Setiawan

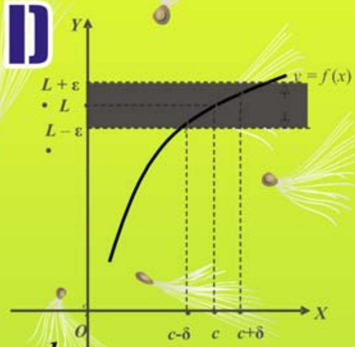
Tempat/Tanggal Lahir	: Pacitan/31 Januari 1951
Pendidikan	: Sarmud Ilmu Pasti IKIP Negeri Surakarta, 1974 Sarjana Pendidikan Matematika UNS 1979 Magister (S2) Pendidikan Matematika UNS 2003
Karya Tulis	: 1. Modul Matematika SMA dan MA, Penerbit Citra Aji Parama, 2005 2. Anggota Tim Penelitian SEAMEO-RECSAM : *Difficulties Faced by Form Five Students in Solving Word Problem in Agebra: Case Study in a Penang Scondary School,* tahun *1993* 3. Menulis makalah laporan hasil penelitian: "Pengaruh Pembelajaran Efektif terhadap Kemampuan *Problerm Solving* pada Pelajaran Matematika Ditinjau dari Tingkat Kecerdasan Siswa SMU Boyolali" (Karya Tulis Ilmiah ini termasuk 10 besar, dalam Lomba Karya Ilmiah Widyaiswara dan Tenaga Fungsional BPLSP, tahun 2006
Seminar/Workshop/ Konferensi	: 1. Pemrasaran dalam Seminar Matematika, yang diselenggarakan oleh Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika FKIP UMS, tanggal 26 Januari 2002 2. Pemrasaran dalam Seminar Pendidikan Matematika se Provinsi Jawa Tengah yang diselenggarakan Dinas Pendidikan Pemuda dan Olahraga Pemerintah Kota Surakarat, tanggal 16 April 2003 3. Pemrasaran dalam *Seminar Workshop on Enhanching Multiplier Effects of RECSAM Courses from Indonesia,* yang dielenggarakan oleh SEAMEO RECSAM tanggal 12 s.d. 15 Juni 1993
Pengalaman sebagai Narasumber/Fasilitator	: 1. Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SMA Jenjang Dasar, Jenjang Lanjut 2. Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SMP Jenjang Dasar, Jenjang Lanjut 3. Diklat Guru Pemandu Matematika SD Jenjang Dasar, Jenjang Menengah 4. Diklat Instruktur/Pengembang dan Guru Pemandu Matematika SD/SMP/SMA di daerah 5. Diklat Komputer Media Pembelajaran SMP, SMA 6. Bimbingan Teknis Penulisan Karya Ilmiah bagai Guru dan Kepala Sekolah Golongan IV/a di Dinas Pendidikan Kabupaten Kutai Barat

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA YOGYAKARTA

JL. Kaliurang Km.6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, Yogyakarta
KOTAK POS 31 YK-BS Yogyakarta 55281
Telephone : (0274) 885725, 881717, 885752
Faks : (0274) 885752
E-mail : p4tkmatematika@yahoo.com
Website : www.p4tkmatematika.com

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

PEMBELAJARAN KALKULUS SMA (BAGIAN I)



$$\lim_{x \to c} k = k$$

$$\lim_{x \to c} (ax + b) = ac + b$$

$$\lim_{x \to c} k\, f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$$

SMA

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

PAKET FASILITASI PEMBERDAYAAN KKG/MGMP MATEMATIKA

Pembelajaran Kalkulus SMA (Bagian I)

Penulis:

Drs. Setiawan, M.Pd.

Penilai:

Drs. Marsudi Raharjo, M.Sc.Ed.

Editor:

Hanan Windro Sasongko, S.Si.

Ilustrator:

Fadjar N. Hidayat, S.Si., M.Ed.

Dicetak oleh **Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika**
Tahun 2008

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
YOGYAKARTA

KATA PENGANTAR ∞

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika dalam melaksanakan tugas dan fungsinya mengacu pada tiga pilar kebijakan pokok Depdiknas, yaitu: 1) Pemerataan dan perluasan akses pendidikan; 2) Peningkatan mutu, relevansi, dan daya saing; 3) Penguatan tata kelola, akuntabilitas, dan citra publik menuju insan Indonesia cerdas dan kompetitif.

Dalam rangka mewujudkan pemerataan, perluasan akses dan peningkatan mutu pendidikan, salah satu strategi yang dilakukan PPPPTK Matematika adalah meningkatkan peran Kelompok Kerja Guru (KKG) dan Musyawarah Guru Mata Pelajaran (MGMP) serta pemberdayaan guru inti/ guru pemandu/guru pengembang yang ada pada setiap kecamatan, kabupaten dan kota.

Sebagai upaya peningkatan mutu dimaksud maka lembaga ini diharapkan mampu memfasilitasi kegiatan-kegiatan yang terkait dengan implementasi pengembangan pembelajaran matematika di lapangan. Guna membantu memfasilitasi forum ini, PPPPTK Matematika menyiapkan paket berisi kumpulan materi/bahan yang dapat digunakan sebagai referensi, pengayaan, dan panduan di KKG/MGMP khususnya pembelajaran matematika, dengan topik-topik/bahan atas masukan dan identifikasi permasalahan pembelajaran matematika di lapangan.

Berkat rahmat Tuhan Yang Maha Esa, atas bimbingan-Nya penyusunan Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika dapat diselesaikan dengan baik. Untuk itu tiada kata yang patut diucapkan kecuali puji dan syukur kehadirat-Nya.

Dengan segala kelebihan dan kekurangan yang ada, paket fasilitasi ini diharapkan bermanfaat dalam mendukung peningkatan mutu pendidik dan tenaga kependidikan melalui forum KKG/MGMP Matematika yang dapat berimplikasi positif terhadap peningkatan mutu pendidikan.

Sebagaimana pepatah mengatakan, tiada gading yang tak retak, demikian pula dengan paket fasilitasi ini walaupun telah melalui tahap identifikasi, penyusunan, penilaian, dan editing masih ada yang perlu disempurnakan. Oleh karena itu saran, kritik, dan masukan yang bersifat membangun demi peningkatan kebermaknaan paket ini, diterima dengan senang hati teriring ucapan terima kasih. Ucapan terima kasih dan penghargaan setinggi-tingginya kami sampaikan pula kepada semua pihak yang membantu mewujudkan paket fasilitasi ini, mudah-mudahan bermanfaat untuk pendidikan di masa depan.

Yogyakarta,
Kepala,

KASMAN SULYONO
NIP.130352806

DAFTAR ISI ∞

Kalkulus Dasar

1. Kompetensi

Memiliki kemampuan untuk mengembangkan keterampilan siswa dalam menggunakan konsep-konsep limit, menentukan turunan fungsi, serta menggunakan turunan fungsi untuk pemecahan masalah.

2. Sub Kompetensi

- Mampu mengembangkan keterampilan siswa dalam menentukan limit suatu fungsi dengan pendekatan intuitif;
- Mampu melacak hasil penentuan limit fungsi secara intuitif dikaitkan dengan pengertian limit fungsi secara formal.

3. Lingkup Materi

- Limit fungsi secara intuitif;
- Limit fungsi secara formal.

SKENARIO PEMBELAJARAN ∞

Pendahuluan dan Apersepsi

- Tujuan;
- Ruang Lingkup;
- Pengetahuan prasyarat nilai-nilai tak tentu.

Penyampaian Konsep Limit Fungsi

- Memahami limit fungsi secara intuitif;
- Berdiskusi melacak limit fungsi yang dihasilkan dari pendekatan intuitif dengan pendekatan formal;
- Merefleksi diri dengan Latihan 1 dan 2.

Melanjutkan limit fungsi trigonometri, eksponen dan logaritma

- Mendiskusikan pemecahan masalah tentang limit fungsi-fungsi aljabar, trigonometri, eksponen, dan logaritma;
- Refleksi diri dengan Latihan 3.

Refleksi diri, hasil pema-haman tentang limit fungsi, pendekatan intuitif, dan formal

- Setelah berhasil dengan refleksi Latihan 3;
- Refleksi diri dengan Latihan 4.

Penutup

- Kesimpulan
- Penugasan

PENDAHULUAN BAB I

A. Latar Belakang

Mengacu pada Standar Isi yang tertuang sebagai lampiran Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Republik Indonesia nomor 22 tertanggal 23 Mei 2006, di dalam latar belakang disebutkan bahwa tujuan pembelajaran matematika adalah agar peserta didik memiliki kemampuan sebagai berikut.

1. Memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antar konsep, dan mengaplikasikan konsep atau algoritma, secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah;
2. Menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika;
3. Memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model, dan menafsirkan solusi yang diperoleh;
4. Mengkomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah;
5. Memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah.

Dengan memperhatikan butir-butir tujuan pembelajaran matematika di atas, kedudukan Kalkulus di SMA dalam kerangka tujuan pembelajaran matematika di Indonesia sebagaimana yang tertuang dalam Standar Isi menjadi cukup sentral, sehingga materi ini harus mendapatkan perhatian yang cukup serius menyangkut masalah penguasaan materi, pemilihan metode pembelajaran yang tepat, dan penentuan strategi, serta teknik pembelajaran yang serasi.

Namun demikian, melihat kenyataan di lapangan baik lewat monitoring dan evaluasi bagi para alumnus penataran di Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika maupun diskusi-diskusi di MGMP, ternyata materi ini kadang-kadang masih menjadi kendala di lapangan. Oleh karena itu, pembahasan mengenai materi kalkulus ini perlu mendapatkan porsi yang memadai pada penataran-penataran guru matematika, terutama yang diselenggarakan oleh PPPPTK Matematika.

Di samping itu, kalkulus merupakan salah satu materi yang memiliki esensinya cukup tinggi dan cakupan aplikasi yang sangat luas, baik dalam matematika itu sendiri, maupun dalam cabang-cabang ilmu-ilmu yang lain, seperti dalam bidang sains, teknologi, ekonomi, dan sebagainya. Oleh karena itu, para siswa terlebih lagi guru matematika SMA harus mendapat bekal materi kalkulus ini sebaik-baiknya.

B. Tujuan Penulisan

Tulisan yang berupa paket ini disusun dengan maksud untuk memfasilitasi program pemberdayaan MGMP Matematika SMA dengan harapan:

1. pembaca dapat lebih memahami materi kalkulus untuk SMA dan beberapa pengembangannya, terutama masalah limit fungsi yang merupakan materi yang esensial, baik dalam kalkulus sendiri maupun matematika pada umumnya;
2. dapat digunakan sebagai salah satu referensi pembelajaran matematika SMA pada pertemuan-pertemuan MGMP Matematika SMA di daerah;
3. dapat memperluas wawasan keilmuan dalam matematika, khususnya masalah kalkulus SMA, sehingga guru dapat memilih strategi pembelajaran yang sesuai dengan kondisi di lapangan sehingga mudah diterima oleh siswa.

C. Sasaran

Tulisan ini disusun untuk dijadikan bahan penambah wawasan bagi:

1. guru-guru matematika SMA pada pertemuan-pertemuan MGMP-nya;
2. para rekan guru matematika SMA pada umumnya dan juga para pemerhati pengajaran matematika.

D. Ruang Lingkup Penulisan

Ruang lingkup paket fasilitasi ini meliputi:
1. pendekatan limit fungsi secara intuitif;
2. limit fungsi secara formal.

E. Pedoman Penggunaan Paket

Agar materi Kalkulus Dasar ini dapat dikuasai dengan baik, pedoman penggunaannya adalah sebagai berikut:
1. mencermati pendekatan fungsi secara intuitif, yaitu pada Bab II dari paket ini, kemudian mencermati pengertian fungsi secara formal. Selanjutnya, pembaca dapat merefleksikan diri dengan menentukan nilai limit fungsi secara intuitif yang kemudian penulis mantapkan dengan membandingkannya dengan pengertian limit fungsi secara formal;
2. mencermati berbagai teknik penentuan limit fungsi aljabar, trigonometri, dan transenden, serta kontinuitas fungsi. Setelah selesai mencermati kedua masalah tersebut, pembaca perlu melakukan refleksi dengan mengerjakan Latihan 1 dan Latihan 2, sehingga dapat mengevaluasi dirinya setelah mencocokkan jawabannya dengan Kunci Jawab yang penulis lampirkan di bagian belakang paket;
3. setelah hasil evaluasi diri dari mengerjakan Latihan 1 dan Latihan 2 di atas dinilai cukup, untuk mengukur pemahaman mengenai limit fungsi dan kontinuitas fungsi, pengguna paket dapat melakukan *self assessment* yang telah disiapkan di bagian belakang paket;
4. pembaca dianggap mencapai ketuntasan dalam mempelajari paket ini jika dapat mengerjakan dengan benar soal *self assessment* sekurang-kurangnya 75% dari jumlah soal.

Jika pembaca menjumpai masalah yang dirasa kurang jelas atau belum dipenuhinya kompetensi yang diharap, masalah tersebut dapat didiskusikan pada forum MGMP baik sekolah maupun tingkat kabupaten/kota, atau pembaca dapat mengirim surat ke PPPPTK Matematika dengan alamat Jl. Kaliurang Km. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, DIY, Kotak Pos 31 YK-BS Yogyakarta 55281, telp. (0274) 881717, 885725, Fax. (0274) 885725, atau pembaca dapat juga mengirim pertanyaan melalui *e-mail* di p4tkmatematika@yahoo.com maupun lewat website www.p4tkmatematika.com. Selain itu, pembaca dapat juga berkomunikasi langsung dengan penulis melalui email dengan alamat setiawan_p4tkm@yahoo.com.

PENGERTIAN LIMIT FUNGSI BAB II

A. Latar Belakang

Kalkulus adalah salah satu cabang dari matematika yang sangat penting dan banyak diterapkan secara luas pada cabang-cabang ilmu pengetahuan yang lain, misalnya pada cabang sains dan teknologi, pertanian, kedokteran, perekonomian, dan sebagainya. Pada paket ini akan dibahas salah satu masalah yang sangat mendasar dari kalkulus yaitu masalah limit fungsi, di samping kalkulus diferensial dan kalkulus integral, yang kedua hal yang disebutkan terakhir ini belum akan di bahas dalam paket ini. Secara garis besar, kalkulus dapat kita kelompokkan menjadi dua cabang besar, yakni kalkulus diferensial dan kalkulus integral. Jika diperhatikan, inti dari pelajaran kalkulus tak lain dan tak bukan adalah limit suatu fungsi. Bahkan, secara ekstrim kalkulus dapat didefinisikan sebagai pengkajian tentang limit. Oleh karena itu, pemahaman tentang konsep dan macam-macam fungsi di berbagai cabang ilmu pengetahuan serta sifat-sifat dan operasi limit suatu fungsi merupakan syarat mutlak untuk memahami kalkulus diferensial dan kalkulus integral lebih lanjut.

Adapun tujuan pembelajaran yang ingin dicapai berkaitan dengan bab yang membahas masalah pengertian limit fungsi ini adalah sebagai berikut.

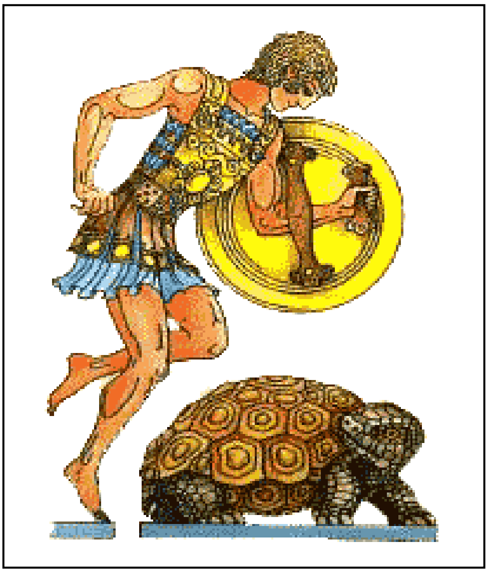
1. Guru matematika SMA dapat mengenal berbagai cara pendekatan menuju ke limit fungsi, baik fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial dan logaritma secara intuitif dengan harapan lebih bervariasinya pembelajaran yang dia kembangkan.
2. Agar pemahaman tentang limit fungsi menjadi lebih kokoh, guru matematika diperkenalkan tentang pendekatan limit fungsi secara formal atau *presis*, dan kemudian membuktikan sifat-sifat limit fungsi secara formal.
3. Guru matematika SMA mampu mendeteksi fungsi-fungsi pada bilangan real yang manakah yang kontinu, dan jika didapatkan adanya titik-titik diskontinu, maka guru mampu mengidentifikasi jenis-jenis ke-diskontinuitas-nya.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Untuk memberi motivasi agar siswa lebih tertarik untuk mempelajari kalkulus, perlu diceriterakan sejarah tentang Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), sesorang yang sangat besar jasanya dalam pengembangan kalkulus. Definisi limit yang kita kenal sekarang ini adalah salah satu hasil pemikiran Cauchy.

Augustin Louis Cauchy lahir di Paris dan mengenyam pendidikan di Ecole Polytechnique. Karena kesehatannya yang buruk, maka dinasihati untuk memusatkan pikirannya pada matematika saja. Salah satu penemuannya adalah kalkulus. Secara historis, kalkulus telah ditemukan pada abad ketujuh belas. Namun demikian, sampai pada masa Cauchy dirasa bahwa landasan kalkulus dirasa belum mantap. Berkat upaya yang dilakukan oleh Cauchy dan para sahabatnya seperti Gauss, Abel, dan Bolzano maka dapat ditentukan ketelitian baku. Kepada Cauchy, kita patut berterima kasih atas andilnya meletakkan landasan yang kokoh untuk pengembangan kalkulus yakni definisi konsep limit secara formal yang fundamental.

Untuk dapat memahami konsep limit dengan baik, perlu kiranya kita renungkan suatu paradox yang dikemukan oleh Zeno (495 – 435 SM), sebagai berikut.



Berdasar mitologi Yunani, terdapat cerita tentang pahlawan Perang Troya yang terkenal yaitu Achilles. Jago lari ini berlomba lari dengan seekor kura-kura yang telah menempati posisi setengah dari jarak yang mesti ditempuh oleh Achilles.

Katakan saja jarak yang akan ditempuh keduanya 2 km. Pada posisi start, Achilles berada 0 km dari titik start, sehingga kura-kura berada pada posisi 1 km di depannya. Kecepatan Achilles dua kali kecepatan kura-kura.

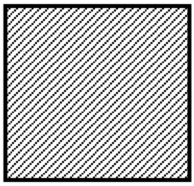
Begitu Achilles sampai 1 km, kura-kura telah sampai pada posisi 1,5 km. Pada saat Achilles mencapai 1,5 km, kura-kura telah sampai pada posisi 1,75 km. Begitu Achilles sampai di posisi 1,75 km, kura-kura telah sampai pada posisi 1,875 km. Pertanyaannya, kapan Achilles dapat menyusul kura-kura? Kalau kegiatan ini diteruskan secara terus-menerus maka Achilles bagaimanapun juga tidak akan pernah dapat menyusul kura-kura! Aneh bukan? Namun semua orang tahu bahwa dalam dunia nyata Achilles pasti mampu menyusul kura-kura. Paradox yang diketengahkan oleh Zeno ini dapat dijadikan landasan pemikiran untuk memahami konsep tentang limit fungsi yang menjadi landasan dari kalkulus, baik kalkulus diferensial maupun kalkulus integral.

B. Memahami Limit Fungsi Secara Intuitif

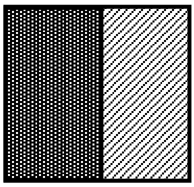
1. Menggunakan persegi yang sisinya *a*

Kegiatan awal yang dapat digunakan untuk mengawali dalam memahami konsep limit, adalah sebagai berikut.

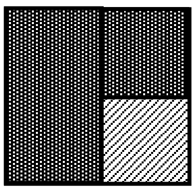
Pandanglah suatu luasan berbentuk persegi yang sisinya 1 satuan.



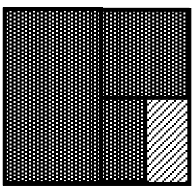
Suatu persegi sisinya 1 satuan, sehingga luasnya 1 satuan luas.



Luas bagian persegi yang diarsir tebal adalah $\frac{1}{2}$ satuan.



Luas bagian persegi yang diarsir tebal adalah $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ satuan.



Luas bagian persegi yang diarsir tebal adalah $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ satuan

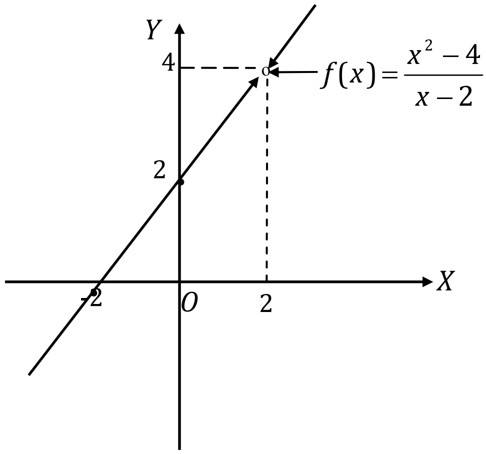
Begitu seterusnya. Jika kegiatan ini kita lakukan terus-menerus maka jumlah luas bagian persegi yang diarsir tebal akan mendekati 1 satuan luas.

Jadi, hasil penjumlahan dari $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$ adalah **mendekati** 1.

Pengertian limit secara intuitif berangkat dari pengertian **mendekati** di atas.

2. Memahami limit fungsi secara intuitif dengan grafik

Untuk lebih memudahkan siswa dalam mendalami konsep limit, konteks yang diambil adalah secara vertikal dengan menggunakan apa yang telah dipahami siswa pada kegiatan sebelumnya, yaitu grafik suatu fungsi. Di bawah ini disajikan salah satu alternatif penyajian limit dengan bantuan grafik fungsi.



Pandanglah fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ dengan domain $D_f = \{x \mid x \in R, x \neq 2\}$.

Pada $x = 2$, nilai fungsi $f(2) = \dfrac{0}{0}$ (tidak tentu) .

Tetapi jika kita cari nilai-nilai $f(x)$ untuk x mendekati 2, kita akan dapatkan nilai fungsi $f(x)$ di sekitar $x = 2$ seperti tampak pada tabel berikut.

x	1,90	1,99	1,999	1,9999	...	2	...	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	3,90	3,99	3,999	3,9999	...		...	4,001	4,01	4,1

Dari tabel di atas dapat disimpulkan bahwa untuk x mendekati 2 baik dari kiri maupun dari kanan, nilai fungsi tersebut makin mendekati 4, tetapi untuk $x = 2$ nilai $f(x)$ tak tentu. Dari sini dapat dikatakan bahwa limit $f(x)$ untuk x mendekati 2 sama dengan 4, dan ditulis dengan notasi $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

Pengertian limit yang seperti inilah yang disebut pengertian limit secara intuitif, yang secara umum dapat kita nyatakan sebagai berikut.

> Definisi limit secara intuitif, bahwa $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ artinya bahwa bilamana x dekat tetapi berlainan dari c, maka nilai $f(x)$ dekat ke L.

Suatu hal yang mesti dicermati di sini adalah notasi “=” (sama dengan) dalam konsep limit berbeda dengan pengertian ”sama dengan” dalam suatu persamaan. Dalam pembahasan tentang limit, pengertian ”sama dengan” lebih banyak diartikan sebagai nilai yang didekati.

C. Limit Fungsi Secara Formal

Siswa SMA diharapkan sudah mampu dan cukup untuk memahami konsep limit secara intuitif di atas. Namun bagi guru matematika, pemahaman tentang limit secara intuitif di atas belum cukup, karena secara matematis banyak orang yang berkeberatan dengan definisi limit secara intuitif ini. Mereka merasa bahwa pengertian dekat untuk dibawa ke pengertian limit fungsi dirasa kurang memuaskan.

Hal ini dapat dimaklumi, sebab penggunaan istilah "dekat" ini memang tidak akurat. Apa sebenarnya makna "dekat" itu? Seberapa dekat dapat dikatakan "dekat"?

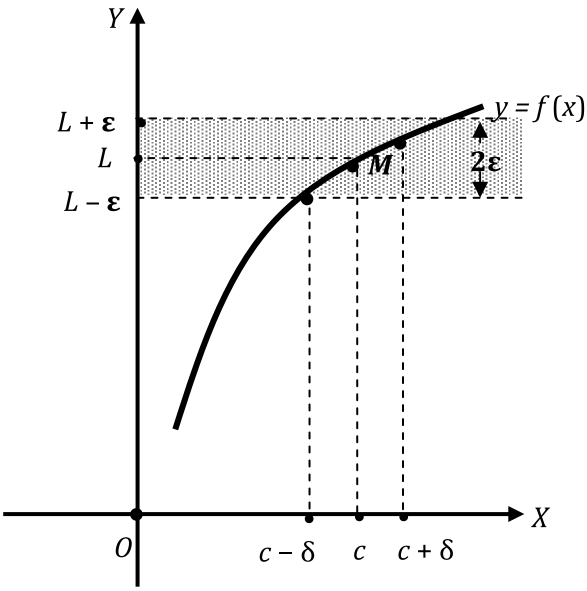
Untuk itu kita patut berterima kasih kepada Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) yang telah berhasil mengatasi persoalan di atas. Dia berhasil menyusun definisi tentang limit seperti di bawah ini yang dapat memuaskan para ahli dan kita gunakan sampai sekarang.

Pengertian limit secara intuitif di atas, jika dirumuskan secara definitif akan menjadi definisi limit secara formal sebagai berikut.

Definisi:

> Dikatakan $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan berapapun kecilnya, terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ untuk setiap $0 < |x - c| < \delta$.

Definisi limit fungsi secara formal di atas jika kita buat ilustrasi geometrisnya adalah sebagaimana grafik berikut.



Jika $\lim_{x \to c} f(x) = L$ maka secara geometris konsep limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati c, dapat diilustrasikan sebagai-mana grafik di samping. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, betapapun kecilnya, pada pita selebar 2ε itu dan pada kurva $y = f(x)$ akan dimuat paling tidak sebuah titik selain M, yang domainnya pada interval $\{x \mid c - \delta < x < c + \delta, x \neq c\}$.

Definisi limit secara formal inilah yang biasa digunakan untuk membuktikan sifat-sifat limit fungsi.

Dari contoh di atas, $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ dapat kita buktikan kebenarannya sebagai berikut.

<u>Bukti:</u>

Untuk membuktikan kebenaran hasil di atas secara formal, yaitu dengan diberikannya $\varepsilon > 0$ (betapapun kecilnya), sehingga tugas kita selanjutnya yaitu menentukan suatu nilai $\delta > 0$ yang berpadanan sehingga dipenuhi $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon$ untuk x yang memenuhi $|x - 2| < \delta$.

Dari $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{x^2 - 4 - 4(x - 2)}{x - 2} \right| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{x^2 - 4x + 4}{(x - 2)} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{(x - 2)^2}{x - 2} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x - 2| < \varepsilon$$

Dari hasil di atas, dapat disimpulkan untuk setiap $\varepsilon > 0$ (betapapun kecilnya), kita akan menemukan nilai δ dengan $|x - 2| < \delta$ yang pada kasus ini dapat dipilih δ = ε. Dari kenyataan di atas, terbukti bahwa $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

D. Limit Kiri dan Limit Kanan

Terkadang harga dari sebuah fungsi $f(x)$ menuju ke limit-limitnya berbeda nilainya bila x mendekati sebuah bilangan c dari arah yang berbeda pula. Apabila hal ini terjadi, kita menyebut limit dari $f(x)$ bila x mendekati c dari arah kanan sebagai **limit-kanan** dari F ke c ditulis dengan notasi $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$, dan sebaliknya jika x mendekati c dari arah kiri disebut sebagai **limit kiri** dari F ke c ditulis dengan notasi $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L$. Dan apabila limit kiri dari $f(x)$ untuk x mendekati c dari kiri sama dengan limit kanan dari $f(x)$ untuk x mendekati c dari kanan, maka dikatakan **limit *f*(*x*)** ada untuk x mendekati c.

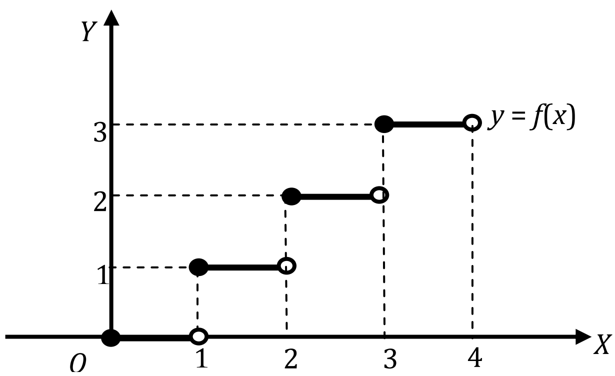
Jadi, dapat kita simpulkan bahwa

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L.$$

Contoh 1

Tentukan $\lim\limits_{x \to 2} [[x]]$

Penyelesaian:
Kita ingat kembali bahwa fungsi bilangan bulat terbesar
$[[x]] = b \in \{b \mid b = \text{bilangan bulat } b \leq x < b + 1\}$
Maka grafik dari $f = [[x]]$ adalah grafik fungsi tangga sebagai berikut



Untuk semua bilangan yang kurang dari 2 namun dekat ke 2, [[x]] = 1. Ini berarti $\lim\limits_{x\to 2^-}[[x]]=1$. Tetapi untuk semua bilangan yang lebih dari 2 tetapi dekat ke 2, terlihat bahwa [[x]] = 2, yang berarti $\lim\limits_{x\to 2^+}[[x]]=2$. Dan karena limit kiri dan limit kanan untuk x mendekati 2 tidak sama, maka $\lim\limits_{x\to 2}[[x]]$ tidak ada.

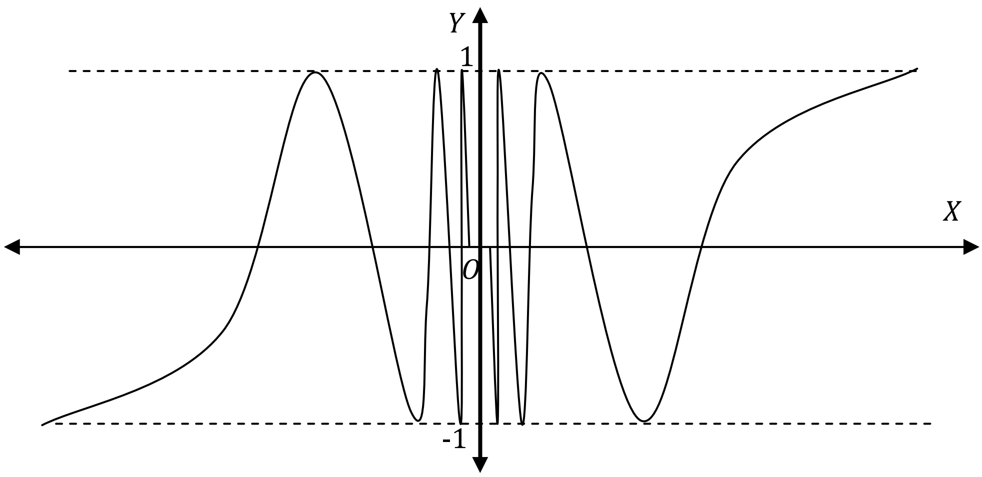
Contoh 2

Tentukan $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$

<u>Penyelesaian</u>:

Perhatikan tabel dan grafik fungsi $f(x)$ = $\sin(\frac{1}{x})$ di bawah ini!

x	2/π	2/(2π)	2/(3π)	2/(4π)	2/(5π)	2/(6π)	2/(7π)	2/(8π)	...	0
***f*(*x*)**	1	0	-1	0	1	0	-1	0	...	?



Dalam setiap selang sekitar x = 0, fungsinya memiliki semua harga antara −1 dan +1. Karena itu tidak ada satu bilangan tunggal L yang mana harga $f(x)$ tetap mendekatinya apabila x mendekati 0. Dengan kata lain, fungsi ini tidak memiliki limit, baik limit kanan maupun limit kiri, apabila x mendekati 0. Jadi kesimpulannya, $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ tak ada.

E. Teorema Pokok Limit

Beberapa teorema pokok limit yang sering digunakan adalah sebagai berikut.

a. $\lim\limits_{x\to c} k = k$, jika k suatu konstanta;

b. $\lim\limits_{x\to c}(ax+b) = ac+b$;

c. $\lim\limits_{x\to c} k\, f(x) = k \lim\limits_{x\to c} f(x)$;

d. $\lim\limits_{x\to c} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x)$;

e. $\lim\limits_{x\to c} f(x).g(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x) . \lim\limits_{x\to c} g(x)$;

f. Hukum substitusi:
Jika $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ dan $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(L)$ maka $\lim\limits_{x\to c} f(g(x)) = f(L)$;

g. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{L}$ jika $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ dan $L \neq 0$;

h. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$, jika $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$;

i. Teorema Apit:
Misalkan $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pada setiap interval yang memuat c dan dipenuhi $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = L$, maka $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$.

Bukti dari teorema-teorema pokok limit di atas dipaparkan dalam tulisan di bawah ini. Namun, hendaknya dipahami bahwa bukti-bukti limit secara formal deduktif ini adalah materi pengayaan untuk guru agar dapat memahami konsep limit secara mantap. Sekali lagi bukan untuk konsumsi siswa!

1. Buktikan $\lim\limits_{x\to c} k = k$

<u>Bukti</u>:
Untuk setiap bilangan positif $\varepsilon > 0$ berapapun kecilnya akan didapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap x pada $0 < |x - c| < \delta$ dipenuhi $|k - k| < \varepsilon$.
Dari $|k - k| = 0$, berapapun nilai $\delta > 0$ yang diambil yang menyebabkan $0 < |x - c| < \delta$ akan berakibat $|k - k| < \varepsilon$.
Dengan kata lain, $\lim\limits_{x\to c} k = k$.

2. Buktikan $\lim\limits_{x \to c} (ax + b) = ac + b.$

Bukti:

Untuk membuktikan teorema ini, berarti jika diberikan suatu $\varepsilon > 0$ betapapun kecilnya, akan ditemukan $\delta > 0$ sehingga

$0 < |x - c| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |(ax + b) - (ac + b)| < \varepsilon.$

Ruas kiri pada pertidaksamaan $|(ax + b) - (ac + b)| < \varepsilon$ di atas, jika dijabarkan akan menjadi

$|(ax + b) - (ac + b)| = |ax - ac| = |a(x - c)| \leq |a|\,|x - c| < |a|\,\delta.$

Jika kita ambil $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$, maka $|a|\,\delta = |a| \dfrac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon.$

Terbukti bahwa $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ akan memenuhi persyaratan

$|(ax + b) - (ac + b)| < \varepsilon$ di atas.

Dengan demikian, jika diberikan $\varepsilon > 0$ betapapun kecilnya dan dipilih $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ maka $0 < |x - c| < \delta$ menunjukkan:

$|(ax + b) - (ac - b)| = |ax - ac| = |a(x - c)| < |a||x - c| < |a|\,\delta = |a| \dfrac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon.$

Dengan kata lain, $\lim\limits_{x \to c} (ax + b) = ac + b.$

Dengan demikian, terbuktilah teorema tersebut.

3. Buktikan $\lim\limits_{x \to c} k f(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$

Bukti:

Kita misalkan $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L.$

Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$. Kita harus mendapatkan $\delta > 0$ sehingga $0 < |x - c| < \delta$ yang berakibat $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{|k|}$ (mengingat $\dfrac{\varepsilon}{|k|} > 0$ juga).

Dengan telah ditetapkan δ, kita dapat menyatakan bahwa untuk setiap x yang memenuhi $0 < |x - c| < \delta$ berlaku

$|k.f(x) - k.L| = |k||f(x) - L| < |k| \dfrac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon.$

Ini menunjukkan bahwa:

$\lim\limits_{x \to c} k f(x) = kL = k \lim\limits_{x \to c} f(x).$

4. Buktikan $\lim\limits_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

<u>Bukti</u>:

Andaikan $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$.

Jika ε sebarang bilangan positif yang diberikan, maka $\frac{\varepsilon}{2}$ positif.

Karena $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, maka terdapat suatu bilangan positif δ_1, sehingga $0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Karena $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$, maka terdapat suatu bilangan positif δ_2 sehingga $0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Kita pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, yaitu δ sebagai nilai yang terkecil di antara δ_1 dan δ_2, sehingga $0 < |x - c| < \delta$. Dengan demikian,

$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$
$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Jadi, $\lim\limits_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$.

Dengan jalan yang sama akan dapat dibuktikan bahwa
$\lim\limits_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$.

5. Buktikan $\lim\limits_{x \to c} f(x).g(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) . \lim\limits_{x \to c} g(x)$

<u>Bukti</u>:

Misal $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$.

Jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ maka akan diperoleh

$$\frac{\varepsilon}{2(|L|+1)} > 0 \text{ dan } \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)} > 0.$$

Yang akan kita tunjukkan dengan pembuktian ini adalah jika diberikan $\varepsilon > 0$, kita harus mendapatkan bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk $0 < |x - c| < \delta$ berakibat $|f(x).g(x) - L . M| < \varepsilon$ ... (1)

Ruas kiri dari pertidaksamaan (1) jika dijabarkan menjadi

$$\begin{aligned} |f(x).g(x) - L.M| &= |f(x).g(x) - L.g(x) + L.g(x) - L.M| \\ &\leq |f(x).g(x) - L.g(x)| + |L.g(x) - L.M| \\ &= |g(x)|.|f(x) - L| + |L||g(x) - M| \quad \text{... (2).} \end{aligned}$$

Karena $\lim_{x \to c} f(x) = L$, maka terdapat $\delta_1 > 0$ sehingga jika

$0 < |x - c| < \delta_2$ berakibat $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2(|M|+1)}$ ... (3)

Di lain pihak, karena $\lim_{x \to c} g(x) = M$, maka terdapat $\delta_2 > 0$ sehingga jika

$0 < |x - c| < \delta_2$ berakibat $|g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2(|L|+1)}$ ... (4).

Selanjutnya terdapat bilangan ketiga $\delta_3 > 0$ sehingga jika $0 < |x - c| < \delta_3$ berakibat $|g(x) - M| < 1$ yang berarti

$|g(x)| < |M| + 1$ ... (5).

Sekarang kita pilih δ bilangan terkecil dari ketiga bilangan positif δ_1, δ_2, dan δ_3.

Jika kita substitusikan (3), (4), dan (5) ke dalam (2), akan diperoleh: jika $|x - c| < \delta$ berakibat

$$|f(x) \cdot g(x) - LM| \le |g(x)| \cdot |f(x) - L| + |L| \cdot |g(x) - M|$$

$$< (|M + 1| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)} + |L| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Melihat kenyataan ini, terbukti bahwa

$\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = L.M = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$.

6. Buktikan jika $\lim_{x \to c} g(x) = L$ dan $\lim_{x \to L} f(x) = f(L)$ maka $\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(L)$

Bukti:

Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$. Kita harus mendapatkan suatu bilangan $\delta > 0$ sehingga apabila $0 < |x - c| < \delta$, berakibat $|f(g(x) - f(L)| < \varepsilon$.

Dari $\lim_{y \to L} f(y) = L$, terdapat $\delta_1 > 0$ sehingga, untuk $0 < |y - L| < \delta_1$ akan berakibat $|f(y) - f(L)| < \varepsilon$ .... (1).

Dan dari $\lim_{x \to c} g(x) = \mathrm{L}$, kita dapat memilih $\delta > 0$ sehingga jika $0 < |x - c| < \delta$, berakibat $|g(x) - L| < \delta_1$ atau $|y - L| < \delta_1$ di mana $y = g(x)$.

Dari (1) dapat kita lihat bahwa jika $0 < |x - c| < \delta$ berakibat

$|f(g(x)) - f(L)| = |f(y) - f(L)| < \varepsilon$.

Kenyataan terakhir ini, menyajikan bukti tersebut.

7. Buktikan jika $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ dan $L \neq 0$ maka $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{L}$

<u>Bukti</u>:

Misalkan diberikan ε > 0. Kita akan menemukan δ > 0 sehingga, apabila dipenuhi $0 < |x - c| < \delta$, berakibat $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{L}\right| < \varepsilon$.

Jika $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{L}\right|$ dijabarkan akan diperoleh $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{L}\right| = \left|\dfrac{L - g(x)}{L\,.\,g(x)}\right|$.

Dari $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ maka $\lim\limits_{x\to c} L\,.\,g(x) = L.\lim\limits_{x\to c} g(x) = L^2$.

Dengan definisi limit, jika diambil $\varepsilon = \dfrac{L^2}{2}$ akan diperoleh δ_1 sehingga, apabila $0 < |x - c| < \delta_1$ maka $|L.g(x) - L^2| < \varepsilon$ atau $L^2 - \varepsilon < L.g(x) < L^2 + \varepsilon$.

Dan jika diambil $\varepsilon = \dfrac{L^2}{2}$ maka $\dfrac{L^2}{2} < L\,.\,g(x) < \dfrac{3L^2}{2}$.

Dengan demikian, $L.g(x)$ positif sehingga kita peroleh $\dfrac{2}{L^2} > \dfrac{1}{L.g(x)}$ untuk $0 < |x - c| < \delta 1$.

Selanjutnya $\left|\dfrac{L - g(x)}{L.g(x)}\right| = \dfrac{|L - g(x)|}{L.g(x)} < \dfrac{2}{L^2}|L - g(x)|$ untuk $0 < |x - c| < \delta_1$.

Selanjutnya kita lihat $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$. Terakhir diperoleh δ_2, sehingga untuk setiap x yang memenuhi $0 < |x - c| < \delta_2$ berakibat $|g(x) - L| < \dfrac{\varepsilon L^2}{2}$. Jika diambil δ yang terkecil dari δ_1 dan δ_2 maka untuk setiap x yang memenuhi $0 < |x - c| < \delta$ berakibat

$$\left|\frac{L - g(x)}{L.g(x)}\right| < \frac{2}{L^2}|L - g(x)| < \frac{2}{L^2}.\frac{\varepsilon L^2}{2} = \varepsilon.$$

Ini menunjukkan bukti bahwa jika $L \neq 0$, maka $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{L}$.

8. Buktikan $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$, jika $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$

<u>Bukti</u>:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} f(x)\,.\,\frac{1}{g(x)}$$

Berdasarkan bukti 5 dan 7, maka

$$\lim_{x\to c} f(x)\,.\,\frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to c} f(x)\,.\,\frac{1}{g(x)}$$

$$= \lim_{x\to c} f(x)\,.\,\lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)}\ ,\ \text{jika } \lim_{x\to c} g(x) \neq 0$$

$$= \lim_{x\to c} f(x)\,.\,\frac{1}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}\ ,\ \text{jika } \lim_{x\to c} g(x) \neq 0$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}.$$

9. Buktikan teorema apit, bahwa jika $f(x) \le g(x) \le h(x)$ pada interval yang memuat c dan dipenuhi
$\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = L$ maka $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$.

<u>Bukti</u>:
Jika diberikan $\varepsilon > 0$, akan kita dapatkan $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ sehingga jika $0 < |x - c| < \delta_1$ berakibat $|f(x) - L| < \varepsilon$, dan jika $0 < |x - c| < \delta_2$ berakibat $|h(x) - L| < \varepsilon$. Dan jika kita pilih $\delta > 0$ yang terkecil dari dua bilangan δ_1 dan δ_2 maka jika dipenuhi $0 < |x - c| < \delta$ berakibat $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya terletak pada interval terbuka $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, sehingga
$L - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L + \varepsilon$.
Jadi, jika $0 < |x - c| < \delta$ berakibat $|g(x) - L| < \varepsilon$.
Ini menunjukkan bahwa teorema apit telah terbukti.

F. Menentukan Limit Fungsi-fungsi Aljabar

Dengan memanfaatkan teorema-teorema pokok tentang limit yang telah dipaparkan di depan, di bawah ini diberikan beberapa contoh teknik penentuan limit fungsi aljabar.

Contoh 1

Hitung $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 3x + 8)$

<u>Jawab</u>:
Dengan menggunakan teorema substitusi

$$\lim_{x\to 2}(x^2 - 3x + 8) = 2^2 - 3.2 + 8 = 6\,.$$

Contoh 2

Tentukan $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 + x - 12}{x + 4}$

Jawab:

Faktorkan dulu sebab $\dfrac{x^2 + x - 12}{x + 4}$ jika disubstitusikan langsung akan diperoleh $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^2 + x - 12}{x + 4} = \lim_{x \to -4} \frac{(x+4)(x-3)}{(x+4)}$$

Karena $x \neq -4$, maka pecahan dapat disederhanakan menjadi

$$\lim_{x \to -4} \frac{(x+4)(x-3)}{(x+4)} = \lim_{x \to -4} (x\text{-}3)$$

$$= -4 - 3$$

$$= -7$$

Contoh 3

Tentukan nilai $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

Penyelesaian:

Cara (i) adalah dengan memfaktorkan.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{\sqrt{x} - 2}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x} - 2}$$

Karena $x \neq 2$, maka

$$\lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \to 4} (\sqrt{x} + 2)$$

$$= \sqrt{4} + 2$$

$$= 4$$

Cara (ii) dengan memisalkan $\sqrt{x} = y \to x = y^2$

Untuk $x \to 4$ maka $y \to 2$, sehingga soal di atas menjadi

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{y\to 2}\frac{y^2-4}{y-2}$$

$$=\lim_{y\to 2}\frac{(y+2)(y-2)}{(y-2)}$$

$$=2+2=4$$

Contoh 4

Tentukan nilai dari $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{x-2}$

Penyelesaian:

Cara untuk menghilangkan bentuk akar di atas adalah dengan mengalikannya dengan bentuk sekawan dari pembilang pecahan atau penyebutnya, yaitu sebagai berikut.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2x})}{(x-2)}.\frac{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2+x)-(2x)}{(x-2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(x-2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2x}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}$$

$$=-\frac{1}{4}.$$

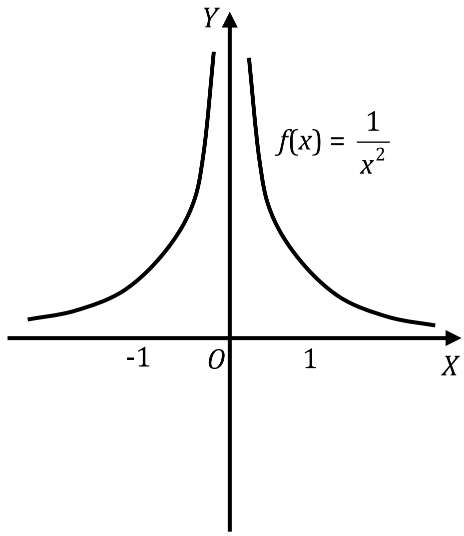
G. Pengertian Limit Menuju Takhingga

Mengulang kembali paradox yang dikemukakan oleh Zeno di depan, mengapa logikanya Achilles tidak mampu menyusul kura-kura? Para filosof waktu itupun tidak mampu menjelaskan paradox Zeno tersebut. Semua langkah-langkah secara logis sudah dilaksanakan, namun mengapa kesimpulannya salah? Hal ini membuat mereka terperangah diakibatkan oleh paradox tersebut. Namun, sebenarnya yang menjadi biang keladi dan akar permasalannya adalah ”ke-takhingga-an” sehingga masalah ketakhinggaan harus dipahami betul oleh siswa.

Salah satu strategi untuk untuk memfasilitasi siswa mengkonstruksi pemahamannya tentang ketakhinggaan tersebut diantaranya adalah dengan ilustrasi geometri sebagaimana disajikan di bawah ini.

Perhatikan fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ yang domainnya semua bilangan real yang tidak nol. Jika kita cari nilai fungsi di $x = 0$, akan diperoleh $f(0) = \frac{1}{0}$ yang bernilai tak terdefinisi. Namun demikian, nilai fungsi untuk titik-titik yang berada dekat dengan 0 dapat dicari sebagaimana contoh di bawah ini.

x	$\frac{1}{x^2}$
1	1
0,1	100
0,01	10.000
0,001	10^6
0,0001	10^8
$\downarrow$	$\downarrow$
0	besar sekali
$\uparrow$	$\uparrow$
-0,0001	10^8
-0,001	10^6
-0,01	10.000
-0,1	100
-1	1



Apabila x suatu bilangan baik positif maupun negatif yang mendekati 0, maka nilai $\frac{1}{x^2}$ menjadi sangat besar. Semakin dekat x dengan nol, maka nilai $\frac{1}{x^2}$ menjadi semakin besar. Konsep ketakhinggaan terkonstruksi karenanya, sehingga dikatakan bahwa $f(x)$ mendekati takhingga sebagai suatu limit, yang untuk itu biasa kita tulis dengan $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

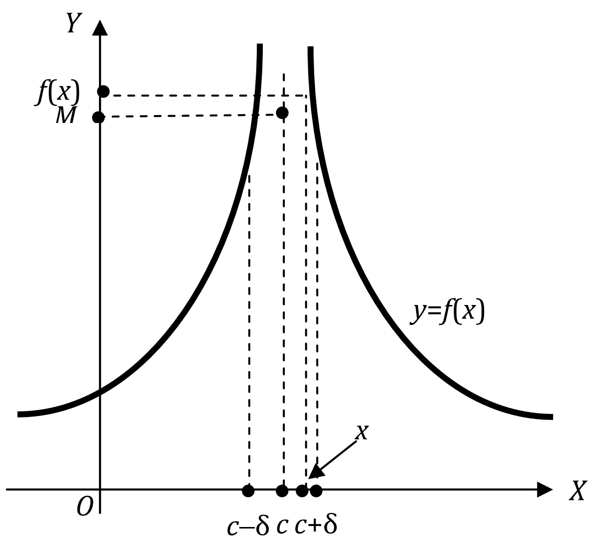
Catatan:

Simbol **∞,** yang dibaca "takhingga", digunakan untuk melambangkan bilangan yang sangat besar yang tak dapat ditentukan besarnya, tetapi simbol ini tidak menunjuk suatu bilangan real yang manapun. Oleh karena itu, kita tidak dapat mempergunakan **∞** dalam ilmu berhitung dengan cara yang lazim.

Pengertian ketakhinggaan sebagaimana dipaparkan secara intuitif di atas, jika kita sajikan secara formal adalah dengan mendefinisikannya sebagai berikut.

Definisi:

Fungsi $f(x)$ mendekati takhingga untuk $x \to c$ apabila untuk setiap bilangan positif M betapapun besarnya adalah mungkin untuk menemukan bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap x selain c, jika dipenuhi $|x - c| < \delta$, akan berakibat $|f(x)| > M$ dan ditulis $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$.



Ilustrasi geometris dari limit menuju takhingga di atas dapat ditunjukkan sebagaimana grafik di samping

Contoh 1

Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty$

Bukti:

Untuk membuktikan persamaan tersebut, kita harus dapat membuktikan bahwa untuk setiap $M > 0$ yang diberikan betapapun besarnya adalah mungkin menemukan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap x yang memenuhi $|x - 1| < \delta$ akan diperoleh $\frac{1}{(1-x)^2} > M$. Karena $\frac{1}{(1-x)^2} > M$, berarti $(1 - x)^2 < \frac{1}{M}$.

Dengan kata lain, $|1 - x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Pertama-tama kita perhatikan $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2}$.

Karena x mendekati 1, maka $|x - 1| < \delta$. Jika diambil $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, berarti untuk setiap x yang memenuhi $|x - 1| < \delta$ akan dipenuhi

$$|x - 1| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 < \frac{1}{M}$$

$$\Leftrightarrow (1 - x)^2 < \frac{1}{M}$$

yang berakibat $\frac{1}{(1-x)^2} > \text{M}$.

Dari pertidaksamaan terakhir ini, terbukti bahwa $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

Contoh 2

Tentukan $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x-1}$

Jawab:

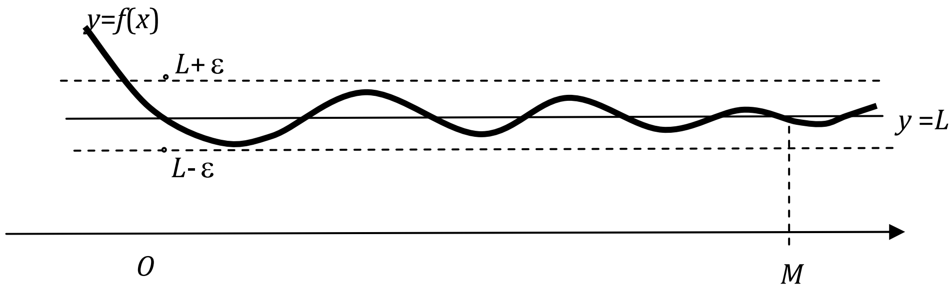
Secara intuitif jika x dekat dengan 1 maka $x - 1$ akan mendekati 0. Namun demikian, terdapat perbedaan antara x dekat ke 1 dari sebelah kiri dengan x dekat ke 1 dari sebelah kanan.

Untuk x dekat ke 1 dari sebelah kiri, diperoleh $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$.

Sementara itu, untuk x dekat ke 1 dari sebelah kanan, diperoleh $\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$. Dari sini dapat disimpulkan bahwa $\lim_{x \to 1} \frac{x}{x-1}$ tidak ada disebabkan oleh limit kiri dan limit kanan tidak sama.

H. Limit di Tak Hingga

Andaikan dicari limit fungsi $f(x)$ untuk x yang sangat besar, atau $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, ilustrasi geometrinya dapat disajikan sebagai berikut:



Jika diinginkan definisi secara formal, maka rumusannya adalah sebagai berikut.

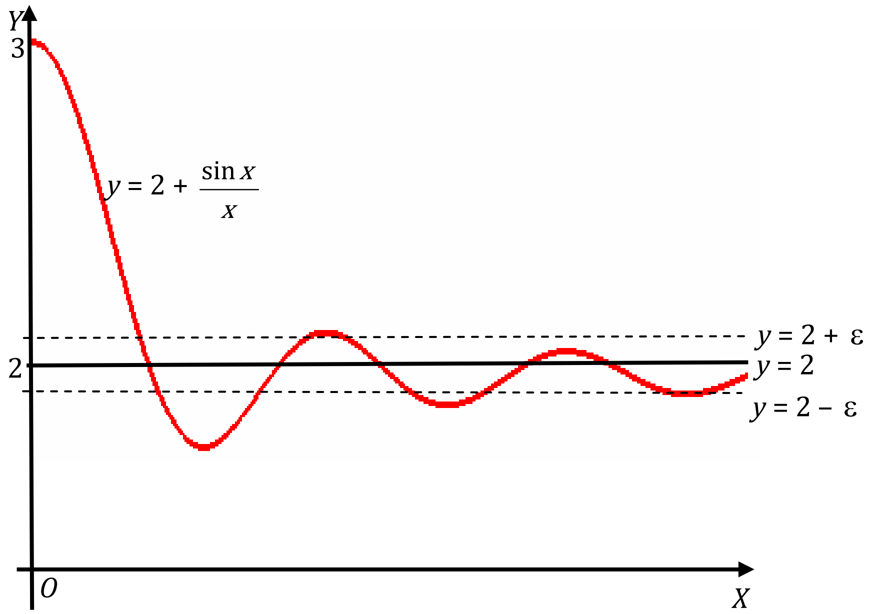
Definisi:

> Jika $f(x)$ terdefinisi untuk x yang bernilai besar, kita katakan bahwa $f(x)$ mendekati L sebagai limit untuk x mendekati tak hingga dan ditulis $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$. Berarti apabila diberikan $\varepsilon > 0$ betapapun kecilnya, maka akan ditemukan suatu bilangan M sehingga dipenuhi $|f(x) - L| < \varepsilon$ jika $x > M$.

Agar pengertian limit fungsi di tak hingga tersebut dapat dipahami dengan baik, maka dapat ditunjukkan sebagaimana contoh di bawah ini.

Contoh

Pandanglah fungsi $f(x) = 2 + \frac{\sin x}{x}$



Grafik di atas beroskilasi terhadap garis $y = 2$.
Amplitudo dari oskilasinya semakin kecil menuju nol.
Untuk $x \to \infty$, kurvanya terletak di antara $y = 2 + \varepsilon$ dan $y = 2 - \varepsilon$ jika $x > M$.

Atau dengan kata lain, jika x besar, $\frac{\sin x}{x} \to 0$ dan $f(x) \to L = 2$, atau jika kita sajikan dengan notasi limit maka notasinya adalah

$$\lim_{x\to\infty}(2+\frac{\sin x}{x}) = 2.$$

Di bawah ini adalah contoh menentukan limit di tak hingga.

Contoh

Tentukan $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3x})$

Jawab:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x})}{(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x})}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-(x^2+3x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} \text{(ingat : } \frac{a}{\infty}=0, \text{dengan } a \text{ bilangan Real)}$$
$$= -\frac{1}{2}.$$

Untuk *self assessment*, pembaca dipersilakan mencoba menyelesaikan soal-soal di bawah ini kemudian mencocokkan hasilnya dengan kunci soal di bagian lampiran. Pembaca hendaknya berusaha dulu sebaik-baiknya untuk mencari jawab sendiri, baru kemudian melihat kunci jawab di lampiran.

Latihan 1

Tentukan nilai limitnya!

1.) $\lim_{x\to -2} (x^2-7x+4)$

2.) $\lim_{x\to 3} \left(\frac{2}{x}+x\right)$

3.) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{9+x^2}}{x-3}$

4.) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4}$

5.) $\lim_{x\to -1} \frac{x^5-1}{x^2+x+1}$

6.) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$

7.) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3}$

8.) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-3x+10}{x+2}$

14.) $\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ (misal: $\sqrt[3]{x}=y^2$)

15.) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

16.) $\lim_{x\to 0} \frac{x-2\sqrt{x}}{x}$

17.) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{5}-\sqrt{5-x}}$

18.) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})$

19.) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

20.) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$

21.) $\lim_{x\to\infty} \frac{(1+2+3+...+n)}{n^2}$

9.) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

10.) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-25}{\sqrt{x}-5}$

11.) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{x-2}$

12.) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{2x-2}-\sqrt{3x-5}}{x-3}$

13.) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-1}}{2x-3-\sqrt{x}}$

22.) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(1+3+5+7+...+(2n-1))}{n^2+2}$

23.) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+...+\dfrac{1}{2^n}\right)$

24.) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{7}{n^2}+...+\dfrac{3n-2}{n^2}\right)$

25.) Hitung $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}$

Petunjuk: Kuadratkan kedua ruas !

26.) Tentukan limit U_n dari barisan

0,3 ; 0,33 ; 0,333 ; 0,3333

27.) Tentukan limit U_n dari barisan

0,2 ; 0,23 ; 0,233 ; 02333 ; ...

28.) Tentukan limit suku U_n dari barisan

$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}},\ ...$

29.) Tentukan limit suku U_n dari barisan

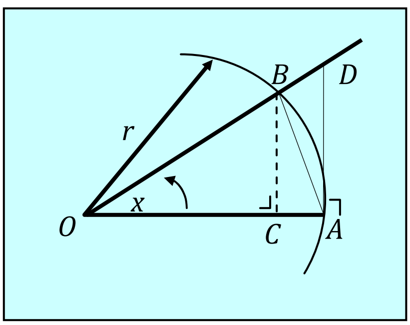
$\sqrt{6},\ \sqrt{6\sqrt{6}},\ \sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6}}},\ \sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6}}}},\ ...$

30.) Tentukan limit U_n dari barisan berikut

$\dfrac{2}{1}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{6}{5}, ..., \dfrac{2n}{2n-1}, ...$

I. Limit Fungsi Trigonometri

Kecuali dengan menggunakan sifat-sifat limit yang telah kita bahas di depan, untuk menentukan limit fungsi-fungsi trigonometri, kadang-kadang kita masih membutuhkan sifat-sifat lain yang lebih spesifik. Sifat fungsi trigonometri yang dimaksudkan adalah sebagai berikut.



Misalkan x dalam radian dan $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, maka $BC = r\ \sin x$ dan $AD = r \tan x$.

Terlebih dahulu kita akan mencari luas sektor ⊙ AOB.

$$\frac{\text{Luas sektor } AOB}{\text{Luas seluruh lingkaran}} = \frac{x}{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{Luas sektor } AOB}{\pi r^2} = \frac{x}{2\pi}$$

sehingga luas sektor ⊙ AOB = $\frac{x}{2\pi}.\pi r^2 = \frac{1}{2} r^2 x$.

Dari bangun di atas diperoleh:

Luas $\Delta\, AOB$ < luas juring AOB < luas $\Delta\, AOD$

$\Leftrightarrow$ ½ . OA . BC < ½ r^2x < ½ . OA . AD

$\Leftrightarrow$ ½ . r . r sin x < ½ r^2x < ½ . r . r tan x

$\Leftrightarrow$ ½ r^2 sin x < ½ r^2x < ½ r^2 tan x

$\Leftrightarrow$ sin x < x < tan x ………………….. (i)

Dari (i) diperoleh:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos\ x}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} 1 \le \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \le \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin\ x} \le \frac{1}{1} = 1 .$$

Jadi, $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Persamaan di atas dapat dikembangkan menjadi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1 ,$$

dan $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x.\cos x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} . \frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} . \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

= 1.1

= 1

Demikian juga dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$.

Kesimpulan:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	3. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin \text{x}} = 1$	4. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

Contoh:

Hitunglah!

a.) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}$

b.) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{5x}$

c.) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$

<u>Penyelesaian</u>:

a.) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}.1$$
$$=\frac{1}{2}$$

b.) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right).\frac{3}{5}$$
$$=1.\frac{3}{5}$$
$$=\frac{3}{5}$$

c.) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 3x}{3x}\right)\left(\frac{5x}{\sin 5x}\right).\frac{3}{5}$$
$$= 1.1.\frac{3}{5}$$
$$= \frac{3}{5}$$

Dengan memanfaatkan rumus-rumus di atas, dan sifat-sifat dasar limit, maka akan mudah bagi Anda untuk menyelesaikan soal-soal di bawah ini.

Latihan 2

1.) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x}$

2.) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$

3.) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2}$

4.) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$

5.) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x$

6.) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$

7.) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x}$

8.) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\cos x - \sin x}{\cos x - 1 + \sin x}$

9.) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\tan \pi x}{x+2}$

10.) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos \mathrm{x}}{1 - \tan \mathrm{x}}$

J. Limit Fungsi Eksponensial

Dalam menentukan limit fungsi-fungsi eksponen yang dampaknya juga dapat diterapkan untuk fungsi-fungsi logaritma, kita kenal *bilangan e*, yang banyak digunakan untuk menyelesaikan limit fungsi-fungsi eksponen.

1.) Bilangan *e*

Untuk menurunkan bilangan *e*, perlu kita cari bentuk $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ terlebih dahulu.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{1}.\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}.\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-1)}{3!}.\frac{1}{n^3}+...+\frac{1}{n^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)+\ ...\ +\frac{1}{n^n}\right)$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ ....$$

Jika diambil sampai sembilan tempat desimal, diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828 \quad ... .$$

Nilai limit inilah yang disebut **bilangan *e*** atau **bilangan Euler** (diambil nama si penemu yaitu Leonard Euler, seorang matematikawan Austria yang hidup pada tahun 1707 – 1783, yang menjadi mahaguru Universitas St. Pittersburg yang terkenal itu).

Dengan demikian,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\ .$$

Limit ini dapat dikembangkan sehingga untuk setiap $x \in \Re$ dipenuhi

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Jika disubstitusikan $u = \dfrac{1}{x}$ maka diperoleh rumus

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

Contoh 1

Tentukan $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+3}$

<u>Jawab</u>:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x . \left(1+\frac{2}{x}\right)^3$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}.2}\left(1+\frac{2}{x}\right)^3$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^2 . \left(1+\frac{2}{x}\right)^3$$

$$= e^2 . (1+0)^3$$

$$= e^2.$$

2.) Logaritma Naturalis

Logaritma yang menggunakan e sebagai bilangan pokok disebut **logaritma naturalis** atau **logaritma Napier**, dan ditulis dengan notasi "**ln**", sehingga $\ln x = {}^{e}\log x$.

Karena $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, maka nilai logaritmanya yaitu

$$^{a}\log\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = {}^{a}\log e$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} {}^{a}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = {}^{a}\log e$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{{}^{a}\log(1+x)}{x} = \frac{\ln e}{\ln a}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{{}^{a}\log(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \qquad \text{... (i)}$$

ingat : 1) $^{a}\log b^{c} = c.{}^{a}\log b$

2) $^{a}\log e = \frac{{}^{e}\log e}{{}^{e}\log a} = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$ dengan a, b, $c \in \Re$

Misalkan $^{a}\log(1 + x) = y$

$\Leftrightarrow 1 + x = a^{y}$

$\Leftrightarrow x = a^{y} - 1$

Untuk $x \to 0$, maka $a^{y} \to 1$ yang berarti $y \to 0$, sehingga persamaan (i) menjadi $\lim_{y\to 0}\frac{y}{a^{y}-1} = \frac{1}{\ln a}$

Akibatnya, $\lim_{y\to 0}\frac{a^{y}-1}{y} = \ln a$

Atau, secara umum dapat ditulis: $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x} = \ln a}$

Jika disubstitusikan a dengan e, maka

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = \ln e$ atau $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1}$

Contoh 2

Tentukan $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

Jawab:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1-e^{bx}+1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{x}-\frac{e^{bx}-1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}.a-\frac{e^{bx}-1}{bx}.b\right)$$

$= 1.a - 1.b$

$= a - b$

Latihan 3

Tentukan nilai limit dari:

1.) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x}$

2.) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{1+x})^{x}$

3.) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}$

4.) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x}$

5.) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}$

6.) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x}$

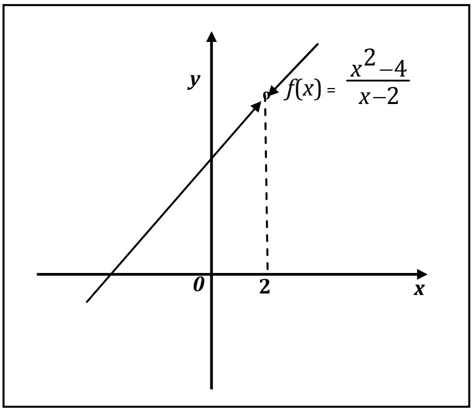
7.) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

8.) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^{x}-4^{x}}{x}$

9.) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x})}{x}$

10.) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$

K. Kontinuitas



Perhatikan grafik fungsi bilangan real $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ di samping.

Untuk x = 2 diperoleh $f(2)$ = $\frac{0}{0}$ (tak tentu) sehingga grafiknya terputus di x = 2. Dalam hal ini dikatakan $f(x)$ diskontinu di x = 2.

Sementara itu, pada interval $\{x|x < 2, x \in \Re\}$ dan interval $\{x|x > 2, x \in \Re\}$, grafiknya berkesinambungan. Dalam hal ini dikatakan $f(x)$ kontinu di $x \neq 2$.

Secara formal suatu fungsi dikatakan kontinu di $x = c$, jika dipenuhi ketiga persyaratan di bawah ini, yaitu:

a. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ada ;

b. $f(c)$ ada;

c. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Jika pada suatu fungsi $f(x)$ diskontinu di $x = c$, dan dapat dibuat sehingga $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$, maka dikatakan diskontinuitas di $x = c$ ini dapat dihapuskan.

Contoh

Tentukan diskontuinitas fungsi pada bilangan real $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-4}$.

Jawab:

Fungsi rasional di atas akan diskontinu jika penyebutnya nol atau

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ atau } x = 2$$

Akibatnya, $f(x)$ diskontinu di x = -2 atau x = 2.

Selanjutnya, untuk x = 2 diperoleh

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)} = \frac{12}{4} = 3.$$

Dengan demikian, ke-diskontinuitas $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-4}$ di $x = 2$ dapat dihapuskan dengan menetapkan definisi $f(2) = 3$.

Selanjutnya, untuk $x = -2$ diperoleh

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}$$

$$= \infty .$$

Demikian halnya dengan $f(-2) = \frac{(-2)^3-8}{(-2)^2-4}=\frac{-16}{0}$ (tidak terdefinisi).

Dengan demikian, ke-diskontinuitas fungsi $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-4}$ di $x = -2$ tidak dapat dihapuskan.

Latihan 4

Selidiki kontinuitas fungsi-fungsi berikut

1. $f(x) = x^2 + x$ di $x = -1$
2. $f(x) = 4x^2 - 2x + 12$ di $x = 2$
3. $f(x) = \frac{x}{x+1}$ di $x = -1$
4. $f(x) = \frac{x-2}{x^2}$ di $x = 2$
5. $f(x) = \frac{6t-9}{t-3}$ di $t = 3$
6. $f(x) = \begin{cases} -3x+4 & \text{untuk } x \le 2 \\ -2 & \text{untuk } x > 2 \end{cases}$ di $x = 2$
7. Di titik mana saja $f(x) = \frac{5x+4}{x^2-3x-10}$ diskontinu dan selidikilah macam diskontinuitasnya!
8. Di titik mana saja $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$ diskontinu dan selidikilah macam diskontinuitasnya!

9. Dengan grafik, di titik mana saja (jika ada) fungsi ini diskontinu?

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{untuk } x < 0 \\ x^2 & \text{untuk } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{untuk } x > 1 \end{cases}$$

10. Tentukan a dan b agar fungsi $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & \text{untuk } x < -2 \\ a & \text{untuk } x = -2 \\ bx + 1 & \text{untuk } x > -2 \end{cases}$

kontinu di $x = -2$

L. Kesimpulan

Paket Kalkulus Dasar ini dipersiapkan untuk Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika. Dasar dari pengembangan Kalkulus Diferensial dan Kalkulus Integral adalah pengertian Limit Fungsi. Oleh karena itu, paket ini berintikan pembahasan tentang Limit Fungsi sehingga dibahas secara agak mendetail, baik limit fungsi secara intuitif maupun limit fungsi secara formal.

Dan sebagai pengayaan dengan harapan memberi nilai lebih bagi pengguna paket ini, diceritakan pula sejarah singkat sekitar peristiwa maupun orang-orang yang mempunyai andil dalam pengembangan kalkulus. Hal ini dimaksudkan untuk memberi bekal tambahan para guru untuk memotivasi murid-muridnya.

M. Rangkuman

1. Definisi limit secara intuitif:

   $\lim\limits_{n \to c} f(x) = L$, artinya bahwa bilamana x dekat tetapi berlainan dari c, maka $f(x)$ dekat ke L.

2. Definisi limit secara formal

   Dikatakan $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, artinya untuk setiap ε > 0 yang diberikan berapapun kecilnya, terdapat δ > 0 yang berpadanan sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ untuk setiap $0 < |x - c| < \delta$.

3. Sifat-sifat fungsi:

   $\lim\limits_{x \to c} k = k$, jika k suatu konstanta;

   a. $\lim\limits_{x \to c} (ax + b) = ac + b$;
   b. $\lim\limits_{x \to c} k\, f(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$;
   c. $\lim\limits_{x \to c} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \pm \lim\limits_{x \to c} g(x)$;

d. $\lim\limits_{x\to c} f(x).g(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x).\lim\limits_{x\to c} g(x)$;

e. Hukum substitusi:
Jika $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ dan $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(L)$ maka $\lim\limits_{x\to c} f(g(x)) = f(L)$;

f. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{L}$ jika $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ dan $L \neq 0$;

g. $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$, jika $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$;

h. Teorema Apit:
Misalkan $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pada setiap interval yang memuat c dan dipenuhi $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = L$, maka $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$.

4. Limit fungsi trigonometri:

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x} = 1$

5. Limit fungsi eksponen:

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

b. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

6. Suatu fungsi f pada bilangan real dikatakan kontinu di $x = a$, jika dipenuhi:

a. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ada;

b. $f(a)$ ada;

c. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

N. Tes Akhir Pembelajaran

Pada akhir kegiatan ini, untuk mengukur apakah yang telah kita pelajari sudah sampai pada kriteria minimal yang harus kita capai, maka pengguna paket diharapkan menyelesaikan soal-soal di bawah ini secara keseluruhan. Setelah itu, cocokkan jawab Anda dengan kunci jawab atau alternatif jawab di lampiran belakang.

Jika Anda telah dapat mengerjakan dengan benar soal di bawah ini sekurang-kurangnya 75% dari jumlah soal, berarti Anda sudah mencapai Kriteria Ketuntasan Minimal dalam pencapaian Kompetensi Hasil Belajar.

TES AKHIR
Waktu: 90 menit

Kerjakan soal-soal di bawah ini!

1. Bagaimana Anda memfasilitasi siswa dalam membuktikan $\lim\limits_{x \to 2}(2x^2 + 3x - 9) = 2(2)^2 + 3(2) - 9$ dengan teorema substitusi limit?
2. Mengacu pada definisi limit secara formal dan berdasarkan bukti soal no. 1, tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to 2}(2x - 3) = 1$
3. Tentukan $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$
4. Tentukan $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos\ x}{1 - \sin x}$
5. Carilah titik-titik di mana fungsi $f(x)$ = $\dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$ diskontinu, kemudian identifikasikan jenis diskontinuitasnya!

O. Saran bagi Pengguna Paket ini

a. Setelah mempelajari dan mendiskusikan materi masing-masing bab, pembaca dipersilakan mencoba latihan-latihan yang disediakan untuk evaluasi diri;

b. Jika evaluasi diri pada langkah a sudah memenuhi kompetensi yang diharapkan, pembaca dapat melanjutkan mempelajari dan mendalami bab berikutnya. Kriteria Ketuntasan Minimalnya adalah jika pembaca sudah mengerjakan latihan dengan benar minimal 75% dari total soal;

c. Jika pembaca menjumpai masalah yang dirasa kurang jelas atau belum dipenuhinya kompetensi yang diharap, maka masalah tersebut dapat didiskusikan pada forum MGMP baik sekolah maupun tingkat kabupaten/kota, atau pembaca dapat berkirim surat ke PPPPTK Matematika atau menghubungi penulis.

DAFTAR PUSTAKA ∞

Ayres, Frank Jr. 1972. *Theory and Problem of Differential and Integral Calculus*. Mc Graw Hill: New York.

Fatah Asyarie, dkk. 1992. *Kalkulus untuk SMA*. Pakar Raya: Bandung.

Fraleigh, John B. 1985. *Calculus with Analitic Geometry*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.

Herry Sukarman. 1998. *Kalkulus*: Makalah Penataran Guru Matematika MGMP SMU. PPPG Matematika: Yogyakarta.

Johannes, H dan Budiono Sri Handoko. 1988. *Pengantar Matematika untuk Ekonomi*. LP3ES: Jakarta.

Leithold, Louis. 1988. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik* (Edisi Terjemahan oleh S.M Nababan. Jakarta: Penerbit Erlangga).

Piskunov, N. 1974. *Differensial and Integral Calculus*. Mir Publishers: Moscow.

Purcell, Edwin Jaud Dale Varberg. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Erlangga: Jakarta.

Sri Kurnianingsih, dkk. 1995. *Matematika SMU*. Yudhistira: Jakarta.

Sumadi, dkk. 1997. *Matematika SMU*. Tiga Serangkai: Surakarta.

Thomas, George B. Jr. 1977. *Calculus and Analytic Geometry*. Massachusetts: Addison-Werley Publishers Company.

Thomas, George B.Jr. and Ross L. Finney. 1984. *Calculus and Analytic Geometry*. Massachusetts: Addison-Wesley Publisher Company.

LAMPIRAN ∞
Kunci Jawab Soal-soal Latihan

Latihan 1

1.) 22 2.) $3\frac{2}{3}$ 3.) 5 4.) $\pm\infty$ (tidak ada limit, kiri kanan taksama)

5.) -2 6.) 5 7.) 27 8.) $\pm\infty$ (tak ada limit) 9.) $-1\frac{1}{2}$

10.) 0 11.) $-\frac{1}{4}$ 12.) $-\frac{1}{4}$ 13.) 0 14.) 3 15.) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

16.) $-\infty$ 17.) $4\sqrt{5}$ 18.) 0 19.) ∞ 20.) 2 21.) $\frac{1}{2}$

22.) 1 23.) 1 24.) $\frac{3}{2}$ 25.) 2 26.) $\frac{2}{9}$ 27.) $\frac{7}{30}$

28.) 2 29.) 6 30.) 1

Latihan 2

1.) 1 2.) 4 3.) $\frac{1}{9}$ 4.) $\sqrt{2}$ 5.) 1 6.) 1

7.) ∞ 8.) -1 9.) π 10.) ∞

Latihan 3

1.) e 2.) e^7 3.) e^{-3} 4.) e^4 5.) e^2

6.) $\ln(\frac{5}{4})$ 7.) $\frac{1}{3}\ln 2$ 8.) -1 9.) $\ln(\frac{a^2}{b^3})$ 10.) $b - a$

Latihan 4

1.) kontinu 2.) kontinu 3.) diskontinu 4.) kontinu

5.) diskontinu (dapat dihapuskan) 6.) kontinu

7.) diskontinu di $x = 5$ dan di $x = -2$ dan keduanya tak terhapuskan.

8.) diskontinu di $x = 1$ yang dapat dihapuskan dan di $x = -1$ yang tak tehapuskan

9.) $f(x)$ kontinu di semua titik 10.) $a = 9$ dan $b = -4$

Kunci jawab Tes Akhir

1. Untuk menunjukkan bahwa $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+3x-9)=2(2)^2+3(2)-9$, maka kita menggunakan teorema $\lim\limits_{x\to c}(ax+b)=ac+b$ sehingga

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(2x^2+3x-9) &= \lim_{x\to 2}(2x-3)(x+3)\\ &= \lim_{x\to 2}(2x-3).\lim_{x\to 2}(x+3)\\ &= (2(2)-3)((2)+3)\\ &= 2(2)^2+3(2)-9.\end{aligned}$$

2. Untuk membuktikan bahwa $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)=1$, adalah dengan diberikan $\varepsilon>0$ betapapun kecilnya, kita menemukan $\delta>0$ berpadanan sedemikan hingga dipenuhi $|(2x-3)-1|<\varepsilon$ untuk setiap x pada interval $|x-2|<\delta$.

   Karena $|(2x-3)-1|<\varepsilon$, maka $|2(x-2)|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$

   Dengan dipilih $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, maka terbuktilah persoalannya.

3. Tentukan $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

   Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x}{2}}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)}{\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{e.(1+0)}{\sqrt{1}}\\ &= e.\end{aligned}$$

4. Tentukan $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

Jawab:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \tfrac{1}{2}x - \sin^2 \tfrac{1}{2}x}{(\sin^2 \tfrac{1}{2}x + \cos^2 \tfrac{1}{2}x) - 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos\tfrac{1}{2}x + \sin\tfrac{1}{2}x)(\cos\tfrac{1}{2}x - \sin\tfrac{1}{2}x)}{(\cos\tfrac{1}{2}x - \sin\tfrac{1}{2}x)^2}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\tfrac{1}{2}x + \sin\tfrac{1}{2}x}{\cos\tfrac{1}{2}x - \sin\tfrac{1}{2}x}$$

$= \pm\infty$ (jadi tidak ada limitnya, mengapa?)

5. Titik-titik dimana fungsi $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ diskontinu adalah di titik-titik $x^3 - 1 = 0$, atau di $x = 1$.

Kita dapat menunjukkan bahwa $f(1) = \dfrac{0}{0}$ (tak tentu) dan

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2}{3}.$$

Oleh karena itu, diskontinuitas $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ di $x = 1$ ini dapat dihapuskan dengan jalan kita definisikan bahwa $f(1) = \dfrac{2}{3}$.