MARSUDI RAHARJO

Tempat/Tanggal Lahir	: Bantul/3 Desember 1956
Pendidikan	: S1 Pendidikan Matematika IKIP Yogyakarta S2 Secondary Mathematics Education Sunny College of New Paltz, New York 12561, USA
Karya Tulis	: 1. Sesatan Hexagon 2. Peluang; Penggunaan Alat Peraga dalam Pembelajaran Matematika 3. Pengembangan Silabus Pembelajaran Matematika 4. Bilangan Asli, Cacah, Bulat, dan Operasinya 5. Geometri 6. Aritmatika Sosial 7. Solusi Masalah Pemfaktoran Bentuk Kuadrat.
Seminar/Workshop	: 1. Diklat Peningkatan Profesionalisme Guru dalam Pembelajaran Matematika SD Kelas Rendah 2. Pelatihan Calon Instruktur Mata Pelajaran Matematika Tingkat Nasional 3. Semiloka Pembelajaran Matematika Tahun 20064 4. Lokakarya Penyusunan Model Evaluasi Pembelajaran di Sekolah Dasar 5. *Workshop Item Writing for Higher Order Thinking.*
Pengalaman sebagai Narasumber/Fasilitator	: 1. Penataran dan Lokakarya Widyaiswara Matematika LPMP se-Indonesia 2. Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SMA Wilayah LPMP Binaan 3. Diklat Supervisi SD Jenjang Dasar 4. Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SD Model PMRI 5. Penataran dan Lokakarya Widyaiswara LPMP se-Indonesia.

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA YOGYAKARTA

JL. Kaliurang Km.6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, Yogyakarta
KOTAK POS 31 YK-BS Yogyakarta 55281
Telephone : (0274) 885725, 881717, 885752
Faks : (0274) 885752
E-mail : p4tkmatematika@yahoo.com
Website : www.p4tkmatematika.com

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika

Teknik Penentuan Rumus Suku Ke-n Barisan Bilangan Polinom Kelas IX SMP

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

PAKET FASILITASI PEMBERDAYAAN KKG/MGMP MATEMATIKA

Teknik Penentuan Rumus Suku Ke-n Barisan Bilangan Polinom Kelas IX SMP

Penulis
Drs. Marsudi Raharjo, M.Sc.Ed.

Penilai
Adi Wijaya, S.Pd, M.A.

Editor
Sri Purnama Surya, S.Pd., M.Si.

Ilustrator
Muh. Tamimuddin H., M.T.

Dicetak oleh: **Pusat Pengembangan Dan Pemberdayaan Pendidik Dan Tenaga Kependidikan Matematika**
Tahun 2008

TUT WURI HANDAYANI

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
YOGYAKARTA 2008

KATA PENGANTAR

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika dalam melaksanakan tugas dan fungsinya mengacu pada tiga pilar kebijakan pokok Depdiknas, yaitu: 1) Pemerataan dan perluasan akses pendidikan; 2) Peningkatan mutu, relevansi dan daya saing; 3) Penguatan tata kelola, akuntabilitas, dan citra publik menuju insan Indonesia cerdas dan kompetitif.

Dalam rangka mewujudkan pemerataan, perluasan akses dan peningkatan mutu pendidikan, salah satu strategi yang dilakukan PPPPTK Matematika adalah meningkatkan peran Kelompok Kerja Guru (KKG) dan Musyawarah Guru Mata Pelajaran (MGMP) serta pemberdayaan guru inti/ guru pemandu/guru pengembang yang ada pada setiap kecamatan, kabupaten dan kota.

Sebagai upaya peningkatan mutu dimaksud maka lembaga ini diharapkan mampu memfasilitasi kegiatan-kegiatan yang terkait dengan implementasi pengembangan pembelajaran matematika di lapangan. Guna membantu memfasilitasi forum ini, PPPPTK Matematika menyiapkan paket berisi kumpulan materi/bahan yang dapat digunakan sebagai referensi, pengayaan, dan panduan di KKG/MGMP khususnya pembelajaran matematika, dengan topik-topik/bahan atas masukan dan identifikasi permasalahan pembelajaran matematika di lapangan.

Berkat rahmat Tuhan Yang Maha Esa, atas bimbingan-Nya penyusunan Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika dapat diselesaikan dengan baik. Untuk itu tiada kata yang patut diucapkan kecuali puji dan syukur kehadirat-Nya.

Dengan segala kelebihan dan kekurangan yang ada, paket fasilitasi ini diharapkan bermanfaat dalam mendukung peningkatan mutu pendidik dan tenaga kependidikan melalui forum KKG/MGMP Matematika yang dapat berimplikasi positif terhadap peningkatan mutu pendidikan.

Sebagaimana pepatah mengatakan, tiada gading yang tak retak, demikian pula dengan paket fasilitasi ini walaupun telah melalui tahap identifikasi, penyusunan, penilaian, dan editing masih ada yang perlu disempurnakan. Oleh karena itu saran, kritik, dan masukan yang bersifat membangun demi peningkatan kebermaknaan paket ini, diterima dengan senang hati teriring ucapan terima kasih. Ucapan terima kasih dan penghargaan setinggi-tingginya kami sampaikan pula kepada semua pihak yang membantu mewujudkan paket fasilitasi ini, mudah-mudahan bermanfaat untuk pendidikan di masa depan.

Yogyakarta,

Kepala,

KASMAN SULYONO
NIP 130352806

DAFTAR ISI

PENDAHULUAN BAB I

A. LATAR BELAKANG

Berdasarkan TNA (*training need assesment*) kebutuhan Diklat bagi guru SMP (Sekolah Menengah Pertama) ternyata barisan bilangan termasuk bahan yang banyak diinginkan oleh teman-teman guru untuk dibahas di forum MGMP (Musyawarah Guru Mata Pelajaran) matematika, hal ini disebabkan banyak diantara mereka belum menemukan bahan yang dirasa cukup memadai. Materi yang bersesuaian dengan barisan bilangan ada pada standar isi kelas IX standar kompetensi 6 dan Kompetensi dasar 6.1 yakni “Menentukan pola barisan bilangan sederhana”. Oleh karena itu melalui kesempatan penulisan modul ini penulis berkeinginan untuk menyampaikan topik mengenai pola bilangan tersebut sebagai bahan pembahasan guru SMP di forum MGMP dengan teman sejawat.

Modul ini diharapkan dapat dipelajari secara mandiri karena pada modul ini terdapat contoh masalah dan pemecahannya, soal-soal latihan dan kunci jawabannya, serta petunjuk penskorannya. Jika menemui kendala dapat dibahas bersama di forum MGMP dan bila masih belum terselesaikan dapat mengirim surat ke PPPPTK Matematika Yogyakarta dengan alamat PPPPTK Matematika, Jl. Kaliurang km 6, Condongcatur, Depok, Sleman, DI Yogyakarta 55281 atau lewat faksimile (0274) 885752 untuk disampaikan ke penulis.

B. TUJUAN

Tujuan penulisan modul ini adalah untuk memfasilitasi Guru SMP di forum MGMP dalam rangka memahami dan memecahkan masalah tentang barisan dan pola bilangan. Dengan mempelajari modul ini bersama teman sejawat diharapkan permasalahan tentang mencari rumus barisan dan pola bilangan yang mungkin menjadi kendala selama ini dapat dipahami dengan baik.

C. RUANG LINGKUP

Ruang lingkup materi yang dibahas dalam modul ini meliput barisan bilangan polinom berderajat satu sampai barisan polinom berderajat tiga. Dengan diberikannya contoh hingga polinom berderajat tiga ini diharapkan pola pemecahannya sudah cukup untuk digunakan pada barisan polinom berderajat empat, dan seterusnya. Barisan polinom berderajat 1 adalah barisan polinom dengan rumus suku ke-n (u_n) yang dapat ditulis dalam bentuk $u_n = an + b$. Sementara itu barisan polinom berderajat 2 adalah barisan polinom dengan rumus suku ke-n yang dapat ditulis dalam bentuk $u_n = an^2 + bn + c$ dengan n adalah variabelnya (peubahnya) dan a, b, c adalah konstantanya.

Ciri dari barisan bilangan polinom berderajat satu adalah selisih tetapnya diperoleh dalam 1 tingkat penyelidikan. Sementara ciri dari barisan polinom berderajat 2 adalah selisih tetapnya diperoleh dalam 2 tingkat penyelidikan dan seterusnya. Pembahasan pada modul ini hanya sampai pada barisan bilangan polinom berderajat tiga. Sebab, hingga derajat tiga saja perhitungannya sudah agak rumit namun masih relatif mudah, sedangkan untuk derajat yang lebih tinggi lagi perhitungannya sudah terlalu panjang. Namun dengan mengenal barisan polinom hingga berderajat 3 saja kiranya sudah cukup memberikan gambaran dalam menentukan rumus umum suku ke-n barisan polinom yang lebih tinggi.

D. SASARAN

Sasaran modul ini utamanya adalah guru Sekolah Menengah khususnya guru SMP sebagai bahan referensi yang mungkin saat ini belum tersedia.

E. CARA PEMANFAATAN MODUL

Untuk memaksimalkan pembahasan modul ini diperlukan 2(dua) kali pertemuan MGMP. Pertemuan pertama untuk menyamakan persepsi (sudut pandang) di antara guru sejawat, mencoba memahami masalah, mencoba menyelesaikan soal dan hasilnya dicocokkan dengan kunci jawaban. Jika waktu di pertemuan belum cukup dapat dijadikan PR (pekerjaan rumah), yang penting adalah pemahaman dan persepsinya sudah sama. Sementara itu pertemuan kedua (pertemuan berikutnya) di MGMP digunakan untuk membahas masalah yang telah di PR-kan.

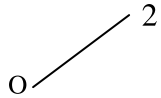
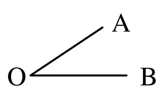
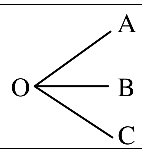
POLA BILANGAN BAB II

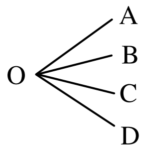
A. Permasalahan yang Berkaitan dengan Ruas Garis dan Sudut

Apakah sebuah ruas garis dapat membentuk sudut? Apakah dua buah ruas garis yang titik pangkalnya berimpit dapat membentuk sudut? Berapa sudut yang dibentuk oleh kedua ruas garis itu? Selanjutnya apakah tiga buah ruas garis yang titik pangkalnya berimpit dapat membentuk sudut? Berapa sudut yang dibentuk oleh ketiga ruas garis itu?. Berapa sudut yang dibentuk jika ruas garis yang titik-titik pangkalnya berimpit itu ditingkatkan banyaknya hingga 4 ruas garis, 5 ruas garis, dan 6 ruas garis? Bagaimanakah jika banyaknya ruas garis itu 10?, bagaimana pula kalau 100?

B. Membentuk Gambar dan Mengamati Pola

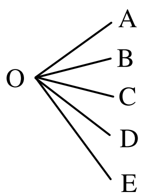
Kita gambar ruas-ruas garis yang titik-titik pangkalnya berimpit, dimulai dari satu ruas garis dan diteruskan dengan 2 ruas garis, 3 ruas garis, dan seterusnya.

Banyak ruas garis	Gambar ruas-ruas garis berpotongan	Nama-nama sudut yang dibentuk	Banyaknya sudut yang dibentuk
1		tidak ada	0
2		$\angle AOB$,	1
3		$\angle AOB$, $\angle AOC$, $\angle BOC$	3

4		$\angle \ldots$, $\angle \ldots$, $\angle \ldots$ $\angle \ldots$, $\angle \ldots$, $\angle \ldots$	...

Tuliskan sudut-sudut yang dibentuk oleh 5 dan 6 ruas garis yang titik pangkalnya berimpit berikut ini.

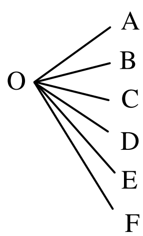
5 ruas garis



Nama-nama sudut yang dibentuk oleh 5 ruas garis sesuai gambar disamping adalah:

$\angle \ldots$, $\angle \ldots$, $\angle \ldots$, $\angle \ldots$,
$\angle \ldots$, $\angle \ldots$, $\angle \ldots$,
$\angle \ldots$, $\angle \ldots$,
$\angle \ldots$. banyaknya sudut yang terbentuk ada ... macam.

6 ruas garis



Nama-nama sudut yang dibentuk oleh 6 ruas garis sesuai gambar disamping adalah:

$\angle \ldots$, $\angle \ldots$, $\angle \ldots$, $\angle \ldots$, $\angle \ldots$,
$\angle \ldots$, $\angle \ldots$, $\angle \ldots$, $\angle \ldots$,
$\angle \ldots$, $\angle \ldots$, $\angle \ldots$,
$\angle \ldots$, $\angle \ldots$,
$\angle \ldots$. banyaknya sudut yang terbentuk ada ... macam.

Setelah anda mendaftar banyaknya sudut yang dibentuk hingga 6 ruas garis yang pangkalnya berimpit di atas, sekarang masukkan data-data tersebut ke dalam tabel berikut dan lengkapi seluruh isiannya.

Banyaknya ruas garis yang pangkalnya berimpit	Banyaknya sudut yang dibentuk
1	0
2	1
3	3
4	...
5	...
6	...

Perhatikan pemasangan (korespondensi) antara bilangan-bilangan pada kedua kolom tabel di atas.

Jika data itu disajikan dalam bentuk baris hasilnya adalah seperti berikut:

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ \ldots$$

$$0\ ,\ 1\ ,\ 3\ ,\ 6\ ,\ 10\ ,\ 15\ ,\ \ldots$$

Bilangan-bilangan yang diatur urutannya seperti tersebut di atas dalam matematika dinamakan *barisan bilangan*. Susunan bilangan pada baris pertama disebut barisan bilangan asli. Jika u_1, u_2 , u_3 , u_4 , u_5 , u_6 , . . . masing-masing menyatakan urutan suku-suku dari suatu barisan bilangan mulai dari suku pertama, kedua, ketiga, keempat, dan seterusnya maka

$$\begin{array}{cccccccccccc} u_1 & , & u_2 & , & u_3 & , & u_4 & , & u_5 & , & u_6 & ,\ldots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & , & 1 & , & 3 & , & 6 & , & 10 & , & 15 & ,\ldots \end{array}$$

Susunan bilangan pada baris yang kedua di atas disebut *barisan bilangan* dengan urutan suku-sukunya mulai dari suku pertama, kedua, ketiga, keempat, kelima, keenam, dan seterusnya sehingga,

$u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3$, $u_4 = 6$, $u_5 = 10$, $u_6 = 15$, . . . dan seterusnya.

Dari barisan bilangan di atas, jika ditanya berapakah bilangan pada suku ke-10, suku ke-50, dan suku ke-2008?, maka jawaban dari pertanyaan-pertanyaan seperti itu sama dengan jika kita menanyakan berapakah banyaknya sudut yang dibentuk oleh 10, 50 , dan 2008 ruas garis yang pangkalnya berimpit?

Jika urutan sukunya kecil misalnya suku ke-10, maka dengan cara meneruskan pola bilangannya jawaban segera dapat diperoleh.

Contoh

Tentukan suku ke-10 dari barisan bilangan

$$0 , 1 , 3 , 6 , 10 , 15 , \ldots$$

Jawabannnya dapat diperoleh dengan meneruskan pola bilangannya, yakni:

u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , u_5 , u_6 , . . .

0 , 1 , 3 , 6 , 10 , 15 , . . . 45

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Berangkat dari u_6 maka berdasarkan pola bilangannya, akan diperoleh

suku ke-7 atau u_7 $= u_6 + 6 = 15 + 6 = 21$

suku ke-8 atau u_8 $= u_6 + 6 + 7 = 15 + 6 + 7 = 28$

suku ke-9 atau u_9 $= u_6 + 6 + 7 + 8 = 15 + 6 + 7 + 8 = 36$

suku ke-10 atau u_{10} $= u_6 + 6 + 7 + 8 + 9$

$= 15 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.

Jadi dengan meneruskan pola bilangannya akan diperoleh suku ke-10 atau u_{10} = 45.

Suatu hal yang tidak efisien untuk dilakukan jika untuk memperoleh suku ke-50 atau suku ke-2008 dari barisan bilangan tersebut kita meneruskan pola bilangannya seperti cara di atas. Lantas bagaimana cara memperoleh jawaban yang tepat dengan cara yang lebih singkat atau efisien?. Jawabnya adalah dengan terlebih dahulu mencari rumus suku umum barisan bilangannya dan kemudian barulah menentukan suku keberapapun sesuai dengan yang ditanyakan.

C. Menemukan Rumus Suku Umum Barisan Bilangan dan Menggunakannya

Untuk menentukan rumus suku umum dari suatu barisan bilangan dapat dilakukan dengan dua cara, yakni dengan *tuntunan pola* dan *tanpa tuntunan pola*. Dengan tuntunan pola maksudnya adalah polanya ditunjukkan (yang sebenarnya/sesuai fakta) sehingga dengan melihat polanya siswa dapat menemukan rumus suku ke-n. Sedangkan cara yang kedua yakni tanpa tuntunan pola dilakukan dengan menyelidiki selisih tetapnya dicapai hingga tingkat penyelidikan ke berapa.

1. Menemukan Rumus Dengan Tuntunan Pola

Misalkan kita diberikan pertanyaan ”Tentukan rumus suku ke-n dari barisan bilangan

0 , 1 , 3 , 6 , 10 , 15 , . . .”

Tuntunan yang dimaksud adalah siswa diberikan sebuah LK (lembar kerja) berisi *isian* yang *sengaja dibuat tidak lengkap* dan dari isian yang tidak/belum lengkap itulah siswa diminta melengkapinya. Agar materi pelajaran dapat bersifat menantang (siswa merasa belum tahu pemecahannya tetapi mereka merasa mampu untuk memecahkannya jika diberi kesempatan dan waktu yang cukup), dan keterlibatan siswa dapat dibuat maksimal, berilah mereka kesempatan untuk bekerja secara kelompok. Dalam membentuk kelompok guru perlu mengatur supaya anggota setiap kelompok heterogen, yaitu terdiri dari siswa pandai, sedang, dan kurang sehingga kemampuan antar kelompok relatif seimbang. Dengan cara kerja kelompok seperti ini tentu pembelajaran akan berlangsung efektif, efisien, dan menyenangkan.

Berikut adalah bentuk isian LK menemukan rumus umum suku ke-n dengan tuntunan pola.

Petunjuk: Isilah kotak yang tersedia dengan suatu bilangan sehingga menjadi pernyataan yang benar!

Banyaknya ruas garis yang pangkalnya berimpit	Banyaknya sudut yang dibentuk
1	$0 = \dfrac{\square(\square-1)}{2}$
2	$1 = \dfrac{\square(\square-1)}{2}$
3	$3 = \dfrac{\square(\square-1)}{2}$
4	$6 = \dfrac{\square(\square-1)}{2}$
5	$10 = \dfrac{\square(\square-1)}{2}$
6	$15 = \dfrac{\square(\square-1)}{2}$
n	$u_n = \dfrac{\square(\square-1)}{2}$

Dengan tuntunan pemecahan seperti di atas siswa diharapkan dapat menemukan bentuk umum yakni rumus suku ke-n dari barisan 0, 1, 3 , 6, 10, 15 , . . .

Rumus yang dimaksud adalah $\boxed{u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}}$

2. Menemukan Rumus Tanpa Tuntunan Pola

Cara kedua yakni tanpa tuntunan pola, dilakukan dengan langkah sebagai berikut:

a. Selidiki sampai berapa tingkat dicapai selisih tetapnya.

b. Jika selisih tetapnya dicapai pada tingkat penyelidikan yang kedua, maka dipastikan barisan bilangannya berderajat dua. Jika selisih tetapnya dicapai pada tingkat penyelidikan yang ketiga, maka dipastikan barisan bilangannya berderajat tiga, demikianlah seterusnya.

c. Setelah derajat barisan bilangannya diketahui, langkah berikutnya adalah memisalkan:

$u_n = an + b$ .... jika barisan bilangannya berderajat 1

$u_n = an^2 + bn + c$ .... jika barisan bilangannya berderajat 2

$u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ .... jika barisan bilangannya berderajat 3

$u_n = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$ ... jika barisan bilangannya berderajat 4

$\vdots$

$u_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + a_{k-2} n^{k-2} + \ . \ . \ . + a_1 n + a_0$ ... jika barisan bilangannya berderajat k

d. Selidiki nilai-nilai sukunya dari suku pertama minimal hingga suku keempat. Mengapa?, sebab suatu barisan bilangan akan tertentu secara tunggal jika suku-suku yang diketahui minimal hingga 4 (empat) suku.

e. Selanjutnya dengan menghubungkan komponen-komponen yang bersesuaian pada masing-masing tingkat penyelidikan akan diperoleh SPL (sistem persamaan linear) yang banyaknya sesuai dengan banyak variabel (peubah)-nya. Dari penyelesaian SPL tersebut maka rumus umum suku ke-n dari barisan bilangan yang dimaksud akan dapat ditentukan secara tunggal. Terakhir kita dapat menentukan suku sembarang yang ditanyakan berdasar rumus yang telah ditemukan tersebut.

Misalkan kita diberikan pertanyaan ”Tentukan rumus suku ke-n dari barisan bilangan

0 , 1 , 3 , 6 , 10 , 15 , . . .”

Jawab

cara menentukan selisih tetap barisan bilangan tersebut adalah:

Barisan bilangan $\longrightarrow$ 0 , 1 , 3 , 6 , 10 , 15 , . . .

Selisih penyelidikan tingkat 1 $\longrightarrow$ 1 2 3 4 5

Selisih penyelidikan tingkat 2 $\longrightarrow$ 1 1 1 1

Hasil penyelidikan di atas memperlihatkan bahwa barisan bilangan 0, 1, 3, 6, 10, 15, . . . adalah barisan bilangan berderajat 2, sebab selisih tetapnya diperoleh hingga penyelidikan tingkat 2. Selanjutnya karena barisan bilangannya berderajat 2, maka pemisalan suku ke-n dari barisan bilangan tersebut adalah

$u_n = an^2 + bn + c$

Karena $u_n = an^2 + bn + c$, maka $u_1 = a(1)^2 + b(1) + c = a + b + c$

$u_2 = a(2)^2 + b(2) + c = 4a + 2b + c$

$u_3 = a(3)^2 + b(3) + c = 9a + 3b + c$

$u_4 = a(4)^2 + b(4) + c = 16a + 4b + c$

$u_5 = a(5)^2 + b(5) + c = 25a + 5b + c$

$u_6 = a(6)^2 + b(6) + c = 36a + 6b + c.$

$$\overbrace{a + b + c}^{u_1},\ \overbrace{4a + 2b + c}^{u_2},\ \overbrace{9a + 3b + c}^{u_3},\ \overbrace{16a + 4b + c}^{u_4},\ \overbrace{25a + 5b + c}^{u_5},\ \overbrace{36a\ +b+c}^{u_6},..$$

$$b_1 = 3a + b \qquad b_2 = 5a + b \qquad b_3 = 7a + b \qquad b_4 = 9a + b \qquad b_5 = 11a + b$$

$$b'_1 = 2a \qquad b'_2 = 2a \qquad b'_3 = 2a \qquad b'_4 = 2a$$

Bentuk terakhir di atas ini kemudian kita hubungkan dengan penyelidikan sebelumnya. Perhatikan korespondensinya.

$$(1)\quad \overbrace{a + b + c}^{u_1},\ \overbrace{4a + 2b + c}^{u_2},\ \overbrace{9a + 3b + c}^{u_3},\ \overbrace{16a + 4b + c}^{u_4},\ \overbrace{25a + 5b + c}^{u_5},\ \overbrace{36a + 6b + c}^{u_6}, . .$$

$$(2)\quad b_1 = 3a + b \qquad b_2 = 5a + b \qquad b_3 = 7a + b \qquad b_4 = 9a + b \qquad b_5 = 11a + b$$

$$(3)\quad b'_1 = 2a \qquad b'_2 = 2a \qquad b'_3 = 2a \qquad b'_4 = 2a$$

(1) 0 , 1 , 3 , 6 , 10 , 15 , . . .

(2) 1 2 3 4 5

(3) 1 1 1 1

Dari korespondensi antara kedua bentuk penyelidikan di atas akan diperoleh 3 persamaan linear dengan 3 variabel seperti berikut.

$a + b + c = 0$ (*)

$3a + b = 1$ (**)

$2a = 1$ (***)

Perhatikan bahwa suku-suku yang digunakan untuk mengadakan korespondensi adalah

(a) Suku pertamanya yaitu $u_1 = a + b + c = 0$

(b) Beda pertama suku pada tingkat penyelidikan yang pertama, yakni $b_1 = 3a + b = 1$, dan

(c) Beda pertama suku pada tingkat penyelidikan yang kedua, yakni $b_1^{'} = 2a = 1$

Penyelesaian tercepat akan diperoleh jika dimulai dari (***).

(***) $2a = 1$

$$a = \tfrac{1}{2} \rightarrow (**)\quad 3a + b = 1$$

$$\Leftrightarrow 3(\tfrac{1}{2}) + b = 1$$

$$\Leftrightarrow 1\tfrac{1}{2} + b = 1$$

$$\Leftrightarrow b = 1 - 1\tfrac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow b = -\tfrac{1}{2} \rightarrow (*)\quad a + b + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tfrac{1}{2}) + (-\tfrac{1}{2}) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 0$$

Dengan memasukkan nilai $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, dan $c = 0$ ke barisan bilangan berderajat 2 yang kita misalkan maka akan kita peroleh rumus suku ke-n yang kita cari.

$$a = \tfrac{1}{2},\ b = -\tfrac{1}{2},\ \text{dan } c = 0 \rightarrow u_n = an^2 + bn + c$$

$$\Leftrightarrow u_n = (\tfrac{1}{2})n^2 + (-\tfrac{1}{2})n + 0$$

$$\Leftrightarrow u_n = \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_n = \tfrac{1}{2}n(n-1)}$$

Jadi rumus umum suku ke-n untuk barisan bilangan 0, 1, 3, 6, 10, 15, . . adalah

$u_n = \frac{1}{2} n(n - 1)$

3. Menggunakan Rumus Untuk Menentukan Nilai Suku Urutan Besar

Kini kita telah mengetahui bagaimana cara menurunkan rumus suku ke-n dari suatu barisan bilangan yakni dengan tuntunan pola (menggunakan LK) maupun tanpa tuntunan pola (tanpa LK). Tanpa LK sifatnya lebih menantang, tetapi tanpa tuntunan penemuan rumus suku ke-n secara jelas maka tujuan penemuan rumus itu akan sulit untuk dilakukan. Syarat penting untuk menurunkan rumus suku ke-n dari suatu barisan dengan tuntunan pola adalah ”guru terlebih dahulu harus mengetahui kunci jawabannya”. Kunci jawaban yang dimaksudkan adalah ”rumus suku ke-n dari barisan bilangan yang diketahui itu”.

Selanjutnya cara yang kedua yakni dapat menemukan rumus suku ke-n barisan bilangannya tanpa menggunakan LK sehingga masing-masing guru/siswa dapat mengekplorasi secara bebas. Untuk dapat mengeksplorasi secara bebas guru harus mengetahui ”bagaimana teknik mengeksplorasi”. Setelah siswa mengetahui teknik tersebut diharapkan dapat menemukan rumus umum tersebut secara mandiri maupun berkelompok.

Setelah rumus umum suku ke-n ditemukan, kegiatan selanjutnya adalah menentukan nilai-nilai dari suku dengan urutan tertentu. Misal berapakah suku yang ke-50 dan berapakah suku yang ke-2008, pemecahannya adalah seperti berikut.

$0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots, u_n = \frac{1}{2} n(n - 1).$

Maka suku ke-50 diperoleh dengan mengganti nilai n dengan bilangan 50, sehingga dari $u_n = \frac{1}{2}n(n - 1) \rightarrow u_{50} = \frac{1}{2}(50)(50 - 1)$

$$= 25\,(50 - 1)$$
$$= 25(50) - 25(1)$$
$$= 1250 - 25$$
$$= 1225$$

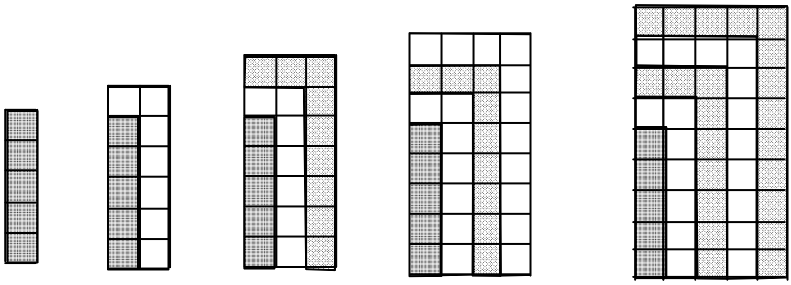
Untuk n = 2008 $\rightarrow u_{2008} = \frac{1}{2}(2008)(2008 - 1)$

$$= 1004(2007)$$
$$= 2015028$$

Jadi nilai suku ke-50 adalah 1225 dan nilai suku ke-2008 adalah 2015028. Jika keduanya kita hubungkan dengan permasalahan semula, maka suku ke-50 adalah 1225 artinya jika banyaknya ruas garis yang pangkalnya berimpit itu sebanyak 50 buah, maka banyaknya sudut yang dibentuk ada 1225 macam. Sementara itu suku ke-2008 = 2015028 artinya jika banyaknya ruas garis yang pangkalnya berimpit itu sebanyak 2008 buah, maka banyaknya sudut yang dibentuk ada 2015028 macam.

Contoh lain

Tentukan suku yang ke-2008 dari barisan bilangan berikut:



u_1 u_2 u_3 u_4 u_5

Jawab

Cara 1

Menemukan rumus tanpa tuntunan pola

Jika kita amati berdasarkan banyaknya petak persegi yang dimuat oleh masing-masing gambar maka

u_1 = 5 (warna hitam) = 5

u_2 = 5 + 7 (warna hitam dan putih) = 12

u_3 = 5 + 7 + 9 (warna hitam, putih, dan hitam) = 21

u_4 = 5 + 7 + 9 + 11 (warna hitam, putih, hitam, dan putih) = 32

u_5 = 5 + 7 + 9 + 11 + 13 (warna hitam, putih, hitam, putih dan hitam) = 45

Berarti yang ditanyakan adalah u_{2008} yaitu suku ke-2008 dari barisan bilangan

5 , 12 , 21, 32 , 45 , . . .

Sekarang kita selidiki selisih tetapnya. Perhatikan:

(1) 5 , 12 , 21 , 32 , 45 , . . . ,

(2) 7 9 11 12 . . .

(3) 2 2 2 2

setelah diselidiki ternyata selisih tetapnya diperoleh setelah 2 tingkat penyelidikan, dengan demikian barisan bilangannya adalah barisan bilangan berderajat 2. Pemisalan rumus umum untuk suku ke-n barisan bilangan tersebut adalah

$$u_n = an^2 + bn + c$$

Pada pembahasan sebelumnya penyelidikan selisih tetapnya untuk barisan berderajat 2 adalah sebagai berikut

(1) $\overbrace{a+b+c}^{u_1},\ \overbrace{4a+2b+c}^{u_2},\ \overbrace{9a+3b+c}^{u_3},\ \overbrace{16a+4b+c}^{u_4},\ \overbrace{25a+5b+c}^{u_5},\ \overbrace{36a+6b+c}^{u_6},$

(2) $b_1 = 3a + b \quad b_2 = 5a + b \quad b_3 = 7a + b \quad b_4 = 9a + b \quad b_5 = 11a + b$

(3) $b_1^{'} = 2a \quad b_2^{'} = 2a \quad b_3^{'} = 2a \quad b_4^{'} = 2a$

unsur-unsur yang diperhatikan untuk membentuk sistem persamaan linear pada barisan berderajat 2 di atas adalah:

1. Suku pertamanya yaitu $u_1 = a + b + c$
2. Beda pertama suku pada tingkat penyelidikan yang pertama, yakni $b_1 = 3a + b$
3. Beda pertama suku pada tingkat penyelidikan yang kedua, yakni $b_1^{'} = 2a$

Dengan demikian maka korespondensi untuk membentuk sistem persamaan linear yang diperlukan dalam mencari rumus suku ke-n barisan bilangan

(1) 5 , 12 , 21 , 32 , 45 , . . .

(2) 7 9 11 13 . . .

(3) 2 2 2 2

adalah $u_1 = a + b + c = 5$, $b_1 = 3a + b = 7$ dan $b_1' = 2a = 2$.

Dengan demikian sistem persamaan linear yang kita peroleh adalah

$a + b + c = 5$ (*)

$3a + b = 7$ (**)

$2a = 2$ (***)

Selesaikan mulai dari persamaan (***)hingga persamaan (*).

(***) $2a = 2$

$$a = 1 \rightarrow (**)\quad 3a + b = 7$$
$$\Leftrightarrow 3(1) + b = 7$$
$$\Leftrightarrow 3 + b = 7$$
$$\Leftrightarrow b = 7 - 3.$$
$$\Leftrightarrow b = 4 \rightarrow (*)\quad a + b + c = 5$$
$$\Leftrightarrow (1) + (4) + c = 5$$
$$\Leftrightarrow 5 + c = 5$$
$$\Leftrightarrow c = 5 - 5$$
$$\Leftrightarrow c = 0$$

Dengan memasukkan nilai a = 1, b = 4, dan c = 0 ke rumus umum barisan bilangan berderajat 2 yang kita misalkan maka akan kita peroleh rumus suku ke-n yang dicari.

$$a = 1,\ b = 4,\ dan\ c = 0 \quad \rightarrow u_n = an^2 + bn + c$$
$$\Leftrightarrow u_n = (1)n^2 + (4)n + 0$$
$$\Leftrightarrow u_n = n^2 + 4n$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \; u_n = n\,(n + 4)}$$

Untuk $n = 2008$ maka $u_{2008} = 2008(2008 + 4)$

$= 2008(2012)$

$= 4040096$

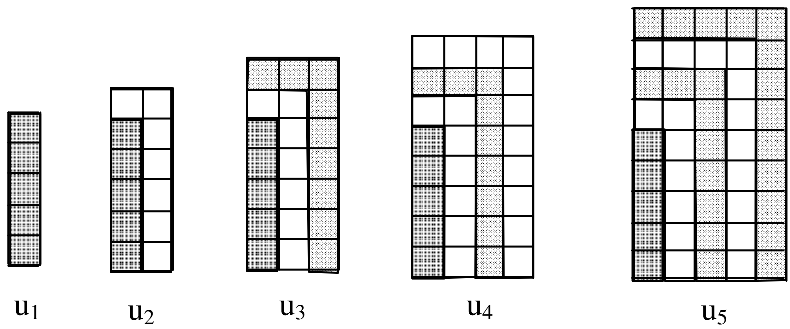
Jadi nilai suku ke-2008 adalah 4040096 artinya banyaknya satuan persegi yang digunakan untuk membentuk persegi panjang yang ke-2008 adalah sebanyak 4040096 buah.

Perhatikan bahwa persegi panjang yang dimaksud itu berdasarkan pola gambarnya adalah persegi panjang yang alasnya = 2008 satuan, dan tingginya = 2008 + 4 = 2012 satuan.

Cara 2

Menemukan rumus dengan mengamati pola bilangannya.

Dari pola gambar yang diketahui



Bila kita amati, pola yang ditunjukkan oleh ukuran sisi-sisinya adalah

u_1 = 5 petak → alas = 1, tinggi = 5 → alas × tinggi = 1 × 5 = 5 → 1 × (1 + 4) = 5

u_2 = 12 petak→ alas = 2, tinggi = 6→ alas × tinggi = 2 × 6 = 12→ 2 × (2 + 4) = 12

u_3 = 21 petak → alas = 3, tinggi = 7→alas × tinggi = 3 × 7 = 21→ 3 × (3 + 4) = 21

u_4 = 32 petak→ alas = 4, tinggi = 8→ alas × tinggi = 4 × 8 = 32→ 4 × (4 + 4) = 32

$u_5 = 45$ petak→ alas = 5, tinggi = 9→ alas × tinggi = 5 × 9 = 45→ 5 × (5 + 4) = 45

.   .

Ternyata alas dan tingginya selalu berselisih 4, maka

.   .

.   .

u_{2008} ⟶ 2008× (2008 + 4)

u_n ⟶ $u_n = n \times (n + 4)$,

atau

$\boxed{u_n = n(n + 4)}$.

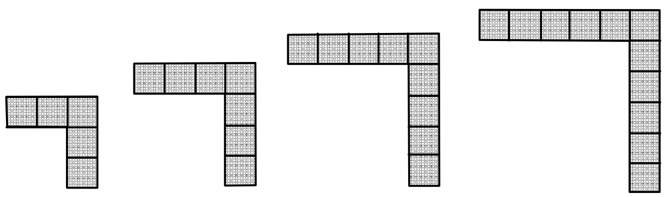
Catatan

1. Pola bilangan yang gambarnya diketahui seperti di atas menjadikan permasalahannya lebih mudah untuk dibayangkan dan polanya lebih mudah terlihat sehingga rumus umum untuk suku ke-n lebih cepat diperoleh.
2. Kesulitan utama dalam menemukan rumus suku ke-n secara cepat adalah karena kita tidak dapat segera menemukan polanya.
3. Namun meskipun kita kesulitan bahkan secara perasaan kita tidak dapat menemukan polanya dalam waktu lama, tujuan kita menemukan rumus umum suku ke-n masih dapat dilakukan yakni dengan menyelidiki selisih tetapnya dicapai pada berapa tingkat penyelidikan. Selanjutnya kita dapat menyelesaikannya yakni menemukan rumus umum suku ke-n yang merupakan tujuan utama kerja kita.
4. Penemuan rumus suku ke-n dengan tuntunan pola, semata-mata untuk memudahkan dan mempercepat dalam mencapai tujuan. Namun siswa dalam hati sebenarnya masih bertanya-tanya "bagaimana cara menemukan rumus suku ke-n suatu barisan bilangan jika tuntunan menemukan polanya tidak ada/tidak diberikan".
5. Satu-satunya cara menemukan rumus suku ke-n tanpa tuntunan pola hanyalah menyelidiki selisih tetapnya dicapai pada berapa

tingkat penyelidikan. Jika selisih tetapnya dicapai dalam 1 tingkat penyelidikan, maka barisan bilangannya berderajat 1 dan pemisalan rumus suku ke-n adalah $u_n = an + b$. Jika selisih tetapnya diperoleh dalam 2 tingkat penyelidikan, maka barisan bilangannya berderajat 2 dan pemisalan rumus untuk suku ke-n adalah $u_n = an^2 + bn + c$. Jika selisih tetapnya diperoleh dalam 3 tingkat penyelidikan, maka barisan bilangannya berderajat 3 dan pemisalan rumus untuk suku ke-n adalah $u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$, demikianlah seterusnya.

LATIHAN 1

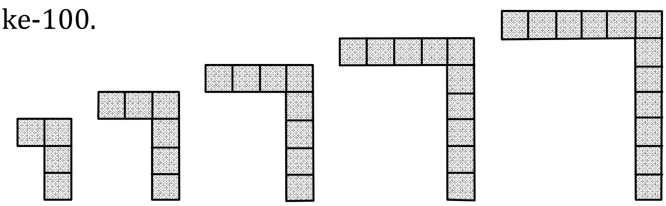
1. Tentukan rumus suku ke-n dari barisan bilangan yang terbentuk dari banyaknya persegi satuan pada gambar berikut. Tentukan pula suku ke-100.



u_1 $u2$ $u3$ $u4$ $\longrightarrow$ u_n?

$u_{100} = \ldots$?

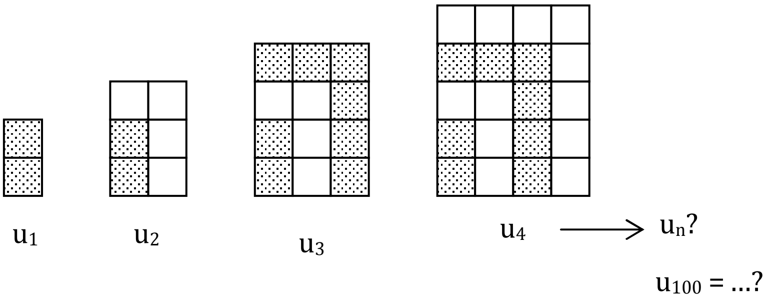
2. Tentukan rumus suku ke-n dari barisan bilangan yang terbentuk dari banyaknya persegi satuan pada gambar berikut. Tentukan pula suku ke-100.



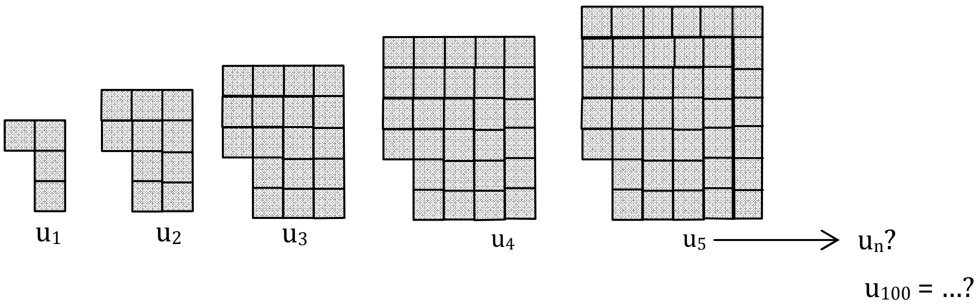
u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 $\longrightarrow$ u_n?

$u_{100} = \ldots$?

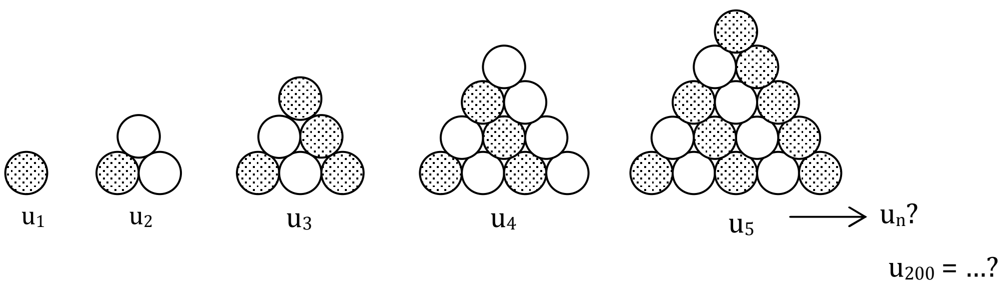
3. Tentukan rumus suku ke-n dari barisan bilangan yang terbentuk dari banyaknya persegi satuan pada gambar berikut. Tentukan pula suku ke-100.



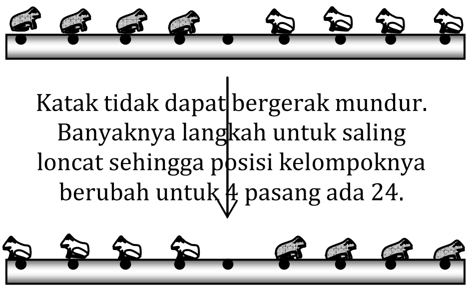
4. Tentukan rumus suku ke-n dari barisan bilangan yang terbentuk dari banyaknya persegi satuan pada gambar berikut. Tentukan pula suku ke-100.



5. Tentukan rumus suku ke-n dari barisan bilangan yang terbentuk dari banyaknya lingkaran satuan pada gambar berikut. Tentukan pula suku ke-200.



6. Pada permainan loncat katak, banyaknya langkah untuk menukar letak pasangan kelompok katak hitam dengan katak putih tergantung dari banyaknya pasangan. Data jumlah pasangan dan banyaknya langkah pemindahan dapat dilihat pada sajian berikut.



Banyaknya pasangan	Banyaknya langkah pemindahan
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35
.	.
.	.
.	.
n	?

Tentukan rumus suku ke-n, dan tentukan banyaknya langkah pemindahan jika banyaknya pasangan 6. Bagaimana jika banyaknya pasangan 100?

Data pada sajian diatas diperoleh sesuai dengan aturan Permainan Loncat Katak, yaitu:

"Tempatkan 2 kelompok katak, kelompok katak hitam dan putih yang dipisahkan oleh sebuah titik pemisah. Jumlah masing-masing kelompok katak sama. Gerakan katak dilakukan dengan cara *geser satu langkah atau melompati 1 katak, serta tidak dapat melompat/bergerak mundur".*

a. Praktekkan bagaimana kamu dapat menukar letak kelompok katak hitam dengan kelompok katak putih sehingga kelompok katak hitam dan putih dapat bertukarposisi saling membelakangi (seperti gambar di atas)?

b. Mulailah dari sepasang (1 hitam dan 1 putih) terlebih dahulu. Jika sepasang Anda sukses, tingkatkan kataknya menjadi 2 pasang, 3 pasang dan seterusnya.

c. Setelah Anda menemukan teknik memindahkannya, amatilah berapa langkah pemindahan minimal yang dapat dilakukan untuk memindahkan 1 pasang katak, 2 pasang katak, 3 pasang katak, 4 pasang katak, dan 5 pasang katak. Samakah banyaknya pasangan dan banyaknya langkah penukaran letak dengan data yang ada pada tabel di atas?

d. Berdasarkan data yang ada di tabel tersebut di atas, tentukan rumus suku ke-n, yakni banyaknya langkah pemindahan yang diperlukan jika banyaknya katak n pasang.

e. Berapakah banyaknya langkah yang diperlukan untuk memindahkan posisi 2 kelompok katak yang masing-masing kelompoknya berjumlah 10?

7. Tentukan rumus suku ke-n dan berapakah nilai dari urutan suku yang ditanyakan?

   (berderajat 1)

   a. 1, 6, 11, 16, 21, ... u_{21} = ...?

   b. 4, 11, 18, 25, 32, ... u_{41} = ...?

   c. 2, 6, 10, 14, 22, ... u_{11} = ...?

   d. 5, 14, 23, 32, 41, ... u_{101} = ...?

   e. 3, 8, 13, 18, 23, ... u_{26} = ...?

   f. 6, 16, 26, 36, 46, ... u_{37} = ...?

8. Tentukan rumus suku ke-n dan berapakah nilai dari urutan suku yang ditanyakan?

(berderajat 2)

a. 1, 2, 4, 7, 11, ... u_{10} = ...?

b. 0, 3 , 8, 15, 24, ... u_{20} = ... ?

c. 2, 6, 12, 20, 30, ... u_{40} = ...?

d. 1, 6, 15, 28, 45, ... u_{100} = ...?

e. 3, 6, 12, 30, 45, ... u_{19} = ...?

f. 1, 5, 12, 22, 35, ... u_{20} = ...?

Umpan Balik

Pada soal-soal tersebut di atas terdapat 38 butir pertanyaan. Setiap butir pertanyaan dihitung 1 pertanyaan. Cocokkan jawaban Anda dengan Kunci soal latihan yang terdapat di bagian akhir modul ini, dan hitunglah jumlah jawaban yang benar. Kemudian gunakanlah rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi ini.

Rumus

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\textit{Jumlah jawaban Anda yang benar}}{38} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90% – 100% = baik sekali (amat baik)

75% – 89% = baik

60% – 74% = sedang

< 59% = kurang

Kalau Anda mencapai tingkat penguasaan 75% ke atas, Anda dapat meneruskannya ke soal tes yang ada di akhir bagian penutup. Tetapi, kalau tingkat penguasaan Anda di bawah 75%, Anda harus mengulangi kembali membaca dari awal khususnya bagian mana yang belum dicermati dan yang belum Anda kuasai.

BARISAN JUMLAH KUMULATIF
BARISAN POLINOM

BAB III

A. PENGERTIAN BARISAN POLINOM

Seperti telah kita ketahui sebelumnya bahwa barisan polinom adalah barisan bilangan dengan suku ke-n yakni u_n (ternyata berupa fungsi dalam variabel n), $n \in A$ dengan A adalah himpunan bilangan asli yang dapat ditulis dalam bentuk

a. $u_n = an + b$ .... jika barisan bilangannya berderajat 1

b. $u_n = an^2 + bn + c$ .... jika barisan bilangannya berderajat 2

c. $u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ .... jika barisan bilangannya berderajat 3

d. $u_n = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$ ... jika barisan bilangannya berderajat 4

$\vdots$

$u_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + a_{k-2} n^{k-2} + ... + a_1 n + a_0$ ... jika barisan bilangannya berderajat k

Contoh

a. 4 , 10 , 16 , 22 , 28 , 34, ... , $u_n = 6n - 2$ adalah barisan bilangan berderajat 1

b. 4 , 14 , 30 , 52 , 70 , 104, ... , $u_n = n(3n + 1)$ adalah barisan bilangan berderajat 2

c. 4 , 18 , 48 , 100 , 180 , 294, ... , $u_n = n(n + 1)^2$ adalah barisan bilangan berderajat 3

Artinya rumus suku ke-n untuk ketiga barisan bilangan di atas berturut-turut adalah

$u_n = 6n - 2$, $u_n = n(3n + 1)$, dan $u_n = n(n + 1)^2$.

Jika masing-masing suku ke-n dari barisan tersebut ditulis dalam bentuk

$u_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + a_{k-2} n^{k-2} + \ldots + a_1 n + a_0$

maka

a. 4 , 10 , 16 , 22 , 28 , 34, ... , $u_n = 6n - 2 \rightarrow a_0 = -2$

b. 4 , 14 , 30 , 52 , 70 , 104, ... , $u_n = 3n^2 + n \rightarrow a_0 = 0$

c. 4 , 18 , 48 , 100 , 180 , 294, ... , $u_n = n^3 + 2n^2 + n \rightarrow a_0 = 0$

Ciri utama dari **barisan bilangan polinom** (untuk selanjutnya cukup disebut dengan istilah "**barisan polinom**") adalah **selisih tetapnya dapat ditentukan** setelah **dilakukan penyelidikan hingga tingkat tertentu** (penyelidikan tingkat pertama, tingkat kedua, ketiga, dan seterusnya). Seperti telah diuraikan pada bab II, jika dihubungkan dengan perolehan selisih tetapnya, maka barisan polinom yang diselidiki akan dapat diketahui berderajat 1, 2, 3, 4, dan seterusnya.

Sebagai gambaran perhatikan masing-masing barisan berikut.

a. 4 , 10 , 16 , 22 , 28 , 34, ... disebut berderajat 1, mengapa?

6 6 6 6 6

b. 4 , 14 , 30 , 52 , 70 , 104, ... disebut berderajat 2, mengapa?

10 , , , , 34

6 6 6

c. 4 , 18 , 48 , 100 , 180 , 294, ... disebut berderajat 3, mengapa?

14 30 52 80 114

16 22 28 34

6 6 6

B. BARISAN JUMLAH KUMULATIF DARI BARISAN POLINOM

Pertanyaan selanjutnya adalah jika $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$ adalah barisan polinom, apakah $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$ juga berupa barisan polinom jika:

$S_1 = u_1$,

$S_2 = u_1 + u_2$,

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$,

$S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$, … dan seterusnya hingga

$\vdots$

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n$.

Untuk memberikan jawaban secara jelas atas pertanyaan tersebut diberikan sebuah gambaran seperti berikut.

Barisan 4, 10, 16, 22, 28, 34, ... adalah barisan bilangan polinom berderajat 1 sebab selisih tetapnya diperoleh dalam 1 tingkat penyelidikan. Selisih tetap diantara dua suku yang berdekatan adalah 6.

4 , 10 , 16 , 22 , 28 , 34, ... (1)

6 6 6 6 6 6

Dari barisan bilangan di atas jika masing-masing suku barisan tersebut dihubungkan dengan bentuk umum barisan bilangan $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, \ldots$, maka korespondensinya adalah

$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, \ldots$ (2)

4 , 10 , 16 , 22 , 28 , 34 , ...

6 6 6 6 6 6

Selanjutnya jika

$S_1 = 4$,

$S_2 = 4 + 10 = 14$,

$S_3 = 4 + 10 + 16 = 30$,

$S_4 = 4 + 10 + 16 + 22 = 52$,

$S_5 = 4 + 10 + 16 + 22 + 28 = 70$,

$S_6 = 4 + 10 + 16 + 22 + 28 + 34 = 104$, ... dan seterusnya hingga S_n , apakah S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, ... juga merupakan barisan bilangan polinom?

Perhatikan bahwa bentuk barisan S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, ... dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_1, & & S_2, & & S_3, & & S_4, & & S_5, & & S_6, \ldots \quad (3) \\ 4, & & 14, & & 30, & & 52, & & 70, & & 104, \ldots \\ & 10, & & 16, & & 22, & & 28, & & 34 & \\ & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & \end{array}$$

Setelah diselidiki ternyata barisan bilangan (3) adalah barisan polinom berderajat 2 (dua).

Jika kita bandingkan bentuknya dengan barisan polinom sebelumnya yakni (2), perbandingan bentuknya adalah seperti berikut.

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_1, & & S_2, & & S_3, & & S_4, & & S_5, & & S_6, \ldots \quad (3) \\ 4, & & 14, & & 30, & & 52, & & 70, & & 104, \ldots \\ & 10, & & 16, & & 22, & & 28, & & 34 & \\ & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & \end{array}$$

Sementara sebelumnya adalah

$$\begin{array}{ccccccccccc} u_1, & & u_2, & & u_3, & & u_4, & & u_5, & & u_6, \ldots \\ 4, & & 10, & & 16, & & 22, & & 28, & & 34 \\ & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & & \end{array}$$

Tampak bahwa barisan bilangan bentuk (3) yakni S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, ... juga berupa barisan bilangan polinom. Mengapa?, sebab selisih tetapnya diperoleh pada k tingkat penyelidikan (dalam hal ini k = 2).

Sekarang misalkan dari barisan polinom (3) di atas kita bentuk barisan polinom baru $S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, S'_5, S'_6, \ldots$ dengan syarat:

$S'_1 = S_1$,

$S'_2 = S_1 + S_2$,

$S'_3 = S_1 + S_2 + S_3$,

$S'_4 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4,$

$S'_5 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5,$

$S'_6 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$, … didapat S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, S'_5, S'_6, ...

Dari polinom (3) diperoleh

S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, S'_5, S'_6, ... (4) barisan sebelumnya

4 , 18 , 48 , 100 , 180 , 294 ,...

14 30 52 80 114 , …

16 22 28 34 , …

6 6 6 , …

S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5 , S_6 , ...

4 , 14 , 30 , 52 , 80 , 114 , ...

10 16 22 28 34 , ...

6 6 6 6 , …

Ternyata S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, S'_5, S'_6, . . . (4) juga berupa barisan polinom. Barisan polinomnya berderajat 3 sebab selisih tetapnya diperoleh dalam 3 tingkat penyelidikan.

Uraian di atas adalah contoh peningkatan barisan polinom dari barisan polinom semula yang berderajat 1 menjadi barisan polinom berderajat 2 dan kemudian menjadi barisan polinom berderajat 3. Aturannya dirangkum sebagai berikut,

Aturan meningkatkan barisan polinom menjadi 1 tingkat lebih tinggi

Dari barisan polinom u_1, u_2, u_3, u_4, ... ditingkatkan menjadi S_1, S_2, S_3, S_4, ... ditingkatkan lagi menjadi S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, . . . dan bila ditingkatkan lagi menjadi S''_1, S''_2, S''_3, S''_4, . . . dan seterusnya dengan aturan:

$S_1 = u_1$	$S'_1 = S_1,$	$S''_1 = S'_1,$
$S_2 = u_1 + u_2,$	$S'_2 = S_1 + S_2,$	$S''_2 = S'_1 + S'_2,$
$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$	$S'_3 = S_1 + S_2 + S_3,$	$S''_3 = S'_1 + S'_2 + S'_3,$

$S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$, $\quad S'_4 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, $\quad S''_4 = S'_1 + S'_2 + S'_3 + S'_4$,

$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n \quad S'_n = S_1 + S_2 + ... + S_n$, $\quad S''_n = S'_1 + S'_2 + ... + S'_n$

Perhatikan bahwa masing-masing hasil peningkatannya juga merupakan barisan polinom dengan suku pertamanya u_1 dan derajat barisan polinomnya 1 tingkat lebih tinggi dari derajat barisan polinom sebelumnya.

S_1, S_2, S_3, S_4, … selanjutnya disebut **barisan jumlah kumulatif** suku-suku dari barisan polinom $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$, …

S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, ... disebut **barisan jumlah kumulatif** suku-suku dari barisan polinom S_1, S_2, S_3, S_4, …, dan

$S''_1, S''_2, S''_3, S''_4$, . . . disebut **barisan jumlah kumulatif** suku-suku dari barisan polinom S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, ... , demikianlah seterusnya.

Kesimpulan:

Barisan jumlah kumulatif suku-suku dari suatu barisan polinom adalah barisan polinom yang suku pertamanya sama dengan barisan polinom sebelumnya dan derajatnya 1 tingkat lebih tinggi dari barisan polinom sebelumnya.

Catatan

Bukti secara umum (formal matematis) terlalu kompleks sehingga tidak dimasukkan dalam pembahasan.

Contoh 1

Dari barisan bilangan 4 , 14 , 30 , 52 , 80 , 114 , …

a. Tuliskan bentuk barisan jumlah kumulatif dari barisan tersebut minimal hingga 6 suku, dan tentukan rumus suku ke-n dari barisan jumlah kumulatif tersebut!

b. Jika barisan pada soal tersebut merupakan barisan jumlah kumulatif suku-suku dari suatu barisan bilangan, tentukan rumus suku ke-n dari barisan bilangan itu dan tulis bentuk barisannya minimal hingga 6 suku!

Jawab

a. Menentukan bentuk barisan kumulatif

Dengan uraian lengkap

Dari barisan 4 , 14 , 30 , 52 , 80 , 114 , … maka 6 suku pertama dari barisan jumlah kumulatifnya adalah

$S_1 = 4$

$S_2 = 4 + 14 = 18$

$S_3 = 4 + 14 + 30 = 48$

$S_4 = 4 + 14 + 30 + 52 = 100$

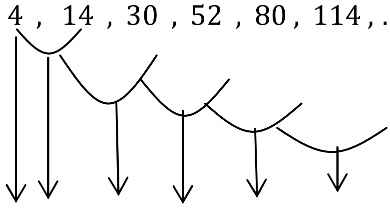
$S_5 = 4 + 14 + 30 + 52 + 80 = 180$

$S_6 = 4 + 14 + 30 + 52 + 80 + 114 = 294$.

Dengan demikian maka bentuk barisan jumlah kumulatifnya minimal hingga 6 suku adalah 4 , 18 , 48 , 100 , 180 , 294 , ...

Dengan cara singkat (mencongak)

Dari barisan 4 , 14 , 30 , 52 , 80 , 114 , … akan diperoleh:



4 18 48 100 180 294 ...

Sehingga barisan jumlah kumulatif dari barisan 4 , 14 , 30 , 52 , 80 , 114 , ... adalah barisan 4 , 18 , 48 , 100 , 180 , 294 , ...

Rumus suku ke-n dari barisan 4 , 18 , 48 , 100 , 180 , 294 , ... ditentukan menggunakan persamaan yang diperoleh dengan cara menghubungkan komponen-komponen yang depan dari penyelidikan hingga dicapai selisih tetapnya dengan komponen-komponen depan barisan polinom yang derajatnya bersesuaian.

a. Menentukan rumus suku ke-n barisan jumlah kumulatif

Perhatikan kerangka penyelidikan hingga diperolehnya selisih tetap

(1) 4 , 18 , 48 , 100 , 180 , 294 , ...

(2) 14 30 52 80 114 , ...

(3) 16 22 28 34 , ...

(4) 6 6 6 , ...

Setelah diselidiki ternyata selisih tetapnya diperoleh hingga 3 tingkat penyelidikan, hal ini berarti barisan bilangannya berderajat 3. Sehingga perlu dibentuk sistem persamaan linear yang menghubungkan komponen-komponen depan barisan tersebut dengan komponen-komponen depan barisan polinom umum yang berderajat 3, yaitu

$S_n = an^3 + bn^2 + cn + d \rightarrow S_1 = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d = a + b + c + d$

$S_2 = a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d = 8a + 4b + 2c + d$

$S_3 = a(3)^3 + b(3)^2 + c(3) + d = 27a + 9b + 3c + d$

$S_4 = a(4)^3 + b(4)^2 + c(4) + d = 64a + 16b + 4c + d$

$S_5 = a(5)^3 + b(5)^2 + c(5) + d = 125a + 25b + 5c + d$

Karena kita sudah mengetahui bahwa barisan bilangannya berderajat 3 maka dapat dipastikan bahwa selisih tetapnya akan diperoleh pada 3 tingkat penyelidikan. Sehingga untuk menentukan selisih tetap suku-suku barisannya cukup ditulis hingga 3 + 1 = 4 suku pertamanya saja. Penyelidikan minimal yang dimaksud adalah seperti berikut

$$(1)\quad \overbrace{a+b+c+d}^{S_1},\quad \overbrace{8a+4b+2c+d}^{S2},\quad \overbrace{27a+9b+3c+d}^{S3},\quad \overbrace{64a+16b+4c+d}^{S4},\ \ldots$$

$$(2)\quad b1 = 7a+3b+c \qquad b2 = 19a+5b+c \qquad b3 = 37a+7b+c$$

$$(3)\quad b_1' = 12a+2b \qquad b_2' = 18a+2b$$

$$(4)\quad b_1'' = 6a$$

Dengan menyamakan komponen-komponen yang bersesuaian dan menyelesaikan persamaan linear mulai dari bentuk (4) didapat:

$$(4)\ b_1'' = 6a = 6$$

$$a = 1 \rightarrow (3)\ b_1' = 12a + 2b = 16$$

$$6a + b = 8$$

$$6(1) + b = 8$$

$$6 + b = 8$$

$$b = 2 \rightarrow (2)\ b_1 = 7a + 3b + c = 14$$

$$7(1) + 3(2) + c = 14$$

$$7 + 6 + c = 14$$

$$13 + c = 14$$

$$c = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{array}\right\} \quad (1)\ a + b + c + d = 4$$

$$1 + 2 + 1 + d = 4$$

$$4 + d = 4$$

$$d = 0$$

$a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, dan $d = 0 \rightarrow S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

$$S_n = n^3 + 2n^2 + n + 0$$

$$= n(n^2 + 2n + 1)$$

$$= n(n + 1)^2$$

Jadi rumus suku ke-n dari barisan jumlah kumulatif berbentuk 4 , 18 , 48 , 100 , 180 , 294 , … adalah

$$S_n = n(n + 1)^2.$$

Sehingga secara umum gambaran selengkapnya dari barisan tersebut adalah

$$4 , 18 , 48 , 100 , 180 , 294 , \dots , n(n + 1)^2$$

Contoh 2

Jika 4 , 14 , 30 , 52 , 80 , 114 , … merupakan barisan jumlah kumulatif dari suatu barisan bilangan, tentukan

a. Bentuk barisan bilangan yang dimaksud

b. Rumus suku ke-n dari barisan tersebut

Jawab

a. Menentukan bentuk barisan jika barisan jumlah kumulatifnya diketahui

$$\begin{array}{cccccccc} S_1, & S_2, & S_3, & S_4, & S_5, & S_6, & \ldots \\ 4, & 14, & 30, & 52, & 80, & 114, & \ldots \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccccccc} u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & u_5, & u_6, & \ldots \\ 4, & 10, & 16, & 22, & 28, & 34, & \ldots \end{array}$$

$$10 \quad 16 \quad 22 \quad 28 \quad 34 \quad , \ldots$$

$$6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad , \ldots$$

Jadi bentuk barisan bilangan yang dimaksud adalah

$$4 \;,\; 10 \;,\; 16 \;,\; 22 \;,\; 28 \;,\; 34 \;,\; \ldots \qquad ▨$$

b. Menentukan rumus suku ke-n

Hasil penyelidikan selisih tetap dari barisan itu adalah

$$\begin{array}{ccccccc} u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & u_5, & u_6, & \ldots \\ 4, & 10, & 16, & 22, & 28, & 34, & \ldots \end{array}$$

$$6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad , \ldots$$

Karena selisih tetapnya diperoleh dalam 1 tingkat penyelidikan, maka barisan bilangan itu adalah barisan berderajat 1. Dengan demikian pemisalan bentuk umumnya adalah $u_n = an + b$.

$u_n = an + b \Rightarrow u_1 = a(1) + b = a + b$

$u_2 = a(2) + b = 2a + b$

$u_3 = a(3) + b = 3a + b$

$u_4 = a(4) + b = 4a + b$, akan diperoleh

$$\begin{array}{ccccc} u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & \ldots \\ a + b, & 2a + b, & 3a + b, & 4a + b, & \ldots \end{array}$$

$$a \quad a \quad a \quad , \ldots$$

Dengan mengadakan pemasangan (*korespondensi*) unsur-unsur yang bersesuaian diperoleh sistem persamaan linear

(1) $a + b = 4$

(2) $a = 6$.

Substitusikan (2) ke (1) $a + b = 4$

$6 + b = 4$

$b = -2$

Substitusi $a = 6$ dan $b = -2$ ke $u_n = an + b$ diperoleh:

$$u_n = 6n - 2$$ ▨

Latihan 2

1. Tentukan barisan jumlah kumulatif dari barisan-barisan berikut (minimal 5 suku) dan tentukan rumus suku ke-n dari barisan tersebut!
   a. 1 , 4 , 7 , 10 , 13 , 16 , ...
   b. 3 , 8 , 13 , 18 , 23 , 28 , ...
   c. 2 , 5 , 9 , 14 , 20 , 27, ...
   d. 3 , 6 , 10 , 15 , 21 , 28 , ...
2. Tentukan rumus jumlah kumulatif (S_n) dari barisan-barisan polinom berikut ini
   a. $u_n = 6n - 4$ ....
   b. $u_n = 6n - 5$ ....
   c. $u_n = 3n^2 + n - 1$ ....
   d. $u_n = n(3n - 1)$ ....
3. Barisan-barisan berikut merupakan barisan jumlah kumulatif dari suatu barisan bilangan. Tuliskan barisan bilangan yang dimaksud minimal hingga 6 suku dan tuliskan pula rumus suku terakhirnya.
   a. 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , ... , n^2

b. 4 , 9 , 15 , 22 , 30 , 39 , ... , $\frac{1}{2}$ n(n + 7)

c. 1 , 8 , 27 , 64 , 125 , 216, ... , n^3

d. 2 , 12 , 36 , 80 ,150, 252, ... , $n^2(n + 1)$

Umpan Balik

Pada soal-soal tersebut di atas terdapat 20 butir soal. Setiap butir soal dihitung 1 pertanyaan. Cocokkan jawaban Anda dengan kunci soal latihan yang terdapat di bagian akhir modul ini, dan hitunglah jumlah jawaban benar Anda. Kemudian gunakanlah rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi ini.

Rumus

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\textit{Jumlah jawaban Anda yang benar}}{20} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90% – 100% = baik sekali (amat baik)
75% – 89% = baik
60% – 74% = sedang
< 59% = kurang

Kalau Anda mencapai tingkat penguasaan 75% ke atas, Anda dapat meneruskannya ke soal tes yang ada di akhir bagian penutup. Tetapi, kalau tingkat penguasaan Anda di bawah 75%, Anda harus mengulangi kembali membaca dari awal khususnya bagian mana yang belum dicermati dan yang belum Anda kuasai.

PENUTUP

BAB IV

A. Rangkuman

Barisan bilangan adalah bilangan-bilangan yang disusun menurut *urutan* dan *aturan (pola)* tertentu. Urutan tertentu yang dimaksud adalah urutan mulai dari suku pertama (u_1), suku kedua (u_2), suku ketiga (u_3), suku keempat (u_4), dan seterusnya. Aturan tertentu yang dimaksud adalah aturan untuk memperoleh suku berikutnya dari suku sebelumnya.

Barisan bilangan yang dijadikan contoh eksplorasi (penemuan rumus/kaidah) adalah barisan bilangan yang berasal dari banyaknya sudut yang dibentuk oleh n buah ruas garis yang pangkalnya berimpit. Hasilnya ternyata adalah:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0, & & 1, & & 3, & & 6, & & 10, & & 15, \ldots \\ & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & \end{array}$$

Dari contoh tersebut, bilangan yang disusun dengan urutan tertentu itu adalah 0, 1, 3, 6, 10, 15, ... disebut *barisan bilangan*, sedang *pola bilangannya* adalah *dimulai* dengan suku pertama 0, suku berikutnya ditambah 1, suku berikutnya lagi ditambah 2, suku berikutnya lagi ditambah 3, suku berikutnya lagi ditambah 4, dan seterusnya. Demikianlah gambaran tentang apa yang disebut dengan barisan bilangan dan apa yang disebut pola bilangan.

Menurut psikologi pembelajaran matematika Bruner (*enactive*/konkret, *econic*/semi konkret, dan *symbolic*/abstrak) yakni pembelajaran harus dimulai dari obyek sesungguhnya kemudian menuju gambar, dan terakhir simbol/lambang yang isinya hanya huruf-huruf dan angka-angka saja (abstrak). Bila pembelajaran setiap topik matematika selalu dilakukan guru melalui ketiga tahapan itu, Bruner menjamin ”siswa akan mampu mengembangkan pengetahuannya jauh melebihi apa yang pernah mereka terima dari gurunya”.

Dari pertimbangan psikologi pembelajaran Bruner tersebut di atas menurut pertimbangan penulis, berangkat dari tahapan konkret/*enactive* jelas tidak mungkin sebab sajian dalam bentuk tulisan hanya mungkin diawali dalam bentuk gambar dan huruf saja. Ini berarti melalui sarana modul ini tahapan Bruner yang dapat dilakukan hanyalah tahapan ke-2 dan ke-3, yakni semi konkrit yang berupa sajian dari bentuk *gambar* ke *abstrak* yang hanya berupa *lambang-lambang saja.* Lambang-lambang yang dimaksud adalah bentuknya hanya berupa ”huruf-huruf saja atau angka-angka saja”. Oleh sebab itu penulis dalam modul ini mengawali sajian dengan gambar terlebih dahulu dan kemudian diikuti dengan perlambangannya. Harapannya agar sajian menjadi lebih *visibel* (mudah dilihat) dan *lebih mudah dibayangkan* sehingga materi yang sebenarnya agak sulit akan menjadi lebih mudah untuk diterima.

B. Tes

1. Tuliskan nilai suku atau jumlah yang ditanyakan.

   a. $u_n = n(n + 1)$; $u_{100} = ?$

   b. $u_n = 2n(n - 1)$; $u_{51} = ?$

   c. $u_n = \frac{1}{2}n(2n - 1)$; $u_{100} = ?$

   d. $S_n = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$; $S_{19} = ?$

   e. $S_n = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$; $S_{39} = ?$

2. Tuliskan rumus untuk mendapatkan jawaban dari pertanyaan yang dimaksud.

a. $S_1 = 1$
$S_2 = 1 + 3$
$S_3 = 1 + 3 + 5$
$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7$
$\vdots$
$S_n = \ldots$, nyatakan dalam n; $S_{100} = \ldots$?

b. $S_1 = 1^2$
$S_2 = 1^2 + 2^2$
$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2$
$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
$\vdots$
$S_n = \ldots$, nyatakan dalam n; $S_{20} = \ldots$?

3. Tuliskan rumus suku ke-n dari barisan-barisan berikut ini dan tentukan suku yang ditanyakan

a. 1 , 5 , 9 , 13 , 17 , . . . , u_n.

b. 1 , 5 , 12 , 22 , 35 , . . . , $u_n = \ldots$

c. 2 , 8 , 20 , 40 , 70 , . . . , $u_n = \ldots$

Umpan Balik

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci tes yang terdapat di bagian akhir modul ini. Tiap butir pertanyaan dihitung 1 nomor, sehingga seluruhnya ada 12 butir pertanyaan. Hitunglah jumlah jawaban Anda yang benar. Kemudian gunakanlah rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap soal tes ini.

Rumus

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\textit{Jumlah jawaban Anda yang benar}}{12} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90% – 100% = baik sekali (amat baik)

75% – 89% = baik

60% – 74% = sedang

< 59% = kurang

Kalau Anda mencapai tingkat penguasaan 75% ke atas, berarti tingkat penguasaan Anda masih dalam kategori cukup. Untuk meningkatkan penguasaan lebih tinggi, Anda dapat memperbaiki bagian-bagian yang belum benar hingga diperoleh jawaban benar yang sesuai kunci. Tetapi, kalau tingkat penguasaan Anda di bawah 75%, Anda harus mengulangi kembali membaca teorinya dan mencoba memperbaiki bagian-bagian yang masih salah hingga tercapai jawaban yang seluruhnya benar. Jika jawaban yang sesuai kunci tetap gagal dicapai, Anda dapat mengirim melalui faks. ke PPPPTK Matematika no. 0274-885752 atau SMS ke penulis no. 081392173195.

DAFTAR PUSTAKA

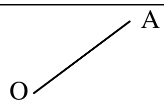
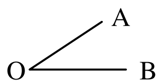
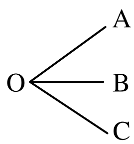
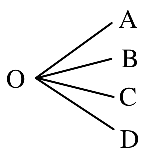
Bruner, Jerome, (1967). *Toward a Theory of Instruction*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Burton, David M. (1980). *Elementary Number Theory*. Boston: Allyn and Bacon, Inc.

Niven, Ivan–Zuckerman, Hurbert S. (1978). *An Intoduction to the Theory of Numbers (Third Edition).* New York: John Wiley & Sons, Inc.

LAMPIRAN

1. Kunci Lembar Kerja halaman 3

Banyak ruas garis	Gambar ruas-ruas garis berpotongan	Nama-nama sudut yang dibentuk	Banyaknya sudut yang dibentuk
1		tidak ada	0
2		$\angle AOB$,	1
3		$\angle AOB$, $\angle AOC$, $\angle BOC$	3
4		$\angle AOB$, $\angle AOC$, $\angle AOD$ $\angle BOC$, $\angle BOD$, $\angle COD$,	6

2. Kunci Lembar Kerja halaman 4

Banyaknya ruas garis yang pangkalnya berimpit	Banyaknya sudut yang dibentuk
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15

3. Kunci Lembar Kerja halaman 7

Banyaknya ruas garis berpotongan	Banyaknya sudut yang dibentuk
1	$0 = \dfrac{\boxed{1}(\boxed{1} - 1)}{2}$
2	$1 = \dfrac{\boxed{2}(\boxed{2} - 1)}{2}$
3	$3 = \dfrac{\boxed{3}(\boxed{3} - 1)}{2}$
4	$6 = \dfrac{\boxed{4}(4 - 1)}{2}$
5	$10 = \dfrac{\boxed{5}(\boxed{5} - 1)}{2}$
6	$15 = \dfrac{\boxed{6}(6 - 1)}{2}$
n	$u_n = \dfrac{\boxed{n}(\boxed{n} - 1)}{2}$

Dengan melihat pola isiannya, disimpulkan bahwa

$$u_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

4. Kunci Soal Latihan 1 halaman 17

1. $u_n = 2n + 3$; $u_{100} = 203$
2. $u_n = 2n + 2$; $u_{100} = 202$
3. $u_n = n(n + 1)$; $u_{100} = 10.100$
4. $u_n = n(n + 1) - 2$; $u_{100} = 10.098$
5. $u_n = \frac{1}{2} n(n + 1)$; $u_{200} = 20.100$
6. $u_n = n(n + 2)$; $u_6 = 48$; $u_{10} = 120$; $u_{100} = 10.200$;

7. a. $u_n = 5n - 4$; $u_{21} = 101$ b. $u_n = 7n - 3$; $u_{41} = 284$

c. $u_n = 4n - 2$; $u_{11} = 42$

d. $u_n = 9n - 4$; $u_{101} = 905$

e. $u_n = 5n - 2$; $u_{26} = 128$

f. $u_n = 10n - 4$; $u_{37} = 366$

8. a. $u_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{2}$; $u_{10} = 46$

   b. $u_n = n^2 - 1$; $u_{20} = 399$

   c. $u_n = n(n + 1)$; $u_{40} = 1.640$

   d. $u_n = n(2n - 1)$; $u_{100} = 19.900$

   e. $u_n = \dfrac{3n(n+1)}{2}$; $u_{19} = 570$.

   f. $u_n = \dfrac{n(3n-1)}{2}$; $u_{20} = 590$.

5. Kunci Soal Latihan 2 halaman 31

1. a. 1 , 5 , 12 , 22 , 35 , 51 , ... , $\frac{1}{2}n(3n - 1)$

   b. 3 , 11 , 24 , 42 , 65 , 93 , ... , $\frac{1}{2}n(5n + 1)$

   c. 2 , 7 , 16 , 30 , 50 , 77, ... , $\frac{1}{6}n(n + 1)(n + 5)$

   d. 3 , 9 , 19 , 34 , 55 , 83 , ... , $\frac{1}{6}n(n^2 + 6n + 11)$

2. a. $S_n = n(3n - 1)$ b. $S_n = n(2n - 1)$

   c. $S_n = n^2(n + 2)$ d. $S_n = n^2(n + 1)$

3. a. 1, 3, 5, 7, 9, 11 , ... , $2n - 1$

   b. 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , ... , $n + 3$

   c. 1, 7 ,19 ,37 , 61, 91 , ... , $3n(n - 1) + 1$

   d. 2, 10, 24, 44, 70, 102, ... , $n(3n - 1)$

6. Kunci Tes halaman 34

1. a. 10.100 b. 5.100 c. 9.950 d. 2.660 e. 41.080.

2. a. n^2 ; 10.000 b. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; 2.870.

3. a. 4n – 3; 77 b. $\frac{n(3n-1)}{2}$; 59.900

   c. $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;1360.