{D}{360} \times \frac{1}{2} \times keliling\ lingkaran \times r$$

$$= \frac{1}{2} \times panjang\ busur\ AB \times r \qquad \text{(i)}$$

Untuk menemukan luas selimut (permukaan lengkung) kerucut perhatikan ilustrasi berikut.



Gambar 31. Bukaan Kerucut

Misalkan sebuah kerucut dipotong sepanjang garis pelukis *TC,* dan kemudian dibuka di sebuah bidang datar. Hasilnya berupa sebuah sektor lingkaran *TCD* dengan jari-jari *TC* dan busur *CD*. Busur *CD* ini sekaligus merupakan keliling lingkaran alas.

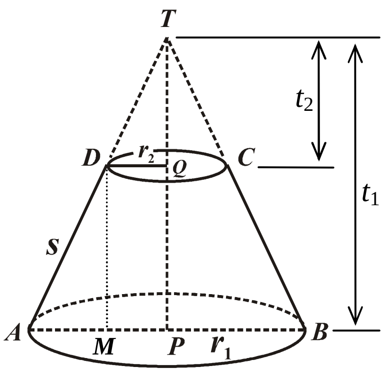
$$Luas\ selimut = \frac{1}{2} \times panjang\ busur\ CD \times TC \qquad \text{(lihat (i))}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times s$$

$$Luas\ selimut = \pi rs$$

3. Volum Kerucut Terpancung

Jika sebuah kerucut dipotong oleh sebuah bidang sejajar alas di antara titik puncak dan bidang alas, maka bagian kerucut yang dibatasi oleh bidang pemotong dan bidang alas dinamakan sebagai kerucut terpancung.



Gambar 32. Kerucut terpancung

Misalkan luas alas dan tutup kerucut terpancung adalah L_1 dan L_2, $TP = t_1$, $TQ = t_2$.

Menurut persamaan (1) seperti pada pembahasan limas terpancung, berlaku
$L_1 : L_2 = t_1^2 : t_2^2$

Misalkan $\frac{L_1}{L_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2} = m$, untuk suatu nilai m, akibatnya
$L_1 = mt_1^2$ dan $L_2 = mt_2^2$

Volum kerucut terpancung = volum kerucut TAB – volum kerucut TDC.

Dengan proses yang sama seperti pada penentuan volum limas terpancung, diperoleh

$$\textit{Volum kerucut terpancung} = \frac{1}{3}k(L_1 + \sqrt{L_1L_2} + L_2)$$

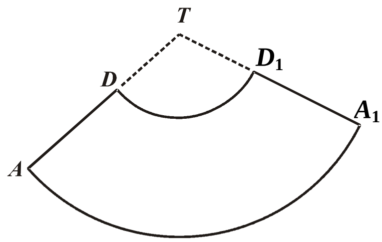
Atau dengan mensubstitusikan $L_1 = \pi r_1^2$ dan $L_2 = \pi r_2^2$ diperoleh

$$\textit{Volum kerucut terpancung} = \frac{1}{3}k\pi(r_1^2 + r_1\, r_2 + r_2^2)$$

Dengan k = jarak tutup ke bidang alas,
L_1 = Luas tutup, r_1 = jari-jari lingkaran alas
L_2 = Luas alas, r_2 = jari-jari lingkaran tutup

4. Luas Selimut Kerucut Terpancung

Perhatikan segitiga *TDQ*, *TAP,* dan *DAM* pada gambar 32. Ketiga segitiga ini sebangun (mengapa?). Akibatnya berlaku:



Gambar 33. Bukaan Selimut Terpancung

$$\frac{TD}{DQ} = \frac{TA}{AP} = \frac{DA}{AM}$$

$$\frac{TD}{r_2} = \frac{TA}{r_1} = \frac{s}{r_1 - r_2}$$

Sehingga $TD = \dfrac{r_2 s}{r_1 - r_2}$ dan $TA = \dfrac{r_1 s}{r_1 - r_2}$.

Perhatikan gambar 33 di atas, misal L_{KT} menyatakan luas selimut kerucut terpancung

L_{KT} = *luas sektor* TAA_1 – *luas sektor* TDD_1

Sementara itu,

Luas sektor $TAA_1 = \dfrac{1}{2} \times$ *panjang busur* $AA_1 \times \mathrm{TA} = \dfrac{1}{2} \times 2\pi r_1 \times TA$, dan

Luas sektor $TDD_1 = \dfrac{1}{2} \times$ *panjang busur* $DD_1 \times \mathrm{TD} = \dfrac{1}{2} \times 2\pi r_2 \times TD$, sehingga

$$\begin{aligned} L_{KT} &= \pi r_1 \times TA - \pi r_2 \times TD \\ &= \pi r_1 \times \frac{r_1 s}{r_1 - r_2} - \pi r_2 \times \frac{r_2 s}{r_1 - r_2} \\ &= \pi s\left(\frac{r_1^{\ 2} - r_2^{\ 2}}{r_1 - r_2}\right) \\ &= \pi s\left(\frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{r_1 - r_2}\right) \\ &= \pi s(r_1 + r_2) \end{aligned}$$

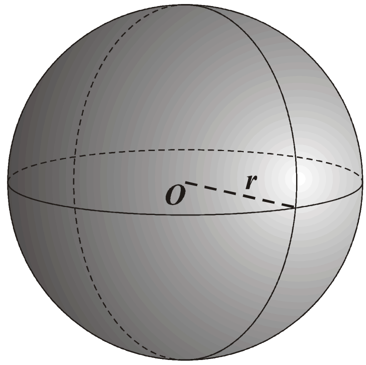
Jadi,

$$L_{KT} = \pi s(r_1 + r_2)$$

Atau dapat juga dituliskan

L_{KT} = (*setengah jumlah keliling alas dan tutup*) × *panjang garis pelukis*

E. Bola

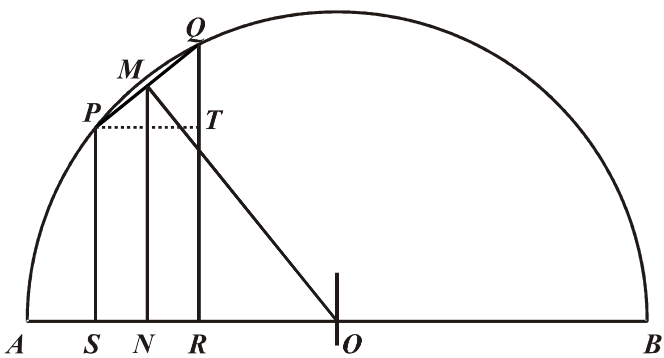


Jika setengah lingkaran dirotasikan mengelilingi diameternya, maka akan terbentuk sebuah permukaan bola. Permukaan bola dapat juga didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu yang dinamakan sebagai pusat bola. Benda yang dibatasi oleh permukaan bola dinamakan sebagai bola. Perpotongan antara sebuah bidang datar dengan bola akan membentuk lingkaran. Lingkaran besar merupakan lingkaran yang diperoleh jika bidang pemotong melalui pusat lingkaran.

1. Luas Permukaan Bola

Perhatikan gambar 35, misalkan sebuah bola berpusat di O dihasilkan oleh setengah lingkaran APB dengan diameter AB yang diputar dengan sumbu putar AB. Pandang PQ sebagai bagian dari poligon beraturan dengan banyak sisi yang sangat banyak di dalam lingkaran.
Karena busur APB diputar mengelilingi AB maka PQ akan membentuk kerucut terpancung. Misalkan luas kerucut terpancung ini L_{PQ}, maka

L_{PQ} = (*setengah jumlah keliling alas dan tutup*) × *panjang garis pelukis*
$L_{PQ} = \pi(PS + QR) \times PQ = \pi \times 2 \times MN \times PQ$



Gambar 35. Penampang Melintang Setengah Bola

Pada gambar 35, perhatikan bahwa segitiga *PTQ* dan *MNO* sebangun (mengapa?) sehingga berlaku $\frac{PT}{PQ} = \frac{MN}{MO}$. Karena $PT = SR$, dan $MO = r$ akibatnya

$$\frac{SR}{PQ} = \frac{MN}{r}$$

$$PQ = \frac{SR \times r}{MN}$$

Sehingga

$$L_{PQ} = \pi \times 2 \times MN \times PQ$$

$$L_{PQ} = 2 \times \pi \times MN \times \frac{SR \times r}{MN}$$

$$L_{PQ} = 2\pi \times SR \times r \quad \text{atau}$$

$$L_{PQ} = 2\pi r \times (\text{proyeksi } PQ \text{ ke } AB)$$

Dengan memandang busur lingkaran sebagai poligon dengan sisi tak hingga, maka luas permukaan lingkaran dapat dipandang sebagai jumlah luas selimut kerucut-kerucut terpancung dengan garis pelukis sisi-sisi poligon. Akibatnya

$$\begin{aligned} \textit{Luas permukaan bola} &= 2\pi r \times (\text{proyeksi busur } APB \text{ ke } AB) \\ &= 2\pi r \times 2r \end{aligned}$$

Jadi

$$\textit{Luas permukaan bola} = 4\pi r^2$$

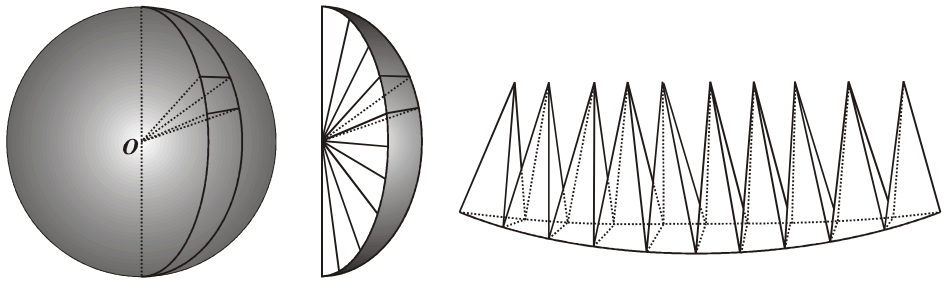
Percobaan untuk menunjukkan kebenaran rumus luas permukaan bola dapat dilakukan dengan melilitkan tali ke selimut setengah bola, kemudian lilitan ini dibuka dan dililitkan lagi ke lingkaran dengan jari-jari yang sama dengan jari-jari bola. Dari percobaan ini diperoleh tali yang dililitkan ke selimut setengah bola jika dililitkan ke lingkaran akan diperoleh dua lingkaran penuh. Sehingga dapat dikatakan

$$\begin{aligned} \textit{Luas selimut setengah bola} &= 2 \times \textit{luas lingkaran} \\ &= 2\,\pi\, r^2 \end{aligned}$$

Sehingga

$$\textit{Luas selimut bola} = 4\,\pi\, r^2$$

2. Volum Bola



Gambar 36. Bola Diiris untuk Menentukan Volumnya.

Misalkan sebuah bola dipotong membentuk limas-limas dengan titik puncak di pusat bola seperti pada gambar 36. Perhatikan bahwa limas-limas yang terbentuk mempunyai tinggi yang sama, yaitu jari-jari bola (r). Misalkan luas alas masing-masing limas dinyatakan sebagai L_1, L_2, L_3, ... , dan L_n. Jika alas limas dibuat sekecil-kecilnya, dengan kata lain n dibuat sebesar-besarnya (n tak hingga) maka jumlah luas alas seluruh limas akan sama dengan luas permukaan bola.

Volum bola

$$= \textit{jumlah volum seluruh limas}$$
$$= \frac{1}{3} \times L_1 \times r + \frac{1}{3} \times L_2 \times r + \frac{1}{3} \times L_3 \times r + \cdots + \frac{1}{3} \times L_n \times r$$
$$= \frac{1}{3} \times (L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n) \times r$$
$$= \frac{1}{3} \times (\textit{Luas permukaan } \text{bola}) \times r$$
$$= \frac{1}{3} \times 4\pi \times r^3$$

Jadi untuk bola dengan jari-jari r berlaku

$$\textit{Volum bola} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Aktivitas untuk menunjukkan rumus volum bola dapat dilakukan dengan menakar butiran pasir menggunakan setengah bola dan dimasukkan ke tabung pasangannya. Tabung pasangan ini memiliki jari-jari sama dengan jari-jari bola dan tinggi sama dengan diameter bola. Setelah dilakukan penakaran tabung akan penuh dalam tiga takaran. Sehingga diperoleh hubungan

$$3 \times \frac{1}{2} \times Volum\ bola = volum\ tabung$$

$$= \pi \times r^2 \times 2r, \quad \text{sehingga}$$

$$Volum\ bola = \frac{4}{3}\pi \times r^3$$

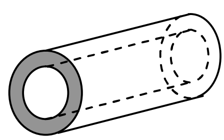
F. Refleksi

Setelah Anda membaca bahan di atas, beberapa pertanyaan berikut mungkin dapat anda renungkan sebagai bahan refleksi.

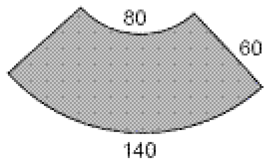
1. Dapatkah Anda menjelaskan apa yang dimaksud dengan bangun ruang sisi lengkung, tabung, kerucut, bola, tabung terpancung, dan kerucut terpancung?
2. Untuk memperagakan proses mendapatkan rumus volum bangun ruang sisi lengkung seperti kerucut dan bola, seringkali dilakukan percobaan empiris dengan menakar. Selain melalui percobaan tersebut, mampukah Anda menurunkan rumus-rumus volum tabung, kerucut, dan bola secara deduktif?

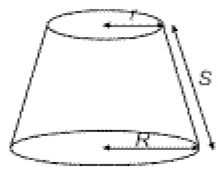
G. Latihan 2

1. Tentukan volum plastik yang dibutuhkan untuk membuat pipa plastik seperti pada gambar di samping dengan panjang 20 cm, jari-jari lingkaran luar dan dalam berturut-turut 4 dan 3 cm.



2. Helen akan memotong sebuah pola untuk rok seperti pada gambar berikut. Jika ukuran keliling pinggangnya adalah 80 cm, keliling bagian bawah rok 140 cm dan panjang rok 60 cm, berapa luas pola untuk rok Helen?





3. Berapakah volum dan luas permukaan bumi yang berdiameter 12.700 km? (anggap bumi berbentuk bola dan permukaannya rata).

4. Sebuah hiasan berbentuk bola transparan di dalamnya terdapat kerucut yang mempunyai jari-jari alas setengah garis pelukisnya. Keliling alas kerucut dan puncak menempel pada bola. Jika panjang garis pelukis adalah *s*, nyatakan dalam *s*

   a. Jari-jari bola.
   b. Luas permukaan bola.
   c. Bagian volum bola di luar kerucut.

5. Sepuluh batang bambu dengan diameter 10 cm panjang 4 meter diikat di dasar kolam berbentuk balok dengan ukuran panjang 4,5 m, lebar 55 cm, dan tinggi 40 cm untuk direndam dalam suatu larutan pengawet. Jika diasumsikan ujung-ujung bambu tertutup, berapa liter larutan pengawet harus dimasukkan sampai bak menjadi penuh?

6. Sebuah balon udara berbentuk bola berjari-jari *r* memerlukan udara sebanyak 2 m^3. Berapa m^3 lagi udara yang harus dipompakan agar jari-jarinya menjadi dua kali jari-jari semula?

PENUTUP BAB IV

A. Kesimpulan

1. Volum Balok dengan panjang *p*, lebar *l*, dan tinggi *t* adalah

$$V_{balok} = p \times l \times t$$

Kubus dengan panjang rusuk *a* merupakan balok yang panjang semua rusuknya sama, sehingga

$$V_{balok} = a^3$$

2. Luas permukaan balok dan kubus dapat ditentukan dengan menjumlahkan luas seluruh sisi-sisinya.

$$L_{permukaan\ balok} = 2 \times (p \times l + p \times t + l \times t)$$

$$L_{permukaan\ kubus} = 6 \times a^2$$

3. Panjang diagonal sisi dan diagonal ruang balok dapat ditentukan dengan menggunakan teorema Pythagoras. Selanjutnya dapat ditentukan luas bidang-bidang diagonal.
4. Volum prisma segi-*n* dapat diturunkan setelah siswa mengenal rumus volum balok dengan urutan
   i. Menentukan volum prisma segitiga siku-siku
   ii. Menentukan volum prisma segitiga sebarang
   iii. Menentukan volum prisma segi-*n*.

$$V_{prisma} = Luas\ alas \times tinggi\ \ prisma$$

Untuk prisma miring, misalkan $L_{tegak\ \ lurus}$ menyatakan luas penampang tegak lurus rusuk sisi dan t menyatakan jarak kedua bidang alas dan tutup maka

$$V_{prisma\ miring} = L_{tegak\ lurus} \times tinggi\ \ prisma$$

5. Luas permukaan prisma merupakan penjumlahan luas sisi prisma, luas bidang alas, dan luas bidang tutup.
6. Volum limas segi-*n* dapat diturunkan melalui tahap-tahap

i. Menentukan volum limas segitiga
ii. Menentukan volum limas segitiga sebarang
iii. Menentukan volum limas segi-*n*.

Secara umum

$$V_{limas} = \frac{1}{3} \times L_{alas} \times tinggi$$

7. Untuk menunjukkan rumus volum limas dapat dilakukan dengan aktivitas menakar menggunakan takaran limas dan dimasukkan ke prisma pasangannya yaitu prisma yang memiliki alas dan tinggi yang sama dengan limas. Prisma akan terisi penuh dengan butiran pasir setelah diisi dengan 3 takaran limas.
8. Misalkan L_1, L_2, dan k berturut-turut menyatakan luas alas, luas tutup, dan tinggi limas terpancung maka

$$V_{limas\ terpancung} = \frac{1}{3} k(L_1 + \sqrt{L_1 L_2} + L_2)$$

Luas permukaan limas terpancung merupakan jumlah luas sisi limas ditambah dengan luas alas.

9. Khusus untuk prisma segitiga terpancung dengan luas penampang tegaklurus rusuk sisi L_p dan panjang rusuk sisi berturut-turut a, b dan c berlaku:

$$\text{Volum prisma segitiga terpancung} = \frac{1}{3}(a + b + c)L_p$$

10. Misalkan L_{alas} menyatakan luas alas tabung, dan t menyatakan tinggi tabung, maka volum tabung dapat ditentukan dengan

$$V_{tabung} = L_{alas} \times t$$

11. Sisi lengkung tabung jika dibuka akan membentuk persegipanjang dengan ukuran panjang sama dengan keliling lingkaran alas dan lebar sama dengan tinggi tabung. Sehingga luas permukaan tabung dengan jari-jari alas r dan tinggi t dapat ditentukan dengan rumus

$$L_{permukaan\ tabung} = 2\pi r(r + t)$$

12. Jika sebuah tabung dipotong oleh bidang yang tidak sejajar alas, maka diperoleh tabung terpancung. Misalkan jari-jari alas r, tinggi tabung pada posisi tertinggi dan terrendah dinyatakan dengan t_1 dan t_2 maka

$$L_{sisi\ lengkung} = 2\pi r \times (t_1 + t_2)$$

$$V_{tabung\ terpancung} = \pi r^2 \times \frac{t_1+t_2}{2}$$

13. Kerucut dengan jari-jari alas r dan tinggi t dan panjang garis pelukis s mempunyai

$$V_{\text{kerucut}} = \frac{1}{3}\pi r^2 t = \frac{1}{3} \times L_{alas} \times t$$

$$L_{\text{selimut}} = \pi rs$$

$$L_{\text{permukaan}} = L_{\text{selimut}} + L_{\text{alas}}$$

14. Jika sebuah kerucut dipotong oleh bidang sejajar alas, diperoleh kerucut terpancung. Kerucut terpancung dengan jari-jari alas r_1, jari-jari tutup r_2 dan panjang garis pelukis s memiliki

$$V_{\text{kerucut terpancung}} = \frac{1}{3}\pi k(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$L_{\text{selimut terpancung}} = 2\pi s(r_1 + r_2)$$

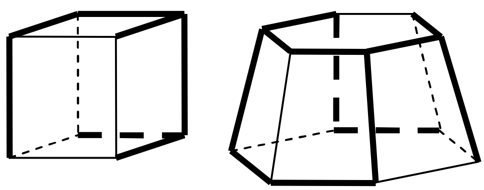
15. Bola dengan jari-jari r memiliki

$$L_{\text{permukaan}} = 4\pi r^2$$

$$V_{\text{bola}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

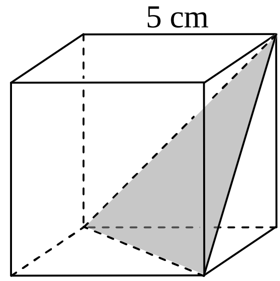
B. Tes

1. Bangun ruang sisi datar berikut akan dipotong menurut garis tebal pada rusuk-rusuknya. Setelah dibuka, manakah yang akan membentuk jaring-jaring?

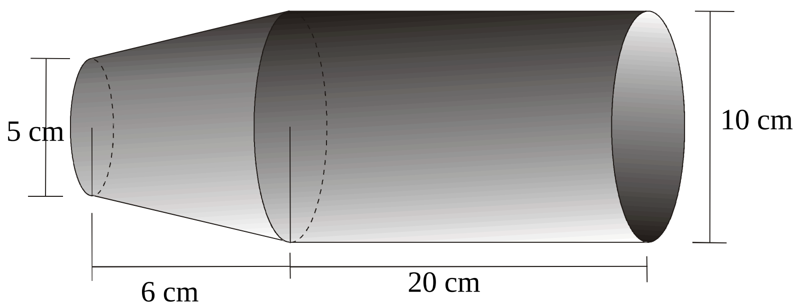


(a) (b) (c)

2. Gambar berikut menunjukkan sebuah kubus dengan panjang rusuk 5 cm yang dipotong sehingga salah satu bagiannya berbentuk limas segitiga (tetrahedron). Tentukan luas permukaan kedua bangun hasil perpotongannya.



3. Sebuah sambungan knalpot sepeda motor berupa pipa berlubang terbuat dari pelat besi dengan bentuk seperti pada gambar. Jika berat pelat besi yang digunakan adalah y kg per meter persegi, nyatakan berat benda tersebut dalam y?



4. Sebuah bola terbuat dari karet dan berjari-jari 21 cm dan memiliki ketebalan dinding 2,1 cm. Tentukan berapa volum karet yang diperlukan untuk membuatnya.

5. Tentukan volum bidang delapan beraturan (oktahedron) yang panjang rusuknya 10 cm.

DAFTAR PUSTAKA

Depdiknas. 2004. *Pelajaran Matematika Kelas IX*. Jakarta: Direktorat PLP Depdiknas.

Gellert, W., Kastner, H., & Helwich, M.. 1977. The *VNR Concise Encyclopedia of Mathematics*, New York: Van Nostrand Reinhold Company.

Hall, H.S. & Stevens, F.H.. 1949. *School Geometry Parts I – VI*. London: MacMillan and Co..

Hendra Gunawan, dkk.. 2006. *Kemampuan Matematika Siswa 15 Tahun di Indonesia*. . Jakarta : Puspendik Depdiknas.

Markaban, dkk.. 2007. *Laporan Hasil Kegiatan Training Need Assessment (TNA) dan Rekruitmen Calon Peserta Diklat Guru Matematika SMP.* Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

Marsudi Raharjo. 2007. *Geometri Ruang SMP*. Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

Thomas H. Sidebotham. 2002. *The A to Z of Mathematics, A basic guide*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

LAMPIRAN

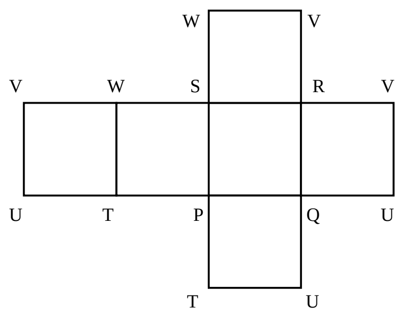
Jawaban / Petunjuk Latihan 1

1. a. tinggi balok = 4 cm.
   b. panjang balok = 7 cm.
   c. panjang rusuk = 5 cm.

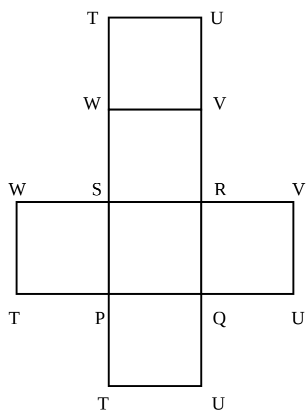
2. 1,8 meter

3. gambar c.

4. a.



b.



5. a. Volum balok = 120 cm^3
   b. volum balok = 336 cm^3, pertambahan volum = 216 cm^3
   c. volum balok = 480 cm^3, pertambahan volum = 360 cm^3.

6. a. volum balok = $p \times l \times t$ cm^3
   b. vol. balok = $(p + x)(l + x)(t + x)$
   $= plt + (pt + pl + lt)x + (p + l + t)x^2 + x^3$
   pertambahan volum = $(pt + pl + lt)x + (p + l + t)x^2 + x^3$ cm^3
   c. vol. balok = $plt + pyt + ltx + xty + plz + pyz + lxz + xyz$ cm^3,
   pertambahan volum
   $= pyt + ltx + xty + plz + pyz + lxz + xyz$ cm^3,

7. a. Volum air = luas trapesium × tinggi prisma = 400 m^3.
   b. ketinggian air bagian paling dangkal = 1,75 m.

8. Luas permukaan limas = $4 \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 4\right) + 6 \times 6$ cm^2
   Tinggi limas = $\sqrt{7}$ cm. Jadi volum limas = $6 \times 6 \times \sqrt{7}$ cm^3.

9. Luas permukaan limas = $4a^2 + 4 \times \frac{1}{2} \times 2a \times \sqrt{a^2 + t^2}$ cm^2.

10. a. 27 kubus kecil
    b. 1 kubus kecil
    c. 6 kubus kecil
    d. 12 kubus kecil
    e. 8 kubus kecil
    f. Luas permukaan yang tidak terkena cat =
    $(1 \times 6 \times 25) + (6 \times 5 \times 25) + (12 \times 4 \times 25) + (8 \times 3 \times 25)$ cm^2.

11. Volum limas terpancung =
    $\frac{1}{3}k(L_1 + \sqrt{L_1L_2} + L_2) = \frac{1}{3} \times 40 \times \left(1600 + \sqrt{1600 \times 400} + 400\right)$ cm^3 .

12. Bangun yang terbentuk adalah prisma segienam. Banyak rusuk 12 buah.

Jawaban/Petunjuk Latihan 2

1. Volum plastik yang dibutuhkan = $\pi \times 4^2 \times 20 - \pi \times 3^2 \times 20$ cm³.

2. Jari-jari $r_1 = \dfrac{140}{2\pi}$, $r_1 = \dfrac{80}{2\pi}$. Luas =
   $2\pi s(r_1 + r_2) = 2\pi \times 60 \times (\dfrac{70}{\pi} + \dfrac{40}{\pi})$ cm².

3. Volum bumi = $\dfrac{4}{3} \times \pi \times 12700^3$ km³.
   Luas permukaan bumi = $4 \times \pi \times 12700^2$

4. a. Jari-jari bola = $\dfrac{2}{3} \times \sqrt{s^2 - \dfrac{s^2}{4}}$
   c. volum bola – volum kerucut.

5. larutan yang harus dimasukkan = vol. Kolam – vol. Sepuluh bambu.

6. $\dfrac{4}{3}\pi r^3 = 2$ m²
   Agar jari-jari dua kali semula, vol. Udara dalam balon =
   $\dfrac{4}{3}\pi(2r)^3 = \dfrac{4}{3}\pi \times 8 \times r^3 = 8 \times \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 16$ m³
   Udara yang harus ditambahkan (16 – 2) m³.

Jawaban/Petunjuk Soal Tes

1. gambar a dan c.
2. Luas permukaan limas segitiga = $\sqrt{50} \times \sqrt{37{,}5} + 3 \times \dfrac{1}{2} \times 5 \times 5$ cm³.

Luas permukaan bagian yang lain =

$\sqrt{50} \times \sqrt{37{,}5} + 3 \times 25 + 3 \times \frac{1}{2} \times 25$ cm^3

3. Berat benda = 0,12875 $\pi\, y$ kilogram.
4. Volum karet yang diperlukan = $\frac{4}{3}\pi \times 21^3 - \frac{4}{3}\pi \times 18{,}9^3$ cm^3.
5. Volum bidang delapan = $\frac{200}{3}\sqrt{50}$ cm^3