FADJAR SHADIQ
(Www.fadjarp3g.wordpress.com)

Tempat/Tanggal Lahir	: Sumenep/ 20 April 1955
Pendidikan	: 1. Sarjana Muda Pendidikan Matematika IKIP Negeri Surabaya (UNESA) 2. S2 Pendidikan Matematika (*Curtin University of Technology*, Perth, Western Australia)
Karya Tulis	: 1. What Research Says About Mathematical Problem Solving, dimuat di SAMEN (Science and Mathematics Education Newsletter), majalah SMEC (Science and Mathematics Education Centre), Curtin University, Perth, Western Australia. Vol II No 1 2. Belajar dari Proses Penjumlahan Dua Bilangan Bulat Untuk Membantu Siswa Belajar, dimuat di majalah PELANGI PENDIDIKAN, Direktorat Pendidikan Lanjutan Pertama 3. Bagaimana Mengefektifkan Ujian Nasional, dimuat di FORWAS, majalah Forum Pengawasan Inspektorat Jenderal Departemen Pendidikan Nasional 4. Empat Objek Langsung Matematika Menurut Gagne, dimuat di MEDIAN, Majalah LPMP Jawa Timur, Vol.VI No 1, Juni 2008 5. Belajar dari Guru Berpengalaman : Bagaimana Caranya?, dimuat di SUARA GURU, Majalah PB PGRI, No.12 Th L/2000 6. Pelaksanaan Penilaian di Sekolah antara Harapan dan Kenyataan, dimuat di Buletin PUSPENDIK, Vol.V No.2, Agustus 2008 7. *Reasoning* : Mengapa Perlu Dipelajari Para Siswa?, dimuat di GERBANG, majalah Lembaga Penelitian dan Pengembangan Pendidikan (LP3) UMY, Edisi 9 Th.II 8. Mengintegrasikan Eksplorasi pada Pembelajaran Matematika, dimuat di Buletin LIMAS, PPPPTK Matematika, Edisi No 20 Tahun 2008
Seminar/Workshop	: 1. Pemakalah pada Seminar Widyaiswara Matematika LPMP se Indonesia dengan Judul Makalah: Pentingnya Penalaran, Pemecahan Masalah, dan Komunikasi dalam Pembelajaran Matematika (PPPG Matematika Yogyakarta, 2005) 2. Pemakalah pada Seminar Forum Komunikasi Widyaiswara (FKW) Yogyakarta dengan Judul Makalah: Pemecahan Masalah Pada Olimpiade Matematika untuk Meningkatkan Mutu Pendidikan di Indonesia (PPPG Matematika Yogyakarta, 11 Februari 2006 3. Pemakalah pada Seminar dan Lokakarya Pemanfaatan ICT dalam Pembelajaran Matematika dengan Judul Makalah: Pemanfaatan Blog pada Peningkatan dan Pemecahan Masalah Pembelajaran Matematika (PPPPTK Matematika, 10 11 Juni 2008)
Pengalaman sebagai Narasumber/Fasilitator	: 1. Guru Matematika SMA 3 Kupang (1978 - 1999) 2. Instruktur PKG Matematika Region Kupang (1983 - 1999) 3. Widyaiswara PPPPTK Matematika Yogyakarta (1999-sekarang)

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA YOGYAKARTA

JL. Kaliurang Km.6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, Yogyakarta
KOTAK POS 31 YK-BS Yogyakarta 55281
Telephone : (0274) 885725, 881717, 885752
Faks : (0274) 885752
E-mail : p4tkmatematika@yahoo.com
Website : www.p4tkmatematika.com

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika

Logika Matematika dan Pemecahan Masalah dalam Pembelajaran Matematika SMA

SMA

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

PAKET FASILITASI PEMBERDAYAAN KKG/ MGMP MATEMATIKA

Logika Matematika dan Pemecahan Masalah dalam Pembelajaran Matematika SMA

Penulis:
Fadjar Shadiq, M.App.Sc.

Penilai:
Drs.Setiawan, M.Pd.

Editor:
Hanan Windro Sasongko, S.Si.

Ilustrator:
Ashari Sutrisno, M.T.

Dicetak oleh **Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika**
Tahun 2008

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
YOGYAKARTA 2008

Kata Pengantar

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika dalam melaksanakan tugas dan fungsinya mengacu pada tiga pilar kebijakan pokok Depdiknas, yaitu: 1) Pemerataan dan perluasan akses pendidikan; 2) Peningkatan mutu, relevansi dan daya saing; 3) Penguatan tata kelola, akuntabilitas, dan citra publik menuju insan Indonesia cerdas dan kompetitif.

Dalam rangka mewujudkan pemerataan, perluasan akses dan peningkatan mutu pendidikan, salah satu strategi yang dilakukan PPPPTK Matematika adalah meningkatkan peran Kelompok Kerja Guru (KKG) dan Musyawarah Guru Mata Pelajaran (MGMP) serta pemberdayaan guru inti/guru pemandu/guru pengembang yang ada pada setiap kecamatan, kabupaten dan kota.

Sebagai upaya peningkatan mutu dimaksud maka lembaga ini diharapkan mampu memfasilitasi kegiatan-kegiatan yang terkait dengan implementasi pengembangan pembelajaran matematika di lapangan. Guna membantu memfasilitasi forum ini, PPPPTK Matematika menyiapkan paket berisi kumpulan materi/bahan yang dapat digunakan sebagai referensi, pengayaan, dan panduan di KKG/MGMP khususnya pembelajaran matematika, dengan topik-topik/bahan atas masukan dan identifikasi permasalahan pembelajaran matematika di lapangan.

Berkat rahmat Tuhan Yang Maha Esa, atas bimbingan-Nya penyusunan Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika dapat diselesaikan dengan baik. Untuk itu tiada kata yang patut diucapkan kecuali puji dan syukur kehadirat-Nya.

Dengan segala kelebihan dan kekurangan yang ada, paket fasilitasi ini diharapkan bermanfaat dalam mendukung peningkatan mutu pendidik dan tenaga kependidikan melalui forum KKG/MGMP Matematika yang dapat berimplikasi positif terhadap peningkatan mutu pendidikan.

Sebagaimana pepatah mengatakan, tiada gading yang tak retak, demikian pula dengan paket fasilitasi ini walaupun telah melalui tahap identifikasi, penyusunan, penilaian, dan editing masih ada yang perlu disempurnakan. Oleh karena itu saran, kritik, dan masukan yang bersifat membangun demi peningkatan kebermaknaan paket ini, diterima dengan senang hati teriring ucapan terima kasih. Ucapan terima kasih dan penghargaan setinggi-tingginya kami sampaikan pula kepada semua pihak yang membantu mewujudkan paket fasilitasi ini, mudah-mudahan bermanfaat untuk pendidikan di masa depan.

Yogyakarta,

Kepala,

KASMAN SULYONO
NIP 130352806

Daftar Isi

Bab I

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Standar Isi mata pelajaran matematika (Depdiknas, 2006) menyatakan bahwa matematika merupakan ilmu universal yang mendasari perkembangan teknologi modern, mempunyai peran penting dalam berbagai disiplin ilmu dan memajukan daya pikir manusia. Mata pelajaran matematika diberikan untuk membekali peserta didik dengan kemampuan berpikir logis, analitis, sistematis, kritis, dan kreatif, serta kemampuan bekerjasama. Kompetensi tersebut diperlukan agar para siswa dapat memiliki kemampuan memperoleh, mengelola, dan memanfaatkan informasi untuk bertahan hidup pada keadaan yang selalu berubah, tidak pasti, dan kompetitif.

Karena itulah, ada lima tujuan pembelajaran matematika di SMA-MA (Depdiknas, 2006) yang harus dicapai para siswa SMA-MA selama proses pembelajaran matematika, yaitu:

1. memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antarkonsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma, secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah;
2. menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika;
3. memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh;
4. mengomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah;

5. memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah.

Tujuan pembelajaran pertama berkait dengan pengetahuan matematika. Para siswa harus mempelajari dan menguasai teori-teori matematika; seperti teori-teori tentang logika, barisan dan deret, ataupun diferensial. Di samping itu, para siswa harus dapat mengaplikasikan atau menggunakan pengetahuan tersebut. Namun, yang perlu disadari oleh Bapak dan Ibu Guru matematika SMA adalah kemampuan bernalar, berkomunikasi, dan memecahkan masalah ditengarai akan jauh lebih penting daripada jika mereka hanya memiliki pengetahuan matematika saja. Hal ini secara gamblang dinyatakan *National Research Council* dari Amerika Serikat (NRC, 1989:1) berikut:

"Communication has created a world economy in which working smarter is more important than merely working harder. ... require worker who are mentally fit – workers who are prepared to absorb new ideas, to adapt to change, to cope with ambiguity, to perceive patterns, and to solve unconventional problems. "

Menurutnya, komunikasi telah menciptakan ekonomi dunia yang lebih membutuhkan pekerja cerdas (*smarter*) daripada pekerja keras (*harder*). Dibutuhkan para pekerja yang telah disiapkan untuk mampu mencerna ide-ide baru (*absorb new ideas*), mampu menyesuaikan terhadap perubahan (*adapt to change*), mampu menangani ketidakpastian (*cope with ambiguity*), mampu menemukan keteraturan (*perceive patterns*), dan mampu memecahkan masalah yang tidak lazim (*solve unconventional problems*).

Puncak keberhasilan pembelajaran matematika adalah ketika para siswa mampu memecahkan masalah yang mereka hadapi. Alasannya, pada proses pemecahan masalah, para siswa harus menggunakan pengetahuan matematika, kemampuan bernalar dan berkomunikasi, serta memiliki sikap yang baik terhadap matematika. Selama proses pemecahan masalah sedang berlangsung, di samping sikap positif dan memiliki pengetahuan matematika yang baik, kemampuan bernalar dan berkomunikasi merupakan dua aspek yang sangat mendukung keberhasilan proses pemecahan masalah tersebut. Untuk melaporkan hasil yang didapat, para siswa harus menggunakan kemampuan berargumentasinya dan hal ini membutuhkan juga kemampuan bernalar atau menarik kesimpulan yang prima. Proses penarikan kesimpulan (penalaran) ini sangat berkait dengan logika matematika, terutama yang berkait dengan modus ponens, modus tollens, dan sillogisme. Di samping itu, proses pemecahan masalah sangat berkait dengan pembuktian, baik pembuktian langsung maupun pembuktian dengan kontradiksi.

Pada akhirnya, sebesar bagaimanapun bakat seorang siswa terhadap matematika, mereka tidak akan pernah menjadi pemecah masalah yang tangguh tanpa belajar memecahkan masalah matematika, termasuk belajar menggunakan logika matematika selama proses pemecahan masalah. Karena itulah, salah satu kegiatan dalam rangka memfasilitasi peningkatan kompetensi guru matematika SMK adalah dengan menyusun paket dengan judul: 'Logika Matematika dan Pemecahan Masalah dalam Pembelajaran Matematika SMA'.

B. Tujuan Penulisan

Secara umum, modul ini disusun dengan maksud agar peserta kegiatan di MGMP Matematika SMA akan memiliki kompetensi yang berkait dengan pencapaian tujuan pembelajaran matematika SMA nomor 3 yang berkait dengan pemecahan masalah. Secara khusus, paket ini disusun dengan maksud agar:

1. para peserta memahami pengertian masalah, pemecahan masalah dan kaitannya dengan logika matematika selama proses pemecahan masalah;
2. para peserta dapat memecahkan masalah umum dan masalah yang berkait dengan masalah logika matematika, serta dapat mengaplikasikan pengetahuan yang berkait dengan logika matematika selama proses suatu pemecahan masalah;
3. para peserta dapat menyusun masalah umum dan masalah yang berkait dengan logika matematika;
4. para peserta mampu mengembangkan contoh-contoh strategi pembelajaran yang dapat membina kemampuan siswa dalam pencapaian tujuan pembelajaran matematika SMA nomor 3 yang berkait dengan aspek pemecahan masalah.

C. Cara Pemanfaatan Paket

Pembahasan pada paket ini menitikberatkan contoh-contoh konkret pada pengertian serta implikasi konsep, logika matematika, masalah, dan pemecahan masalah (*problem-solving*). Di samping itu, dalam paket ini dikemukakan juga tentang hal-hal penting yang perlu mendapat perhatian para guru di saat mengaplikasikan atau menerapkan konsep pemecahan masalah ini selama proses pembelajaran sedang berlangsung di kelasnya masing-masing. Karenanya, para pemakai paket ini disarankan untuk membaca lebih dahulu konsepnya sebelum mencoba untuk mengaplikasikan pelaksanaannya di kelas. Pada akhirnya, jika para pemakai paket ini mengalami kesulitan, membutuhkan klarifikasi, maupun memiliki saran atau kritik yang membangun, sudilah kiranya menghubungi penulis (fadjar_p3g@yahoo.com; www.fadjarp3g.wordpress .com; 0274-880762; atau 08156896973) atau melalui lembaga PPPPTK Matematika (Kotak Pos 31 YKBS, Yogyakarta; p4tkmatematika@yahoo.com; www.p4tkmatematika.com atau melalui faks: 0274-885752).

Bab II

Hubungan Logika dan Pemecahan Masalah

Sebagaimana disampaikan di bagian depan, ada lima tujuan pembelajaran matematika di SMA yang harus dicapai para siswa SMA-MA selama proses pembelajaran matematika yang berkait dengan (1) pemahaman konsep matematika, (2) penggunaan penalaran, (3) pemecahan masalah, (4) komunikasi gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah, dan (5) memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan. Meskipun demikian, kemampuan bernalar, berkomunikasi, dan memecahkan masalah ditengarai akan jauh lebih penting daripada jika para siswa hanya memiliki pengetahuan matematika saja. Menurut NRC (1989:1), komunikasi telah menciptakan ekonomi dunia yang lebih membutuhkan pekerja cerdas daripada pekerja keras. Dunia membutuhkan para pekerja yang telah disiapkan untuk mampu mencerna ide-ide baru, mampu menyesuaikan terhadap perubahan, mampu menangani ketidakpastian, mampu menemukan keteraturan, dan mampu memecahkan masalah yang tidak lazim. Selama proses pemecahan masalah, penalaran (reasoning) yang sangat berkait dengan logika matematika akan sangat banyak digunakan.

Setelah mempelajari bab hubungan logika dan pemecahan masalah dari paket ini, para peserta diharapkan dapat:

1. menjelaskan perbedaan antara soal 'biasa/rutin' dengan soal yang terkategori sebagai 'masalah';
2. menjelaskan empat langkah penting (standar) pada proses pemecahan masalah yang sesuai dengan Permendiknas No. 22 tahun 2006;

3. menjelaskan strategi pemecahan masalah dan memilih atau mengidentifikasi strategi pemecahan masalah yang sering digunakan di SMA;
4. menjelaskan pentingnya kemampuan bernalar dan berlogika pada proses pemecahan masalah;
5. memecahkan masalah umum dan masalah yang berkait dengan logika matematika.

A. Pengertian Masalah dan Pemecahan Masalah

Sebelum membahas masalah dan pemecahan masalah, pasal ini akan membahas lebih dahulu contoh yang dapat dikategorikan sebagai 'masalah' bagi sebagian guru dan siswa SMA. Perhatikan Contoh 1 di bawah ini! Cobalah untuk memecahkannya!

1. *Tentukan bilangan dengan nilai terbesar yang dapat dibentuk dengan menggunakan angka-angka 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, dan 4 sedemikian sehingga didapat suatu susunan dimana:*
   - ❑ *kedua angka 1 dipisahkan oleh satu angka*
   - ❑ *kedua angka 2 dipisahkan oleh dua angka*
   - ❑ *kedua angka 3 dipisahkan oleh tiga angka*
   - ❑ *kedua angka 4 dipisahkan oleh empat angka*

Berhentilah membaca untuk beberapa saat! Cobalah untuk menyelesaikan sendiri soal di atas terlebih dahulu! Apakah soal tersebut merupakan masalah ataukah hanya soal biasa? Mengapa soal tersebut Anda kategorikan sebagai masalah atau hanya soal rutin (soal biasa)? Jika ada siswa atau guru SMA yang sudah pernah mendapat soal tersebut dan sudah tahu langkah-langkah pengerjaannya, apakah soal tersebut masih terkategori sebagai masalah bagi mereka? Berdasar pada jawaban terhadap pertanyaan di atas, sebagian besar ahli Pendidikan Matematika menyatakan bahwa masalah merupakan pertanyaan yang harus dijawab atau direspon. Namun, mereka menyatakan juga bahwa tidak semua pertanyaan otomatis akan menjadi masalah. Suatu pertanyaan akan menjadi masalah hanya jika pertanyaan itu menunjukkan adanya suatu tantangan (*challenge*) yang tidak dapat dipecahkan oleh suatu prosedur rutin (*routine procedure*) yang sudah diketahui si pelaku, seperti yang dinyatakan Cooney, et al. (1975: 242) berikut: *"... for a question to be a problem, it must present a challenge that cannot be resolved by some routine procedures known to the student."*

Implikasi dari definisi di atas, termuatnya 'tantangan' serta 'belum diketahuinya prosedur rutin' pada suatu pertanyaan yang akan diberikan kepada para siswa, akan menentukan terkategorikan tidaknya suatu pertanyaan menjadi '*masalah*' atau hanyalah suatu '*pertanyaan*' biasa. Karenanya, dapat terjadi bahwa suatu 'masalah' bagi seseorang siswa atau guru akan menjadi 'pertanyaan biasa' bagi siswa atau guru lainnya jika mereka sudah mengetahui prosedur untuk menyelesaikannya. Secara umum, menentukan nilai 12345×4 tidak dapat dikategorikan sebagai suatu masalah bagi siswa dan guru SMA. Namun, soal di atas dapat dikategorikan sebagai masalah bagi sebagian siswa dan mungkin juga bagi para guru SMA karena mereka belum mengetahui prosedur atau langkah-langkah untuk menyelesaikannya.

B. Proses Pemecahan Masalah

Permendiknas No. 22 (Depdiknas, 2006) tentang Standar Isi menyatakan bahwa tujuan nomor 3 pelajaran matematika SMK agar para siswa SMK dapat: "Memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh." Secara umum, dari formulasi di atas, paling tidak ada empat langkah pada proses pemecahan masalah yang harus dikuasai para siswa sehingga harus dilatihkan kepada mereka, yaitu: (1) memahami masalah, (2) merancang model matematika, (3) menyelesaikan model, dan (4) menafsirkan solusi yang diperoleh. Berikut ini adalah alternatif langkah-langkah pemecahan masalah di atas.

1. Memahami Masalah

Pada langkah ini, para pemecah masalah (siswa atau guru) harus dapat menentukan dengan jeli apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan. Namun yang perlu diingat, kemampuan otak manusia sangatlah terbatas, sehingga hal-hal penting hendaknya dicatat, dibuat tabelnya, ataupun dibuat sket atau grafiknya. Pembuatan tabel serta gambar ini dimaksudkan untuk mempermudah memahami masalahnya dan mempermudah mendapatkan gambaran umum penyelesaiannya. Dengan membuat gambar, diagram, atau tabel, hal-hal yang diketahui tidak hanya dibayangkan di dalam otak yang sangat terbatas kemampuannya, namun dapat dituangkan ke atas kertas. Di samping mengetahui apa yang diketahui, setiap pemecah masalah dituntut untuk mengetahui apa yang ditanyakan, yang akan menjadi arah pemecahan masalahnya. Bukanlah hal yang bijak jika dalam proses pemecahan masalah, arah yang akan dituju tidak atau belum teridentifikasi secara jelas. Untuk Contoh 1 di atas akan didapat:

Diketahui: Angka-angka 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, dan 4

Ditanya: Bilangan terbesar yang dapat dibentuk dari 8 angka tersebut

Persyaratan:

- *kedua angka 1 dipisahkan oleh satu angka*
- *kedua angka 2 dipisahkan oleh dua angka*
- *kedua angka 3 dipisahkan oleh tiga angka*
- *kedua angka 4 dipisahkan oleh empat angka*

2. Merancang Model Matematika

Untuk memecahkan masalah di atas, apa yang harus dilakukan? Apakah akan melakukan dengan mencoba-coba? Namun, bagaimana jika ada kombinasi bilangan yang terlewati? Untuk menghindari hal tersebut, diperlukan adanya aturan-aturan yang dibuat sendiri oleh para pelaku selama proses pemecahan masalah berlangsung sehingga dapat dipastikan tidak akan ada satupun alternatif yang terabaikan. Untuk itu, pada langkah merancang model matematikanya, hal yang dapat dilakukan yaitu dengan membuat delapan persegipanjang untuk tempat kedelapan angka yang ada, seperti ditunjukkan diagram di bawah ini.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

Agar didapat bilangan terbesar seperti yang diminta, maka persegipanjang (*a*) dapat dicoba diisi dengan 4, persegipanjang (*b*) dapat dicoba diisi dengan 3, dan seterusnya.

3. Menyelesaikan Model

Berdasar rencana di atas, penyelesaian model dapat dilaksanakan dengan melakukan pengisian angka pada kedelapan persegipanjang di atas. Salah satu strategi yang paling mungkin digunakan adalah dengan mencoba-coba. Sesuai dengan rencana, karena bilangan yang akan dicari adalah bilangan dengan nilai terbesar, dapat disimpulkan bahwa yang pertama kali dicoba untuk dimasukkan adalah angka 4 ke kotak persegipanjang paling kiri (kotak *a*). Di samping itu, disyaratkan bahwa kedua angka 4 dipisahkan oleh empat angka lain, sehingga dapat disimpulkan lagi bahwa angka 4 kedua harus diisikan ke kotak *f* sehingga didapat keadaan seperti tabel berikut.

4					4		
a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

Sekali lagi, karena bilangan yang akan dicari adalah bilangan dengan nilai terbesar, langkah berikutnya adalah mencoba memasukkan angka 3 ke kotak *b.* Namun disyaratkan juga bahwa kedua angka 3 dipisahkan oleh tiga angka lain, sehingga angka 3 kedua harus diisikan ke kotak *f* juga. Dengan keadaan dimana kotak *f* terisi angka 4 dan 3, percobaan memasukkan angka 3 ke kotak *b* tidak bisa dilanjutkan. Di dalam pelajaran logika matematika yang berkait dengan pembuktian, keadaan ini dikenal dengan keadaan yang kontradiksi atau tidak masuk akal sehat kita (*absurd*).

Dengan demikian, angka berikutnya yang dapat dicoba dimasukkan ke kotak *b* adalah 2 sehingga didapat keadaan seperti tabel berikut.

4	2			2	4		
a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

Selanjutnya, dimana Anda harus memasukkan angka 1 sedemikian sehingga kedua angka 1 tersebut dipisahkan oleh satu angka lain seperti yang disyaratkan? Tidak bisa bukan? Kesimpulannya, percobaan memasukkan angka 2 ke kotak *b* dan *e* tidak bisa dilanjutkan. Kemungkinan yang tersisa adalah memasukkan angka 1 ke kotak *b* dan *d* sedemikian sehingga kedua angka 1 tadi dipisahkan oleh satu angka lain seperti yang disyaratkan, dan didapat tabel berikut.

4	1		1		4		
a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

Jika angka 3 dimasukkan ke kotak *c* maka angka 3 kedua harus dimasukkan ke kotak *g* sesuai dengan persyaratan bahwa kedua angka 3 dipisahkan oleh tiga angka lain. Terakhir, angka 2 dimasukkan ke kotak *e* dan *h* seperti yang disyaratkan, sehingga didapat penyelesaian masalah di atas, yaitu:

4	1	3	1	2	4	3	2
a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

4. Menafsirkan Solusi yang Diperoleh

Menurut Anda, apakah hasil ini memenuhi persyaratan yang diminta? Bagaimana meyakinkan diri Anda sendiri bahwa hasil tersebut merupakan penyelesaian masalah di atas? Untuk menjawab pertanyaan terakhir ini, para pakar pemecahaan masalah menyarankan mengecek kebenaran hasil ini dengan persyaratan yang diminta, yaitu bilangan di atas merupakan bilangan terbesar yang didapat, karena 4 sebagai bilangan terbesar sudah diletakkan pada tempat terkiri, sedangkan angka 3 dan 2 tidak mungkin diletakkan di kotak berikutnya (kotak *b*), sehingga angka 1 yang masih mungkin diletakkan di kotak *b.* Di samping itu, kedua angka 1 dipisahkan oleh satu angka lain, kedua angka 2 dipisahkan oleh dua angka, kedua angka 3 dipisahkan oleh tiga angka, dan kedua angka 4 dipisahkan oleh empat angka.

Contoh di atas telah menunjukkan tentang keefektifan pengunaan empat langkah proses penyelesaian masalah. Dari contoh di atas, nyatalah juga bahwa percobaan yang dilakukan dapat saja berhasil dengan baik namun tidak tertutup kemungkinan untuk tidak berhasil. Percobaan memasukkan angka 4 pada kotak *a* ternyata mengarah ke penyelesaian masalah ini. Namun percobaan memasukkan angka 3 maupun angka 2 ke kotak *b* ternyata berakhir dengan kegagalan. Namun percobaan memasukkan angka 1 ke kotak *b* ternyata mengarah ke penyelesaian masalah ini. Pada intinya, untuk soal atau masalah tertentu, Anda dituntut untuk berani mencoba-coba.

Penulis sangat yakin 41.312.432 merupakan bilangan yang dicari dengan dua alasan, yaitu:

1. bilangan 41.312.432 yang dihasilkan memenuhi empat syarat pertama yang diminta, yaitu kedua angka 1 dipisahkan oleh satu angka, kedua angka 2 dipisahkan oleh dua angka, kedua angka 3 dipisahkan oleh tiga angka, dan kedua angka 4 dipisahkan oleh empat angka;
2. bilangan 41.312.432 yang dihasilkan memenuhi syarat kedua yang diminta, yaitu merupakan bilangan terbesar. Alasannya, kita sudah mencoba memasukkan angka 3 maupun angka 2 ke kotak *b* yang ternyata berakhir dengan kegagalan, suatu keadaan yang kontradiktif (*absurd*) terjadi, sehingga tidak mungkin memasukkan angka 3 maupun angka 2 ke kotak *b.* Hal yang mungkin terjadi, hanya angka 1 yang dimasukkan ke kotak *b.*

C. Beberapa Strategi Pemecahan Masalah

Pada saat memecahkan masalah, ada beberapa cara atau langkah yang sering digunakan dan sering berhasil pada proses pemecahan masalah. Cara atau langkah tersebut disebut dengan strategi pemecahan masalah. Pada penyelesaian masalah di atas, telah dicontohkan penggunaan strategi membuat diagram dan strategi mencoba-coba. Di samping itu, ada beberapa strategi lainnya yang sudah dikenal dan dikemukakan para ahli pendidikan matematika. Beberapa strategi yang sering digunakan menurut Polya (1973) dan Pasmep (1989) diantaranya dapat dilihat di bawah ini.

1. Mencoba-coba

   Strategi ini biasanya digunakan untuk mendapatkan gambaran umum pemecahan masalahnya dengan mencoba-coba (*trial and error*). Proses mencoba-coba ini tidak akan selalu berhasil, adakalanya gagal. Karenanya, proses mencoba-coba dengan menggunakan suatu analisis yang tajam-lah yang sangat dibutuhkan pada penggunaan strategi ini.

2. Membuat Diagram

   Strategi ini berkait dengan pembuatan sket atau gambar untuk mempermudah dalam memahami masalahnya dan dalam mendapatkan gambaran umum penyelesaiannya. Dengan strategi ini, hal-hal yang diketahui tidak hanya dibayangkan di dalam otak saja, namun dapat dituangkan ke atas kertas.

3. Mencobakan pada Soal yang Lebih Sederhana

   Strategi ini berkait dengan penggunaan contoh-contoh khusus yang lebih mudah dan lebih sederhana, sehingga gambaran umum penyelesaian masalahnya akan lebih mudah dianalisis dan akan lebih mudah ditemukan.

4. Membuat Tabel

   Strategi ini digunakan untuk membantu dalam menganalisis permasalahan atau jalan pikiran kita, sehingga segala sesuatunya tidak hanya dibayangkan oleh otak yang kemampuannya sangat terbatas.

5. Menemukan Pola

   Strategi ini berkait dengan pencarian keteraturan-keteraturan. Dengan keteraturan yang sudah didapatkan tersebut, akan lebih memudahkan kita untuk menemukan penyelesaian masalahnya.

6. Memecah Tujuan

   Strategi ini berkait dengan pemecahan tujuan umum yang hendak kita capai menjadi satu atau beberapa tujuan bagian. Tujuan bagian ini yaitu agar dapat digunakan sebagai batu loncatan untuk mencapai tujuan yang sesungguhnya.

7. Memperhitungkan Setiap Kemungkinan

   Strategi ini berkait dengan penggunaan aturan-aturan yang dibuat sendiri oleh para pelaku selama proses pemecahan masalah berlangsung sehingga dapat dipastikan tidak akan ada satupun alternatif yang terabaikan.

8. Berpikir Logis

   Strategi ini berkaitan dengan penggunaan penalaran ataupun penarikan kesimpulan yang sah atau valid dari berbagai informasi atau data yang ada.

9. Bergerak dari Belakang

   Dalam strategi ini, kita mulai dengan menganalisis bagaimana cara mendapatkan tujuan yang hendak dicapai. Dengan strategi ini, kita memulai proses pemecahan masalahnya dari yang diinginkan atau yang ditanyakan lalu menyesuaikannya dengan yang diketahui.

10. Mengabaikan Hal yang Tidak Mungkin

    Dari berbagai alternatif yang ada, alternatif yang sudah jelas-jelas tidak mungkin, kita coret/abaikan sehingga perhatian dapat tercurah sepenuhnya untuk hal-hal yang tersisa dan yang mungkin saja.

11. Menyusun Model Matematikanya

    Dengan strategi ini, masalah yang ada diubah dahulu menjadi kalimat atau model matematika sehingga dapat diselesaikan dengan pengetahuan matematika yang ada. Hasilnya ditafsirkan lagi ke masalah awal.

Bagi para siswa, mempelajari strategi pemecahan masalah ini menjadi sangat penting karena dapat digunakan atau dimanfaatkan ketika mereka terjun langsung di masyarakat, maupun ketika mempelajari mata pelajaran lainnya.

D. Beberapa Contoh Pemecahan Masalah

Berikut ini adalah beberapa contoh masalah dan pemecahannya.

> *Carilah semua himpunan bilangan asli berurutan yang jumlahnya 1000!*

Seperti biasa, berhentilah membaca untuk beberapa saat! Cobalah untuk memecahkan sendiri masalah di atas lebih dahulu! Anda dapat saja memecahkan masalah ini dengan mencoba-coba. Namun, bagaimanakah cara meyakinkan diri Anda sendiri dan orang lain bahwa hasilnya adalah sebanyak himpunan yang Anda dapatkan, dengan kata lain tidak ada himpunan yang terlewatkan? Jika Anda mengalami kesulitan, cobalah menjawab beberapa pertanyaan ini!

1. Berbeda dengan Contoh 1 di atas yang pada awalnya agak sulit menentukan topik yang bersesuaian, untuk Contoh 2 ini, topik matematika manakah yang bersesuaian?
2. Apa yang Anda ketahui tentang lambang-lambang yang sering digunakan pada topik tersebut seperti S_n, n, a, ataupun b?

Sesuai dengan materinya yang harus berkait dengan jumlah n suku deret aritmetika ($n \in A$ dan $n=1$), rumus yang dapat digunakan adalah:

$$S_n = ½\, n[2a + (n-1)b]$$

$$Û\ 1000 = ½\, n[2a + (n-1)1]$$

$$Û\ n.a + \frac{n(n-1)}{2} = 1000$$

$$Û\ n.a = 1000 - \frac{n(n-1)}{2}$$

$$Û\ a = \frac{1000}{n} - \frac{(n-1)}{2};\ dengan\ \frac{(n-1)}{2} < \frac{1000}{n}\ \ldots.\ 1)$$

Perhatikan pentingnya memanipulasi model yang ada dalam pemecahan masalah ini yang merupakan tujuan pembelajaran matematika nomor 2 yang berkait dengan penalaran! Karena a melambangkan suku pertama dan n melambangkan banyaknya suku, maka baik a maupun n sama-sama melambangkan bilangan asli. Dengan demikian, n dapat berupa bilangan asli ganjil atau bilangan asli genap, sehingga ada dua kemungkinan yang dapat terjadi berkait dengan n, yaitu:

1. Misalkan n merupakan bilangan asli ganjil sehingga (n–1) merupakan bilangan genap. Dengan demikian, bentuk $\frac{(n-1)}{2}$ akan merupakan bilangan asli. Perhatikan sekali lagi persamaan 1) di atas! Karena a

merupakan bilangan asli dan n merupakan bilangan ganjil maka $\frac{1000}{n}$ haruslah merupakan bilangan asli juga. Dengan demikian, nilai n yang mungkin memenuhi adalah:

a. $n = 5 \Rightarrow a = 198$ sehingga himpunannya {198, 199, 200, 201, 202};
b. $n = 25 \Rightarrow a = 28$ sehingga himpunannya {28, 29, 30, 31, 32, ... , 52};
c. $n = 125 \Rightarrow a = -54$ (tidak memenuhi).

2. Sekarang dimisalkan n merupakan bilangan asli genap sehingga (n–1) merupakan bilangan ganjil. Dengan demikian, bentuk $\frac{(n-1)}{2}$ akan merupakan bilangan cacah ditambah $\frac{1}{2}$. Perhatikan sekali lagi persamaan 1) di atas! Agar a merupakan bilangan asli maka $\frac{1000}{n}$ harus merupakan bilangan cacah ditambah $\frac{1}{2}$ juga dan n merupakan bilangan genap. Dengan demikian, nilai n yang mungkin memenuhi adalah:

   a. $n = 16 \Rightarrow a = 55$ sehingga himpunannya: {55, 56, 57, ... , 70};

   b. $n = 80 \Rightarrow a = -27$ (tidak memenuhi).

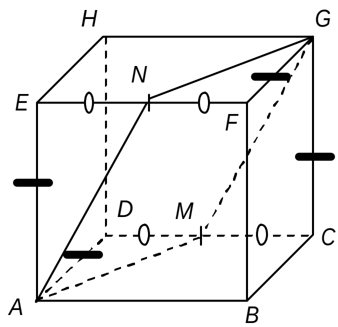
Jadi, hanya ada tiga himpunan penyelesaian masalah ini, yaitu:

- *{198, 199, 200, 201, 202} dengan $n = 5$;*
- *{28, 29, 30, 31, 32, ... , 52} dengan $n = 25$;*
- *{55, 56, 57, ... , 70} dengan $n = 16$.*

Perhatikan sekarang Contoh 3 yang merupakan soal geometri!

> *3. Pada kubus ABCD.EFGH, M dan N berturut-turut adalah titik-titik tengah sisi-sisi DC dan EF. Berbentuk apakah AMGN? Buktikan!*

Seperti biasa, berhentilah membaca naskah ini untuk beberapa saat! Cobalah untuk memecahkan soal atau masalah ini! Dari soal di atas, langkah pertama yang dapat dilakukan adalah membuat diagram atau gambar sebagai model dari kubus *ABCD.EFGH*, memanipulasi dan menganalisisnya sehingga dapat ditentukan bentuk segiempat *AMGN* tersebut. Modelnya adalah seperti di bawah ini.

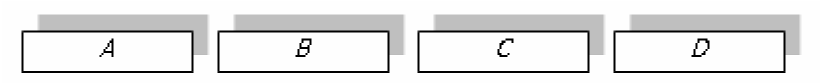


Pertama-tama, kita misalkan $AB = 2a$ satuan. Perhatikan sekarang empat segitiga, yaitu: ΔAMD, ΔGMC, ΔGNF, dan ΔANE! Apa yang dapat Anda katakan tentang keempat segitiga tersebut? Jelas bahwa keempat segitiga tersebut merupakan segitiga siku-siku. Pada ΔAMD, sudut siku-sikunya di *D,* sedangkan pada ΔANE sudut siku-sikunya di *E.* Di samping itu, $AD = GC = GF = AE = 2a$ dan $DM = CM = FN = EN = a$. Dengan demikian, ΔAMD, ΔGMC, ΔGNF, dan ΔANE merupakan empat segitiga yang kongruen. Karena empat ruas garis, yaitu *AM*, *MG*, *GN*, dan *NA* merupakan hipotenusa dari keempat segitiga yang kongruen tadi, maka $AM = MG = GN = NA$. Simpulan pertama yang didapat adalah *AMGN* dapat berbentuk persegi atau belahketupat. Namun karena *AG* merupakan diagonal ruang dan $MN = CF$ merupakan diagonal sisi, maka $AG = 2a\sqrt{3}$ dan $MN = CF = 2a\sqrt{2}$. Dengan kata lain, panjang $MN \neq$ panjang *AG*; sehingga *AMGN* bukan berbentuk persegi namun segiempat *AMGN* berbentuk belahketupat.

Perhatikan sekarang Contoh 4 yang merupakan soal pada *Australian Mathematics Competion 1981 Senior Divison* Nomor 27!

> *4. Ada berapa cara, seorang petugas bagian persuratan yang ceroboh memasukkan empat surat ke dalam empat amplop sedemikian sehingga tidak ada surat yang tepat masuk ke amplopnya?*

Seperti biasa, berhentilah membaca naskah ini untuk beberapa saat! Cobalah untuk memecahkan sendiri masalah di atas lebih dahulu! Dari soal di atas, langkah pertama yang dapat dilakukan adalah membuat diagram atau gambar sebagai model amplop, yaitu:



Model surat dapat dimisalkan dengan *a, b, c,* dan *d.* Karena diketahui bahwa tidak ada surat yang tepat masuk ke amplopnya, dapatlah disimpulkan bahwa amplop *A* hanya dapat diisi surat yang bukan *a.* Artinya, amplop *A* hanya dapat diisi surat *b, c,* atau *d.* Dengan cara sama (*analog*) amplop *B* hanya dapat diisi surat *a, c,* atau d; amplop *C* hanya dapat diisi surat *a, b,* atau d; dan amplop *D* hanya dapat diisi surat *a, b,* atau *c.* Salah satu kemungkinan adalah amplop *A* diisi surat *b,* amplop *B* diisi surat *a,* amplop *C* diisi surat *d,* dan amplop *D* diisi surat *c.* Hasil ini lalu dimasukkan ke dalam baris pertama tabel di bawah ini. Begitu seterusnya, seperti nampak pada tabel di bawah ini.

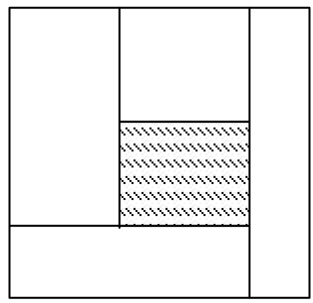
Isi Amplop			
A	***B***	***C***	***D***
b	*a*	*d*	*c*
b	*c*	*d*	*a*
b	*d*	*a*	*c*
c	*a*	*d*	*b*
c	*d*	*b*	*a*
c	*d*	*a*	*b*
d	*a*	*b*	*c*
d	**c**	*b*	*a*
d	*c*	*a*	*b*

Dengan demikian, jelaslah bahwa ada 9 cara empat surat dimasukkan ke dalam empat amplop sehingga tidak ada surat yang tepat masuk ke dalam amplopnya. Di samping menggunakan strategi pemodelan, pemecahan masalah ini menggunakan strategi bekerja secara sistematis. Perhatikan urutan-urutan isi amplop *A,* dimulai dari surat *b,* lalu *c,* dan diakhiri surat *d.*

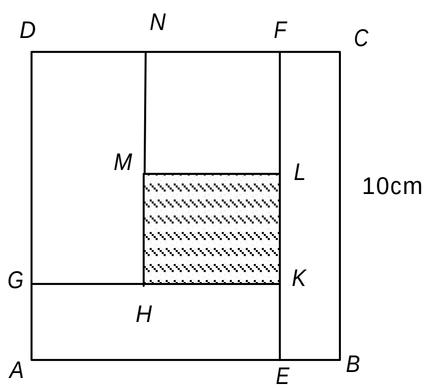
E. Pentingnya Logika pada Proses Pemecahan Masalah

Pada proses pemecahan masalah nomor 1 di atas, telah ditunjukkan tentang penggunaan metode pembuktian dengan kontradiksi (*reductio ad absurdum*) yang merupakan bagian dari logika matematika. Perhatikan soal atau masalah nomor 5 berikut ini, dimana penyelesaiannya menggunakan penarikan kesimpulan, meskipun secara umum tidak dinyatakan secara eksplisit sebagai modus ponens, modus tollens, ataupun sillogisme!

5. Amir, salah seorang siswa SMA, diberi persegi berukuran 10cm ´ 10cm seperti gambar di samping ini. Persegi tersebut telah terbagi menjadi lima persegi-panjang yang luasnya sama. Amir diminta menentukan ukuran persegi-panjang yang diarsir tanpa menggunakan skala.



Diketahui bahwa Amir diminta menentukan ukuran persegipanjang yang diarsir tanpa menggunakan skala. Jadi, Anda dapat menarik kesimpulan bahwa ia harus menggunakan perhitungan berdasarkan pada yang diketahui (kondisi) pada soal dan berdasarkan juga pada pengetahuan matematika (konsep, rumus, ataupun algoritma) yang sudah dipelajarinya. Bapak dan Ibu, berhentilah membaca untuk beberapa saat, selesaikan dahulu tugas di atas! Bagaimana cara Anda memecahkannya? Proses berfikir apa saja yang terjadi di dalam fikiran Anda tersebut? Perhatikan diagram berikut!



Diketahui bahwa persegi *ABCD* dengan luas $100 cm^2$ telah dibagi menjadi lima persegipanjang yang luasnya sama. Lalu, kesimpulan apa yang Anda dapatkan dari hal tersebut? Salah satu kesimpulannya adalah luas setiap persegipanjang yang ada adalah $100/5 = 20 cm^2$. Kesimpulan apa yang selanjutnya Anda dapatkan? Diantaranya, karena luas persegipanjang *EBCF* adalah $20 cm^2$ dan diketahui $BC = 10$cm, maka $EB = 2$cm dan $AE = 8$cm. Begitu seterusnya, proses penarikan kesimpulan ini berlangsung terus. Karena luas persegipanjang *AEKG* adalah $20 cm^2$ juga dan $AE = 8$cm, maka $AG = 20/8 = 2{,}5$cm dan $GD = 7{,}5$cm. Berikutnya, karena luas persegipanjang *GHND* adalah $20 cm^2$ dan $GD = 7{,}5$cm; maka $GH = \frac{20}{7{,}5} = 2\frac{2}{3}$ cm dan $HK = (8 - 2\frac{2}{3}) = 5\frac{1}{3}$ cm. Terakhir, luas persegipanjang *HKLM* sama dengan luas persegipanjang *MLFN*; sehingga $KL = LF = ½ \times KF = ½ \times GD = ½ \times 7\frac{1}{2} = 3\frac{3}{4}$ cm. Jadi, kesimpulan terakhir yang didapat, ukuran persegipanjang yang diarsir adalah

$$HK \times KL = 5\frac{1}{3}\,cm \times 3\frac{3}{4}\,cm.$$

Dengan contoh-contoh yang telah dikemukakan di atas, jelaslah bahwa proses pemecahan masalah di atas telah terjadi proses penarikan kesimpulan dari beberapa fakta yang ada. Proses penarikan kesimpulan inilah yang dikenal dengan istilah penalaran (jalan pikiran atau *reasoning*), sesuai dengan yang dijelaskan Copi (1978: 5) berikut: "*Reasoning is a special kind of thinking in which inference takes place, in which conclusions are drawn from premises*". Artinya, penalaran adalah suatu proses berpikir khusus dimana terjadi penarikan kesimpulan, dimana kesimpulan diambil berdasar pada premis yang ada. Dengan kata lain, penalaran adalah proses yang berusaha menghubung-hubungkan fakta-fakta atau evidensi-evidensi yang diketahui menuju kepada suatu kesimpulan atau pernyataan yang baru. Dikenal dua macam penalaran, yaitu penalaran induktif (induksi), yaitu proses penarikan kesimpulan dari kasus-kasus khusus ke bentuk umum (*general*); sedangkan penalaran deduktif (deduksi) adalah proses penarikan kesimpulan dari bentuk umum (*general*) ke kasus yang lebih khusus dan spesifik.

Jadi, jelaslah sekarang bahwa pada proses pemecahan masalah telah terjadi aplikasi penalaran (*reasoning*), kata atau kalimat lainnya adalah proses pemecahan masalah, yang sedikit banyak akan meningkatkan kemampuan bernalar dan berlogika para siswa. Dalam arti luas, logika sendiri didefinisikan sebagai cabang ilmu yang mengkaji penurunan-penurunan kesimpulan yang sahih (valid, *correct*) dan yang tidak sahih (tidak valid, *incorrect*). Sebagaimana disampaikan di bagian depan, proses berpikir yang terjadi di saat menurunkan atau menarik kesimpulan dari pernyataan-pernyataan yang diketahui benar atau dianggap benar itulah yang sering juga disebut dengan penalaran (*reasoning*). Contoh berikut akan menunjukkan suatu masalah yang pemecahannya akan menggunakan kriteria kebenaran.

> 6. *Diandaikan bahwa politisi selalu berbohong dan ulama selalu berkata benar. Tiga orang sedang berbincang-bincang. Mereka adalah A, B dan C yang menjadi politisi atau ulama namun tidak ada yang merangkap sebagai ulama sekaligus politisi. Perbincangan mereka adalah sebagai berikut*
>
> *A : "Kami bertiga ulama."*
>
> *B : "Si A berkata benar."*
>
> *C : "Tidak. Si A berbohong."*
>
> *Yang mana dari ketiga orang tersebut yang politisi dan mana yang ulama?*
>
> *Petunjuk: Perhatikan pernyataan B dan C!*

Pernyataan *B* dan *C* saling bertentangan. Di dalam logika, pernyataan *B* disebut lawan atau negasi pernyataan *C.* Begitu juga sebaliknya. Pernyataan *C* disebut lawan atau negasi pernyataan *B.* Nilai kebenaran pernyataan keduanya akan saling berlawanan. Kalau pernyataan *B* bernilai benar maka pernyataan *C* akan bernilai salah. Namun, jika pernyataan *B* bernilai salah maka pernyataan *C* akan bernilai benar. Karena itu, kita dapat menyusun pernyataan baru, yaitu:

1. jika *B* merupakan seorang ulama maka *C* adalah seorang politisi;
2. jika *B* merupakan seorang politisi maka *C* adalah seorang ulama.

Jadi, tidak mungkin kedua orang tersebut, yaitu *B* dan *C* sama-sama ulama. Salah seorang dari mereka berdua adalah politisi. Sebagai akibatnya, pernyataan *A* menjadi salah, karena *A* menyatakan bahwa mereka bertiga ulama. Artinya si *A* berbohong, sehingga ia merupakan seorang politisi. Selanjutnya, karena si *B* menyatakan bahwa pernyataan si *A* bernilai benar maka dapat disimpulkan bahwa pernyataan *B* itu bernilai salah. Sebaliknya, pernyataan *C* bernilai benar; karena ia menyatakan bahwa si *A* telah berbohong. Jadi, simpulan terakhirnya si *A* adalah politisi, si *B* adalah politisi, dan hanya si *C* yang ulama. Contoh ini menunjukkan bahwa dengan masalah yang berkait dengan logika, para siswa dapat belajar dan mengaplikasikan pengetahuannya.

F. Kumpulan Masalah Untuk Latihan

Seberbakat bagaimanapun seseorang untuk bermain bola, maka ia tidak akan pernah menjadi pemain yang tangguh jika ia tidak mau untuk belajar dan berlatih bermain bola. Hal yang sama akan terjadi, bahwa seberbakat bagaimanapun seorang siswa SMA maupun guru matematikanya, maka mereka tidak akan pernah menjadi pemecah masalah yang tangguh tanpa belajar dan berlatih memecahkan masalah, termasuk di dalamnya berlatih menggunakan atau mencobakan beberapa strategi yang ada. Pada intinya, kemampuan memecahkan masalah hanya dapat dipelajari melalui kegiatan dan proses belajar memecahkan masalah itu sendiri. Suatu soal adakalanya dapat diselesaikan dalam beberapa menit, namun adakalanya dapat diselesaikan dalam beberapa hari ataupun bulan. Namun, hasil yang didapat dari proses pemecahan masalah seperti itu adalah kemampuan yang semakin meningkat. Karenanya, jika Anda sedang dalam proses pemecahan suatu masalah maka diperlukan kesabaran dan keuletan.

Selama belajar memecahkan masalah, para siswa membutuhkan bantuan gurunya, terutama dengan memotivasi para siswa yang berbakat agar para siswa memiliki keinginan untuk maju, mau bersaing dengan siswa berbakat lainnya, baik di tingkat sekolah, kecamatan, kabupaten/kota, provinsi, dan tingkat nasional serta internasional. Perlu diingat bahwa ada siswa berbakat yang jauh melebihi gurunya dalam berpikir dan melakukan kegiatan matematika. Karenanya, selama membina para siswa, bapak atau ibu guru diharapkan agar berperan sebagai pelatih bagi siswa berbakat tersebut. Meskipun demikian, Polya (1973) mengingatkan para guru bahwa bantuan seorang guru kepada siswanya tidak boleh terlalu banyak dan tidak boleh terlalu sedikit. Jika bantuan seorang guru terlalu sedikit, siswa akan mengalami hambatan yang cukup besar, namun jika bantuan itu terlalu banyak, maka sedikit sekali yang akan didapat siswa dari kegiatan pemecahan masalah ini. Biarlah para siswa yang berbakat (*talented*) ini belajar memecahkan masalah secara mandiri lebih dahulu, namun bantulah ia dengan pertanyaan jika yang ia lakukan salah atau mengarah ke arah yang salah.

Agar dapat membantu para siswanya dan agar kemampuan memecahkan masalah para guru dapat meningkat, maka pasal ini akan menampilkan beberapa soal atau masalah. Paket ini pada bagian bagian lampiran akan dibahas petunjuk penyelesaian beserta kunci jawaban untuk setiap soal atau masalah yang dimaksud. Namun sekali lagi, Bapak dan Ibu dimohon untuk mencoba memecahkan masalah tersebut terlebih dahulu. Alasannya, sebagaimana sudah disampaikan, seberbakat bagaimanapun, Bapak atau Ibu Guru serta para siswa SMA tidak akan pernah meningkat kemampuan memecahkannya jika tidak mau berlatih dan belajar memecahkan masalah. Karena itu, wajar jika penulis mengucapkan selamat mengerjakan soal atau masalah-masalah di bawah ini kepada Anda. Pesan penulis, berusahalah untuk menggunakan seluruh kemampuan berpikir dan bernalar Bapak dan Ibu Guru lebih dahulu sebelum melihat petunjuk dan kunci jawabannya! Sebelumnya, bulatkanlah niat Bapak dan Ibu Guru bahwa tujuan akhir melakukan kegiatan ini adalah untuk membantu para putra-putri terbaik bangsa kita ini dalam mengikuti kegiatan olimpiade atau kompetisi matematika! Mudah-mudahan ada di antara para siswa SMA yang Bapak atau Ibu asuh menjadi juara di tingkat kecamatan, kabupaten/kota, provinsi, nasional, atau bahkan menang di tingkat internasional; sehingga bakti mereka untuk bangsa dan negara akan semakin besar. Sekali lagi, selamat menyelesaikan atau memecahkan masalah berikut!

Berikut ini adalah beberapa petunjuk untuk menyelesaikan masalah-masalah ini.

1. Selama melakukan kegiatan atau proses pemecahan masalah, usahakan untuk:
   a. membuat diagram situasi jika diperlukan (terutama untuk soal geometri ataupun masalah nyata);
   b. menuliskan data yang diketahui pada diagram yang sudah dibuat atau digambar;
   c. membuat garis pertolongan dalam menyelesaikan soal geometri pada kasus-kasus tertentu;
   d. memisalkan x atau y pada salah satu variabel (dapat juga menggunakan variabel t untuk tinggi, v untuk kecepatan, t untuk waktu, ataupun r untuk jari-jari);

e. memilih sebuah variabel sesuai dengan yang ditanyakan atau yang terkait dengan yang ditanyakan;
f. memisalkan dari beberapa variabel yang ditanyakan tersebut yang nilainya diduga paling kecil, jika suatu variabel dapat dinyatakan dengan variabel lain;
g. menyusun persamaan, pertidaksamaan, ataupun model matematika lainnya dalam variabel x, y, atau pilih sebuah variabel sesuai dengan yang ditanyakan atau yang terkait dengan yang ditanyakan;
h. menyelesaikan persamaan, pertidaksamaan, ataupun model matematika lainnya, sehingga didapat nilai variabel yang memenuhi;
i. menentukan nilai yang ditanyakan;
j. mengecek benar tidaknya jawaban atau penyelesaian yang didapat.

2. Jika mengalami kesulitan, cobalah untuk menyelesaikan soal atau masalah lain yang lebih mudah!
3. Selama melaksanakan kegiatan pemecahan masalah ini, sering-seringlah mengajukan pertanyan kepada diri sendiri, seperti:
   a. Mengapa hasilnya harus begini? Apa yang menyebabkan?
   b. Apakah hasil ini sudah benar? Mengapa?
   c. Bagaimana cara meyakinkan diri sendiri dan orang lain bahwa hasil ini bukan karena kebetulan?

Berikut ini adalah soal atau masalahnya.

Latihan Bab II

1. Suatu bilangan terdiri atas lima angka, yaitu: 8, 3, 7, 1, dan 6. Tentukan bilangan yang dimaksud berdasar petunjuk di bawah ini!
   a. 8 diletakkan tiga tempat setelah angka 7;
   b. 1 diletakkan sebelum 8 tetapi setelah angka 3;

c. 6 diletakkan tiga tempat sebelum angka 1.

Petunjuk: Gunakan strategi: (a) buat diagramnya; (b) coba-coba; dan (c) abaikan hal yang tidak mungkin!

2. Tentukan luas terbesar dari segitiga dengan panjang sisi 6 dan 8 satuan! Tentukan juga panjang sisi ketiganya! (Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2004 Nomor 5)
3. Seorang peternak memelihara beberapa ekor ayam. Setelah satu tahun, jumlah ayamnya bertambah dengan 250 ekor. Ia merasakan kerepotan dengan ayam sebanyak itu sehingga 28% dari seluruh ayamnya yang ada ia jual. Ternyata, sisa ayamnya sekarang adalah 68 ekor lebih banyak dari jumlah ayamnya semula. Tentukan banyaknya ayam yang dimiliki sang peternak tadi pada awalnya!
4. Pada kubus ABCD.EFGH, panjang diagonal ruang AG adalah d satuan. Jelaskan cara Anda mendapatkan model matematika yang menyatakan hubungan antara luas permukaan kubus (L) dengan diagonal ruangnya (d)!
5. Tentukan banyaknya bilangan asli yang terdiri atas dua angka yang bernilai sama dengan jumlah kedua angkanya ditambah dengan hasil kali kedua angkanya! (Soal pada *Flanders Mathematics Olympiad 97-98 First Round* Nomor 10)
6. Pada suatu segitiga lancip, besar sudut terkecil adalah 1/5 dari besar sudut terbesarnya. Besar setiap sudut (dalam derajat) pada segitiga itu merupakan suatu bilangan asli. Tentukan jumlah besar dua sudut terbesarnya! (Soal pada *Flanders Mathematics Olympiad 97-98 First Round* Nomor 11)
7. Carilah dua bilangan dimana perbandingan antara selisih, jumlah, dan hasil kali kedua bilangan itu berturut-turut adalah 1 : 11 : 60!
8. Uang kertas di suatu negara terdiri atas pecahan: \$1, \$10, \$100, dan \$1.000. Apakah mungkin seseorang memiliki uang tepat sebanyak 500.000

lembar dengan nilai $1.000.000? (Soal nomor 21 pada *100 Problems Issue No 1*)

9. Tentukan bilangan asli terkecil n yang berturut-turut akan bersisa 1, 2, 3, 4, dan 5 jika dibagi 2, 3, 4, 5, dan 6! (Soal nomor 20 pada *South East Asian Mathematics Olympiad III, Penang – Malaysia, First Day – Individual Contest – 17 May 2005*).
10. Seekor domba berharga Rp400.000,00; seekor anakan sapi berharga Rp650.000,00; dan seekor ayam berharga Rp20.000,00. Seorang peternak menjual sebanyak 100 ekor dari ketiga jenis binatang tersebut seharga Rp32.790.000,00. Karenanya, sang peternak telah menjual ....
    A. 31 sapi dan 42 ayam.
    B. 35 sapi dan lebih dari 42 ayam.
    C. 42 ayam namun dengan jumlah domba dan sapi yang tidak tertentu.
    D. 23 ekor domba serta sapi yang banyaknya merupakan bilangan ganjil.

    (Soal pada *Australian Mathematics Competition 1982 Senior Divison* Nomor 26, dengan modifikasi setiap $1 diubah menjadi Rp1.000,00)
11. Bilangan 163361 merupakan contoh bilangan palindrom (*palindromic*) karena jika dibaca dari kanan akan sama jika dibaca dari kiri. Buktikan bahwa setiap bilangan palindrom yang terdiri atas enam angka dan habis dibagi 13 maka bilangan tersebut akan habis dibagi 7! (Soal Nomor 1 Set IV dari *Mathematical Challenge 1976-1977* dari *Scottish Mathematical Council*)
12. Diandaikan bahwa politisi selalu berbohong dan ulama selalu jujur. P, Q, dan R sedang berbincang-bincang. Mereka ada yang menjadi politisi atau ulama namun tidak ada yang merangkap sebagai ulama sekaligus politisi.
    P: “Kami bertiga adalah politisi”
    Q: “Tidak. Ada satu orang di antara P, Q atau R yang ulama”.
    R tidak berkomentar.

Manakah dari ketiga orang tersebut yang ulama dan mana yang politisi?

Petunjuk: Perhatikan pernyataan *P*! Apakah mungkin dia ulama?

13. Tiga orang siswa SMUN Nusa, bernama Tomo, Dirjo dan Harso sedang berjalan menuju sekolahnya. Tomo, siswa terpandai di sekolahnya selalu berkata benar. Dirjo kadang-kadang berkata benar dan kadang-kadang berbohong. Sedangkan Harso, siswa ternakal di kelasnya selalu berbohong. Satu dari tiga siswa itu berbaju putih, satu lagi berbaju hijau dan yang satu lagi berbaju biru.

    Siswa yang berbaju putih menyatakan bahwa siswa yang berbaju hijau adalah Harso.

    Siswa yang berbaju hijau menyatakan bahwa dirinya adalah Dirjo.

    Siswa yang berbaju biru menyatakan bahwa siswa yang berbaju hijau adalah Tomo.

    Tentukan warna baju yang dipakai Tomo, Dirjo dan Harso!

    Petunjuk: Tentukan lebih dahulu si Tomo karena ia tidak pernah berbohong! Mungkinkah Tomo berbaju hijau? Mungkinkah Tomo berbaju biru?

14. Setelah menyelesaikan perlombaan tenis, lima peserta melaporkan hasilnya dimana setiap orang membuat dua pernyataan berikut.

    Alim : “Dodi nomor dua."; "Saya nomor tiga.”

    Budi : “Saya juaranya."; "Cici nomor dua.”

    Cici : “Saya nomor tiga."; "Budi di urutan terakhir.”

    Dudi : “Saya berada di urutan kedua."; "Edna di urutan keempat.”

    Edna : “Saya hanya ada di nomor empat."; "Alim yang menjadi juara.”

    Tentukan urut-urutan juaranya jika setiap pemain di atas membuat satu pernyataan yang benar dan satu pernyataan lainnya salah!

    Petunjuk: Lengkapi tabel yang menunjukkan pernyataan setiap orang di atas! Tabel di bawah menunjukkan bahwa Alim menyatakan bahwa Dodi berada di peringkat 2 dan dirinya sendiri berada di peringkat 3. Lalu, analisislah tabel tersebut!

	Alim	Budi	Cici	Dodi	Edna
Alim	3				
Budi					
Cici					
Dodi	2				
Edna					

15. Tiga orang sahabat, yaitu *A, B* dan *C* yang baru saja menyaksikan pertandingan PERSEBAYA melawan PERSIB bertemu temannya, si *D.* Si *D* lalu menanyakan hasil pertandingan tersebut. Jawaban ketiga sahabatnya adalah:

    A: "Persebaya yang menang. Persib kebobolan lebih dahulu."

    B: "Saya tidak pernah berkata benar. Persebaya yang kebobolan lebih dahulu."

    C: "Pernyataan *B* salah. Pertandingan tersebut berakhir seri."

    Setelah mengetahui hasil pertandingan yang sebenarnya, tahulah si *D* bahwa kedua pernyataan dari *A, B,* maupun *C* sama-sama benar atau sama-sama salah. Tentukan hasil pertandingan yang sebenarnya! Jelaskan jalan pikiran Anda secara runtut dan jelas!

    Petunjuk: Perhatikan pernyataan *B*! Mungkinkah pernyataan *B* bernilai benar?

Tugas Bab II

1. Jelaskan perbedaan antara soal 'biasa/rutin' dengan soal yang terkategori sebagai 'masalah'! Kalau perlu, berikan contohnya!
2. Jelaskan empat langkah penting (standar) pada proses pemecahan masalah yang sesuai dengan Permendiknas No. 22 tahun 2006! Pilih salah satu soal

pada halaman 23-27, selesaikan soal tersebut, lalu tentukan bagian-bagian yang termasuk setiap langkah tersebut!

3. Jelaskan pengertian ‘strategi’ pemecahan masalah, lalu pilih atau identifikasi strategi pemecahan masalah yang sering digunakan di SMA!
4. Jelaskan pentingnya kemampuan bernalar dan berlogika pada proses pemecahan masalah! Kalau perlu, berikan contohnya!
5. Selesaikan ‘Kumpulan Masalah Untuk Latihan’ di atas!

Bab III

Implikasi pada Pembelajaran Matematika

Sebagaimana disampaikan di bagian depan; kemampuan bernalar, berkomunikasi, dan memecahkan masalah ditengarai akan jauh lebih penting daripada jika para siswa hanya memiliki pengetahuan matematika saja. Sebagai contoh, NRC (1989:1), telah menyatakan bahwa komunikasi telah menciptakan ekonomi dunia yang lebih membutuhkan pekerja cerdas daripada pekerja keras. Selama proses pemecahan masalah, diakui atau tidak, kompetensi yang berkait dengan penalaran (*reasoning*) akan sangat banyak digunakan. Tanpa penalaran yang prima, para siswa akan kesulitan memecahkan setiap masalah. Tidak hanya itu, kemampuan berkomunikasi dan sikap positif terhadap matematika juga dapat ditingkatkan melalui kegiatan belajar memecahkan masalah ini. Bab III ini akan membahas tentang implikasi pentingnya logika dan pemecahan masalah dalam proses pembelajaran di kelas dan akan membahas juga beberapa alternatif strategi-strategi yang dapat digunakan selama proses pembelajaran di kelas untuk meningkatkan keterampilan memecahkan masalah para siswa kita. Setelah mempelajari Bab III dari paket ini, para peserta diharapkan dapat:

1. menjelaskan pentingya para guru matematika memfasilitasi siswanya untuk belajar dan berlatih memecahkan masalah selama proses pembelajaran;
2. menjelaskan pentingnya para guru matematika memfasilitasi siswanya untuk memfokuskan kegiatannya pada empat langkah proses pemecahan masalah;
3. menyusun minimal tiga soal yang dapat dikategorikan sebagai masalah bagi sebagian besar siswa SMA di kelas yang diasuhnya;

4. menyusun contoh masalah kontekstual atau realistik yang dapat digunakan di awal proses pembelajaran sehingga dapat membantu siswa menemukan sendiri kembali (*guided re-invention*) pengetahuan matematika di bawah bimbingan guru;
5. menjelaskan peran guru matematika dalam peningkatan kompetensi memecahkan masalah siswanya.

A. Memfasilitasi Siswa Berlatih Memecahkan Masalah

Engel (1997:3) menyatakan: "*In fact, problem-solving can be learned only by solving problems. But it must be supported by strategies provided by the trainer.*" Jadi, pemecahan masalah, menurut Engel, hanya dapat dipelajari para siswa dengan cara berlatih memecahkan masalah. Karenanya mereka harus dibantu dengan beberapa strategi yang sudah disiapkan pelatih atau gurunya. Tentunya, bapak dan ibu guru matematika sudah belajar dan berlatih memecahkan masalah-masalah yang ada pada Bab II. Namun sebagaimana dinyatakan Engel, agar dapat berlatih dan berlatih terus, maka masalah atau soal yang ada pada Bab II tersebut harus dirasakan kurang dan harus ditambah dengan soal lainnya dengan mencari tambahan masalah melalui teman guru lain di sekolah maupun MGMP, melalui buku lain maupun melalui internet.

W.W. Sawyer pernah menulis di dalam bukunya *Mathematician's Delight*, sebagaimana dikutip Jacobs (1982:12) suatu pernyataan berikut: *"Everyone knows that it is easy to do a puzzle if someone has told you the answer. That is simply a test of memory. You can claim to be a mathematician only if you can solve puzzles that you have never studied before. That is the test of reasoning."* Pernyataan W.W. Sawyer ini telah menunjukkan bahwa pengetahuan yang diberikan atau ditransformasikan langsung kepada para siswa akan kurang meningkatkan kemampuan bernalar (*reasoning*) mereka. W.W. Sawyer menyebutnya hanya meningkatkan kemampuan untuk mengingat saja. Karenanya, berdasar pendapat Sawyer di atas, soal yang akan diberikan kepada para siswa adalah soal yang benar-benar terkategori *'masalah'* bagi mereka. Jadi, implikasi pertama yang dapat dilakukan para guru berkait pemecahan masalah adalah para siswa difasilitasi untuk belajar dan berlatih memecahkan soal yang benar-benar akan menjadi masalah bagi mereka, sehingga untuk memecahkan masalah tersebut, mereka tidak hanya membutuhkan dan menggunakan ingatan yang baik saja, namun mereka akan belajar dan berlatih menggunakan kemampuan bernalar dan berpikirnya.

Para siswa akan berusaha dengan sekuat tenaga untuk belajar dan berlatih memecahkan suatu masalah yang diberikan gurunya hanya jika mereka menerima tantangan yang ada pada masalah tersebut. Agar para siswa mau belajar dan berlatih memecahkan masalah, sangat penting untuk menyisipkan tantangan serta konteks yang menarik pada soal atau masalahnya sebagai motivasi bagi para siswa. Karena itu, sangatlah penting untuk memformulasikan kalimat pada masalah yang akan disajikan kepada para siswa dengan cara yang menarik, berkait dengan kehidupan nyata mereka sehingga tidak terlalu abstrak, dan dapat dipecahkan para siswa, baik dengan bantuan ataupun tanpa bantuan gurunya. Di samping itu, tingkat kesukaran masalah yang akan diberikan harus bervariasi. Pemberian masalah yang tidak pernah dapat diselesaikan siswa akan dapat menurunkan motivasi mereka.

B. Empat Langkah Pemecahan Masalah

Keterampilan serta kemampuan berpikir yang didapat ketika seseorang memecahkan masalah diyakini dapat ditransfer atau digunakan orang tersebut ketika menghadapi masalah di dalam kehidupan sehari-hari. Oleh Cooney et al. (1975: 242), pembelajaran pemecahan masalah atau belajar memecahkan masalah dijelaskan sebagai berikut: "... *the action by which a teacher encourages students to accept a challenging question and guides them in their resolution.*" Hal ini menunjukkan bahwa pembelajaran pemecahan masalah adalah suatu tindakan (*action*) yang dilakukan guru agar para siswa termotivasi untuk menerima tantangan yang ada pada pertanyaan (soal) dan mengarahkan para siswa dalam proses pemecahannya.

Agar para siswa dapat belajar dan berlatih memecahkan masalah dengan lebih efektif, maka fokus selama mereka belajar dan berlatih adalah pada pencapaian empat langkah penting, yaitu: (1) memahami masalah; (2) merancang model matematika; (3) menyelesaikan model; dan (4) menafsirkan solusi yang diperoleh. Dengan empat langkah standar ini, maka diharapkan, ketika para siswa menghadapi masalah di dalam kehidupan sehari-hari, mereka akan dapat menggunakannya dengan benar. Dengan kata lain, para siswa dapat mentransfer atau menggunakan keterampilannya tersebut di dalam kehidupan sehari-hari mereka ketika menghadapi masalah. Harapannya, dengan empat langkah standar tersebut, peluang untuk memecahkan atau menyelesaikan masalahnya akan semakin tinggi.

C. Belajar Memecahkan Masalah Sejak Awal Kegiatan Pembelajaran

Inti dari belajar memecahkan masalah adalah para siswa hendaknya terbiasa mengerjakan soal-soal yang tidak hanya memerlukan ingatan yang baik saja. Terutama di era global dan era perdagangan bebas, kemampuan berpikir kritis, kreatif, logis, dan rasional-lah yang semakin dibutuhkan. Karenanya, di samping diberi masalah-masalah yang menantang, selama di kelas, seorang guru matematika dapat saja *memulai proses pembelajarannya* dengan mengajukan '*masalah kontekstual* atau '*masalah realistik*' yang cukup menantang dan menarik bagi para siswa. Siswa dan guru lalu bersama-sama memecahkan masalahnya tadi sambil membahas teori-teori, definisi maupun rumus-rumus matematikanya. Contoh 'masalah kontekstual' atau 'masalah realistik' adalah:

> *Pada kegiatan obral murah buku bekas di kampus UGM, Amir dan Budi masing-masing mendapat 10 buku, sedangkan Chandra hanya mendapat 7 buku. Ternyata buku-buku tersebut tidak ada yang sama. Bagaimana cara membagi buku tersebut agar setiap orang mendapat buku sama banyak? Gunakan sebanyak mungkin cara!*

Dengan mengajukan 'masalah kontekstual' atau 'masalah realistik' yang cukup menantang seperti tersebut di atas pada awal proses pembelajaran rata-rata sementara, maka para siswa dikondisikan untuk belajar memecahkan dan menemukan kembali; sehingga akan memfasilitasi para siswa agar terbiasa melakukan penyelidikan dan menemukan sesuatu. Dengan pertanyaan seperti di atas, maka siswa difasilitasi untuk melakukan kegiatan menyelidiki dan bereksplorasi dengan benda konkret ataupun dengan data dan fakta yang ada, lalu para siswa akan mempelajari ide-ide matematika secara informal, belajar matematika secara formal dan diakhiri dengan kegiatan pelatihan. Dengan kegiatan seperti ini, diharapkan para siswa akan dapat memahami konsep, rumus, prinsip, dan teori-teori matematika sambil belajar memecahkan masalah. Intinya, pengetahuan matematika seyogyanya ditemukan kembali para siswa di bawah bimbingan guru (*guided re-invention*).

Dengan cara seperti ini, siswa diharapkan akan mendapat beberapa alternatif jawaban, seperti:

1. mengumpulkan semua buku diikuti dengan membagi sama buku-buku tersebut. Jawaban ini mengarah pada rumus $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ dengan

   $\bar{x}$ = *banyak rata-rata buku yang diperoleh setiap orang;*

   x_i = *banyak buku yang diperoleh orang ke-i;*

   n = *banyak orang;*
2. mengandaikan, semua orang sudah mendapat 7 buku, lalu membagi sama kelebihan buku setiap orang. Ternyata buku kelebihan Amir dan Budi masing-masingnya adalah (10 – 7 = 3 buku); sedangkan buku kelebihan Chandra adalah (7 – 7 = 0 buku). Selanjutnya, kelebihan (3 + 3 = 6 buku) dibagi sama, sehingga setiap orang mendapat buku sebanyak $\left(7 + \frac{3+3+0}{3}\right)$ = 9 buku. Cara ini mengarah pada rumus mencari rata-rata dengan rata-rata sementara dengan rumus:

   $$\bar{x} = \overline{x_s} + \frac{\sum (x - \overline{x_s})}{n}.$$

Jelaslah sekarang bahwa selama proses pembelajaran sedang berlangsung di kelas, para siswa kita tidak hanya diberikan teori-teori dan rumus-rumus matematika yang sudah jadi, akan tetapi para siswa dilatih dan dbiasakan untuk belajar memecahkan masalah dan menemukan sendiri pengetahuan matematika yang ada sedemikian sehingga pemahaman suatu konsep atau pengetahuan haruslah dibangun sendiri (dikonstruksi) oleh siswa (pembelajar).

Tugas Bab III:

1. Jelaskan, mengapa para siswa SMA harus belajar dan berlatih memecahkan masalah selama di kelas!
2. Jelaskan, mengapa kegiatan belajar dan berlatih memecahkan masalah selama di kelas harus difokuskan pada empat langkah proses pemecahan masalah!
3. Pilih satu SK atau KD lalu susun tiga soal yang dapat dikategorikan sebagai masalah bagi sebagian besar siswa di kelas Anda!
4. Buatlah contoh masalah kontekstual atau realistik yang dapat digunakan di awal proses pembelajaran sehingga dapat membantu siswa menemukan sendiri kembali *(guided re-invention)* pengetahuan matematika dengan bimbingan guru!
5. Jelaskan peran guru matematika dalam peningkatan kompetensi memecahkan masalah siswanya!

Bab IV

Penutup

Ada lima tujuan pembelajaran matematika di SMA-MA (Depdiknas, 2006) yang harus dicapai para siswa SMA-MA selama proses pembelajaran matematika, yang berkait dengan konsep atau pengetahuan matematika, penalaran, pemecahan masalah, komunikasi, dan sikap positif terhadap matematika. Dari kelima aspek tersebut, aspek pemecahan masalah merupakan puncak pembelajaran matematika. Alasannya, setiap orang, siapapun orang tersebut akan selalu dihadapkan dengan masalah. Kesuksesan proses pemecahan masalah akan sangat bergantung dari kemampuan empat aspek lainnya. Karenanya siswa harus belajar memecahkan masalah selama duduk di bangku sekolah; agar keterampilan memecahkan masalah dapat ditransfer atau digunakan di kelak kemudian hari, yaitu ketika bekerja di tempat kerjanya maupun ketika belajar di perguruan tinggi. Agar para siswa dapat belajar dan berlatih memecahkan masalah dengan lebih efektif, maka fokus selama mereka belajar dan berlatih adalah pada pencapaian empat langkah penting, yaitu: memahami masalah; merancang model matematika; menyelesaikan model; dan menafsirkan solusi yang diperoleh. Dengan mempelajari empat langkah standar ini, maka diharapkan peluang keberhasilan memecahkan atau menyelesaikan masalahnya akan menjadi semakin tinggi.

Selama berlatih dan belajar memecahkan masalah pada paket ini, Bapak dan Ibu Guru tentunya sudah merasakan sendiri perlunya keuletan dan kemampuan berpikir yang prima selama proses pemecahan masalah ini. Pengalaman selama melakukan kegiatan atau proses pemecahan masalah ini, mudah-mudahan dapat ditularkan kepada para siswa di sekolah Bapak dan Ibu Guru pada khususnya, dan di sekolah lain pada umumnya. Bapak dan Ibu Guru harus sudah dapat menjadi ‘model’ bagi siswa SMA yang berkait dengan pemecahan masalah. Di antara soal-soal tersebut, sebagian besar cocok untuk para siswa yang berbakat matematika. Pada akhirnya, berdasar soal-soal yang ada tersebut, sangat diharapkan para guru matematika SMA dengan fasilitasi dari para Kepala Sekolah dan para Pengawas dapat mengembangkan sendiri masalah-masalah yang cocok untuk para siswanya masing-masing. Dengan cara seperti itu, peningkatan mutu pendidikan melalui kompetisi atau olimpiade akan dapat berhasil dengan baik. Amin.

Tes

1. Jelaskan empat langkah penting (standar) untuk memecahkan masalah berikut!

   Suatu bilangan terdiri atas enam angka (digit). Angka pertamanya adalah 1. Jika angka pertama tersebut dpindah menjadi angka terakhir, akan didapat bilangan baru yang nilainya tiga kali nilai bilangan lama. Tentukan bilangan lama tersebut!

2. Jelaskan pengertian 'strategi' pemecahan masalah, lalu identifikasi strategi yang digunakan pada pemecahan masalah berikut ini.

   Pada suatu kegiatan diskusi, Anto seorang seniman, sedang duduk mengelilingi meja berbentuk persegi dengan tiga orang temannya. Ketiga teman Anto tersebut bekerja sebagai Guru, Pilot, dan Budayawan. Jika diketahui:

   Anto duduk di sebelah kiri Choki,

   a. *Basri duduk di sebelah kanan Guru, dan*

   b. *Darto yang duduk berhadapan dengan Choki bukanlah seorang pilot,*

   tentukan pekerjaan Basri!

3. Apa yang Anda ketahui tentang masalah kontekstual atau masalah realistik?
4. Bagaimana cara Anda meningkatkan kemampuan memecahkan masalah para siswa?

Anda dinyatakan berhasil mempelajari paket ini jika kebenaran jawaban tesnya telah mencapai minimal 75%.

Daftar Pustaka

Cooney, T.J.; Davis, E.J.; Henderson, K.B. (1975). *Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics*. Boston: Houghton Mifflin Company.

Copi, I.M. (1978). *Introduction to Logic*. New York: Macmillan.

Depdiknas (2006). *Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 22 Tahun 2006 Tentang Standar Isi untuk Satuan Pendidikan Dasar dan Menengah*. Jakarta: Depdiknas.

Engel, A. (1999). *Problem-Solving Strategies.* New York: Springer.

Jacobs, H.R. (1982). *Mathematics, A Human Endeavor* (2nd Ed). San Fransisco: W.H. Freeman and Company.

NRC (1989). *Everybody Counts. A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education.* Washington DC: National Academy Press.

Pasmep (1989). *Solve It, Problem Solving in Mathematics III.* Perth: Curtin University of Technology.

Polya, G. (1973). *How To Solve It* (2nd Ed). Princeton: Princeton University Press.

Lampiran: Kunci Jawaban

Alternatif Kunci Jawaban Latihan Bab II

Sebagaimana sudah dinyatakan di bagian depan bahwa bantuan seseorang tidak boleh terlalu banyak dan tidak boleh terlalu sedikit. Karenanya, cobalah untuk memecahkan sendiri lebih dahulu masalah tadi dengan mencurahkan semua tenaga dan pikiran sebelum melihat petunjuk dan kunci jawaban berikut ini! Pada akhirnya, semoga kemampuan bapak, ibu, dan para siswa dalam memecahkan masalah akan meningkat tajam dengan adanya paket ini.

1. Kunci 67318

Alternatif diagram untuk tempat angkanya adalah:

-	-	-	-	-

Dari pernyataan (a) diperoleh bahwa ada dua kemungkinan untuk tempat angka 7 dan 8, yaitu:

7	-	-	8	-

-	7	-	-	8

Dari pernyataan (c) dan diagram di atas, diperoleh bahwa ada dua kemungkinan berikutnya untuk tempat angka 6 dan 1, yaitu:

7	6	-	8	1

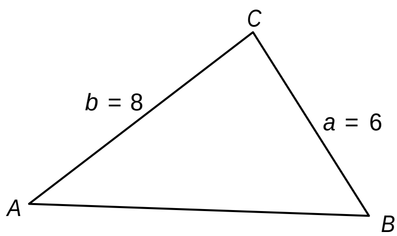
6	7	-	1	8

Dari dua kemungkinan di atas, yang memenuhi persyaratan (b) adalah kemungkinan terakhir yang ada di sebelah kanan, sehingga didapat bilangan yang memenuhi syarat adalah 67318.

2. Kunci: luas terbesar 24 dan panjang sisi ketiga adalah 10 satuan.

Alasan atau cara penyelesaian:

Model dalam bentuk diagram adalah seperti gambar berikut.



Model matematika luas segitiga *ABC* $= \frac{1}{2}.a.b.\sin C$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin C$

Dengan demikian, luas segitiga *ABC* sangat bergantung pada nilai sin *C.* Semakin besar nilai itu, semakin besar luas segitiganya. Nilai sin *C* terbesar adalah 1 untuk $\angle C = 90°$. Jadi, luas terbesar dari segitiga dengan panjang sisi 6 dan 8 satuan adalah 24 satuan luas dan panjang sisi ketiga adalah 10 satuan dengan menggunakan teorema Pythagoras.

3. Kunci: 400 ekor

Cara penyelesaian:

Misalkan banyak ayam pada awalnya adalah *x*. Setelah 1 tahun, karena bertambah 250 ekor maka banyak ayam menjadi $(x + 250)$. Berikutnya 28% dari seluruh ayam yang ada ia jual, sehingga sisa ayam setelah dijual adalah $\frac{72}{100}(x + 250)$. Karena sisa ayam sekarang adalah 68 ekor lebih banyak dari jumlah ayam semula, maka model matematikanya dalam bentuk persamaan adalah:

$$\frac{72}{100}(x + 250) - x = 68 \Leftrightarrow 72x + 18.000 - 100x = 6.800 \Leftrightarrow x = 400.$$

Jadi, banyak ayam yang dimiliki sang peternak tadi pada awalnya adalah 400 ekor. Yakinkah Anda dengan jawaban ini?

4. Kunci: $L = 2d^2$

Cara penyelesaian:

Misalkan $AB = a$, maka diagonal ruang $AG = a\sqrt{3} = d$ sehingga $a = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$.

Karena luas permukaan kubus $L = 6a^2$, maka model matematika untuk luas adalah $L = 2d^2$.

5. Kunci: 9

Alasan/cara penyelesaian:

Untuk siswa SMA, langkah mencoba-coba hendaknya sudah mulai dikurangi. Pemodelan (*modelling*) dimulai dengan memisalkan bilangan tersebut dalam bentuk $a|b$ (misalkan 37). Dengan demikian diperoleh:

aç$b = 10a + b = a + b + a$ ´ b

$10a + b = a + b + a$ ´ b

$9a - ab = 0$

$a(9 - b) = 0.$

Karena $a>0$ maka $(9 - b) = 0$ atau $b = 9$.

Jadi, ada sembilan bilangan yang memenuhi syarat, yaitu: 19, 29, 39, 49, ... , 99. Bagaimana cara meyakinkan diri kita sendiri bahwa jawaban tersebut memenuhi syarat dimaksud? Contoh ini menunjukkan kelebihan penggunaan strategi pemodelan. Semua penyelesaian akan diperoleh sehingga tidak ada yang terlewatkan. Hal ini jelas berbeda jika Anda memecahkan masalah ini dengan menggunakan strategi mencoba-coba.

Kemungkinan besar akan ada penyelesaian yang terlewati. Bagaimana cara meyakinkan diri kita sendiri bahwa jawaban tersebut memenuhi syarat dimaksud? Salah satu cara terbaik adalah dengan mengecek beberapa hasil yang diperoleh. Misalnya dicoba salah satu bilangan yang memenuhi syarat, yaitu 39. Ternyata, $39 = 3 + 9 + 3\times 9 = 12 + 27 = 39$. Langkah ini hanya untuk mengecek, karena dengan pemodelan dan langkah yang tepat, hasil yang didapat hampir dipastikan tidak akan salah. Kecuali, ada kekurangtelitian dalam pengerjaannya. Untuk itulah, langkah pengecekan ini dilakukan.

6. **Kunci: 163°**

Alasan/cara penyelesaian:

Misalnya besar sudut terbesarnya adalah $5x°$, maka besar sudut terkecilnya $x°$, sehingga didapat besar sudut kedua terbesar adalah $(180 - 6x)°$. Oleh karena itu, jika besar kedua sudut tersebut dibandingkan akan didapat:

$$5x° > (180 - 6x)°$$

$$11x° > 180°$$

$$x° > 16{,}37° \text{ dan } 5x° > 81{,}82°.$$

Karena setiap sudut merupakan sudut lancip, maka:

$$81{,}82° < 5x° < 90°.$$

Di samping itu, karena x merupakan suatu bilangan asli, maka $5x$ merupakan bilangan kelipatan 5. Dengan demikian nilai yang memenuhi untuk $5x$ hanyalah 85 dengan nilai $x = 17$.

Pada akhirnya diperoleh jumlah besar dua sudut terbesarnya adalah:

$$5x° + (180 - 6x)° = (180 - x)° = (180 - 17)° = 163°.$$

Jadi, jumlah besar dua sudut terbesarnya adalah 163°.

7. **Kunci: kedua bilangan itu adalah 10 dan 12.**

Alasan/cara penyelesaian:

Misalkan kedua bilangan itu adalah x dan y, sehingga diperoleh:

$$(a - b) : (a + b) : (a \times b) = 1 : 11 : 60.$$

Didapat juga:

$$\frac{a-b}{ab} = \frac{1}{60} \text{ dan } \frac{a+b}{ab} = \frac{11}{60}$$

sehingga didapat

$$60a - 60b = ab \text{ .... (1)}$$

$$60a + 60b = 11ab \text{ .... (2)}$$

Jika persamaan (1) + (2) akan didapat $120a = 12ab \Leftrightarrow b = 10$.

Jika persamaan (2) – (1) akan didapat $120b = 10ab \Leftrightarrow a = 12$.

Jadi, kedua bilangan itu adalah 10 dan 12.

Sekali lagi, bagaimana cara meyakinkan diri kita sendiri bahwa jawaban tersebut memenuhi syarat dimaksud?

8. Kunci: tidak mungkin

Alasan/cara penyelesaian:

Model dimulai dengan pemisalan seseorang memiliki uang pecahan: \$1, \$10, \$100, dan \$1.000 berturut-turut sebanyak a, b, c, dan d lembar. Dengan demikian didapat dua persamaan:

$$a + 10b + 100c + 1000d = 1000000 \text{ ... (1)}$$

$$a + b + c + d = 500.000 \text{ ... (2)}$$

Jika persamaan (1) dikurangi persamaan (2) akan didapat:

$$9b + 99c + 999d = 500000$$

$$9 \times (b + 11c + 111d) = 500000 \text{ ... (3)}$$

Ruas kiri persamaan (3) merupakan jumlah tiga bilangan yang merupakan kelipatan 9 sedangkan ruas kanan bukan bilangan kelipatan 9. Tentunya, tidak ada bilangan a, b, dan c yang memenuhi persamaan (3). Dengan demikian, tidak mungkin seseorang memiliki uang tepat sebanyak 500.000 lembar dengan nilai \$1.000.000.

9. Kunci: 59

Alasan/cara penyelesaian:

Model matematika yang dapat digunakan pada pemecahan masalah ini adalah KPK (Kelipatan Persekutuan Terkecil). KPK dari 2, 3, 4, 5, dan 6 adalah 60. Artinya, bilangan 60 jika dibagi 2, 3, 4, 5, atau 6 akan bersisa 0. Karena bilangan yang akan dicari adalah bilangan terkecil yang jika dibagi 2, 3, 4, 5, dan 6 berturut-turut akan bersisa 1, 2, 3, 4, dan 5; maka hal ini berarti bahwa bilangan tersebut akan bersisa kurang 1 dari pembaginya. Karenanya, bilangan dimaksud adalah 59.

10. Kunci: D

Alasan/cara penyelesaian:

Jika dimisalkan banyaknya domba, sapi, dan ayam yang dijual berturut-turut adalah *d, s*, dan *a*; maka akan diperoleh dua persamaan, yaitu:

$$d + s + a = 100 \qquad \ldots (1)$$

$$400000d + 650000s + 20000a = 32790000$$

$$\Leftrightarrow 40d + 65s + 2a = 3.279 \qquad \ldots (2)$$

Dari persamaan (2) terutama dengan memperhatikan hasil ruas kanan dan koefisien ruas kiri, dapat dinyatakan bahwa *s* adalah bilangan ganjil dan *a* adalah bilangan dengan angka satuan 7 atau 2, seperti 2, 7, 12, 17, 22, 27, ...

Pilihan-pilihan jawaban *A, B,* dan C di atas memuat nilai $a=42$ yang cocok dengan ketentuan di atas. Jika $a=42$ disubstitusikan ke (1) dan (2) akan diperoleh:

$d + s = 58$ dan $40d + 65s = 3195$. Dari dua persamaan ini diperoleh $s=35$ dan $d=23$.

Dengan demikian, sang peternak menjual 42 ayam, 35 sapi, dan 23 domba. Pilihan yang memenuhi adalah D.

11. Bukti:

Pertama dimisalkan bilangan palindrom yang terdiri atas enam angka itu adalah:

$$N = abccba$$

$$N = 100.000a + 10.000b + 1.000c + 100c + 10b + a$$

$$N = 100.001a + 10.010b + 1.100c$$

$$N = (13´7692+5)a + (13´770)b + (13´85 – 5)c$$

$$N = (13´7692)a + 5a + (13´770)b + (13´85)c – 5c$$

$$N = (13´7692)a + (13´770)b + (13´85)c + 5(a – c)$$

$$N = 13´(7692a + 770b + 85c) + 5(a – c).$$

Karena diketahui bahwa N habis dibagi 13 maka bentuk $13\times(7692a + 770b + 85c)$ jelas habis dibagi 13 sehingga bentuk $5(a - c)$ harus habis dibagi 13 juga. Artinya, $(a - c)$ harus habis dibagi 13 dan hal ini akan dipenuhi hanya jika $(a - c) = 0$ atau $a = c$. Simpulan pertama yang didapat adalah, bilangan palindrom $N = abccba$ yang terdiri atas enam angka akan habis dibagi 13 jika $a = c$, sehingga didapat nilai N yang habis dibagi 13 adalah:

$$N = 13´(7692a + 770b + 85c) = 13´(7692a + 770b + 85a)$$
$$= 13´(7777a + 770b).$$

Dari $N = 13\times(7777a + 770b)$ nyatalah bahwa N juga habis dibagi 7.

$\therefore$Terbukti bahwa jika $N = abccba$ habis dibagi 13 maka

N akan habis dibagi 7 juga.

12. Misalkan saja P adalah seorang ulama. Hal ini berarti bahwa ia harus berkata benar. Kalau ia selalu berkata benar maka ia tidak akan mungkin untuk menyatakan bahwa ketiganya adalah politisi. Kesimpulannya, pemisalan bahwa P adalah ulama tidak dapat diterima sehingga P adalah politisi. Akibatnya, pernyataan P bernilai salah, Artinya, salah satu atau kedua orang, yaitu Q atau R adalah ulama. Tidak mungkin keduanya politisi karena akan menjadikan ketiga orang itu politisi. Keduanya ulama juga

tidak mungkin. Mengapa? Jadi yang ulama hanya satu orang saja yaitu *Q*. Kesimpulannya, *P* dan *R* adalah politisi, sedangkan *Q* adalah ulama.

13. Siswa yang berbaju biru bukanlah Tomo, karena jika ia Tomo maka ia tidak akan menyatakan bahwa yang berbaju hijau adalah Tomo (dirinya sendiri). Lalu siswa yang berbaju hijau bukanlah Tomo, karena jika ia Tomo maka ia tidak akan menyatakan bahwa dirinya sendiri adalah Dirjo. Jadi Tomo berbaju putih. Karena siswa yang berbaju putih adalah Tomo, orang yang selalu berkata benar, maka siswa yang berbaju hijau adalah Harso. Yang terakhir, yang berbaju biru adalah Dirjo.

14. Perhatikan tabel ini yang merangkum pernyataan kelima orang! Setiap kolom harus memuat satu pernyataan benar dan satu pernyataan salah. Perhatikan pernyataan Edna! Jika dimisalkan pernyataannya bahwa ia yang berada di posisi 1 (tanda (∨)*a* yang benar dan merupakan langkah pertama (*a*), maka pernyataannya bahwa ia berada di posisi 4 (tanda (×)*b*) akan bernilai salah dan merupakan langkah ke-dua (*b*). Begitu seterusnya sehingga diperoleh posisi seperti ini. Sampai di sini terjadi kontradiksi dimana Budi dan Edna sama-sama berada di peringkat 1.

	Alim	Budi	Cici	Dodi	Edna
Alim	3(x)*f*				1 (v)*a*
Budi		1(v)*h*	5		
Cici		2(x)*g*	3		
Dodi	2(v)*e*			2(v)*d*	
Edna				4(x)*c*	4(x)*b*

Pemisalan berikut adalah jika Edna berada di posisi 4 yang bernilai benar sehingga diperoleh tabel seperti ini.

	Alim	Budi	Cici	Dodi	Edna
Alim	3(v)*f*				1(x)*c*
Budi		1(x)*i*	5(v)*h*		
Cici		2(v)*j*	3(x)*g*		
Dodi	2(x)*e*			2(x)*d*	
Edna				4(v)*b*	4(v)*a*

Jadi, peringkat mereka adalah : Dodi, Cici, Alim, Edna, dan Budi.

15. *B* tidak mungkin berkata benar. Jika pernyataannya benar maka pernyataannya lalu menjadi tidak benar sebagaimana yang dinyatakannya bahwa ia tidak pernah berkata benar. Jadi, pernyataan *B* adalah salah. Dengan demikian Persebaya tidak kebobolan lebih dahulu (*A*). Si *C* yang menyatakan *B* adalah salah menjadi benar. Dengan demikian, pertandingan itu berakhir seri (*B*). Si *A* yang menyatakan Persebaya yang menang adalah salah juga. Akibat selanjutnya, pernyataan *A* yang lain menjadi salah juga, sehingga Persib tidak kebobolan lebih dahulu (*C*). Dari *A, B,* dan *C* diperoleh kedudukan seri 0 – 0.

Alternatif Kunci Jawaban Tugas Bab II

1. ‘Soal biasa’ atau ‘soal rutin’ serta ‘masalah’ adalah sama-sama terkategori sebagai soal atau pertanyaan yang harus dijawab. Suatu soal disebut ‘soal biasa’ atau ‘soal rutin’ bagi seseorang jika orang tersebut sudah pernah menyelesaikan soal tersebut atau sudah tahu jawabannya, sehingga untuk menyelesaikan soal tersebut, ia hanya membutuhkan ingatan yang baik saja. Namun, suatu soal disebut ‘masalah’ bagi seseorang jika orang tersebut tertantang untuk menyelesaikannya, namun ia belum mengetahui langkah-langkah pemecahannya; sehingga untuk menyelesaikannya, ia membutuhkan kemampuan berpikir yang melebihi kemampuan mengingat yang baik saja.
2. Empat langkah standar pada proses pemecahan masalah yang sesuai dengan Permendiknas No. 22 tahun 2006 adalah: (1) memahami masalah; (2) merancang model matematika; (3) menyelesaikan model; dan (4) menafsirkan solusi yang diperoleh.
3. Strategi pemecahan masalah adalah cara yang sering dilakukan dan sering berhasil dalam proses pemecahan masalah.
4. Bernalar adalah proses menarik kesimpulan. Untuk memecahkan suatu masalah dengan langkah-langkah pemecahan yang belum diketahui, seseorang harus menggunakan kemampuan bernalar dan berlogika. Secara umum dapat dikatakan bahwa proses pemecahan masalah dimaksudkan juga untuk meningkatkan kemampuan berpikir (berlogika) dan bernalar.

Alternatif Kunci Jawaban Tugas Bab III

1. Setiap orang akan selalu dihadapkan dengan masalah. Kemampuan memecahkan masalah yang dipelajari selama di bangku sekolah dapat ditransfer atau digunakan untuk memecahkan masalah yang ditemui para siswa di dalam kehidupan sehari-hari mereka nanti maupun ketika mereka belajar di Perguruan Tinggi. Di samping itu, dengan belajar memecahkan masalah, kemampuan bernalar, berkomunikasi, dan berpikir tingkat tinggi para siswa akan meningkat.
2. Empat langkah proses pemecahan masalah tersebut merupakan langkah standar dalam proses pemecahan masalah. Dengan memfokuskan pada empat langkah tersebut, diharapkan peluang keberhasilan proses pemecahan masalah akan semakin tinggi. Contohnya, setiap kali seseorang menghadapi masalah, ia akan berusaha menentukan keadaan dan situasi yang ada pada masalah tersebut. Selanjutnya, ia akan menentukan tujuan atau arah yang harus menjadi acuan. Begitu juga untuk langkah lainnya.
3. Tergantung SK atau KD yang dipilih.
4. Tergantung SK atau KD yang dipilih.
5. Peran guru matematika dalam peningkatan kompetensi memecahkan masalah di antaranya adalah:
   a. memberi kesempatan siswanya berlatih memecahkan masalah yang benar-benar dikategorikan sebagai ‘masalah’ dalam arti soal nonrutin;
   b. memberi kesempatan siswanya berlatih menggunakan empat langkah proses pemecahan masalah yang ada;
   c. memberi kesempatan siswanya untuk belajar memecahkan masalah sejak awal proses pembelajaran dengan mengajukan masalah realistik atau masalah kontekstual bagi siswanya;
   d. memberi bantuan kepada para siswa sesuai kebutuhan mereka, dalam arti tidak terlalu banyak namun juga tidak terlalu sedikit.

Alternatif Kunci Tes

1. Empat langkahnya adalah:
   a. memahami masalah, yaitu menentukan bilangan yang terdiri atas enam angka;
   b. merancang model matematika. Misalkan bilangan lamanya adalah 1*ABCDE*. Karena bilangan yang baru nilainya tiga kali bilangan awal, maka diperoleh hubungan *ABCDE*1 = 3 $\times$ 1*ABCDE*. Dengan notasi yang umum adalah:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & A & B & C & D & E \\ & & & & & 3 \\ \hline A & B & C & D & E & 1 \end{array} \times$$

   c. menyelesaikan model, sehingga diperoleh $E = 7$, $D = 5$, $C = 8$, $B = 2$, dan $A = 4$;
   d. menafsirkan solusi yang diperoleh. Ternyata, benar bahwa bilangan yang baru yaitu 428571 adalah 3 kali bilangan awal yaitu 142857.
2. Strategi pemecahan masalah adalah cara yang sering dilakukan dan sering berhasil dalam proses pemecahan masalah. Pada proses pemecahan masalah tersebut, strategi pemecahan masalah yang digunakan diantaranya adalah:
   a. membuat diagram;
   b. mencoba-coba;
   c. memperhitungkan setiap kemungkinan;
   d. berpikir logis;
   e. mengabaikan hal yang tidak mungkin.
3. Masalah kontekstual atau masalah realistik adalah masalah yang disampaikan guru pada awal kegiatan proses pembelajaran sedemikian sehingga ide matematikanya dapat muncul dari masalah tersebut.

4. Cara yang dapat meningkatkan kemampuan memecahkan masalah para siswa diantaranya adalah:
   a. memberi kesempatan siswanya berlatih memecahkan masalah yang benar-benar dikategorikan sebagai 'masalah' dalam arti soal nonrutin;
   b. memberi kesempatan siswanya berlatih menggunakan empat langkah proses pemecahan masalah yang ada;
   c. memberi kesempatan siswanya untuk belajar memecahkan masalah sejak awal proses pembelajaran dengan mengajukan masalah realistik atau masalah kontekstual bagi siswanya;
   d. memberi bantuan kepada para siswa sesuai kebutuhan mereka, dalam arti tidak terlalu banyak namun juga tidak terlalu sedikit.

Sekali lagi, Anda dinyatakan berhasil mempelajari paket ini jika kebenaran jawaban tes Anda telah mencapai minimal 75%.