Al. Krismanto

Tempat/Tanggal Lahir	: Magelang, 18 Juni 1944
Pendidikan	: Sarjana Muda (BSc), Matematika, FIPA, UGM, 1966 Post Graduate Diploma (1991) dan Master of Mathematics Education (1992), Curtin University of Technology, Perth, Australia
Karya Tulis	: 1. Tim Peneliti TIMSS Video Study Indonesia, 2007 s.d. 2008 2. Penulis Buku Matematika SMP Kurikulum 1984, Penerbit Intan Pariwara, 1990 3. Penulis Buku Matematika SMA Kurikulum 1984, Penerbit Intan Pariwara, 1990 4. Penulis Buku PRIMA EBTA Matematika, Penerbit Intan Pariwara, 1990
Pengalaman sebagai Narasumber/Fasilitator	: 1. Asisten dosen matematika di AMN/AKABRI, (1965-1970) 2. Guru Matematika SMA 1 Sleman, Yogyakarta, (1967-1999) 3. Fasilitator Diklat Instruktur PKG Matematika, (1981-1994) 4. Widyaiswara PPPG Matematika, Yogyakarta, (1999-2004)

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA YOGYAKARTA

JL. Kaliurang Km.6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, Yogyakarta

KOTAK POS 31 YK-BS Yogyakarta 55281

Telephone : (0274) 885725, 881717, 885752

Faks : (0274) 885752

E-mail : p4tkmatematika@yahoo.com

Website : www.p4tkmatematika.com

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika

Pembelajaran Sudut dan Jarak dalam Ruang Dimensi Tiga di SMA

SMA

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

PAKET FASILITASI PEMBERDAYAAN KKG/MGMP MATEMATIKA

Pembelajaran Sudut Dan Jarak Dalam Ruang Dimensi Tiga

Penulis
Al. Krismanto, M.Sc.

Penilai
Drs. M. Danuri, M.Pd.

Editor
Sigit Tri Guntoro, M.Si.

Ilustrator
Muh. Tamimuddin H., M.T.

Dicetak oleh: **Pusat Pengembangan Dan Pemberdayaan Pendidik Dan Tenaga Kependidikan Matematika**
Tahun 2008

TUT WURI HANDAYANI

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
YOGYAKARTA 2008

Kata Pengantar

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika dalam melaksanakan tugas dan fungsinya mengacu pada tiga pilar kebijakan pokok Depdiknas, yaitu: 1) Pemerataan dan perluasan akses pendidikan; 2) Peningkatan mutu, relevansi dan daya saing; 3) Penguatan tata kelola, akuntabilitas, dan citra publik menuju insan Indonesia cerdas dan kompetitif.

Dalam rangka mewujudkan pemerataan, perluasan akses dan peningkatan mutu pendidikan, salah satu strategi yang dilakukan PPPPTK Matematika adalah meningkatkan peran Kelompok Kerja Guru (KKG) dan Musyawarah Guru Mata Pelajaran (MGMP) serta pemberdayaan guru inti/ guru pemandu/guru pengembang yang ada pada setiap kecamatan, kabupaten dan kota.

Sebagai upaya peningkatan mutu dimaksud maka lembaga ini diharapkan mampu memfasilitasi kegiatan-kegiatan yang terkait dengan implementasi pengembangan pembelajaran matematika di lapangan. Guna membantu memfasilitasi forum ini, PPPPTK Matematika menyiapkan paket berisi kumpulan materi/bahan yang dapat digunakan sebagai referensi, pengayaan, dan panduan di KKG/MGMP khususnya pembelajaran matematika, dengan topik-topik/bahan atas masukan dan identifikasi permasalahan pembelajaran matematika di lapangan.

Sebagaimana kata pepatah, tiada gading yang tak retak, demikian pula dengan paket fasilitasi ini walaupun telah melalui tahap identifikasi, penyusunan, penilaian, dan editing, namun masih ada yang perlu disempurnakan, oleh karena itu saran, kritik dan masukan yang bersifat membangun demi peningkatan kebermaknaan paket fasilitasi ini akan diterima dengan senang hati teriring ucapan terimakasih.

Berkat rahmat Tuhan Yang Maha Esa, atas bimbingan-Nya penyusunan Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika dapat diselesaikan dengan baik. Untuk itu tiada kata yang patut diucapkan kecuali puji dan syukur kehadirat-Nya.

Dengan segala kelebihan dan kekurangan yang ada, paket fasilitasi ini diharapkan bermanfaat dalam mendukung peningkatan mutu pendidik dan tenaga kependidikan melalui forum KKG/MGMP Matematika yang dapat berimplikasi positif terhadap peningkatan mutu pendidikan.

Sebagaimana pepatah mengatakan, tiada gading yang tak retak, demikian pula dengan paket fasilitasi ini walaupun telah melalui tahap identifikasi, penyusunan, penilaian, dan editing masih ada yang perlu disempurnakan. Oleh karena itu saran, kritik, dan masukan yang bersifat membangun demi peningkatan kebermaknaan paket ini, diterima dengan senang hati teriring ucapan terima kasih. Ucapan terima kasih dan penghargaan setinggi-tingginya kami sampaikan pula kepada semua pihak yang membantu mewujudkan paket fasilitasi ini, mudah-mudahan bermanfaat untuk pendidikan di masa depan.

Yogyakarta,

Kepala,

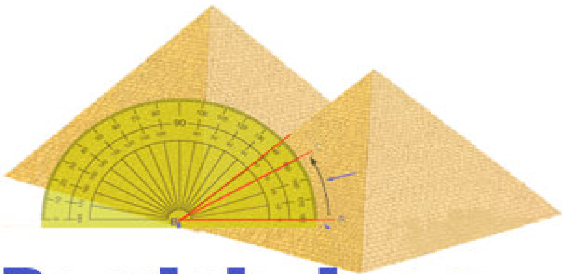
KASMAN SULYONO

NIP 130352806

Daftar Isi

Kata Pengantar			i
Daftar Isi			iii
Bab 1	**Pendahuluan**		1
	A.	Latar Belakang	1
	B.	Tujuan	2
	C.	Sasaran	2
	D.	Ruang Lingkup	2
	E.	Saran Penggunaan Modul	3
Bab 2	**Sudut**		5
	A.	Tujuan Pembelajaran	5
	B.	Masalah	5
	C.	Sudut Dalam Bangun Ruang	6
	1.	Sudut Antara Dua Garis	6
	2.	Sudut Antara Garis dan Bidang	7
	3.	Sudut Antara Dua Bidang (yang berpotongan)	9
		Bahan Diskusi 1	12
		Latihan 1	13
Bab 3	**Jarak**		15
	A.	Tujuan Pembelajaran	15
	B.	Pengantar	15
	C.	Pengertian dan Cara Menggambar Jarak	16
	1.	Definisi (Jarak)	16
	2.	Jarak antara titik P dan garis g	17
	3.	Jarak antara titik P dan bidang H	18

	4.	Jarak antara dua garis *g* dan *h* yang sejajar	18
	5.	Jarak antara garis *g* dan bidang *K* yang sejajar	18
	6.	Jarak antara bidang *H* dan *M* yang sejajar	18
	7.	Jarak antara garis *g* dan *h* yang bersilangan	19
		Tugas untuk didiskusikan (Diskusi 2)	21
	D.	Melukis/Menggambar Ruas Garis untuk Menyatakan dan Menghitung Jarak pada Bangun Ruang	21
		Latihan 2	30
Bab 4	**Pembelajaran Sudut dan Jarak**		33
	A.	Tujuan Pembelajaran	33
	B.	Pengantar	33
	C.	Pembelajaran Kontekstual dan Penerapannya dalam Pembelajaran Sudut dan Jarak	34
	D.	Pengetahuan Prasyarat Pembelajaran Sudut	37
	E.	Pengetahuan Prasyarat Pembelajaran Jarak	37
	F.	Permasalahan dalam Mempelajari Sudut dan Jarak	37
	G.	Tahap untuk Memiliki Kompetensi dalam Hal Sudut	38
	H.	Tahap untuk Memiliki Kompetensi dalam Hal Jarak	39
		Latihan 3	47
Bab 5	**Penutup**		49
		Tugas Akhir	50
		Daftar Pustaka	51
		Lampiran 1: Daftar Istilah/Lambang	53
		Lampiran 2: Kunci/Petunjuk Penyelesaian	54



BAB
1

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Dalam Geometri dipelajari hubungan antara titik, garis, bidang dan bangun ruang, dan berbagai hal yang muncul akibat adanya hubungan tersebut, misalnya sudut dan jarak. Yang juga sangat penting ialah bahwa geometri merupakan suatu sistem, yang dengan penalaran logis dari fakta atau hal-hal yang diterima sebagai kebenaran ditemukan sifat-sifat baru yang semakin berkembang (Travers, 1987:2). Namun perkembangan pendidikan matematika, khususnya kurikulum geometri yang diterapkan di Indonesia dalam beberapa dasawarsa terakhir, kurang mengembangkan penalaran logis tersebut. Terpotong-potongnya materi geometri menjadi segmen-segmen yang kurang sistemik, mengakibatkan kesulitan dalam menyusun menjadi sistem yang hierarkhis, untuk mengembangkan penalaran dan berpikir logis. Materi lebih banyak ditekankan kepada fakta-fakta yang dipelajari secara parsial dan perhitungan-perhitungan sering mendasarkan langkah: "*pokoknya*, untuk mengerjakan soal demikian perlu dilakukan langkah yang demikian ini". Analisis, khususnya analisis keruangan kurang mendapatkan porsi, sehingga kemampuan keruangan pun umumnya menjadi lemah. Dampaknya ialah kurang dikuasainya geometri dimensi tiga di berbagai jenjang, baik pada siswa maupun pada para guru. Hal itu tercermin antara lain dari hasil-hasil kegiatan PPPPTK Matematika dalam pelaksanaan TNA (*training need assessment*), pengkajian, monitoring dan evaluasi, laporan penyelenggaraan diklat maupun pengalaman para Widyaiswara dalam melaksanakan kegiatan pelatihan serta komunikasi antara guru dan Widyaiswara. Misalnya, dalam suatu kegiatan pengembangan tes standar, menghitung jarak antara dua garis di dalam kubus tertentu dijawab benar hanya oleh 16,7% di antara 193 orang guru matematika dari 11 propinsi.

Untuk mengarahkan pada geometri yang lebih analitis, tidaklah mudah. Namun di SMA hal itu perlu diusahakan, agar pembelajaran matematika khususnya geometri, lebih khusus lagi geometri ruang, turut memberikan andil dalam mengembangkan kemampuan penalaran dan komunikasi, di samping mengembangkan daya tanggap keruangan siswa serta memecahkan berbagai masalah dalam geometri ruang. Karena itu maka pembelajaran sudut dan jarak ini meskipun tidak seluruhnya disajikan secara deduktif, diusahakan memberikan suatu arah pada pemahaman melalui penalaran dan bukan sekedar hafalan teknis-praktis.

B. Tujuan

Tulisan ini disajikan dengan tujuan agar para pembaca lebih:

1. memahami konsep sudut dan jarak dalam bangun ruang, khususnya bangun ruang sisi datar dan alternatif pembelajarannya.
2. memahami dasar-dasar menyelesaikan masalah sudut dan jarak menggunakan penalaran logis dan menggambarkannya secara cermat.
3. kompeten dalam mengembangkan pembelajaran sudut dan jarak pada siswa SMA, agar para siswa memiliki kompetensi dasar dalam:
   a. menentukan besar sudut antara garis dan bidang dan antara dua bidang dalam ruang dimensi tiga
   b. menentukan jarak dari titik ke garis dan dari titik ke bidang dalam ruang dimensi tiga

C. Sasaran

Sasaran tulisan dalam paket ini adalah para guru matematika SMA khususnya para guru dalam kegiatan di MGMP Matematika SMA.

D. Ruang Lingkup

Paket Pembinaan Penataran ini meliputi:

1. Sudut dalam Ruang Dimensi Tiga dan Pembelajarannya. Sudut yang dimaksud ialah sudut antara dua garis, sudut antara garis dan bidang dan antara dua bidang.
2. Jarak dan Pembelajarannya, meliputi konsep jarak antara dua titik, sebuah titik dan sebuah garis, sebuah titik dan sebuah bidang, dua garis sejajar, sebuah garis dan sebuah bidang yang sejajar dengan garis tersebut, dua bidang sejajar, dan dua garis bersilangan. Yang terakhir ini tidak tercantum dalam Standar Isi,

namun bagi guru penting, sebab penulis yakin, ada di antara siswa yang akan menanyakan masalah ini.

E. Saran Penggunaan Modul

Tulisan ini disusun dalam bentuk modul sederhana, dalam arti, pada setiap bab kecuali Pendahuluan dan Penutup, baik di dalam uraian ataupun terutama di bagian akhir bab disertai dengan Tugas dan Latihan. Modul ini dapat dipelajari secara kelompok atau mandiri, kecuali latihannya hendaknya, dikerjakan secara mandiri. Kegiatan kelompok juga dapat dilakukan setelah kegiatan mandiri untuk membahas hal-hal yang belum dapat dikerjakan secara mandiri. Modul dilengkapi dengan petunjuk alternatif penyelesaian masalah yang harus didiskusikan atau dikerjakan, atau bahkan jawaban lengkapnya. Kunci atau petunjuk digunakan hanya setelah selesai berdiskusi atau mengerjakan latihan.

Latihan disajikan pada akhir bab kecuali pada Pendahuluan. Seperti halnya Tugas, pada Latihan juga disertai kunci jawaban atau petunjuk penyelesaiannya. Latihan hendaknya dikerjakan secara mandiri, untuk merefleksikan sampai sejauh mana yang dipelajari telah dikuasai. Dengan demikian, seperti halnya pada Tugas, kunci atau petunjuk dibaca hanya jika sudah selesai mengerjakannya. Dalam mengerjakan latihan hendaknya dikerjakan dengan memberikan penalarannya. Mungkin Anda, berdasar pengalaman mengajar, dapat menjawab langsung latihan yang tersedia. Hal ini tidak mustahil. Namun demikian, karena yang sangat dibutuhkan bagi guru di kelas adalah bagaimana hasil itu dapat dinalar siswa asal usul serta teknik dan strategi memecahkannya, langkah mengerjakan menggunakan alur kerja yang runtut perlu dilakukan dan dibina (paling tidak oleh guru sebagai pribadi) setiap saat. Jika demikian maka langsung atau tidak langsung guru berusaha untuk mengembangkan komunikasi, khususnya menyiapkan bahan komunikasi, yang pada gilirannya akan diikuti para siswa.

Bahan Diskusi hendaknya dapat digunakan sebagai bahan refleksi terhadap pemahaman materi modul yang terkait dengan pengalaman mengajar guru.

Pengguna yang mempelajari bahan ini dapat dinyatakan menguasainya jika paling sedikit telah dapat menyelesaikan 75% dari seluruh latihan yang tersedia, baik pada setiap bab maupun pada bagian akhir yang mencakup semua bahan.

Modul ini disusun sedemikian sehingga mana yang akan dipelajari dulu, sudut atau jarak, tidak akan memberikan masalah. Jika dalam Standar Isi dicantumkan "jarak dan sudut" dan akan dipelajari jarak terlebih dahulu, tidak akan menjadikan masalah.

Bagi siapa pun yang ingin memberikan saran perbaikan paket ini atau ingin berkomunikasi tentang bahan ini atau yang terkait, atau jika Anda mengalami kesulitan dalam menggunakan modul ini, Anda dapat menyampaikan masalahnya melalui:

a. PPPPTK Matematika.

   e-mail: p4tkmatematika@yahoo.com

   website: www.p4tkmatematika.com

   alamat : PPPPTK Matematika, Jl. Kaliurang Km 6, Sambisari, Condongcatur Depok Sleman Yogyakarta 55283.

b. *e-mail* penulis : kristemulawak@yahoo.co.id

BAB
2

Sudut

A. Tujuan Pembelajaran

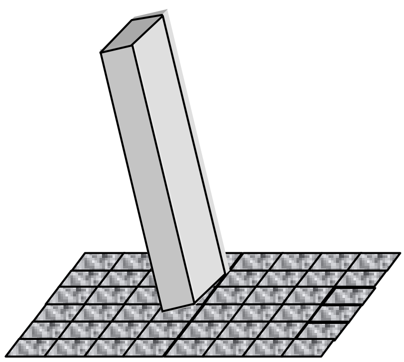
Setelah mempelajari bab ini diharapkan para pembaca/guru matematika dapat:

1. menjelaskan pengertian sudut dalam ruang dimensi tiga baik dalam gambar ruang maupun dalam konteks permasalahan sehari-hari.
2. menentukan sudut dan besar sudut antara unsur-unsur ruang dimensi tiga.

B. Masalah

1. Sering kita berbicara demikian: "Buka pintu itu lebar-lebar". Apakah yang dimaksud "lebar?" Sebuah pintu terbuka semakin lebar jika sudut antara daun pintu dengan kedudukannya semula ketika tertutup semakin besar. Tetapi, bagai-mana mengukur sudutnya? Apakah sama dengan sudut antara tepi bawah pintu dengan kedudukan tepi bawah pintu itu semula ketika masih tertutup? Mengapa demikian?

Gambar 2.1



Gambar 2.2

2. Gambar 2.1 menunjukkan menara Pisa yang telah miring, yang tampak jelas jika dibandingkan dengan bangunan yang ada di sebelahnya. Berapa besar sudut kemiringanya? Bagaimana cara menyatakan besar sudut antara dua bangun ruang?

3. Jika sebuah tiang rumah tidak tegak (Gambar 2.2), maka dikatakan miring. Biasanya tegak miringnya dikaitkan dengan lantai yang mendatar. Bagaimana mengukur kemiringannya terhadap lantai?

Kedua hal pertama di atas terkait dengan "sudut" antara dua bidang. Yang ketiga sudut antara garis yang mewakili tiang dan bidang yang mewakili lantai. Apakah yang kedua juga masalah sudut antara garis dan bidang?

Untuk menentukan ukuran sudut antara berbagai bangun ruang tersebut berikut akan dibahas dasar pengertiannya masing-masing.

C. Sudut Dalam Bangun Ruang

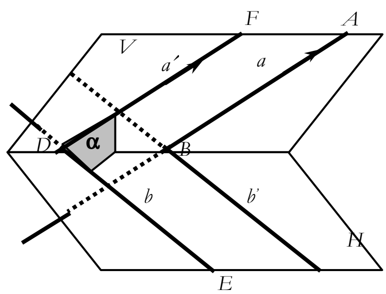
1. Sudut Antara Dua Garis

Sudut antara dua garis garis adalah sudut lancip atau siku-siku antara kedua garis tersebut. Dengan demikian maka sudut antara dua garis bersilangan adalah sudut lancip atau siku-siku yang terbentuk oleh kedua garis bersilangan (tidak sebidang)

Jika *a* dan *b* dua garis bersilangan, maka besar sudut antara kedua garis sama dengan besar sudut *antara* *a´* yang sebidang dengan *b* dan sejajar *a*, *dengan* *b*, atau sebaliknya, **antara** ***b′*** yang sebidang dengan *a* dan sejajar *b*, **dengan *a*.**

Jika sudutnya 90^o, dikatakan *a* menyilang tegaklurus *b*.

Pada Gambar 2.3, *a* dan *b* bersilangan. Besar sudut antara *a* dan *b* = $\angle EDF = \alpha$.

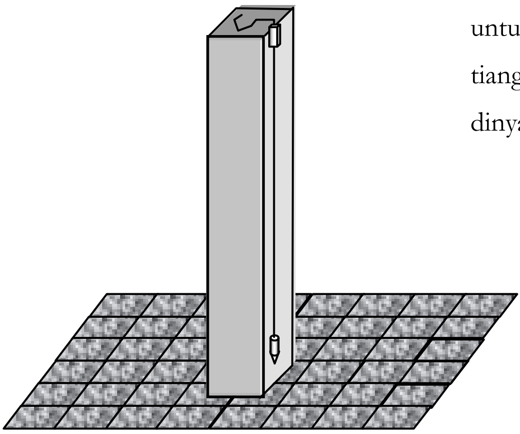


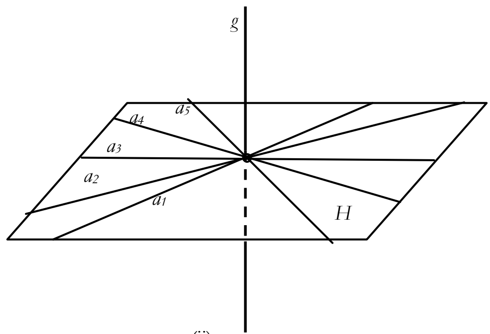
Gambar 2.3

2. Sudut Antara Garis dan Bidang

a. Garis Tegaklurus Bidang

Seorang tukang batu menggunakan unting-unting untuk memeriksa tegak (vertikal) atau tidaknya tiang. Bagaimana indikatornya bahwa sebuah tiang dinyatakan telah berdiri tegak?


(i)



(ii)

Gambar 2.4

Pengalaman di atas mempermudah kita dalam menerima definisi berikut:

Garis *a* dikatakan tegaklurus bidang *H*, jika garis *a* tegaklurus pada semua garis pada bidang *H* yang melalui titik tembusnya.

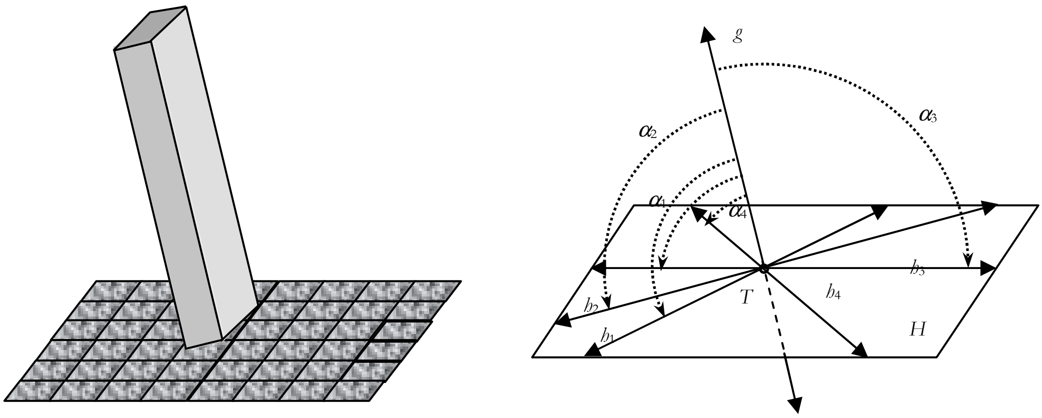
Perhatikan Gambar 2.4 (ii). Garis-garis $g \perp a_1$, $g \perp a_2$, $g \perp a_3$, …dengan a_1, a_2, a_3, … pada bidang $H \Rightarrow g \perp H$.

Karena dua garis berpotongan menentukan keberadaan sebuah bidang (melalui 2 garis berpotongan dapat dibuat tepat sebuah bidang), maka:

Jika garis g tegaklurus pada dua buah garis berpotongan pada bidang *H*, maka garis $g \perp H$.

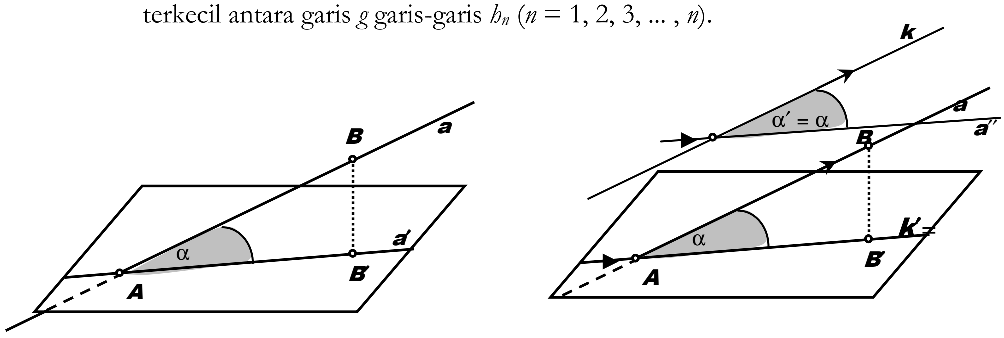
b. Garis Tidak Tegaklurus Bidang

Jika Gambar 2.2 disederhanakan, dan gambar garisnya tidak terbatas sampai bidang yang ditembusnya, dapat diperoleh Gambar 2.5 (ii). Misal garis *g* menembus bidang H di titik T, dan garis-garis pada bidang H yang melalui titik T adalah h_1, h_2, h_3, ..., h_n, ($n \to \infty$) maka besar sudut antara garis g dan garis-garis h_1, h_2, h_3, ..., h_n berturut-turut α_1, α_2, α_3,..., α_n, dapat diukur. Bagaimanakah besar sudut-sudut tersebut? (Coba lakukan beberapa di antaranya, misalnya untuk garis g dapat digunakan pensil dan bidangnya adalah meja).



(i) Gambar 2.5 (ii)

Untuk memberikan nilai besar sudut (dan juga jarak) antara dua unsur ruang dipilih ukuran terkecilnya. Dalam hal ini sudut yang dimaksud adalah sudut terkecil antara garis g garis-garis h_n (n = 1, 2, 3, ... , n).



(i) Gambar 2.6 (ii)

Karena itu maka besar sudut antara garis a dan bidang H, dengan a tidak tegaklurus H, ditentukan oleh besar sudut antara garis a dan a' yang merupakan proyeksi garis a pada bidang H.

Pada Gambar 2.6 (i), A dan B pada garis a. Proyeksi A pada H adalah $A = A'$, proyeksi B pada H adalah B', sehingga hasil proyeksi garis a pada H yaitu a' adalah garis $\overleftrightarrow{AB'}$. Sudut antara garis a dan H = sudut antara a dan a' yaitu α. Jika pada bidang pemroyeksi dibuat garis $k \parallel a$ (Gambar 2.6 (ii)), maka $k' = a'$. Untuk menggambarkan besar sudut antara k dan a', dalam hal titik tembusnya tidak tampak, dapat digambar garis $a'' \parallel a'$ pada bidang pemroyeksi sehingga besar sudut antara garis k dan bidang H dapat diwakili oleh α', yaitu $\angle(k, a'')$.

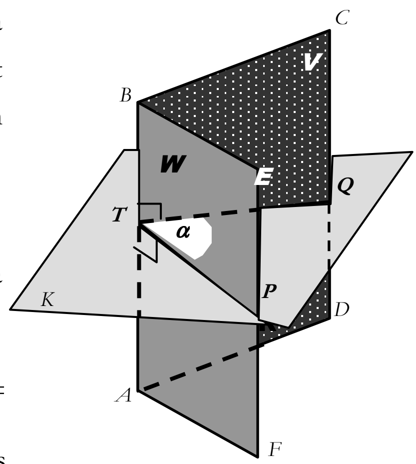
c. **Sifat Ketegaklurusan**

Misalkan garis $g \perp H$ dan g memotong H di titik P. Jika sebarang garis a_n (pada bidang H) melalui P, maka $g \perp a_n$. Untuk sebarang n, setiap garis b_n pada bidang H pastilah sejajar dengan salah satu dari garis a_n, karenanya maka $g \perp b_n$. Dengan kata lain:

Jika garis $g \perp$ bidang H, maka g tegaklurus pada setiap garis pada bidang H.

3. Sudut Antara Dua Bidang (yang berpotongan)

Seberapa jauh terbukanya pintu, seberapa kemiringan atap terhadap kedudukan langit-langit rumah, dan masih banyak lagi, terkait dengan ukuran besar sudut antara dua bidang.



Gambar 2.7

Idealisasinya sebagai berikut:

Misalkan bidang V dan W berpotongan pada garis $\overleftrightarrow{AB}$ (bidang V = bidang $ABCD$, bidang W = bidang $ABEF$, sehingga $(V, W) = \overleftrightarrow{AB}$). Jika sebuah bidang K memotong tegaklurus garis potong antara bidang V dan W, maka bidang K dinamakan bidang tumpuan antara bidang V dan W. Karena bidang $K \perp V$ dan $K \perp W$, maka

bidang $K \perp (V, W)$, sehingga:diperoleh bahwa
$(V, W) \perp (K, V)$ dan $(V, W) \perp (K, W)$.
Sudut antara garis (K, V) dan (K, W) dinamakan **sudut tumpuan** antara bidang V dan W. Besar sudut antara bidang V dan W ditentukan oleh besar **sudut tumpuan** antara kedua bidang. Pada Gambar 2.7, sudut yang dimaksud adalah sudut PTQ. Jadi untuk menentukan besar sudut antara dua bidang V dan W dapat dilakukan sebagai berikut:

Tentukan (V, W) (dalam Gambar 2.7: $\overleftrightarrow{AB}$)

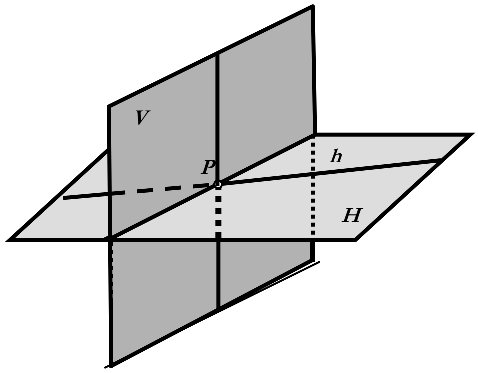
(1) Pilih sembarang titik T pada (V, W)

(2) Pada bidang V tarik garis $\overleftrightarrow{TQ} \perp (V, W)$

(3) Pada bidang W tarik garis $\overleftrightarrow{TP} \perp (V, W)$

maka besar $\angle(V, W) = \angle PTQ$

Jika besar $\angle(V, W) = 90^o$, dikatakan $V \perp W$



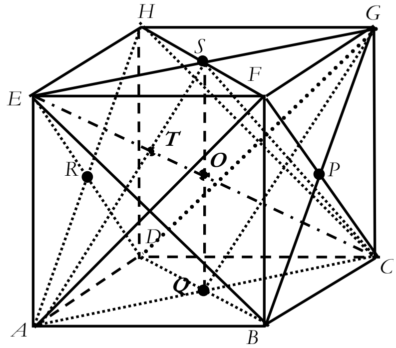
Gambar 2.8

Misalkan sebuah garis $g \perp$ bidang H di P (Gambar 2.8), dan sebuah bidang V melalui g. Melalui titik P pada bidang H dilukis garis $h \perp (H, V)$. Maka sudut tumpuan antara bidang H dan V adalah sudut antara g dan h. Karena $g \perp H$ maka $g \perp h$. Jadi besar sudut tumpuan tersebut 90^o. Dapat dinyatakan pula bahwa $V \perp H$. Jadi:

Jika garis $g \perp$ bidang H, maka setiap bidang V yang melalui $g \perp H$

Contoh 1

Pada kubus *ABCD.EFGH* (Gambar 2.9):



Gambar. 2.9

a. Sudut antara $\overleftrightarrow{AH}$ dan $\overleftrightarrow{BF}$ = sudut antara $\overleftrightarrow{AH}$ dan $\overleftrightarrow{DH}$ (karena $\overleftrightarrow{DH} \parallel \overleftrightarrow{BF}$) = 45° (karena ΔADH siku-siku sama kaki).

b. Jika sudut antara bidang *AFH* dan *CFH* = α, berapakah cos α?

Jawab: (*AFH*, *CFH*) = $\overleftrightarrow{FH}$.

ΔAFH sama sisi dan S titik tengah $\overline{FH}$. Jadi $\overleftrightarrow{AS} \perp \overleftrightarrow{FH}$ ....(1)

ΔCFH sama sisi dan S titik tengah $\overline{FH}$. Jadi $\overleftrightarrow{CS} \perp \overleftrightarrow{FH}$ ....(2)

Jadi sudut tumpuan antara bidang *AFH* dan *CFH* adalah $\angle ASC$, besarnya = α.

Pada ΔASC: $\cos\alpha = \dfrac{AS^2 + CS^2 - AC^2}{2.AS.CS}$; misalkan $AB = 2a$, maka

$AC = 2a\sqrt{2}$, $AS = CS = a\sqrt{6}$

$$= \frac{6a^2 + 6a^2 - 8a^2}{2 \times a\sqrt{6} \times a\sqrt{6}}$$

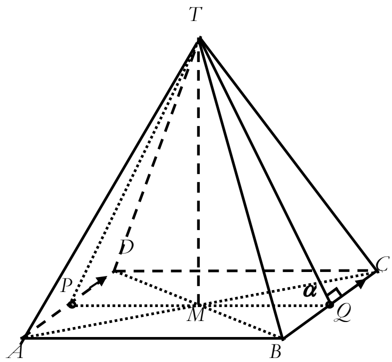
$$= \frac{4a^2}{12a^2} = \tfrac{1}{3}$$

Jadi cos $\angle(AFH, CFH) = \dfrac{1}{3}$

Contoh 2

T.ABCD adalah sebuah limas segi-4 beraturan (Gambar 2.10):

AB = 6 cm, tinggi limas = 6 cm. Tentukan sin $\angle(\overleftrightarrow{TC}, ABCD)$ dan tan $\angle(TBC, ABCD)$



Gambar. 2.10

Jawab: *M* = proyeksi *T* pada bidang *ABCD* dan *C* = proyeksi *C* pada bidang *ABCD*

Jadi proyeksi $\overline{TC}$ pada bidang $ABCD$ adalah $\overline{MC}$ sehingga $\angle(\overleftrightarrow{TC}, ABCD) = \angle TCM$;

$MC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2}$ cm $= 3\sqrt{2}$ cm.

$$TC = \sqrt{TM^2 + MC^2} = \sqrt{6^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{36+18} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

$\sin \angle TCM = \frac{\overline{TM}}{\overline{TC}} = \frac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$. Jadi $\sin \angle(\overleftrightarrow{TC}, ABCD) = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

$(TBC, ABCD) = \overleftrightarrow{BC}$; Q pada $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{QT}$ pada bidang TBC tegaklurus $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{QP}$ pada bidang $ABCD$ tegaklurus $\overleftrightarrow{BC}$

Sudut tumpuan antara bidang TBC dan $ABCD$ adalah $\angle PQT$,

$$\tan \angle PQT = \frac{TM}{MQ} = \frac{6}{3} = 2$$

Jadi $\tan \angle(TBC, ABCD) = 2$.

Bahan Diskusi 1

1. Perhatikan Gambar 2.1. Berdasar gambar tersebut dapatkah dinyatakan ukuran kemiringan menara Pisa? Jika dapat diukur, berapa derajat kemiringan menara, dan bagaimana mengukurnya? Jika tidak, berikan alasannya.

2. Jawablah pertanyaan No. 1 untuk Gambar 2.2.

3. Pada B. 2.b bab ini dituliskan:

   .....yang dimaksud adalah sudut terkecil antara garis g dan garis-garis h_n (n = 1, 2, 3, ... , n). Karena itu maka besar sudut antara garis a dan bidang H, dengan a tidak tegaklurus H, ditentukan oleh besar sudut antara garis a dan a' yang merupakan proyeksi garis a pada bidang H.

   Berikan penjelasan mengapa sudut terkecil yang dimaksud sebagai sudut antara garis a dan bidang H adalah sudut antara garis a garis a' yang merupakan proyeksi garis a pada bidang H?

4. Berikan penjelasan mengapa sudut tumpuan antara dua bidang merupakan sudut terkecil antara setiap garis pada salah satu bidang dengan sebarang garis pada bidang kedua.

Latihan 1

Untuk no. 1-6, gunakan gambar kubus *ABCD.EFGH* pada Gambar 2.9

1. Nyatakan pasangan garis-garis berpotongan yang dapat digunakan untuk menyatakan besar sudut antara garis-garis berikut:

   a. $\overleftrightarrow{AH}$ dan $\overleftrightarrow{CF}$
   b. $\overleftrightarrow{AH}$ dan $\overleftrightarrow{BE}$
   c. $\overleftrightarrow{AH}$ dan $\overleftrightarrow{QG}$
   d. $\overleftrightarrow{AH}$ dan $\overleftrightarrow{EG}$
   e. $\overleftrightarrow{HF}$ dan $\overleftrightarrow{BG}$
   f. $\overleftrightarrow{QG}$ dan $\overleftrightarrow{AF}$
   g. $\overleftrightarrow{FC}$ dan $\overleftrightarrow{DG}$
   h. $\overleftrightarrow{AF}$ dan $\overleftrightarrow{QG}$

2. Berapakah besar sudut antara pasangan garis pada soal No. 1?

3. Garis-garis berpotongan manakah yang dapat digunakan untuk menyatakan besar sudut antara garis dan bidang berikut?

   a. $\overleftrightarrow{EC}$ dan bidang *AFH*
   b. $\overleftrightarrow{BF}$ dan bidang *AFH*
   c. $\overleftrightarrow{QG}$ dan bidang *ABCD*
   d. $\overleftrightarrow{FG}$ dan *ABFE*
   e. $\overleftrightarrow{HF}$ dan bidang *ABFE*,
   f. $\overleftrightarrow{AH}$ dan *EFGH*
   g. $\overleftrightarrow{EG}$ dan *BDG*
   h. $\overleftrightarrow{CS}$ dan *AFH*

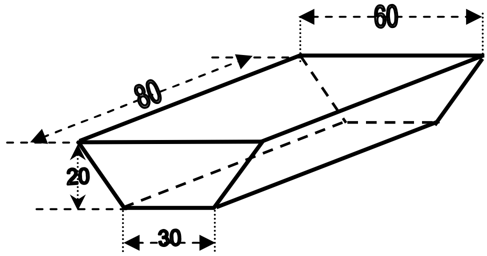
4. Berapakah besar kosinus sudut antara garis dan bidang pada soal No. 3?
5. Garis-garis berpotongan manakah yang dapat digunakan untuk menyatakan besar sudut antara bidang dan bidang berikut?

   a. *BDG* dan *EFGH*
   b. *AFH* dan *CFH*
   c. *BDG* dan *ABCD*
   d. *BEG* dan *EFGH*
   e. *AFH* dan *BDE*
   f. *BDE* dan *ABCD*

6. Berapakah besar kosinus sudut antara dua bidang pada soal No. 5?

7. *D.ABC* adalah sebuah bidang empat beraturan. Berapakah kosinus sudut antara
   a. garis tinggi dan rusuk yang dipotongnya
   b. sebuah rusuk dengan bidang yang dipotongnya?
   c. dua sisi yang saling berpotongan

8. Bejana yang gambarnya tampak pada gambar di samping, permukaannya berbentuk persegi panjang (ukuran dalam cm). Berapakah besar kosinus sudut antara tepi bejana yang miring terhadap alas bejana?



BAB
3

Jarak

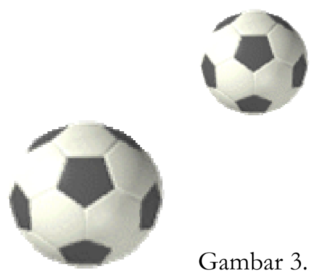
A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini diharapkan para pembaca/guru matematika dapat:

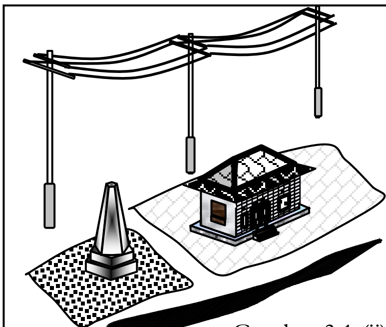
1. menjelaskan pengertian jarak dalam ruang dimensi tiga baik dalam gambar ruang maupun dalam konteks permasalahan sehari-hari.
2. menentukan ruas garis penentu jarak dan ukurannya antara unsur-unsur ruang dimensi tiga.

B. Pengantar

Jika ada dua buah bola, apa yang dimaksud jarak antara keduanya? Apakah jarak antara kedua pusatnya? Atau lainnya?



Gambar 3.1 (i)



Gambar 3.1 (ii)

Bagaimana pula menentukan jarak antara dua bagian gedung yang satu dengan lainnya agar dapat ditentukan misalnya kebutuhan kabel untuk keperluan tertentu? Bagaimana menentukan jarak antara kabel jaringan arus kuat yang melintasi bangunan-bangunan agar medan listrik tidak mengganggu penghuninya maupun alat-alat elektronik di dalamnya?

Bagaimana pula seorang dokter bedah dapat menentukan letak dan jarak antara tumor di dalam batok kepala di luar selaput otak di belakang lintasan syaraf-syaraf agar arah pembedahannya tepat?

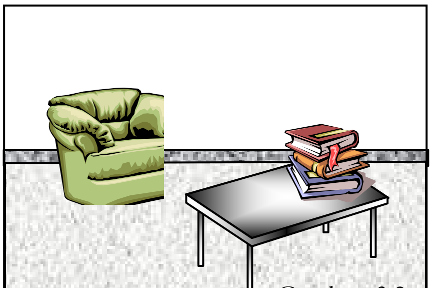
Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan di atas perlu dipahami pengertian dan cara menentukan jarak antara dua benda. Jika kita membicarakan jarak sering kita dihadapkan pada dua benda. Untuk itulah pembahasan jarak dalam ruang dilakukan idealisasi dan penyederhanaan agar sifat-sifat umumnya mudah dipahami. Untuk mengembalikannya pada konteks permasalahannya, maka cara menentukan jarak itu mungkin memerlukan pemahaman atau strategi tambahan.

Untuk dapat menentukan jarak perlu dikuasai berbagai hal sebagai prasyarat. Selain algoritma dalam aritmetika dan aljabar dasar, kompetensi dalam geometri datar dan dasar-dasar geometri ruang yang diperlukan untuk menguasai persoalan jarak adalah kompetensi dalam hal yang dikemukakan pada Bab III Pasal C. Prasyarat-prasyarat tersebut tidak dibahas dalam kajian ini.

C. Pengertian dan Cara Menggambarkan Jarak

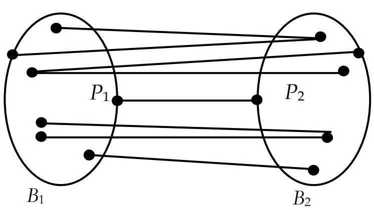
1. Definisi:

Jarak antara dua buah bangun adalah panjang ruas garis penghubung terpendek yang menghubungkan dua titik pada bangun-bangun tersebut.



Gambar 3.2

Bagaimana menentukan jarak antara tumpukan buku di atas meja dan kursi pada Gambar 3.2?



Gambar 3.3

Untuk menunjukkan jarak antara buku dan kursi dilakukan idealisasi. Dalam Gambar 3.3 anggaplah kursi sebagai bangun B_1 dan tumpukan buku sebagai bangun B_2.

B_1 dan B_2 dapat dipikirkan sebagai himpunan titik-titik, sehingga dapat dilakukan pemasangan antara titik-titik pada B_1 dan B_2. Jika ruas garis $\overline{P_1P_2}$ adalah ruas garis terpendek di antara semua ruas garis penghubung titik-titik itu, maka panjang ruas garis $\overline{P_1P_2}$ merupakan jarak antara bangun B_1 dan B_2.

(Untuk selanjutnya panjang ruas garis $\overline{P_1P_2}$ dituliskan dengan P_1P_2).

Jadi P_1P_2 adalah jarak antara kursi dan tumpukan buku.

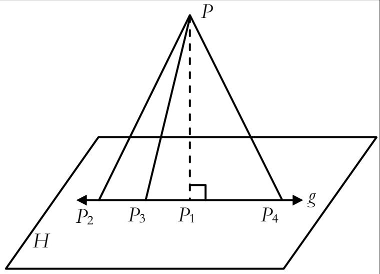
Jarak antara titik *P* dan titik *Q* adalah panjang ruas garis $\overline{PQ}$. (Gambar 3.4 (i)).

Penjelasan:

Panjang kurva *k* dan kurva (gabungan tiga ruas garis) penghubung kedua titik *P* dan *Q* seperti pada Gambar 3.4 (ii) lebih dari panjang ruas garis $\overline{PQ}$ (pada Gambar 3.4 ruas garis $\overline{PQ}$ digambarkan dengan garis putus-putus).

Gambar 3.4

2. **Jarak antara titik *P* dan garis *g*** adalah panjang ruas garis penghubung titik *P* dengan proyeksi titik *P* pada garis *g*.



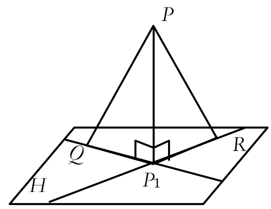
Gambar 3.5

Pada Gambar 3.5 P_1 pada *g*. Jika dari titik *P* ditarik ruas garis $\overline{PP_1}$ dengan P_1 pada *g* dan $\overline{PP_1} \perp g$, maka P_1 disebut proyeksi titik *P* pada *g*. Pada gambar tersebut titik P_1 adalah proyeksi titik *P* pada garis *g* karena $\overline{PP_1} \perp g$ dan P_1 pada *g*.

Jadi jarak antara titik *P* dan garis *g* adalah PP_1.

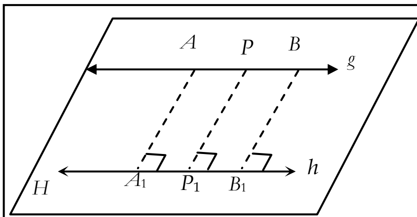
Dengan penalaran serupa, diperoleh pengertian sebagai berikut:

3. **Jarak antara titik *P* dan bidang *H*** adalah panjang ruas garis penghubung P dengan proyeksi titik P pada bidang H, yaitu P_1. Pada Gambar 3.6, jarak antara titik P dan bidang H adalah PP_1. Mengapa PP_1 dan bukan yang lain?

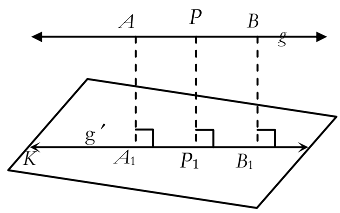


Gambar 3.6

4. **Jarak antara dua garis *g* dan *h* yang sejajar** adalah jarak antara sebuah titik pada salah satu garis ke garis lainnya.
   Pada bidang H, garis $g \parallel h$ (Gambar 3.7). Titik P, A, dan B pada garis g.
   Titik P_1, A_1 dan B_1 berturut-turut adalah proyeksi titik P, A dan B di g pada h. Jarak antara g dan h adalah $PP_1 = AA_1 = BB_1$. Untuk setiap titik A_n, $n \neq 1$, dan A_n pada h, maka ΔAA_nA_1 siku-siku di A_1. Akibatnya $AA_1 \leq AA_n$. Dengan kata lain, AA_1 adalah yang terpendek di antara penghubung A dengan setiap titik pada garis h. Jadi AA_1 adalah jarak antara garis g dan h. Dengan cara sama dapat dibuktikan, bahwa PP_1 dan BB_1 merupakan jarak antara garis g dan h yang sejajar.

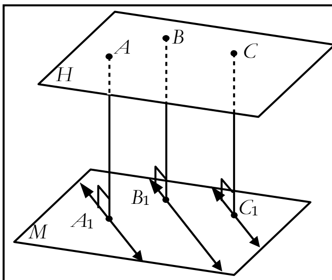


Gambar 3.7



Gambar 3.8

5. **Jarak antara garis *g* dan bidang *K* yang sejajar *g*** adalah jarak salah satu titik pada garis g terhadap bidang K.
   Pada Gambar 3.8, P_1 adalah proyek titik P di g terhadap bidang K. Jarak antara g dan K dengan $g \parallel K$ adalah PP_1. (Mengapa?)



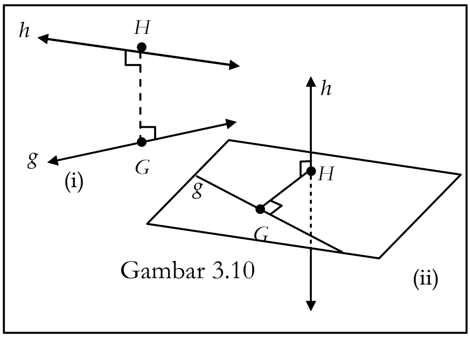
Gambar 3.9

6. **Jarak antara bidang *H* dan *M* yang sejajar** adalah jarak salah satu titik pada bidang H terhadap bidang M, atau sebaliknya.
   Sesuai butir 3 di atas, jaraknya diperoleh dengan memproyeksikan titik pada bidang satu ke yang lainnya.

Pada Gambar 3.9 titik-titik A_1, B_1, dan C_1 adalah titik-titik pada bidang M yang berturut-turut merupakan proyeksi titik-titik A, B, dan C yang terletak pada bidang H. Jarak antara bidang H dan M adalah $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

Penjelasan bahwa AA_1, BB_1, dan CC_1 menggambarkan jarak (merupakan panjang ruas garis terpendek) adalah berdasar keterangan pada butir 4 dan 5 di atas.

7. **Jarak antara garis *g* dan *h* yang bersilangan**. Jika titik G pada garis g, titik H pada garis h sedemikian sehingga $\overline{GH} \perp$ garis g dan $\overline{GH} \perp$ garis h, maka jarak antara garis g dan h yang bersilangan adalah $\overline{GH}$. (Gambar 3.10).



Gambar 3.10

Misalkan garis a dan garis b bersilangan. Jarak antara dua garis a dan b dapat digambarkan dengan dua cara sebagai berikut:

Cara I (Gambar 3.11 – 2.13):

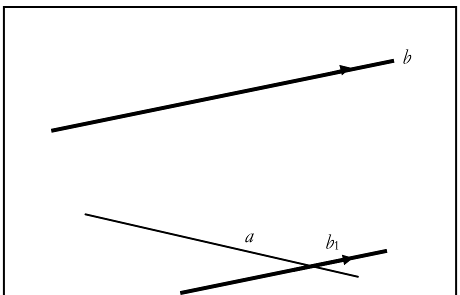
(1) Lukis garis $b_1 \parallel b$ dan memotong garis a (Gambar 3.11).

(2) Lukis bidang H melalui a dan b_1 (Gambar 3.12). Bidang H akan sejajar garis b.

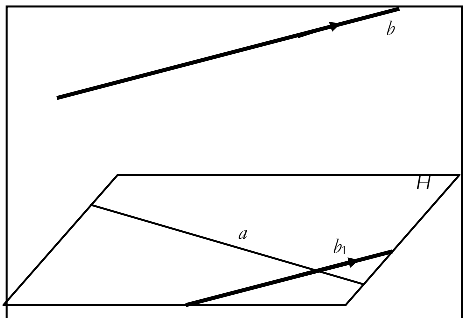
(3) Proyeksikan garis b terhadap bidang H. Hasilnya adalah garis b_2, yang memotong garis a di titik A (Gambar 3.13).

(4) Lukislah garis g yang melalui $A \perp b$, dan memotong garis b di B (Gambar 3.14).

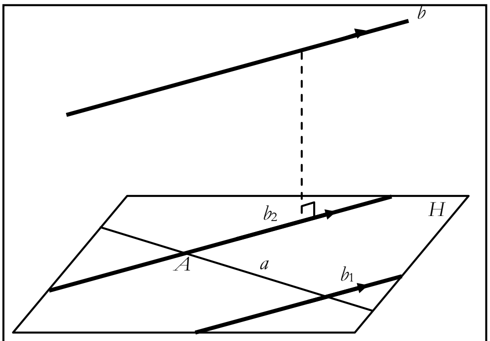
AB = panjang ruas garis $\overline{AB}$ merupakan jarak antara garis a dan b yang bersilangan



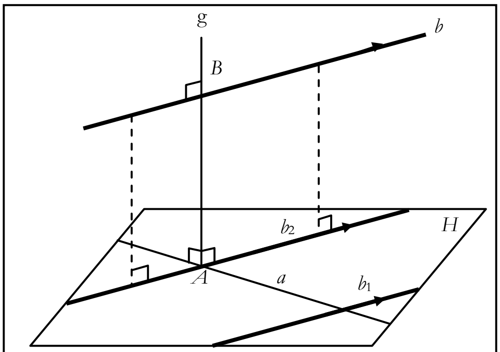
Gambar 3.11



Gambar 3.12



Gambar 3.13



Gambar 3.14

Cara II (Gambar 3.15 – 3.16):

(1) Lukislah bidang $H \perp$ b. Bidang H memotong garis b di P (Gambar 3.15).

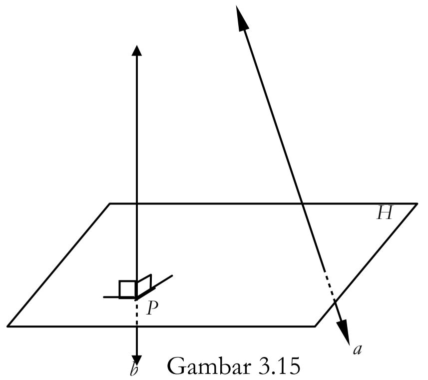
(2) Proyeksikan garis a pada bidang H, hasilnya a_1. (Gambar 3.16).

(3) Lukislah garis m melalui $P \perp a_1$ dan memotong a_1 di titik Q (Gambar 3.17 (i)).

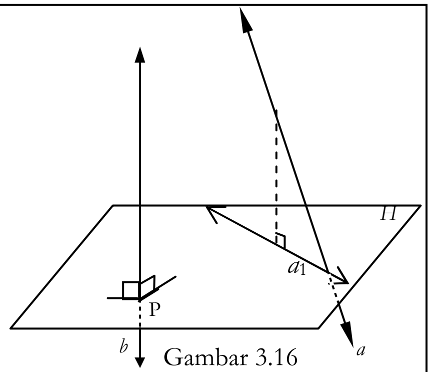
(4) Melalui Q lukis garis $k \parallel b$ yang memotong garis a di titik A (Gambar 3.17 (ii)).

Keterangan: Bidang pemroyeksi a pada H melalui $Q \perp H$. Bidang melalui garis m dan b tegaklurus H melalui Q. Karena itu maka kedua bidang berpotongan pada garis yang melalui $Q \perp H$, yaitu k.

Jadi garis a dan k berpotongan karena sama-sama pada bidang proyeksi.



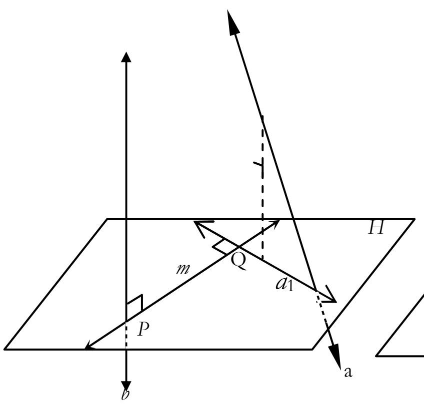
Gambar 3.15



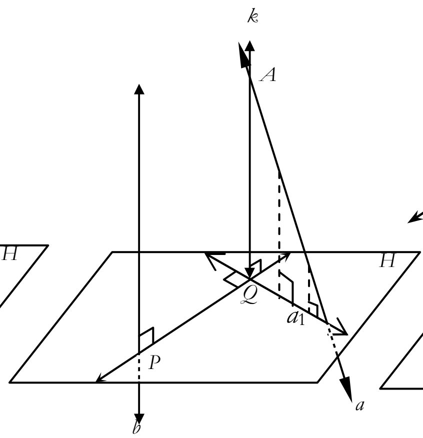
Gambar 3.16

(5) Melalui titik A lukis garis $\ell \parallel \overline{PQ}$ dan memotong garis b di titik B (Gambar 3.17 (iii)). Panjang ruas garis $\overline{AB}$ sama dengan panjang ruas garis $\overline{PQ}$ dan merupakan ukuran jarak garis a dan b yang bersilangan.

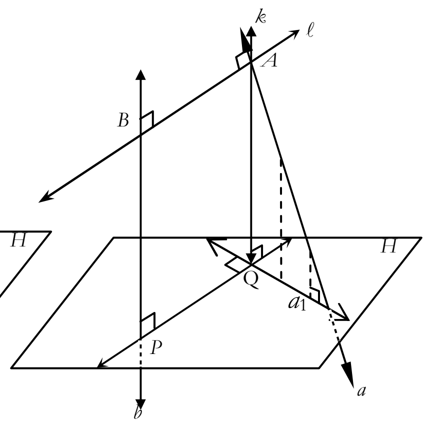
Keterangan: $\overline{BA} \perp a$ dan titik A pada garis a. Karena itu untuk setiap A_n pada garis a, $n \in N$ (n bilangan asli), ΔBAA_n siku-siku di A, sehingga $BA_n \geq BA$. Jadi $\overline{BA}$ adalah ruas garis terpendek antara penghubung titik pada garis a dan b, yang dengan demikian merupakan jarak antara garis a dan b.



Gambar 3.17 (i)



Gambar 3.17 (ii)



Gambar 3.17 (iii)

Tugas untuk didiskusikan (Diskusi 2)

1. Gunakan Gambar 3.5 dan 3.6, jelaskan mengapa $\overline{PP_1}$ merupakan ruas garis terpendek antara titik P dan garis g (untuk 3.5) dan antara titik P dengan bidang H (untuk 3.6).
2. Pada Gambar 3.8, beri alasan mengapa jarak antara g dan K dengan $g \parallel K$ adalah PP_1?
3. Pada keterangan Gambar 3.9 dinyatakan bahwa AA_1, BB_1, dan CC_1 menggambarkan jarak yang dimaksudkan. Jelaskan mengapa demikian!

D. Melukis/Menggambar Ruas Garis untuk Menyatakan dan Menghitung Jarak pada Bangun Ruang

Untuk menggambarkan sebuah garis vertikal, maka garis tersebut senantiasa digambar tegaklurus pada tepi atas bidang gambar (papan tulis, kertas). Biasanya garis ini terkait dengan garis yang tegaklurus bidang horisontal dan proyeksi titik terhadap bidang horisontal atau garis frontal horisontal.

Untuk menggambar ruas garis yang menyatakan jarak dapat dibedakan menjadi dua kejadian khusus, yaitu kejadian:

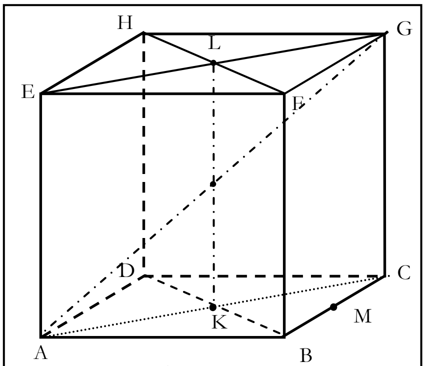
a. yang masalahnya tidak menyangkut bangun ruang dengan ukuran tertentu.
   Dalam kejadian ini, gambar dua garis yang saling tegaklurus pada umumnya dapat digambar sesuai keperluan, sepanjang gambarnya memperjelas arah pemecahan masalah. Yang penting adalah memberikan tanda bahwa keduanya saling tegaklurus.

b. pada bangun ruang dengan ukuran tertentu.
   Dalam kejadian ini, jika ada dua ruas garis berpotongan, maka letak titik potongnya tertentu. Hal ini sebagai akibat logis dari suatu gambar ruang yang bertalian dengan perbandingan panjang ruas garis. Perbandingan panjang ruas-ruas garis pada garis-garis sejajar atau segaris pada gambar ruang, sama dengan perbandingan yang sesungguhnya. Khusus pada bidang frontal, semua ukuran sama dengan ukuran yang sesungguhnya.

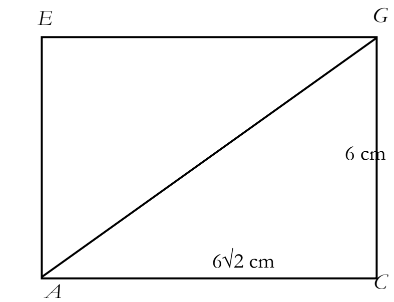
Contoh 1

Diketahui sebuah kubus dengan alas *ABCD.EFGH* Panjang rusuknya 6 cm. *K* dan *L* berturut-turut titik potong diagonal sisi *ABCD* dan *EFGH*. *M* adalah titik tengah rusuk $\overline{BC}$. Tunjukkan dan hitunglah jarak antara:

a. Tititk *A* dan *G*.
b. Titik *B* dan garis $\overline{EH}$
c. Titik *C* dan garis $\overline{AH}$
d. Titik *M* dan $\overline{EG}$
e. Garis $\overline{EK}$ dan $\overline{LC}$
f. Bidang *BDE* dan bidang *CFH*



Gambar 3.18



Gambar 3.19

Jawab: Perhatikan Gambar 3.19.

a. Jarak antara *A* dan *G* adalah panjang ruas garis $\overline{AG}$, yaitu diagonal ruang kubus.

$\overline{AG}$ merupakan diagonal persegipanjang $ACGE$.

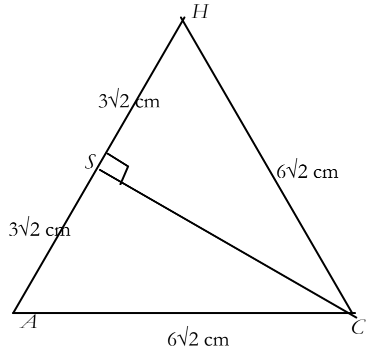
$$\begin{aligned} AG &= \sqrt{(AC)^2 + (CG)^2} \\ &= \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2 + (CG)^2} \\ &= \sqrt{6^2 + 6^2 + 6^2} \\ &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

Jarak antara A dan G adalah $6\sqrt{3}$ cm.

b. $CCHE$ adalah sebuah persegipanjang (Gambar 3.18). Jadi proyeksi titik B pada $\overline{EH}$ adalah titik E. Karena jarak antara B dan $\overline{EH}$ adalah jarak antara B dan proyeksi B pada $\overline{EH}$, maka jarak tersebut ditunjukkan oleh ruas garis $\overline{BE}$.

BE = panjang diagonal sisi kubus = $6\sqrt{2}$ cm.

Jadi jarak antara B dan $\overline{EH}$ adalah $6\sqrt{2}$ cm.



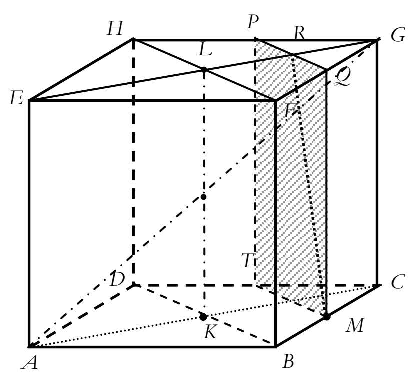
Gambar 3.20

c. Untuk menentukan jarak C terhadap $\overline{AH}$, C diproyeksikan pada AH. Karena semua sisi ΔCAH adalah diagonal-diagonal sisi kubus, maka segitiga tersebut samasisi (Gambar 3.20). Berarti proyeksi C pada $\overline{AH}$ adalah titik tengah $\overline{AH}$, misalkan titik S. Jadi jarak antara C dan $\overline{AH}$ dinyatakan oleh $\overline{CS}$ dengan

$CS = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{6}$

Jadi jarak antara C dan $\overline{AH}$ = $3\sqrt{6}$ cm.

d. Untuk menentukan jarak M terhadap $\overline{EG}$, M diproyeksikan pada $\overline{EG}$ (lihat Gambar 3.21). Garis pemroyeksinya harus tegaklurus $\overline{EG}$. $\Rightarrow$ $\overline{EG}$ tegaklurus bidang yang memuat garis pemroyeksi.



Gambar 3.21

Bidang yang tegaklurus $\overline{EG}$ di antaranya adalah bidang *BDHF* (karena $\overline{EG} \perp \overline{HF}$ dan $\overline{EG} \perp \overline{HD}$, sedangkan $\overline{HF}$ dan $\overline{HD}$ pada *BDHF*).

Akibatnya garis pemroyeksi terletak pada bidang yang sejajar bidang *BDHF*.

Karena garis pemroyeksi harus melalui *M*, maka garis pemroyeksi tersebut terletak pada bidang yang melalui *M* sejajar *BDHF*.

Untuk membuat bidang ini ($\|$ *BDHF* dan melalui $\overline{MR}$), pada bidang *BCGF* ditarik $\overline{MQ} \parallel \overline{BF}$, pada bidang *ABCD* ditarik $\overline{MT} \parallel \overline{BD}$. Jika pada bidang *CDHG* ditarik garis melalui *T* sejajar $\overline{MQ}$, maka bidang yang melalui $M \parallel$ *BDHF* (atau tegaklurus $\overline{EG}$) adalah bidang *MQPT*, yang memotong $\overline{EG}$ di titik *R*.

Karena itu maka $\overline{EG} \perp$ bidang *MQPT*. Karena $\overline{MR}$ pada *MQPT*, maka $\overline{EG} \perp \overline{MR}$ atau sebaliknya $\overline{MR} \perp \overline{EG}$ di *R*. Akibatnya, proyeksi *M* pada $\overline{EG}$ adalah titik *R*.

Jadi yang menunjukkan jarak antara *M* dan $\overline{\boldsymbol{EG}}$ adalah ruas garis $\overline{\boldsymbol{MR}}$.

$$
\begin{aligned}
MR &= \sqrt{(MQ)^2 + (RQ)^2} \\
&= \sqrt{(6)^2 + \left(1\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{40{,}5} \\
&= 4\tfrac{1}{2}\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

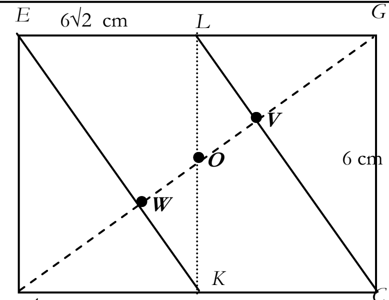
Pada ΔGLF, $\overline{\boldsymbol{RQ}}$ adalah sebuah paralel tengah, sehingga *RQ* sama dan sejajar (#) $\frac{1}{2}LF$

$$
\begin{aligned}
RQ &= \tfrac{1}{2}\ LF = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2}\ HF \\
&= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} \times 6\sqrt{2} = 1\tfrac{1}{2}\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Jadi jarak antara *M* dan $\overline{EG}$ adalah $4\frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm.

e. Menentukan jarak antara $\overline{EK}$ dan $\overline{LC}$

Karena $\overline{EL}$ # $\overline{KC}$ maka *KCLE* jajargenjang, sehingga $\overline{EK} \parallel \overline{LC}$ (lihat Gambar 3.22).



Gambar 3.22

Untuk menentukan jarak antara $\overline{EK}$ dan $\overline{LC}$ dapat dipilih sembarang titik pada $\overline{LC}$ dan diproyeksikan ke $\overline{EK}$.

Arah garis pemroyeksi tersebut sejajar atau berimpit dengan garis yang tegaklurus kedua garis. Karena itu maka perlu dicari garis yang tegaklurus $\overline{EK}$ dan $\overline{LC}$.

Perhatikan ΔGCL siku-siku di G, dan ΔLGO siku-siku di L.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta GCL \text{ siku - siku } di\ G, \Delta LGO \text{ siku - sik}u \text{ di } L \\ \text{Pada } \Delta GCL,\ \dfrac{GC}{GL} = \dfrac{6}{3\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{1} \\ \text{Pada } \Delta LGO,\ \dfrac{GL}{LO} = \dfrac{3\sqrt{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{1} \end{array}\right\} \Delta GCL \text{ dan } \Delta LGO \text{ sebangun}$$

Akibat: besar $\angle LOG = \angle GLC$

Karena besar $\angle LOG + \angle LGO = 90^o$, maka besar $\angle GLC + \angle LGO = 90^o$, atau

$\angle GLV + \angle LGV = 90^o$

Akibatnya, besar $\angle GVL = 180^o - (\angle GLV + \angle LGV) = 180^o - 90^o = 90^o$.

Dengan kata lain, $\overline{GV} \perp \overline{LC}$, sehingga lebih lanjut: $\overline{GA} \perp \overline{LC}$. Karena $\overline{LC} \parallel \overline{EK}$, maka $\overline{GA} \perp \overline{EK}$.

Jadi jarak antara $\overline{LC}$ dan $\overline{EK}$ dapat diwakili oleh ruas garis $\overline{WV}$.

Perhatikan ΔGEW: $\overline{LV} \parallel \overline{EW}$ dan L adalah titik tengah $\overline{EG}$. Akibatnya $GV = VW$.

Perhatikan ΔACG: $\overline{KW} \parallel \overline{CV}$ dan K adalah titik tengah AC. Akibatnya: $VW = WA$.

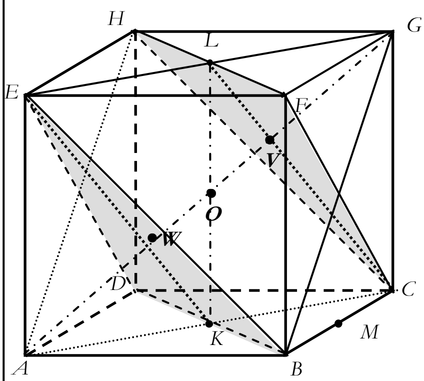
Dari kedua hal di atas diperoleh: $GV = VW = WA = \frac{1}{3} AG = \frac{1}{3} \times 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Jadi jarak antara $\overline{\boldsymbol{LC}}$ dan $\overline{\boldsymbol{EK}}$ adalah $VW = 2\sqrt{3}$ cm.

f. Menentukan jarak antara bidang BDE dan CFH.

Kedua bidang tersebut sejajar karena memiliki pasangan garis berpotongan yang sejajar yaitu $\overline{BD} \parallel \overline{HF}$ dan $\overline{DE} \parallel \overline{CF}$ (lihat Gambar 3.23).

Untuk menentukan jaraknya dapat dipilih sembarang titik pada bidang *CFH* dan diproyeksikan ke bidang *BDE*. Arah garis pemroyeksi tersebut sejajar atau berimpit dengan setiap garis yang tegaklurus kedua bidang.



Gambar 3.23

Karena itu maka perlu dicari garis yang tegaklurus kedua bidang.

$\overline{LK} \parallel \overline{EA}$ yang tegaklurus *ABCD*,

sehingga $\overline{LK} \perp$ bidang

$ABCD \Rightarrow \overline{LK} \perp BD$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{BD} \perp \overline{LK} \\ \overline{BD} \perp \overline{AC} \text{ (diagonal sisi kubus)} \\ \overline{LK} \text{ dan } \overline{AC} \text{ pada } ACGE \end{array}\right\} \begin{array}{l} \overline{BD} \perp \text{ bidang } ACGE \\ \Rightarrow \overline{BD} \perp \overline{AG} \text{ atau } \overline{AG} \perp \overline{BD} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \end{array}$$

$$\overline{AB} \perp ADHE \Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{DE} \text{ atau } \overline{DE} \perp \overline{AB}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{DE} \perp \overline{AB} \\ \overline{DE} \perp \overline{AH} \text{ (diagonal sisi kubus)} \\ \overline{AB} \text{ dan } \overline{AH} \text{ pada } ABGH \end{array}\right\} \begin{array}{l} \overline{DE} \perp \text{ bidang } ABGH \\ \Rightarrow \overline{DE} \perp \overline{AG} \text{ atau } \overline{AG} \perp \overline{DE} \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{array}$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$\overline{AG} \perp$ bidang pemuat $\overline{BD}$ dan $\overline{DE}$ yaitu bidang *BDE*.

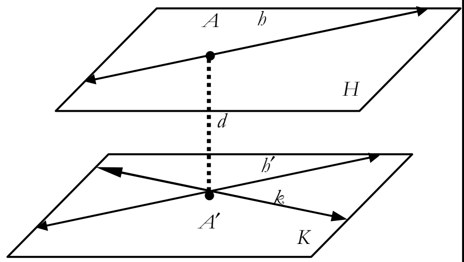
Karena bidang $CFH \parallel BDE$, maka $\overline{AG} \perp BDE$. Dengan demikian maka ruas garis yang menyatakan jarak antara bidang *BDE* dan *CFH* harus sejajar atau berimpit dengan $\overline{AG}$. Untuk hal tersebut, dapatlah dipilih $\overline{AG}$. Pada Gambar 3.23 ruas garis yang menyatakan jarak antara bidang *BDE* dan *CFH* adalah $\overline{VW}$.

Berdasar uraian pada butir e, maka jarak antara kedua bidang = $VW = 2\sqrt{3}$ cm.

Catatan:

(1) Dari uraian di atas dapat dinyatakan bahwa bidang *BDE* dan *CFH* tegaklurus diagonal ruang $\overline{AG}$ dan membaginya menjadi tiga sama panjang. Hal tersebut juga terjadi pada diagonal-diagonal ruang lainnya terhadap dua bidang sejajar seperti *BDE* dan *CFH*, misal $\overline{EC}$ terhadap bidang *BDG* dan *FHA*.

(2) Jika bidang $H \parallel K$, garis *h* pada *H* dan *k* pada *K*, dengan *h* dan *k* bersilangan, dan h' adalah proyeksi *h* di *K*, maka h' pasti berpotongan dengan *k*; misal di A'. Pastilah dapat ditemukan *A* pada *h* sedemikian sehingga A' merupakan proyeksi *A* di bidang *K*. Dengan demikian maka AA' adalah jarak antara *H* dan *K*, dan juga sekaligus jarak antara garis *h* di *H* dan garis k di *K* dengan *h* dan k bersilangan.



Gambar 3.24

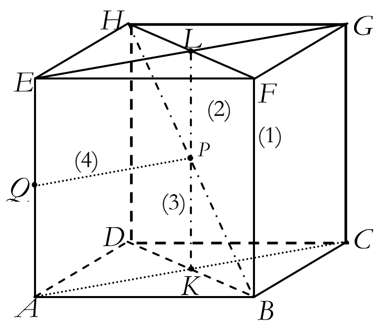
Contoh 2

Diketahui kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk 6 cm. Lukis dan hitunglah jarak antara $\overline{AE}$ dan $\overline{HB}$ (yang bersilangan).

Jawab: Sesuai dengan langkah menggambar jarak antara dua garis bersilangan yang diuraikan pada Bab III Pasal C.7 , di sini diberikan juga dua cara tersebut.

Cara I (Gambar 3.25, dasar: Bab III Pasal C.7, Gambar 3.11-14):

(1) Akan dilukis garis sejajar $\overline{AE}$ memotong $\overline{HB}$ di *B*. Garis tersebut telah tersedia yaitu $\overline{BF}$.



Gambar 3.25

(2) Lukis bidang melalui $\overline{HB}$ dan $\overline{BF}$. Bidang tersebut adalah bidang *BDHF* yang sejajar $\overline{AE}$.

(3) Proyeksikan ruas garis $\overline{AE}$ pada bidang *BDHF*. Proyeksi *A* dan *E* pada *BDHE* berturut-turut adalah *K* dan *L*. Jadi hasil proyeksi ruas garis $\overline{AE}$ pada *BDHF* adalah ruas garis $\overline{KL}$ yang memotong $\overline{HB}$ di *P*.

(4) Melalui titik *P* lukis ruas garis $\overline{PQ} \perp \overline{AE}$.

(5) Panjang ruas garis $\overline{PQ}$ merupakan jarak antara $\overline{AE}$ dan $\overline{HB}$.

(6) Oleh karena $PQ = AK$ dan $AK = \frac{1}{2}AC$, maka $PQ = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2}$ cm $= 3\sqrt{2}$ cm.

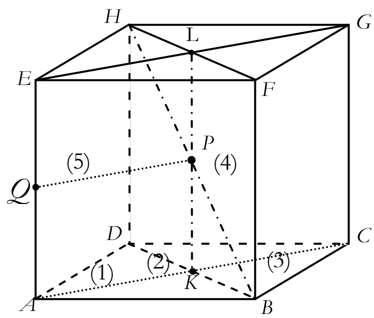
Cara II (Gambar 3.26, dasar: Gambar 3.15-3.16)

(1) Dilukis bidang yang tegaklurus $\overline{AE}$: telah tersedia yaitu bidang *ABCD*.

(2) Melalui *P* dibuat garis tegaklurus $\overline{AE}$ yaitu $\overline{PQ}$; dan $\overline{PQ} \perp \overline{HB}$ di *P*.

(3) Proyeksikan $\overline{HB}$ pada bidang *ABCD*, yaitu $\overline{BD}$.

(4) Lukis garis melalui $A \perp \overline{BD}$, yaitu *AC*, memotong $\overline{BD}$ di titik *K*.



Gambar 3.26

(5) Melalui *K* dibuat garis sejajar $\overline{AE}$ yaitu KL yang memotong $\overline{HB}$ di *P*.

$\rightarrow$ Panjang ruas garis $\overline{PQ}$ merupakan jarak antara $\overline{AE}$ dan $\overline{HB}$.

Panjangnya = AK = $\frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2}$ cm $= 3\sqrt{2}$ cm.

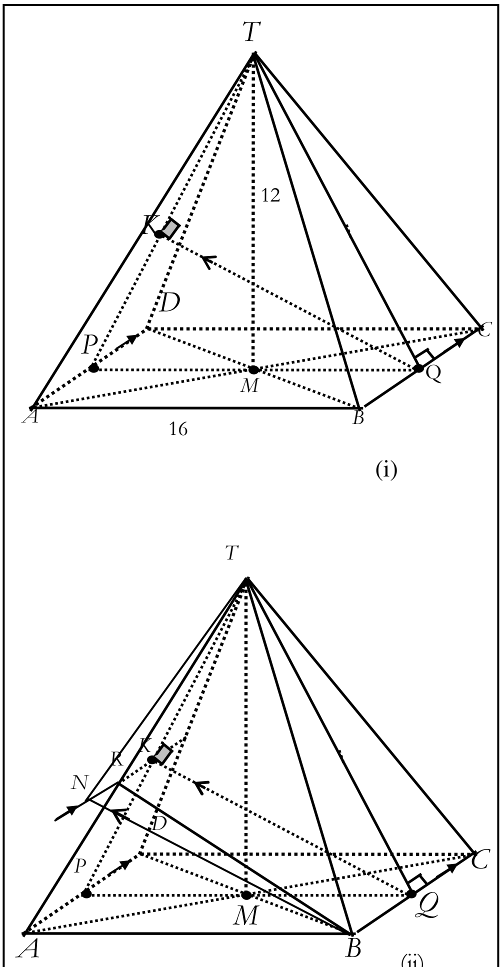
Contoh 3

T.ABCD adalah sebuah limas segi-4 beraturan *AB* = 16 cm, tinggi limas = 12 cm. Gambarlah ruas garis yang menunjukkan jarak *B* terhadap bidang *TAD*, kemudian hitunglah jarak tersebut.

Jawab:

Misalkan limasnya seperti tampak Gambar 3.27. M = proyeksi T pada bidang $ABCD$ Tarik $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ melalui M. Pada gambar tersebut ΔTPQ merupakan bidang frontal.

Untuk membuat ruas garis yang menyatakan jarak B ke bidang TAD harus dibuat garis melalui B tegaklurus bidang TAD. Garis tersebut harus sejajar dengan garis lain yang juga tegaklurus bidang tersebut, dan mudah untuk digambar. Karena harus tegaklurus bidang TAD garis tersebut harus tegaklurus pertama-tama pada dua buah garis pada bidang TAD.



Gambar 3.27

Karena bidang TPQ frontal, maka garis yang ditarik dari $Q \perp \overline{TP}$ kedudukannya benar-benar tegaklurus $\overline{TP}$.

Tarik $\overline{QK} \perp \overline{TP}$ .... (1).

Karena $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ dan $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$, akibatnya $\overline{BC} \perp \overline{PQ}$ (*)

Q titik tengah $\overline{BC}$ pada ΔTBC samakaki (karena limasnya beraturan).

Berarti $\overline{TQ}$ garis tinggi dari puncak ΔTBC samakaki, sehingga $\overline{BC} \perp \overline{TQ}$ (**)

Dari (*) dan (**) maka $\overline{BC} \perp$ bidang TPQ, yaitu bidang yang memuat $\overline{PQ}$ dan $\overline{TQ}$.

Akibatnya, $\overline{BC}$ tegaklurus semua garis pada bidang $TPQ \Rightarrow \overline{BC} \perp \overline{QK}$ atau $\overline{QK} \perp \overline{BC}$.

Karena $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ berarti juga bahwa

$\overline{QK} \perp \overline{AD}$ .... (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh bahwa $\overline{QK} \perp TAD$ (bidang pemuat $\overleftrightarrow{TP}$ dan $\overleftrightarrow{AD}$).

Karena K adalah proyeksi Q pada bidang TAD dan garis $\overleftrightarrow{BC}$ melalui B sejajar TAD, maka ukuran jarak antara B dan bidang TAD sama dengan QK.

Akibatnya ruas garis yang menunjukkan jarak B terhadap bidang TAD adalah ruas garis yang ditarik dari titik B sejajar $\overline{QK}$, dan titik kakinya, misal N, pada (perluasan) bidang sisi TAD, sedemikian sehingga $BN = QK$.

Menghitung jarak *B* terhadap bidang *TAD*

Lihat ΔTMQ: $MQ = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 16$ cm = 8 cm.

$TP = TQ = \sqrt{12^2+8^2} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$

Luas $\Delta TPQ = \frac{1}{2} \times TM \times PQ = \frac{1}{2} \times TP \times QK \quad \Rightarrow 12 \times 16 = 4\sqrt{13} \times QK$

$$\Leftrightarrow QK = \frac{48}{\sqrt{13}}$$

$$\Leftrightarrow QK = \tfrac{48}{13}\sqrt{13}$$

Jadi jarak B terhadap bidang TAD adalah $\frac{48}{13}\sqrt{13}$ cm.

Latihan 2

Untuk No. 1-6, gunakanlah gambar kubus $ABCD.EFGH$ (= kubus $\frac{EFGH}{ABCD}$) pada Gambar 2.8 dengan panjang rusuk 6 cm. Jawablah setiap pertanyaan dengan memberikan alasan.

1. Berapakah jarak antara (a) A dan C, (b) D dan G?
2. Berapakah jarak antara E dan C jika ditempuh melewati bidang sisi kubus?
3. Berapakah jarak antara (a) B dan $\overline{FC}$ (b) D dan $\overline{EG}$?
4. Berapakah jarak antara (a) $\overline{HG}$ dan bidang $ABFE$, (b) $\overline{FG}$ dan $BCHE$?
5. Berapakah jarak antara (a) bidang $ABFE$ dan bidang $DCGH$, (b) bidang AFH dan bidang BDG?

6. Berapakah jarak antara (a) $\overline{AB}$ dan $\overline{FG}$, (b) $\overline{AE}$ dan $\overline{BD}$, dan (c) $\overline{GH}$ dan $\overline{FC}$?

7. Panjang rusuk kubus *ABCD.EFGH* a$\sqrt{3}$ cm. Tentukan jarak titik *H* ke bidang *AC*F!

8. Dua buah garis ℓ dan m bersilangan tegaklurus. Jarak antara kedua garis itu adalah $\overline{AB}$ dengan *A* pada ℓ dan *B* pada m. Pada garis ℓ dan m berturut-turut terletak titik-titik *C* dan *D*, sehingga *AC* = 6 cm dan *BD* = 8 cm. Jika *AB* = 10 cm, hitunglah panjang $\overline{CD}$.

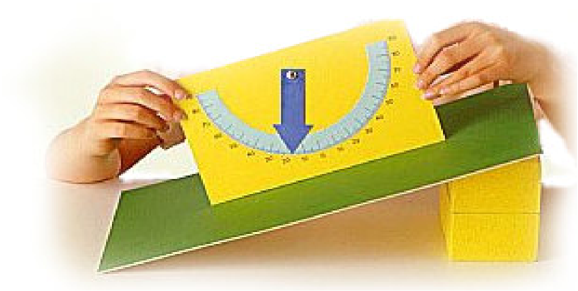
9. D.ABC adalah sebuah bidang empat beraturan, panjang rusuknya 6 cm.
   Hitung jarak antara
   a. setiap titik sudut ke bidang sisi di hadapannya
   b. setiap dua rusuknya yang bersilangan

10. *T.ABCD* adalah sebuah limas beraturan. *AB* = 6 cm, *TA* = 3$\sqrt{5}$ cm.

    Gambarlah sebuah ruas garis yang menyatakan jarak antara titik *A* ke bidang *TBC* dan hitunglah jarak tersebut.

11. Segitiga *ABC* siku-siku di *A*, merupakan alas sebuah limas *T.ABC* dengan $\overline{TA}$ $\perp$ bidang *ABC*. Panjang rusuk *AC* = 30 cm, *AB* = 40 cm, dan *TA* = 32 cm. Hitunglah: jarak antara (a) $\overline{BC}$ dan $\overline{TA}$, (b) *A* dan bidang *TBC*.

BAB
4



Pembelajaran Sudut dan Jarak

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini diharapkan para pembaca/guru matematika dapat:

1. menyusun alternatif pembelajaran kontekstual agar siswa memiliki kompetensi terkait dengan pengertian dan penggunaan sudut dalam ruang dimensi tiga.
2. menyusun alternatif pembelajaran kontekstual agar siswa memiliki kompetensi terkait dengan pengertian dan penggunaan jarak dalam ruang dimensi tiga.

B. Pengantar

Dari uraian pada Bab II dan Bab III dan dengan mengerjakan beberapa latihan, tentunya dapat dipahami, bahwa (1) kompetensi yang terkait dengan sudut dan jarak merupakan kompetensi yang perlu dimiliki oleh orang-orang di berbagai bidang keahlian, baik keahlian tingkat tinggi maupun menengah, bahkan tingkat dasar, dan (2) untuk dapat memahami dan memecahkan masalah yang terkait dengan sudut jarak, khususnya pada bangun ruang sisi datar, banyak kompetensi dasar yang harus dimiliki, khususnya tentang hal-hal yang terkait dengan sifat-sifat dan teorema pada bangun datar maupun bangun ruang; dalam bangun ruang khususnya tentang kedudukan antara unsur-unsur ruang. Hal pertama merupakan wawasan yang perlu dimiliki guru dalam mengembangkan pembelajaran kontekstual dan aplikasi jarak pada umumnya. Hal kedua menyangkut kompetensi siswa dalam geometri datar dan ruang yang mendasari pemahaman dan perhitungan sudut dan jarak. Keduanya merupakan bahan yang perlu diramu dalam menyelenggarakan pembelajaran.

C. Pembelajaran Kontekstual dan Penerapannya dalam Pembelajaran Sudut dan Jarak

Penyajian pembelajaran materi 'sudut dan jarak' ini diusahakan agar dapat memenuhi saran pembelajaran yang dewasa ini sedang dikembangkan, yaitu dengan pengenalan masalah yang sesuai dengan situasi (*contextual problem*), atau pendekatan kontekstual. Dari berbagai sumber, pemahaman, pelaksanaan dan pengembangan pendekatan ini variatif. Pendekatan kontekstual merupakan konsep belajar yang membantu guru mengaitkan antara materi yang diajarkannya dengan situasi dunia nyata siswa dan mendorong siswa membuat hubungan antara pengetahuan yang dimilikinya dengan penerapannya dalam kehidupan mereka sebagai anggota keluarga dan masyarakat (Dit PLP, 2003:1). Intinya, siswa belajar dari mengalami sendiri, bukan dari 'pemberian orang lain'. Sedangkan Tim CTL (*Contextual Teaching and Learning*)- Matematika) Universitas Georgia (2001) menyatakan bahwa:

> *Contextual teaching and learning is a conception of teaching and learning that helps teachers relate subject matter content to real world situations and motivates students to make connections between knowledge and its applications to their lives as family members, citizens, and workers and engage in the hard work that learning requires.*
> ***(http://jwilson.coe.uga.edu/EMT725/EMT725.html)***

Pandangan ini menekankan bahwa pembelajaran kontekstual merupakan konsepsi tentang belajar dan mengajar yang membantu guru menghubungkan materi dengan situasi dunia nyata dan memotivasi siswa untuk membuat koneksi atau hubungan antara pengetahuan dan penerapannya pada kehidupan nyata mereka baik sebagai angota keluarga, warga masyarakat. Selanjutnya dinyatakan bahwa yang sangat perlu dalam CTL adalah:

- CTL menekankan pemecahan masalah (*problem-solving*);
- menyadari perlunya kegiatan belajar mengajar yang konteksnya bervariasi misalnya yang terkait dengan di rumah, masyarakat, atau tempat kerja;
- mengajari siswa untuk memonitor dan mengarahkan belajar mereka sendiri, sehingga menjadi siswa yang dapat belajar secara teratur;

- menempatkan pengajaran dalam berbagai situasi konteks kehidupan siswa;
- mendorong siswa untuk belajar dari antara mereka, bekarja bersama dalam belajar, dan
- menggunakan asesmen autentik (*authentic assessment*).

Jika pada uraian di atas lebih ada harapan "membantu guru" terhadap bagaimana pembelajaran diselenggarakan, Wilson, JW (2003) lebih menekankan pada kompetensi siswa, dengan menyatakan bahwa "*The goals of contextual teaching and learning are to provide students with flexible knowledge that transfers from one problem to another and from one context to another. These goals will be achieved through contextual teaching and learning by embedding lessons within meaningful contexts*". Transfer dari pemecahan masalah satu ke yang lain, dapat diartikan sebagai pemberian pengalaman belajar, agar penalarannya berkembang.

Di samping yang dikemukakan di atas, Tim CTL Georgia juga menyatakan bahwa "*CTL is instruction and learning that is meaningful. Typically that means that instruction is situated in context but for more advanced students meaningful learning can also be abstract and de-contextualized*". Di sini CTL menekankan pada kebermaknaan, bahkan untuk siswa yang memang mampu, kebermaknaan tersebut dapat juga yang bersifat abstrak, karena pada akhirnya semakin tinggi mempelajari matematika, abstraksi haruslah semakin kuat.

Dari uraian di atas, maka dalam kaitannya dengan pembelajaran sudut jarak yang memang memerlukan daya tanggap ruang cukup bagus, maka dapat saja terjadi konteksnya berupa pemodelan, dalam hal ini model bangun ruang. Karena itu maka keterampilan siswa dalam membuat pemodelan, dan juga semi abstrak yang berupa gambar ruang dengan teknis yang baik, merupakan kompetensi dasar yang diperlukan, mengembangkan konteks yang bersifat abstrak. Hal itu pasti haruslah ditopang oleh kemampuan guru dalam menyelenggarakan pembelajaran dengan tuntutan tersebut.

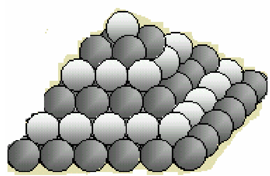
Di samping itu, Dit PLP (2003:10-19) mengemukakan tujuh komponen CTL (*Contextual Teaching and Learning*), yaitu (1) Konstruktisme, (2) Menemukan (*Discovery*; *Inquary*), (3) Bertanya (*Questioning*), (4) Masyarakat Belajar (*Learning Community*), (5) Pemodelan (*Modelling*), (6) Refleksi (*Reflection*), dan (7) Penilaian yang Sebenarnya (*Authentic Assessment*).

CORD Communications (dalam Wilson, 2003) mengetengahkan pembelajaran kontekstual dengan akronimnya: *REACT*, yaitu: *Relating*, *Experiencing*, *Applying*, *Cooperating*, *Transferring*. Menghubungkan konsep yang dipelajari dengan sesuatu yang telah diketahui siswa, dengan kegiatan *hand-on* ('mengkotak-katik' atau memanipulasi) dan sedikit keterangan guru siswa menemukan pengetahuan baru, siswa menerapkan pengetahuannya pada situasi nyata, siswa memecahkan masalah dalam suatu team (secara kooperatif) untuk menguatkan pengetahuan mereka dan mengembangkan kompetensi kolaboratif mereka, serta siswa menerapkan yang telah mereka pelajari untuk dilakukan transfer ke situasi baru sesuai konteksnya.

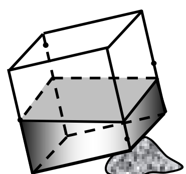
Lingkungan belajar atau konteks manakah yang relevan untuk pembelajaran 'Sudat dan Jarak' agar memudahkan siswa dalam mengkonstruksikan pengetahuan untuk mencapai kompetensi dalam kaitannya dengan sudut dan jarak dalam bangun ruang? Apakah harus benda-benda atau keadaan yang realistik yang dalam kesehariannya siswa selalu menghadapinya? Seperti di kemukakan di atas, tidaklah demikian sepenuhnya. Realistiknya adalah berbagai hal yang telah menjadi milik siswa, konkret maupun abstrak. Karena itu maka guru perlu memahami lingkungan belajar masing-masing, di samping kemampuan dasar matematika khususnya dasar-dasar geometri.

Perhatikanlah kembali Gambar 3.1. Secara umum siswa dapat memahami makna situasi yang ada pada gambar tersebut. Masalah jarak antara lain terkait dengan masalah panjang kabel listrik. Hal ini tentunya terkait dengan dimana akan diletakkan tiang pancangnya yang di rumah? Dimana letak meter listriknya? Jika dari rumah tersebut akan diberi fasilitas lampu penyorot tugu, dimana diletakkan? Berapa meter kabel diperlukan?

Berapa meter tinggi tugu yang direncanakan dengan gambar khusus seperti pada Gambar 4.2 jika setiap "bola" berdiameter 50 cm?



Gambar 4.2



Gambar 4.3

Berapa jarak terjauh dari permukaan air ke dasar air dalam bejana pada Gambar 4.3 jika ukuran bejana dan kemiringan serta air pengisi yang di dalamnya diketahui banyaknya?

Kenyataan menunjukkan, bahwa dalam perhitungan jarak berbagai hal yang kompleks perlu disederhanakan atau 'dikembalikan' kepada bangun-bangun ruang yang telah dikenal. Karena itu maka untuk pembelajaran siswa tidak harus diajak ke kerumitan perhitungan yang tidak aplikatif. Yang sangat penting, dalam menentukan jarak sifat-sifat bangun ruang, dan cara menggambarnya untuk memudahkan perhitungan, merupakan syarat perlu dipahami siswa.

D. Pengetahuan Prasyarat Pembelajaran Sudut

Selain algoritma dalam aritmetika dan aljabar dasar, kompetensi dalam geometri datar dan dasar-dasar geometri ruang yang diperlukan untuk menguasai persoalan sudut dalam ruang dimensi tiga adalah kompetensi dalam:

1. menggunakan sifat-sifat khusus yang berlaku dalam bangun-bangun datar tertentu.
2. menentukan hubungan kedudukan antara titik, garis dan bidang
3. menentukan garis-garis yang sejajar dengan garis lainnya dalam ruang
4. menggunakan teorema Pythagoras dan konsep perbandingan trigonometri serta rumus-rumus dasarnya.

E. Pengetahuan Prasyarat Pembelajaran Jarak

Seperti diuraikan di atas, untuk dapat menentukan jarak perlu dikuasai berbagai hal sebagai prasyarat. Selain algoritma dalam aritmetika dan aljabar dasar, kompetensi dalam geometri datar dan dasar-dasar geometri ruang yang diperlukan untuk menguasai persoalan jarak adalah kompetensi dalam:

- menggunakan sifat-sifat khusus yang berlaku dalam bangun-bangun datar tertentu.
- menentukan hubungan kedudukan antara titik, garis dan bidang
- menentukan proyeksi sebuah titik pada sebuah garis
- menentukan proyeksi sebuah titik pada sebuah bidang
- menentukan proyeksi garis pada sebuah bidang
- menggunakan syarat garis tegaklurus bidang dan implikasi dari garis tegaklurus bidang
- menggunakan teorema Pythagoras dan teorema-teorema jarak termasuk rumus dalam trigonometri

Kendala umum dalam mempelajari bangun ruang adalah kurangnya siswa dalam kompetensi keruangan. Dua implikasinya adalah: pertama, jika ada gambar ruang, siswa kurang memahami hubungan antara titik, garis dan bidang. Yang kedua, jika diberikan ketentuan tentang suatu bangun ruang, siswa kurang terampil dalam menggambar bangun ruang tersebut sesuai ketentuan atau keperluannya. Untuk mengatasi hal tersebut maka dalam pembelajaran jarak, hal-hal dasar atau prasyarat-prasyarat tersebut perlu diulang terlebih dahulu. Untuk yang pertama menggunakan kuis maupun bentuk soal lain dalam pemahaman ruang. Untuk yang kedua, siswa diberi tugas menggambar bangun ruang (khususnya balok, limas segitiga beraturan, limas segiempat beraturan, bidang empat beraturan, dan limas yang tiga rusuknya berpotongan tegaklurus) menurut aturan gambar-ruang paralel-miring dengan berbagai model ketentuan.

F. Permasalahan dalam Mempelajari Sudut dan Jarak

Masalah utama yang muncul dalam mempelajari sudut dalam ruang adalah keterampilan siswa dalam menggambar ruang dan pemahaman ruangnya. Tanpa gambar yang jelas, dan benar menurut tata cara menggambar ruang, menentukan besar sudut dalam ruang tidaklah mudah. Kemudian jika gambarnya sudah baik, pemahaman ruang khususnya menyangkut kedudukan antara dua garis merupakan kunci dan sekaligus sumber kesulitan atau masalah lainnya. Sedangkan dua masalah utama dalam pembelajaran jarak berpangkal hal yang serupa yaitu menentukan/menggambar ruas garis yang menunjukkan jarak yang dimaksud dan dalam hal menghitung jarak tersebut.

Meskipun kadang-kadang terjadi, untuk menghitung jarak tidak selalu menggambar ruas garis yang menunjukkan jarak tersebut, siswa tetap perlu menguasai cara melukis ruas garis yang menunjukkan jarak antara titik, garis, dan bidang. Perlu pula diingatkan di sini, bahwa persoalan jarak sering juga muncul sebagai masalah panjang ruas garis.

G. Tahap untuk Memiliki Kompetensi dalam Hal Sudut

Untuk dapat menyelesaikan masalah dalam permasalahan jarak, dalam penyajian awal pembelajaran dapat disajikan misalnya situasi yang ada di lingkungan kelas atau sekolah. Jika digunakan seperti Contoh pada Bab II, menara Pisa, misalnya, kiranya memungkinkan juga karena semestinya pengetahuan umum siswa pun dengan mudah memahaminya. Jika belum, justru di sini guru memberikan pengetahuan umum yang pantas dimengerti siswa. Pertanyaan apakah dari gambar menara Pisa itu orang telah dapat menghitung kemiringan bangunan tersebut dapat merupakan bahan diskusi.

Guru hendaknya tetap mencari sumber bahan diskusi permasalahan di lingkungan siswa. Kemiringan atap, misalnya, dapat dijadikan bahan diskusi.

Tahapan masalah yang dikembangkan dalam pembelajaran pun hendaknya tidak meloncat, kecuali bagi kelompok siswa yang telah sungguh memiliki daya tanggap ruang dan keterampilan matematika yang lebih. Latihan 1 pada Bab II memberikan gambaran bagaimana tahap-tahap uji kompetensi itu dilakukan. Siswa perlu tahu dulu mana yang dimaksud sudut antara pasangan unsur ruang sesuai dengan definisinya, baru kemudian menghitung besarnya. Pada tahap awal tidak langsung besar sudutnya.

H. Tahap untuk Memiliki Kompetensi dalam Hal Jarak

Untuk dapat menyelesaikan masalah dalam permasalahan jarak, dalam penyajian awal pembelajaran dapat saja konteks masalahnya sedemikian kompleks, tidak mudah dipecahkan. Namun yang penting dari sana adalah memberikan pemahaman tentang pentingnya memahami mana yang merupakan jarak, dan mengapa perlu dihitung. Namun dalam perhitungan yang disajikan tentu tidak tiba-tiba sulit, sebab pembelajaran pemecahan masalah bukan berarti masalahnya haruslah sulit. Dalam pemecahan masalah dikembangkan kemampuan mencari strategi, yang di antaranya adalah memecahkan masalahnya menjadi bagian-bagian yang lebih sederhana. Bahkan Polya, "bapak" *problem solving* antara lain menyatakan, periksalah, apakah ada (bagian) masalahnya pernah dipecahkan dalam pemecahan masalah lainnya yang lebih sederhana.

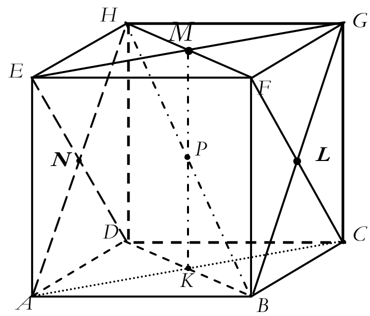
Mengingat kompleksnya masalah dan adanya kesulitan siswa yang sering ditemui, maka untuk pembelajaran jarak disarankan dilakukan bertahap sebagai berikut:

Tahap pertama:

Menentukan jarak pada bangun ruang yang cukup istimewa, antara lain kubus yang diketahui panjang rusuknya, misalnya 6 cm atau 12 cm, dan gambarnya telah disediakan. Pemilihan panjang rusuk tersebut bertujuan agar siswa terkonsentrasi pada permasalahan konsep jarak, bukan pada bilangan (yang memuat) pecahan, karena pecahan merupakan masalah yang bisa 'mengganggu'. Jarak yang ditanyakan pun adalah jarak yang belum memerlukan bantuan untuk mencarinya, kecuali pemahaman sifat bangun ruang dan bangun datar yang terkait.

Contoh 1

Panjang rusuk kubus pada Gambar 4.4 adalah 6 cm. Tentukanlah jarak antara:



Gambar 4.4

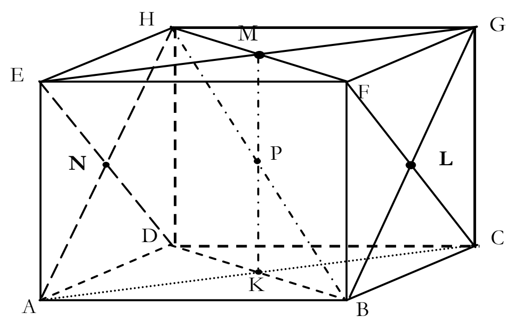
1. titik-titik

a. A dan G	f. A dan P
b. H dan B	g. E dan P
c. A dan M	i. F dan P
d. N dan M	j. N dan M
e. D dan L	k. M dan L

2. Titik dan garis berikut, dan berikan alasannya (atau ruas garis mana yang menyatakan jarak tersebut):

a. B dan $\overline{AE}$	f. A dan $\overline{BG}$	l. C dan $\overline{AE}$
b. B dan $\overline{AD}$	g. E dan $\overline{CH}$	m. D dan $\overline{FG}$
c. B dan $\overline{NH}$	i. N dan $\overline{BG}$	n. N dan $\overline{FH}$
d. B dan $\overline{DE}$	j. C dan $\overline{AH}$	o. K dan $\overline{FC}$
e. A dan $\overline{BC}$	k. B ke $\overline{EH}$	p. L dan $\overline{EM}$

3. $ABCD.\ EFGH$ pada Gambar 4.5 adalah sebuah balok. AB = 8 cm, AE = 4 cm, dan AD = 6 cm. Jawablah pertanyaan-pertanyaan pada No. 1 dan 2 berdasar Gambar 4.5.



Gambar 4.5

Catatan:

Bagi beberapa siswa, dengan menghitung jarak antara A dan G (soal 1.a), tanpa menghitung lagi dapat menjawab soal 1.b. Dengan segera juga siswa tertentu dapat menjawab soal 1.f, *g* dan i, karena secara intuitif atau mungkin telah memahami sifat simetri pada kubus. Namun bagi beberapa siswa lainnya hal itu tidak selalu dapat dilakukan. Mungkin dengan mengerjakan 1.a dan 1.b baru menemukan pola perhitungannya, baru mulai memahami sifat dasar kubus yang dapat digunakan untuk menggeneralisasi. Pelatihan secara kooperatif akan dapat digunakan untuk mengimbaskan kemampuan siswa kepada yang lain. Bagi yang telah memahami, latihan secara kooperatif ini membiasakannya berlatih berbicara secara komunikatif.

Beberapa butir pertanyaan pada Soal No. 2 juga mempunyai jawaban yang sama karena sifat simetri pada kubus. Soal No. 2 terutama menyangkut sifat kubus yang terkait dengan sifat segitiga sama sisi yang terbentuk oleh ketiga diagonal sisi kubus. Di sini juga dimulai adanya jarak, yang titik kaki garis tegaklurusnya berada di luar ruas garis. Soal No. 3 digunakan untuk mengembangkan wawasan ruang siswa dan generalisasi sifat yang lebih terbatas dari pada dalam kubus.

Tahap kedua:

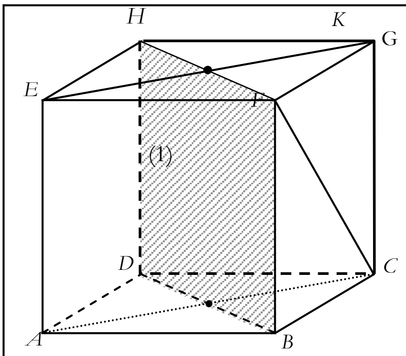
Menentukan jarak pada bangun ruang yang cukup istimewa, antara lain kubus yang diketahui panjang rusuknya, misalnya 6 cm atau 12 cm, dan gambarnya belum disediakan. Perhitungannya masih menyangkut gambar dasar, artinya, jika ada tambahan-tambahan ruas garis atau gambar bidang, ruas-ruas garis tersebut tidak memerlukan titik-titik lain yang harus dicari dulu dengan susah payah. Penugasan ini dilanjutkan dengan perhitungan jarak pada limas segiempat beraturan dan limas segitiga beraturan yang diketahui beberapa unsurnya. Yang perlu menjadi catatan di sini adalah, bahwa dalam menentukan panjang rusuk, misalnya, perlu dibedakan antara kelompok siswa yang tidak mengalami dan yang mengalami kendala dalam aritmetika. Untuk yang mengalami kendala, hendaknya bilangannya tidak membebani siswa karena kerumitannya, agar kompetensi yang menjadi tolok ukur tidak terkendala karena beban masalah lain.

Tahap ketiga:

Menentukan jarak pada bangun ruang yang gambarnya belum disediakan, dan memuat masalah jarak yang gambarnya tidak hanya tergantung dari titik atau garis yang sudah ada pada gambar dasar. Untuk hal ini dapat diambil contoh misalnya pada Contoh 2 dan Contoh 3 dalam Bab III. Hanya saja, dengan satu gambar "jadi/lengkap", mungkin beberapa siswa tidak mudah mengingat proses menentukan jarak tersebut. Salah satu cara mengatasinya ialah guru menyiapkan chart gambar setiap langkah. (Perhatikan contoh pentahapan chart seperti model pada Gambar 4.6-4.10).

Contoh 2

Diketahui kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk 6 cm. Lukis dan hitunglah jarak antara $\overline{EG}$ dan $\overline{FC}$.



Gambar 4.6

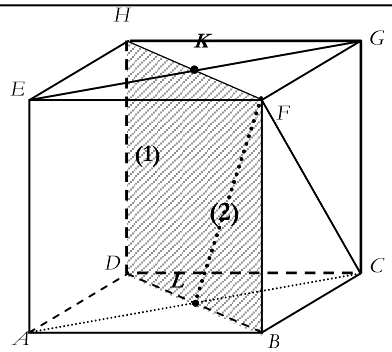
Jawab:

Garis $\overline{FC}$ akan diproyeksikan pada bidang yang tegaklurus $\overline{EG}$. Karena itu maka:

(1) Lukis bidang yang tegaklurus $\overline{EG}$, yaitu bidang *BDHF* yang memotong $\overline{EG}$ di *K* (Gambar 4.6).

(2) Proyeksikan ruas garis $\overline{FC}$ ke bidang *BDHF*, yaitu $\overline{FL}$ (Gambar 4.7).

Karena *K*, titik potong $\overline{EG}$ dan $\overline{HF}$, pada $\overline{EG}$ dan sebidang $\overline{FL}$ pada bidang *BDHF*, maka dapat dibuat garis yang tegaklurus $\overline{FL}$. Sedangkan garis yang tegaklurus $\overline{FL}$ pada bidang itu adalah $\overline{HB}$ (lihat keterangan Gambar 3.22 dan 3.23)

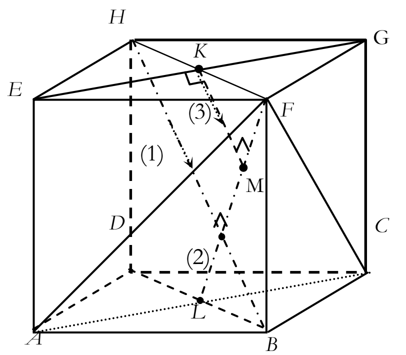


Gambar 4.7

Karena itu maka garisnya haruslah melalui K sejajar $\overline{HB}$. Misalkan garis itu memotong $\overline{KL}$ di M. Maka langkah berikutnya adalah:

(3) Melalui K dibuat garis tegaklurus $\overline{FL}$ dan memotong $\overline{FL}$ di titik M. (Caranya: Dibuat $\overline{KM} \parallel \overline{HB}$), M pada $\overline{FL}$ (Gambar 4.8).

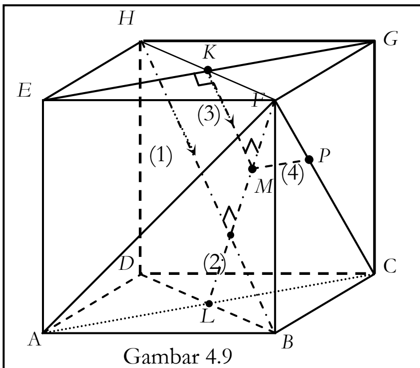
Jika melalui M dilukis garis sejajar $\overline{EG}$, maka garis itu sejajar $\overline{AC}$, karena $\overline{AC} \parallel \overline{EG}$. Oleh karenanya garis itu terletak pada bidang segitiga FLC, sehingga memotong $\overline{FC}$, misal di P. Maka langkah berikutnya:



Gambar 4.8

(4) Melalui M dibuat garis sejajar $\overline{EG}$, memotong $\overline{FC}$ di titik P (Gambar 4.9).

Jika dari P ditarik garis sejajar $\overline{KM}$, maka dengan sifat kesejajarannya, garis ini memotong $\overline{EG}$, misal di Q, maka garis $\overline{PQ}$ ini memenuhi:



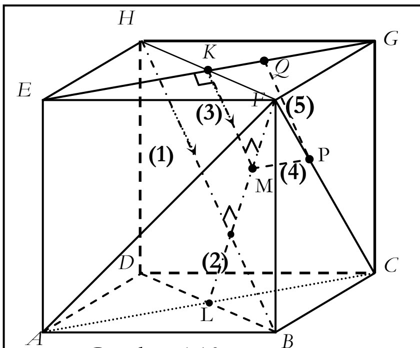
Gambar 4.9

(i) tegaklurus $\overline{EG}$, karena sejajar $\overline{HB}$ yang tegaklurus bidang DEG (yang memuat $\overline{EG}$),

(ii) tegaklurus $\overline{FC}$, karena sejajar $\overline{HB}$ yang tegaklurus bidang AFC (yang memuat $\overline{FC}$)

Karena itu langkah berikutnya:

(5) Melalui P dibuat garis sejajar $\overline{KM}$, memotong $\overline{EG}$ di Q (Gambar 4.10).



Gambar 4.10

Sesuai keterangan di atas, ruas garis $\overline{PQ}$ merupakan jarak antara $\overline{EG}$ dan $\overline{FC}$.

$PQ = KM$; $KM = \frac{1}{2} HN = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3}$ cm $= 2\sqrt{3}$ cm

Jadi jarak antara garis $\overline{EG}$ dan $\overline{FC}$ adalah sepanjang ruas garis $PQ = 2\sqrt{3}$ cm.

Di dalam pembelajaran, keterangan sebelum setiap nomor langkah di atas perlu dikembangkan dan dikemas dalam tanya jawab untuk mempertajam daya nalar dan kemampuan komunikasi siswa.

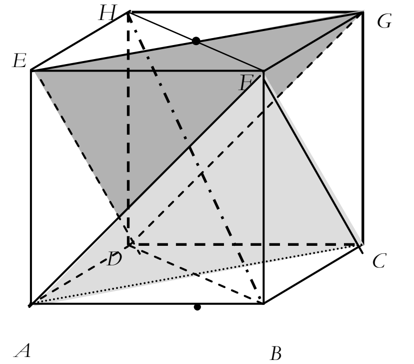
Pemikiran alternatif:

Tidak semua orang mudah mengingat algoritma, misalnya dua algoritma menentukan ruas garis yang merupakan jarak antara dua garis bersilangan. Karena itu maka untuk memecahkan suatu masalah, salah satu cara adalah mencari akar permasalahannya. Kemudian mencari sifat-sifat yang terkait dengan akar permasalahan tersebut. Sifat yang paling sederhana atau tidak kompleks dipilih sebagai langkah awal memecahkan masalah. Sifat sederhana itu dapat berupa pengalaman serupa yang pernah ditemukan dalam pengalaman belajar sebelumnya.

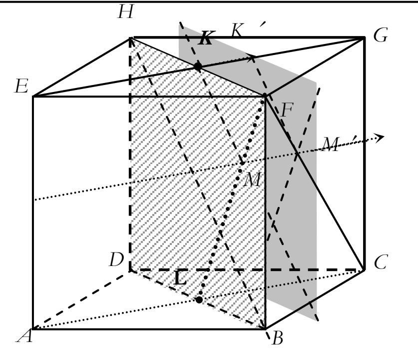
Akar masalahnya adalah jarak, lebih khusus jarak antara dua garis bersilangan. Garis yang dilukis harus memenuhi syarat tegaklurus dan memotong keduanya. Berarti ada dua syarat atau sifat garis yang dicari tersebut, yaitu (1) tegaklurus kedua garis, dan (2) memotong kedua garis $\overline{EG}$ dan $\overline{FC}$.

Jika menggunakan satu di antara kedua syarat, yaitu syarat (1), dapat dilakukan dengan mengacu pengalaman belajar, bahwa garis $\overline{EG}$ dan $\overline{FC}$ tersebut harus "diletakkan" pada dua bidang sejajar, yaitu bidang DEG untuk $\overline{EG}$ dan dan bidang CFH untuk $\overline{FC}$. Garis yang tegaklurus pada kedua bidang adalah garis $\overline{HB}$ (Gambar 4.11; lihat keterangannya sifatnya pada Gambar 3.22 dan 3.23). Sifat ini pada pembelajaran "hubungan antara titik, garis dan bidang" biasanya telah dipelajari, karena banyak manfaatnya untuk membahas materi berikutnya.

Titik pada $\overline{EG}$ yang dapat digunakan sebagai salah satu titik pada garis yang sejajar $\overline{HB}$ adalah titik K (perpotongan diagonal sisi $EFGH$) Lihat Gambar 4.12. Jika bidang $BDHF$ digeser dengan titik K sepanjang $\overleftrightarrow{KG}$, maka suatu saat kedudukan $\overleftrightarrow{KM}$ akan memotong $\overleftrightarrow{FC}$ dalam kedudukan $\overline{K'M'}$. Ruas garis $\overline{K'M'}$ merupakan ruas garis yang sekaligus tegaklurus $\overline{EG}$ dan $\overline{FC}$ dan memotong keduanya, sehingga menunjukkan jarak yang dimaksud.



Gambar 4.11



Gambar 4.12

Penalaran di atas digunakan sebagai langkah menyusun tahap-tahap pembelajaran menentukan ruas garis yang menyatakan jarak antara $\overline{EG}$ dan $\overline{FC}$. Adapun ukuran jaraknya dapat mengacu pada pemahaman, bahwa jarak antara $\overline{EG}$ dan $\overline{FC}$ sama dengan jarak dua bidang sejajar, masing-masing bidang adalah pemuat salah satu garis tersebut. Bidang yang dimaksud adalah bidang *ACF* dan *DGE* yang jaraknya sepertiga panjang diagonal ruang kubus.

Tahap keempat:

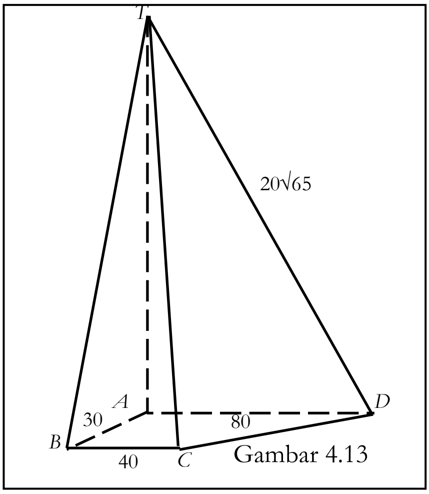
Seperti dikemukakan di atas, Contoh 3 Bab III dapat digunakan dalam tahap ketiga, agar ada variasi, dimana pada tahap-tahap awal senantiasa dibahas masalah dalam kubus atau balok. Untuk kelompok siswa tertentu, Contoh 2 dan 3 Bab III dapat saling menggantikan, namun untuk kelompok siswa lain, masing-masing perlu disampaikan, sehingga Contoh 3 Bab III menjadi tahap keempat. Hal itu dilakukan misalnya jika abstraksi ruang kelompok kelas tersebut tidak dapat berkembang dengan cepat.

Tahap selanjutnya, sebaiknya digunakan sebagai bahan pemecahan masalah bagi siswa untuk dapat mancari sendiri strateginya. Perhatikan contoh soal berikut:

Contoh 3

Sebuah limas *T.ABCD*, $\overline{TA} \perp$ bidang alas. Alasnya, *ABCD* merupakan trapesium siku-siku di titik sudut *A,* dengan $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. $AB = 30$ mm, $BC = 40$ mm, $AD = 80$ mm dan $TD = 20\sqrt{65}$ mm. Hitunglah jarak dari titik A ke bidang TCD dan gambarlah ruas garis yang menyatakan jarak tersebut.

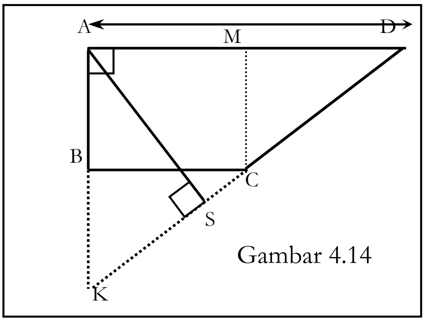
Tinjauan



Gambar 4.13

Jika limas itu digambar, salah satunya seperti Gambar 4.13. Untuk menentukan garis yang tegaklurus bidang *TCD*, dari *A* perlu dibuat garis yang tegaklurus pada paling sedikit dua garis pada bidang *TCD*. Ruas garis yang segera dapat dilukis adalah ruas garis yang tegaklurus $\overline{CD}$. Lukisan akan tepat jika didasarkan pada lukisan *ABCD* yang frontal

Ternyata titik kaki garis tegaklurus dari A ke $\overleftrightarrow{CD}$ berada pada di luar ruas garis $\overline{DC}$.



Gambar 4.14

Perhitungan akan lebih mudah apabila digambar garis $\overleftrightarrow{AB}$ ("ruas garis $\overline{AB}$ juga diperpanjang"), memotong perpanjangan $\overleftrightarrow{DC}$ di K, sehingga terbentuk ΔAKD yang siku-siku di titik sudut A. Garis dari A tegaklurus $\overline{KD}$ adalah $\overline{AS}$.

Di sini perhitungan dan cara memperoleh dan hasilnya tidak disajikan. Dipersilahkan para pembaca mencermati dan memecahkannya lebih lanjut.

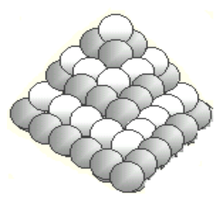
Catatan:

1. Soal pada Contoh 3 di atas memerlukan berbagai kemampuan dasar yang cukup kuat. Kemahiran mengambar/melukis merupakan prasyarat yang lebih dari kemahiran yang diperlukan soal sebelumnya. Strategi untuk mencari garis-garis pertolongan dan memperluas bangun juga bukan hal mudah bagi sebagian besar siswa. Karena itu maka disarankan soal seperti terakhir ini hanya diberikan bagi yang sungguh-sungguh tekun dan dapat tertantang untuk menyelesaikannya.

2. Tahapan yang disarankan di atas tidak selalu harus diikuti tanpa modifikasi. Guru perlu menilai kelas mereka. Jika dapat "meloncat", maka hal itu dapat saja dilakukan.
3. Dalam menyusun soal seperti di atas, maka lebih baik disiapkan sedemikian sehingga siswa tidak terbebani kerumitan bilangan. Data yang diberikan, misalnya panjang ruas garis dapat saja merupakan bilangan bentuk akar, namun dengan demikian diharapkan dalam proses perhitungan selanjutnya dapat memperlancar. Yang lebih diutamakan adalah siswa dapat mengembangkan penalaran dan strateginya, serta mampu mengomunikasikannya dengan baik.

Latihan 3

1. Carilah dan komunikasikan dua konteks permasalahan jarak.
2. Susunlah langkah-langkah dalam menghitung jarak dan menentukan ruas garis yang menentukan jarak antara:
   a. titik tengah $\overline{AD}$ terhadap $\overline{BG}$ pada kubus *ABCD.EFGH* yang panjang rusuknya *a* cm.
   b. $\overline{AH}$ dan $\overline{EG}$ dalam kubus *ABCD.EFGH* yang panjang rusuknya *a* cm
   c. rusuk yang bersilangan pada sebuah bidang empat beraturan yang panjang rusuknya *a* cm.
   d. rusuk $\overline{AB}$ dan $\overline{TC}$ pada limas beraturan *T.ABCD* yang panjang setiap rusuknya adalah *a* cm.
3. Sebuah limas *T.ABCD*, $\overline{TA}$ tegaklurus alas. Alasnya, *ABCD* merupakan trapesium siku-siku di titik sudut *A*, dengan $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. AB = 20 mm, *BC* = 15 mm, *AD* = 30 mm dan $TD = 15\sqrt{13}$ mm. Hitunglah jarak dari titik *A* ke bidang *TCD* dan gambarlah ruas garis yang menyatakan jarak tersebut.
4. Jika bola-bola pada Gambar 4.2 seluruhnya kongruen dan masing-masing berdiameter 50 cm, berapakah tinggi tugu seperti yang dibuat semacam gambar itu? Berapakah jarak terjauh antara bola di puncak tumpukan dengan bola pada dasar tumpukan bola?
5. Berapakah tinggi tumpukan bola-bola kongruen berdiameter 20 cm yang saling direkatkan seperti gambar di samping??


Gambar 4.15

BAB
4

Penutup

Telah dikemukakan bahwa bahan ajar sudut dan jarak merupakan salah satu bahan yang tidak mudah baik bagi siswa maupun bagi guru. Untuk sebagian guru, selain tidak mudah dalam penguasaan bahannya, juga dalam memberikan kemudahan bagi siswa untuk mempelajarinya.

Karena tujuannya untuk memiliki kompetensai terkait sudut dan jarak tidak mudah bagi siswa maka pembelajarannya harus bertahap dari yang sederhana ke yang lebih kompleks. Misalnya Latihan 1 menggambarkan pentahapan pembelajaran jarak. Contoh-contoh yang disampaikan tampak bahwa dalam menghitung jarak atau panjang ruas garis, teorema Pythagoras senantiasa muncul. Di samping itu, bentuk-bentuk bangun datar yang terbentuk oleh ruas-ruas garis pada bangun ruang merupakan salah satu kunci untuk memahami hubungan antara jarak yang ditanyakan dengan sifat khusus bangun datar yang dimaksud. Oleh karena itu salah satu langkah awal yang diperlukan dalam perhitungan jarak adalah mengingatkan kembali bentuk khusus bangun-bangun datar dalam bangun ruang yang dimasalahkan (kubus, limas), berikut sifat garis-garis intimewa yang mungkin terkait dengan bangun datar tersebut. Latihan ini dapat dilakukan melalui kuis sebelum masuk ke pembelajaran jarak.

Sifat yang senantiasa muncul adalah sifat ketegaklurusan baik garis terhadap garis maupun garis terhadap bidang. Yang perlu mendapatkan penekanan kaitannya dengan pembelajaran jarak di antaranya ialah (1) jika garis g tegaklurus garis a dan b yang berpotongan, maka garis g tegaklurus bidang pemuat a dan b dan (2) jika garis g tegaklurus bidang H maka garis g tegaklurus pada setiap garis pada bidang H. Karena secara formal tata urutan bahan geometri umumnya kurang tepat, maka tahap awal dalam menyiapkan pembelajarannya ialah hirearkhinya perlu diperhatikan. Jika memang masih diperlukan, alat peraga berupa kerangka ataupun model benda ruang (khususnya terbuat dari mika bening dan dapat "dilubangi" untuk "jalan garis") perlu disiapkan.

Sangat diharapkan para pembaca berkenan untuk memberikan masukan bagi perbaikan tulisan ini, sehingga lebih mudah digunakan dalam mempelajari jarak.

Terima kasih.

Tugas akhir:

Jawablah dengan penjelasan singkat jelas dan gambar yang benar, sebagaimana jika Anda menjelaskan kepada siswa.

1. *ABCD*.EFGH adalah sebuah kubus. Hitunglah: sinus sudut antara bidang *BDG* dan *CFH*.

2. Sebuah limas *T.ABCD*, $\overline{TA} \perp$ bidang alas. Alasnya, *ABCD* merupakan trapesium siku-siku di titik sudut *A*, dengan $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. *AB* = 15 mm, *BC* = 20 mm, *AD* = 40 mm dan *TD* = $10\sqrt{65}$ mm. Hitunglah jarak dari titik *A* ke bidang *TCD* dan gambarlah ruas garis yang menyatakan jarak tersebut.

Daftar Pustaka

Clemens, S.R., O'Daffer, P.G., and Cooney, T.J. *Geometry with Applications and Problem Solving.* Menlo Park: Addison-Wesley Publishing Company

Depdiknas (2003), *Pendekatan Kontekstual. (Contextual Teaching and Learning (CTL)).* Jakarta: Direktorat PLP.

Krismanto, Al. (2004). *Jarak dalam Ruang Dimensi Tiga. Paket Pembinaan Penataran.* Yogyakarta: PPPG Matematika

The Department of Mathematics Education (2001). *What_Is_Contextual_Learning.* http://www.cordcommunications.com/Contextual_Learning/What_Is_Contextual_Learning.asp USA: University of Georgia. Diakses 10 September 2004

Travers, *K*.J., Dalton, L.C., anda Layton, *K*.P. (1987). *Geometry.* River Forest, Illinois: Laidlaw Brothers Publisher.

Wilson, JW (2003). *Contextual Teaching And Learning.* http://jwilson.coe.uga.edu/CTL/CTL/intro/ctl_is.html#other The Department of Mathematics Education EMAT 4600/6600. Diakses 10 September 2004

LAMPIRAN 1

Daftar Istilah/Lambang

Lambang	membaca/artinya
$n \in N$	n anggota himpunan bilangan asli (N = himpunan bilangan asli)
$\vert\vert$	sejajar
$\not\parallel$	tidak sejajar
#	sama dan sejajar
$\perp$	tegaklurus
$\overline{AB}$	ruas garis AB
$\overrightarrow{AB}$	sinar AB
$\overleftrightarrow{AB}$	garis AB (panjang tak berhingga)
AB	panjang $\overline{AB}$; AB = 2 cm maksudnya panjang ruas garis AB 2 cm.
$\angle BAC$	sudut BAC
m$\angle BAC$	besar sudut BAC
ΔABC	segitiga ABC
$\neq$	tidak sama dengan
$\cong$	sama dan sebangun; kongruen
$\sim$	sebangun

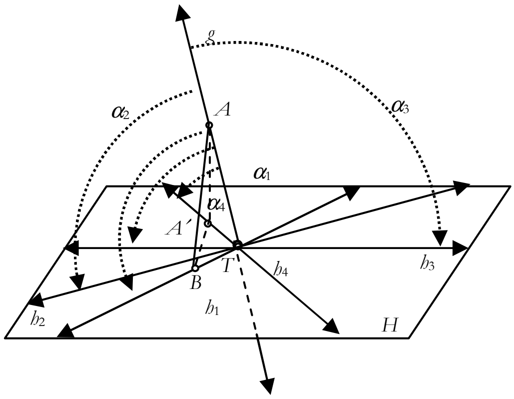
LAMPIRAN 2

Kunci/Petunjuk Penyelesaian

Bahan Diskusi 1

1. Tidak, karena tidak jelas, apakah gembar kemiringannya frontal atau tidak..

2. Sama dengan No. 1



3. Petunjuk: Untuk setiap titik A pada garis g yang diproyeksikan ke bidang H, hasil proyeksinya adalah titik A' pada garis $a' = h_4$. Tentukan titik $B \neq A'$ dan $TB = TA'$. pada bidang H, maka pada $\Delta AA'B$, AA' adalah sisi siku-siku dan AB adalah hipotenusa.

   Karena itu $AB > AA'$ di manapun B berada. Dengab membandingkan ΔTAB dan $\Delta TAA'$: $TA = TA$, $TB = TA'$ dan $AB > AA'$, maka sudut di depan $\overline{AA'}$ < dufut di depan $\overline{AB}$ di mana pun letak B yang terletak pada sembarang garis melalui T. Dengan kata lain sudut tersebut merupakan sudut terkecil.

4. Dasar penjelasan seperti No. 3

Latihan 1

1. a. $\overleftrightarrow{AH}$ - $\overleftrightarrow{DE}$ atau $\overleftrightarrow{BG}$ - $\overleftrightarrow{CF}$ b. $\overleftrightarrow{AH}$ - $\overleftrightarrow{CH}$ atau $\overleftrightarrow{BG}$ - $\overleftrightarrow{BE}$

   c. $\overleftrightarrow{AH}$ - $\overleftrightarrow{AS}$ atau $\overleftrightarrow{BG}$ - $\overleftrightarrow{QG}$ d. $\overleftrightarrow{AH}$ - $\overleftrightarrow{AC}$ atau $\overleftrightarrow{BG}$ - $\overleftrightarrow{EG}$

   e. $\overleftrightarrow{HF}$ - $\overleftrightarrow{AH}$ atau $\overleftrightarrow{BD}$ - $\overleftrightarrow{BG}$ f. $\overleftrightarrow{QG}$ - $\overleftrightarrow{DG}$ atau $\overleftrightarrow{AS}$ - $\overleftrightarrow{AF}$

   g. $\overleftrightarrow{FC}$ - $\overleftrightarrow{AF}$ atau $\overleftrightarrow{DE}$ - $\overleftrightarrow{DG}$ h. $\overleftrightarrow{AF}$ - $\overleftrightarrow{AS}$ atau $\overleftrightarrow{DG}$ - $\overleftrightarrow{QG}$

2. a. 90° b. 60° c. 30° d. 60°

   e. 60° f. 30° g. 60° h. 30°.

3. a $\overleftrightarrow{EC}$ dan $\overleftrightarrow{AS}$ (atau $\overleftrightarrow{GQ}$) b. $\overleftrightarrow{AS}$ dan $\overleftrightarrow{AE}$ (atau $\overleftrightarrow{QS}$) c. $\overleftrightarrow{QG}$ dan $\overleftrightarrow{AC}$

   d. $\overleftrightarrow{FG}$ dan $\overleftrightarrow{BF}$ (atau $\overleftrightarrow{EF}$) e. $\overleftrightarrow{HF}$ dan $\overleftrightarrow{EF}$ f. $\overleftrightarrow{AH}$ dan $\overleftrightarrow{HE}$

   g. $\overleftrightarrow{EG}$ dan $\overleftrightarrow{QG}$ h. $\overleftrightarrow{CS}$ dan $\overleftrightarrow{AS}$

4. a. 0 b. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ c. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ d. 0

   e. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ f. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ g. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ h. $\frac{1}{3}$

5. a. $\overleftrightarrow{EG}$ dan $\overleftrightarrow{QG}$ b. $\overleftrightarrow{AS}$ dan $\overleftrightarrow{CS}$ c. $\overleftrightarrow{QG}$ dan $\overleftrightarrow{AC}$

   d. $\overleftrightarrow{BS}$ dan $\overleftrightarrow{HF}$ e. $\overleftrightarrow{AS}$ dan $\overleftrightarrow{QE}$ (atau $\overleftrightarrow{CS}$) f. $\overleftrightarrow{EQ}$ dan $\overleftrightarrow{AC}$

6. a. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ d. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ e . $\frac{1}{3}$ f. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

7. a $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ b. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ c. $\frac{1}{3}$

8. 0,6

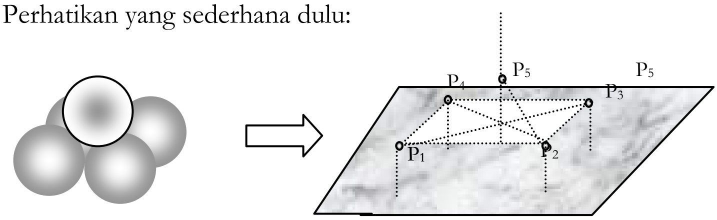
Latihan 2

1. (a) 6√2 cm (b) 6√2 cm
2. 6√5 cm
3. (a) 3√2 cm (b) 3√6 cm
4. (a) 6 cm (b) 3√2 cm
5. (a) 6 cm (b) 2√3 cm
6. (a) 6 cm (b) 3√2 cm (c) 3√2 cm
7. 2a cm
8. 10√2 cm
9. (a) 2√6 cm (b) 3√2 cm.
10. 3√3 cm
11. (a) 24 cm (b) 19,2 cm

Latihan 3

1. –
2. -
3. $21\frac{3}{17}$ cm
4. (Petunjuk: Gunakan strategi pemecahan masalah, antara lain:

   Perhatikan yang sederhana dulu:



   P = pusat bola

   Gunakan: dua bola (sederhanakan ke lingkaran) bersinggungan, sifat limas dan teorema Pythagoras.

5. Perhatikan adanya tetraeder dari pusat-pusat bola).

Petunjuk/Jawab Diskusi 2

1. Pada Gambar 3.5 $\overline{PP_1} \perp g$. Berarti untuk setiap titik P_n, $P_n \in g$, $n \neq 1$, ΔPP_1P_n adalah segitiga siku-siku dengan $\overline{PP_n}$ merupakan hipotenusa. Akibatnya untuk setiap n, $PP_n > PP_1$. Dengan kata lain $\overline{PP_1}$ merupakan ruas garis terpendek penghubung titik P dengan setiap titik pada garis g. Jadi jarak antara P dan garis g adalah PP_1.

   Pada Gambar 3.6 tersebut $PQ > PP_1$ dan $PR > PP_1$.

   Selanjutnya untuk setiap titik P_n, n ≠ 1, dan P_n pada P_1Q atau P_1R, $\overline{PP_n}$ adalah hipotenusa ΔPP_1P_n sehingga $PP_n > PP_1$. Jadi untuk setiap n ≠ 1, $PP_n \geq PP_1$, dan yang terpendek adalah PP_1.

2. Gambar 3.8: Titik A_1 dan B_1 berturut-turut adalah proyeksi titik A dan B di g terhadap bidang K. Menurut teorema pada proyeksi, karena $g \parallel$ K, maka $g \parallel g'$. Menurut butir 4

di atas, jarak antara g dan K dengan $g \parallel K$ adalah jarak antara g dan g'. Jadi jaraknya adalah dapat dinyatakan sebagai AA_1 atau BB_1.

3. Penjelasan bahwa AA_1, BB_1, dan CC_1 menggambarkan jarak (merupakan panjang ruas garis terpendek) adalah berdasar keterangan pada butir 4 dan 5.

Tugas akhir: Jawablah dengan penjelasan singkat jelas dan gambar yang benar.

1. $\frac{1}{3}$
2. Jarak dari A ke bidang TCD = $22\frac{26}{37}$ mm.