PAKET FASILITASI PEMBERDAYAAN KKG/MGMP MATEMATIKA

Pembelajaran Fungsi, Persamaan dan Pertidaksamaan Aljabar

Penulis:
Drs. Setiawan, M.Pd.
Penilai:
Drs. Sukardjono, M.Pd.
Editor:
Choirul Listyani, M.Si.
Ilustrator
Cahyo Sasongko, S.Sn.

Dicetak oleh **Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika**
Tahun 2008

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN **TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA**
YOGYAKARTA

KATA PENGANTAR

Pusat Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika dalam melaksanakan tugas dan fungsinya mengacu pada tiga pilar kebijakan pokok Depdiknas, yaitu: 1) Pemerataan dan perluasan akses pendidikan; 2) Peningkatan mutu, relevansi dan daya saing; 3) Penguatan tata kelola, akuntabilitas, dan citra publik menuju insan Indonesia cerdas dan kompetitif.

Dalam rangka mewujudkan pemerataan, perluasan akses dan peningkatan mutu pendidikan, salah satu strategi yang dilakukan PPPPTK Matematika adalah meningkatkan peran Kelompok Kerja Guru (KKG) dan Musyawarah Guru Mata Pelajaran (MGMP) serta pemberdayaan guru inti/ guru pemandu/guru pengembang yang ada pada setiap kecamatan, kabupaten dan kota.

Sebagai upaya peningkatan mutu dimaksud maka lembaga ini diharapkan mampu memfasilitasi kegiatan-kegiatan yang terkait dengan implementasi pengembangan pembelajaran matematika di lapangan. Guna membantu memfasilitasi forum ini, PPPPTK Matematika menyiapkan paket berisi kumpulan materi/bahan yang dapat digunakan sebagai referensi, pengayaan, dan panduan di KKG/MGMP khususnya pembelajaran matematika, dengan topik-topik/bahan atas masukan dan identifikasi permasalahan pembelajaran matematika di lapangan.

Berkat rahmat Tuhan Yang Maha Esa, atas bimbingan-Nya penyusunan Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika dapat diselesaikan dengan baik. Untuk itu tiada kata yang patut diucapkan kecuali puji dan syukur kehadirat-Nya.

Dengan segala kelebihan dan kekurangan yang ada, paket fasilitasi ini diharapkan bermanfaat dalam mendukung peningkatan mutu pendidik dan tenaga kependidikan melalui forum KKG/MGMP Matematika yang dapat berimplikasi positif terhadap peningkatan mutu pendidikan.

Sebagaimana pepatah mengatakan, tiada gading yang tak retak, demikian pula dengan paket fasilitasi ini walaupun telah melalui tahap identifikasi, penyusunan, penilaian, dan editing masih ada yang perlu disempurnakan. Oleh karena itu saran, kritik, dan masukan yang bersifat membangun demi peningkatan kebermaknaan paket ini, diterima dengan senang hati teriring ucapan terima kasih. Ucapan terima kasih dan penghargaan setinggi-tingginya kami sampaikan pula kepada semua pihak yang membantu mewujudkan paket fasilitasi ini, mudah-mudahan bermanfaat untuk pendidikan di masa depan.

Yogyakarta,
Kepala,

KASMAN SULYONO
NIP.130352806

DAFTAR ISI

PENDAHULUAN BAB I

A. Latar Belakang

Seiring diundangkannya Standar Nasional Pendidikan yang berupa Peraturan Pemerintah RI nomor 19 tahun 2005, yang ditindak lanjuti dengan Permendiknas nomor 22 tahun 2005 yang berupa Standar Isi, yang diikuti dengan standar-standar yang lain, diharapkan segera diikuti peningkatan kualitas pembelajaran matematika, karena acuan standarnya sudah ada.

Kenyataan di lapangan berbicara lain, hasil belajar siswa tentang matematika belum ada bukti bahwa peningkatan hasilnya signifikan. Termasuk di dalamnya masalah aljabar, seperti halnya bahan ajar yang lain, cap matematika sebagai mata pelajaran yang sukar dan kurang menarik masih sukar untuk ditanggalkannya.

Untuk menanggulangi masalah ini diupayakan banyak langkah, antara lain melalui peningkatan kemampuan, keterampilan dan kompetensi guru melalui penataran, diskusi maupun dengan penulisan Paket Fasilitasi Peningkatan MGMP Matematika SMA ini, yang dimaksudkan untuk membantu guru supaya lewat forum MGMP-nya membahas masalah Relasi, Fungsi, Persamaan dan Pertidaksamaan Aljabar pada bagian yang merupakan kesulitan pada umumnya.

B. Tujuan Penulisan Modul

Modul ini disusun dengan tujuan:

1. untuk meningkatkan kemampuan, kompetensi dan wawasan guru dalam melaksanakan tugas;
2. menjadi wacana dan bahan diskusi di forum MGMP Matematika SMA, terutama yang menyangkut materi Relasi, Fungsi, Persamaan dan Pertidaksamaan yang kadang-kadang menjadi kerikil tajam di lapangan.

C. Sasaran

Sasaran dari pengguna Modul ini adalah:

1. peserta kegiatan pemberdayaan MGMP Matematika SMA;
2. para guru mata pelajaran matematika SMA pada umumnya.

D. Ruang Lingkup

Ruang lingkup materi yang dibahas pada paket ini adalah:

1. persamaan dan pertidaksamaan aljabar;
2. relasi dan fungsi aljabar.

Disamping dua hal tersebut diatas dibahas sebagai lampiran kaidah pokok aljabar dan relasi ekuivalensi untuk memberikan landasan kuat dalam pembelajaran aljabar SMA

E. Pedoman Penggunaan Modul

Langkah pertama, hendaknya pengguna modul ini mencermati uraian tentang materi relasi, fungsi, persamaan dan pertidaksamaan aljabar ini sebaik-baiknya.

Jika sudah dipandang cukup maka pembaca perlu segera merefleksikan diri dengan menjawab persoalan-persoalan yang disertakan dalam modul ini.

Untuk mengevaluasi diri (*self assessment*), apakah yang dipelajari sudah mencapai kompetensi yang diharapkan, maka pembaca dapat mencocokkan jawabnya dengan alternatif kunci jawab yang disertakan pada bagian akhir dari modul ini.

Jika ada masalah yang dirasa kurang jelas atau belum dipenuhinya kompetensi yang diharap, maka masalah tersebut dapat didiskusikan pada forum MGMP baik sekolah maupun tingkat kabupaten/kota, atau dapat dikirim ke PPPPTK Matematika dengan alamat Jl. Kaliurang km. 6, Sambisari, Depok, Sleman, Yogyakarta, Kotak Pos 31 YK-BS, Yogyakarta 552281. Telp. (0271) 881717, 885725, Fax: (0271) 885752

website: www.p4tkmatematika.com atau lewat e-mail:
p4tkmatematika@yahoo.com atau langsung kontak dengan penulis
e-mail: setiawan_p4tkm@yahoo.com

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN

BAB II

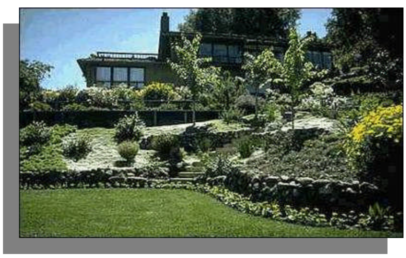
A. Persamaan

Mengacu pada Standar Isi yang telah ditetapkan oleh Mendiknas dalam Peraturan Nomor 20 Tahun 2005 ini, menyangkut matematika, disebutkan bahwa persamaan kuadrat yang pada kurikulum sebelumnya dibicarakan di SMP, maka pada KTSP ini seluruhnya materi tentang persamaan kuadrat dibahas di SMA.

1. Persamaan Kuadrat

a. Untuk mengawali pembelajaran persamaan kuadrat, di bawah ini disajikan contoh masalah-masalah yang dapat dijadikan konteks, yang model matematikanya merupakan persamaan kuadrat:

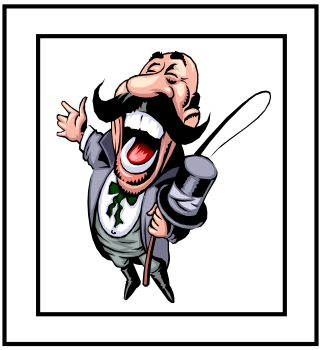
1) Pak Adi bermaksud menjadikan tanah pekarangan yang berbentuk empat persegi panjang berukuran 60 m × 80 m sebuah taman.



Dia merencanakan sebuah jalan setapak dengan lebar sama, yang mengelilingi taman tersebut. Setelah taman tersebut jadi, ternyata luas tamannya tinggal seperenam luas tanah pekarangan semula. Berapa lebar jalan setapak yang dibuat Pak Edi?

2) Suatu kotak tanpa tutup untuk penyerahan kenang-kenangan kepada teman yang berulang tahun dibuat dari kertas karton berbentuk empat persegi panjang, ukuran 10 cm × 20 cm dengan jalan menggunting suatu persegi di keempat

sudutnya, luas alasnya adalah 96 cm². Hitunglah panjang sisi dari keempat persegi yang digunting pada sudut karton tersebut.



3) Suatu bingkai gambar berukuran 14 cm × 20 cm, menampilkan gambar yang luasnya 160 cm². Berapakah lebar bingkai gambar tersebut?

Setelah pembaca mencoba menentukan model matematikanya, maka akan dihasilkan ekspresi matematika sebagai berikut.

1) Dengan memisalkan lebar jalan setapak *x* m, diperoleh:
   $(80 - 2x)(60 - 2x) = \frac{1}{6} \times 60 \times 80 \bullet x^2 \quad 70x + 1000 = 0$
2) Dengan memisalkan lebar sisi yang digunting sebesar *x* cm, diperoleh ekspresi aljabar sebagai berikut:
   $(10 - 2)(20 - 2) = 96 \bullet \quad x^2 - 15x + 26 = 0$
3) Dengan memisalkan lebar bingkai *x* cm, diperoleh ekspresi aljabar sebagai berikut:
   $(14 - 2x)(20 - 2x) = 96 \Leftrightarrow x^2 - 17x + 46 = 0$

Model matematika dari persoalan-persoalan di atas berupa kalimat terbuka yang derajat tertinggi peubahnya adalah dua, dan untuk selanjutnya disebut **persamaan kuadrat.**

Catatan:

Sebagaimana dijelaskan secara rinci pada lampiran, yang dimaksud dengan:

1) **peubah (*variabel*)** adalah lambang yang dapat mewakili (menunjuk) anggota sebarang dari semesta pembicaraannya.
2) **kalimat terbuka** adalah kalimat yang di dalamnya memuat peubah, dan akan berubah menjadi pernyataan jika peubahnya disubstitusi dengan konstanta dari semesta pembicaraanya.

b. Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Sesuai dengan model matematika yang didesain dari contoh masalah diatas, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Bentuk umum dari persamaan kuadrat adalah $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, dengan $a \neq 0$ dan $a,b,c \in \mathbf{R}$. Setiap konstanta pengganti x yang menjadikan pernyataannya bernilai benar disebut *penyelesaian persamaan kuadrat* atau *akar-akar persamaan kuadrat* tersebut.

Dari persoalan nomor 1 di atas, diperoleh model matematika bahwa lebar jalan setapak Pak Adi memenuhi persamaan $x^2 - 70x + 1000 = 0$.

Aturan pokok yang dijadikan dasar penyelesaian kuadrat adalah sifat dalam bilangan real yang kita lampirkan dalam modul ini, adalah bahwa:

> Aturan pokok untuk menyelesaikan persamaan aljabar:
>
> untuk setiap a, $b \in \mathbf{R}$ jika dipenuhi $a.b = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$

Dari persoalan nomor 1 di atas,

$x^2 - 70x + 1000 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 20)(x - 50) = 0$

$\Leftrightarrow x - 20 = 0$ atau $x - 50 = 0$

$\Leftrightarrow x = 20$ atau $x = 50$

Jawaban ini jika direfleksikan kembali ke persoalannya, maka lebar jalan setapak yang mungkin adalah 20 m (pembaca dapat mencari jawaban mengapa tidak 50 m).

Cara yang pembaca lakukan di atas dikenal sebagai menyelesaikan persamaan kuadrat dengan memfaktorkan. Secara umum, penyelesaian persamaan kuadrat dapat dilakukan dengan cara:

a. memfaktorkan, cara ini akan sangat efektif bila diskriminannya merupakan kuadrat sempurna;
b. melengkapkan kuadrat sempurna, dan
c. menggunakan rumus, yang biasa kita sebut sebagai rumus abc.

Adapun contoh-contoh penyelesaiannya sebagai berikut.

1) **Menyelesaikan persamaan kuadrat dengan memfaktorkan**

Pada prinsipnya pemfaktoran merupakan kebalikan dari penjabaran, langkah selanjutnya adalah digunakannya Teorema II dari Hukum Dasar Aljabar yang penulis sertakan dalam lampiran ini.

Contoh 1.

Selesaikan persamaan kuadrat $x^2 - 5x + 6 = 0$

Jawab :

$x^2 - 5x + 6 = 0$

dikalikan : $(-2)\times(-3) = 6$ ($= c$)

$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) = 0$

dijumlah : $(-2)+(-3) = -5$ ($= b$)

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ atau $x - 3 = 0$ (Teorema II)

$\Leftrightarrow x = 2$ atau $x = 3$

Jadi himpunan penyelesaiannya { 2, 3}

<u>Contoh 2</u>

Selesaikan persamaan kuadrat $3x^2 + 2x - 5 = 0$

Jawab :

$3x^2 + 2x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 3x - 5 = 0$ (koefisien dari x yaitu 2 dipecah menjadi dua bilangan yang jumlahnya b (yaitu 2), sedangkan hasil kalinya adalah $a.c$ ($3\times(-5) = -15$). Bilangan yang memenuhi adalah 5 dan -3)

$\Leftrightarrow x(3x + 5) - (3x + 5) = 0$ (distributif)

$\Leftrightarrow (x - 1)(3x + 5) = 0$ (distributif)

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ atau $3x + 5 = 0$ (Teorema II)

$\Leftrightarrow x = 1$ atau $x = -\frac{5}{3}$

Jadi himpunan penyelesaiannya $\{ 1, -\frac{5}{3} \}$

2) Penyelesaian Persamaan Kuadrat dengan Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Penyelesaian kuadrat sempurna dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna pada dasarnya menggunakan sifat-sifat:

a) Jika $x^2 = p$ untuk $p \geq 0$, maka $x = \pm\sqrt{p}$ (artinya $x = \sqrt{p}$ atau $x = -\sqrt{p}$)

b) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Jika dalam persamaan kuadrat diskriminan ($D = b^2 - 4ac$) bukan kuadrat sempurna, maka cara ini adalah sangat efektif, demikian juga cara ini justru dapat digunakan sebagai dasar penyelesaian umum persamaan kuadrat, dan dalam pengembangannya dapat untuk menentukan nilai-nilai ekstrim fungsi kuadrat, mencari sumbu simetrinya dan sebagainya.

<u>Contoh 1</u>

Tentukan penyelesaian dari persamaan kuadrat

$x^2 + 4x - 5 = 0$

Jawab :

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x = 5$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 5 + 4$ (kedua ruas ditambah kuadrat dari $\frac{1}{2}b$ atau $(\frac{1}{2}(4))^2 = 4$)

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 = 9$

$\Leftrightarrow x + 2 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$\Leftrightarrow x + 2 = 3$ atau $x + 2 = -3$

$\Leftrightarrow x = 1$ atau $x = -5$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{1, -5\}$

<u>Contoh 2</u>

Tentukan penyelesaian dari $3x^2 - 5x + 1 = 0$

Jawab :

$3x^2 - 5x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 5x = -1$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{3}x = -\frac{1}{3}$ (kedua ruas dibagi dengan 3)

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = \frac{1}{3} + \frac{25}{36}$ (kedua ruas ditambah $(\frac{1}{2}(-\frac{5}{3}))^2$)

$\Leftrightarrow (x - \frac{5}{6})^2 = \frac{13}{36}$

$\Leftrightarrow x - \frac{5}{6} = \pm\sqrt{\frac{13}{36}} = \pm\frac{1}{6}\sqrt{13}$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{13}$ atau $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{13}$

Jadi penyelesaian dari persamaan ini adalah

$\{\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{13}, \frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{13}\}$

3) Menurunkan Rumus Penyelesaian Persamaan Kuadrat dengan Rumus abc

Menurunkan rumus penyelesaian persamaan kuadrat dapat dipercayakan kepada siswa, tetapi syaratnya penyelesaian dengan melengkapkan kuadrat telah dikuasai dengan baik. Dengan pengarahan yang baik maka siswa dapat diarahkan menurunkan rumus mencari akar persamaan kuadrat. Cara menurunkan rumus penyelesaian kuadrat di bawah ini dapat dijadikan referensi tambahan guru pada saat memfasilitasi siswa me-*reinvent* rumus ini, di samping cara menurunkan rumus yang sudah sering kita kenal.

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$

$\Leftrightarrow ax^2 + bx = -c$

$\Leftrightarrow 4a(ax^2 + bx) = -4ac$ (kedua ruas dikali $4a$)

$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$ (kedua ruas ditambah b^2)

$\Leftrightarrow (2ax)^2 + 2(2ax)(b) + b^2 = b^2 - 4ac$

$\Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$\Leftrightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Leftrightarrow 2ax = -b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jadi rumus untuk mencari akar-akar persamaan kuadrat :

$ax^2 + bx + c = 0$ untuk $a \neq 0$ maka akar-akarnya adalah:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Contoh: Selesaikanlah akar-akar persamaan $3x^2 - 5x + 1 = 0$

Jawab: di sini $a = 3$, $b = -5$ dan $c = 1$, sehingga:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.(3)(1)}}{2(3)}$$

$= \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$

Jadi himpunan penyelesaiannya $\{\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}, \dfrac{5-\sqrt{13}}{6}\}$

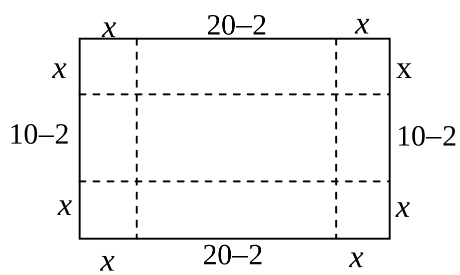
Catatan

Mengacu pada definisi akar kuadrat, bahwa nilai pengakaran dari bilangan real non negatif a, yang ditulis dengan lambang $\sqrt{a}$ adalah b, sedemikian hingga dipenuhi $b^2 = a$. Dan merujuk konsistensi dari matematika, maka akar kuadrat dari bilangan non negatif, didefinisikan bernilai non negatif pula. Sebagai misal $\sqrt{9} = 3$, sebab 9 positif dan $3^2 = 9$.

Berikut contoh penerapan persamaan kuadrat dari persoalan yang kita jadikan konteks menuju ke persamaan kuadrat di depan.

Suatu kotak tanpa tutup untuk penyerahan kenang-kenangan teman yang berulang tahun, dibuat dari kertas karton berbentuk empat persegi panjang, ukuran 10 cm × 20 cm dengan jalan menggunting suatu persegi pada keempat sudutnya. Luas alasnya adalah 96 cm^2. Hitunglah panjang sisi dari keempat persegi yang digunting pada sudut karton tersebut!

Solusi:



Misalkan dipotong persegi di keempat sudutnya dengan panjang sisinya x cm.
Maka kotak karton tanpa tutup yang terbentuk mempunyai alas yang berbentuk empat persegi panjang dengan ukuran $(20 - 2x)$ cm × $(10 - 2x)$ cm.
Dari sini kita hasilkan persamaan :
$(20 - 2x)(10 - 2x) = 96$

Dengan menggunakan sifat distributif untuk menjabarkan ruas kiri kita hasilkan

$200 - 60x + 4x^2 = 96$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 60x + 104 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 15x + 26 = 0$ (kedua ruas dibagi dengan 4)

$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 13) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ atau $x - 13 = 0$ (Teorema II)

$\Leftrightarrow x = 2$ atau $x = 13$

Dari hasil ini dapat ditarik kesimpulan bahwa harus dipotong persegi dengan ukuran sisi 2 cm agar diperoleh kotak dengan ukuran itu, dan tidak mungkin dipotong 13 cm (mengapa ?)

Latihan 1

Kerjakan soal-soal berikut tanpa melihat kunci jawab terlebih dulu!

1. Konstruksikan beberapa buah persoalan yang dapat dijadikan konteks untuk pendekatan ke persamaan kuadrat
2. Selesaikanlah persamaan- persamaan kuadrat berikut :
   a. $x^2 + 3x - 28 = 0$
   b. $\dfrac{1}{t-1} + \dfrac{1}{t-4} = \dfrac{5}{4}$
   c. $5x^2 - 6x + 5 = 0$
   d. $\dfrac{2x^2-1}{x-3} = x + 3 + \dfrac{17}{x-3}$
   e. $\dfrac{y}{2p} = \dfrac{3p}{6y-5p}$
3. Sebuah bilangan positif lebih besar 5 dari tiga kali bilangan lainnya. Hasil kali kedua bilangan itu adalah sama dengan 68. Carilah bilangan itu!
4. Tentukan ukuran dari empat persegi panjang yang kelilingnya 50 kaki dan luasnya 150 kaki persegi.

5. Sisi miring sebuah segitiga adalah 34 inci. Carilah panjang dua kaki lainnya, apabila kaki yang satu 14 inci lebih panjang dari kaki lainnya

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci yang terdapat pada bagian akhir modul ini. Hitunglah banyak jawaban Anda yang benar. Untuk mengetahui pencapaian Anda gunakan rumus di bawah ini:

$$Pencapaian\ Anda = \frac{1}{5} \times \text{(banyak jawaban Anda yang benar)} \times 100\%$$

Jika tingkat capaian Anda 90% atau lebih, bagus!, Anda dapat melanjutkan pada kegiatan berikutnya, tetapi jika kurang dari 90% harap diulangi lagi terutama bagian-bagian yang belum Anda pahami!

2. Persamaan Irasional

Persamaan irasional adalah persamaan yang peubahnya terletak di bawah tanda akar. Untuk menyelesaikannya, pada prinsipnya adalah dengan mengkuadratkan kedua ruas. Tetapi dengan mengkuadratkan kedua ruas, ada kemungkinan kita menyelundupkan akar, sehingga hasil solusi harus diperiksa kembali.

<u>Contoh 1</u>

Tentukan nilai x yang memenuhi identitas $\sqrt{(x-5)^2} = x - 5$

Jawab:

Agar berlaku identitas $\sqrt{(x-5)^2} = x-5$, harus dipenuhi syaratnya, yaitu: $(x - 5) \geq 0$, sebab hasil pengakaran adalah non negatif. Sehingga $x \geq 5$

<u>Contoh 2</u>

Tentukan penyelesaian dari $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{x+2}$

Jawab:

Uji prasyarat:

$x^2 - 4 \geq 0 \ \Rightarrow\ x \leq -2$ atau $x \geq 2$, dan

$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

Dari $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{x+2}$, kedua ruas dikuadratkan, akan diperoleh

$\Leftrightarrow x^2 - 4 = x + 2$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ atau $x = -2$

Dengan memperhatikan uji prasyarat tadi, maka himpunan penyelesaian dari persamaan di atas adalah $\{ -2, 3 \}$

<u>Contoh 3</u>

Tentukan nilai x yang memenuhi $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+1} = 6$

Jawab:

Uji prasyarat:

1) $x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$

2) $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

3) $6 - \sqrt{2x+1} \geq 0$, sebab dari $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+1} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x+5}$

$= 6 - \sqrt{2x+1}$ • Ë$2x+1$ ¡Ü36 • Ëx ¡Ü17 $\frac{1}{2}$

Dari prasyarat 1), 2) dan 3) diperoleh interval prasyarat: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 17\frac{1}{2}$

Untuk menyelesaikan persamaan:

$\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+1} = 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+5} = 6 - \sqrt{2x+1} \rightarrow$ kedua ruas dikuadratkan,

$\Leftrightarrow x + 5 = 36 - 12\sqrt{2x+1} + (2x + 1)$

$\Leftrightarrow 12\sqrt{2x+1} = x + 32 \rightarrow$ kedus ruas dikuadratkan lagi, diperoleh

$\Leftrightarrow 144(2x + 1) = x^2 + 64x + 1024$

$\Leftrightarrow x^2 - 224x + 880 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 4)(x - 220) = 0$

$\Leftrightarrow x = 4$ atau $x = 220$

Mengacu hasil uji prasyarat, diperoleh himpunan penyelesaiannya: {4} sebab untuk $x = 220 \rightarrow \sqrt{225} + \sqrt{441} = 6$ (salah) sehingga 220 bukan akar (akar yang diselundupkan).

Latihan 2

Kerjakakan latihan soal-soal di bawah ini tanpa melihat kunci jawaban terlebih dahulu!

1. Tentukan nilai x dari persamaan berikut:
   a. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x - 2$
   b. $\sqrt{4x^2 + 12x + 9} = 2x + 3$

2. Tentukan x dari persamaan berikut:
   a. $\sqrt{6x^2 - 4x + 4} = x + 2$
   b. $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = 1$
   c. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4} = 7$

   Tentukan nilai x yang memenuhi:

3. $\sqrt{5x-1} + \sqrt{2x} = \sqrt{10x+5}$
4. $\sqrt{2x+8} - \sqrt{3x-4} = \sqrt{x-5}$
5. $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{10x+6}$
6. $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+6} = \sqrt{x-9}$
7. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3} - \sqrt{x-3}$
8. $\sqrt{3x-2} - \sqrt{5x-1} + \sqrt{4x+1} = \sqrt{x+2}$
9. $\sqrt{x(x+1)} + 4 = 2x - 2 + 2\sqrt{3}$
10. $\sqrt{x^2} - \sqrt{(x-5)^2} = 5$

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci yang terdapat pada bagian akhir modul ini. Hitunglah banyak jawaban Anda yang benar. Untuk mengetahui pencapaian Anda gunakan rumus di bawah ini:

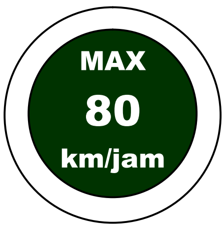
$$\textit{Pencapaian Anda} = \frac{1}{10} \times \text{(banyak jawaban Anda yang benar)} \times 100\%$$

Jika tingkat capaian Anda 90% atau lebih, bagus!, Anda dapat melanjutkan pada kegiatan berikutnya, tetapi jika kurang dari 90% harap diulangi lagi terutama bagian-bagian yang belum Anda pahami!

B. Pertidaksamaan

Perhatikan persoalan–persoalan berikut.

1. Kursus komputer di LPK Bina Bangsa akan diselenggarakan jika peserta yang terdaftar paling tidak 10 orang.

2. 

Sebetulnya Budi sangat tergesa-gesa karena kebetulan pagi ini berangkat terlalu siang, padahal hari ini adalah hari pertama ia harus mengikuti Ujian Nasional untuk mata pelajaran matematika. Tetapi waktu masuk ke jalan Gajah Mada, yaitu jalan dimana sekolah Budi berada, pada mulut jalan ada tanda seperti di samping, bagaimana jalan yang harus ditempuh Budi.

3. Awal tahun pelajaran yang lalu kepala sekolah memberi tahu pada rapat pleno komite sekolah, bahwa kriteria ketuntasan minimal untuk mata pelajaran matematika adalah 65%. Budi kebingungan mendengar pengumuman kepala sekolah tersebut, melalui ayahnya yang hadir pada rapat komite sekolah. Dapatkah anda membantu menjelaskan kepada Budi ?

Persoalan-persoalan di atas dapat pembaca jadikan konteks untuk memfasilitassi siswa menuju ke konsep pertidaksamaan. Sebagaimana telah disinggung di depan bahwa pertidaksamaan adalah kalimat terbuka berkaitan dengan relasi $>$, $\geq$, $<$, $\leq$, dan $\neq$.

Di bawah ini akan dibahas bahwa pada setiap lapangan *(field)* himpunan bilangan real misalnya, berlaku aksioma terurut (*ordered*) yang merupakan kaidah dasar dalam pertidaksamaan. Kaidah-kaidah pokok pertidaksamaan ini penulis sajikan dengan pendekatan deduktif, penulis maksudkan untuk memperkuat latar belakang materi bagi guru, dan untuk siswa sebaiknya dipilih pendekatan induktif (misalnya dengan contoh-contoh bilangan nyata (bukan sekedar simbol)) untuk mendukung pendekatan kontekstualnya.

1. Kaidah-kaidah Pokok Pertidaksamaan

a. *Aksioma I* : *Aksioma Trichotomy*
   Jika a dan $b \in \mathbf{R}$, maka satu dan hanya satu pernyataan berikut benar:
   1) $a > b$ 2) $a = b$ 3) $b > a$
b. *Aksioma II* : *Aksioma Transitif*
   Jika a, b, dan $c \in \mathbf{R}$, sedemikian hingga $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$
c. *Aksioma III* : *Aksioma Penjumlahan*
   Jika a, b, dan $c \in \mathbf{R}$, sedemikian hingga $a > b$, maka $a + c > b + c$
d. *Aksioma IV Perkalian*
   Jika a, b, dan $c \in \mathbf{R}$, sedemikian hingga $a > b$ dan $c > 0$, maka $ac > bc$

Definisi I
Jika a dan $b \in \mathbf{R}$, dikatakan $a < b$ bila dan hanya bila $b > a$

Definisi II
Suatu bilangan real a adalah positif bila $a > 0$ dan negatif bila $a < 0$

Dari definisi-definisi dan aksioma-aksioma di atas dapat diturunkan teorema-teorema pokok pertidaksamaan sebagai berikut.

Teorema 1: Jika a dan $b \in \mathbf{R}$,
(i) $a > b$ jika dan hanya jika $-a < -b$
(ii) $a < b$ jika dan hanya jika $-a > -b$

Bukti:
Kita akan membuktikan (i), untuk (ii) caranya sama
$a > b$
$\Leftrightarrow a + ((-a) + (-b)) > b + ((-a) + (-b))$ (aksioma III)
$\Leftrightarrow (a + (-a)) + (-b) > (b + (-b)) + (-b)$ (komutatif dan asosiatif lapangan)
$\Leftrightarrow 0 + (-b) > 0 + (-b)$ (sifat elemen invers)
$\Leftrightarrow -b > -a$ (sifat elemen netral aditif)

$\Leftrightarrow -a < -b$ (qed) (definisi I)

Perluasan Teorema 1, Jika $a > 0$, maka $-a < 0$
(Buktikan !, dan ingat $-0 = 0$)

Teorema 2: $1 > 0$
Bukti:
Mengacu aksioma I (*trichotomy*), satu dan hanya satu sifat ini dipenuhi: (i) $1 > 0$, (ii) $1 = 0$, atau (iii) $1 < 0$
$1 \neq 0$ (untuk setiap $a \in \mathbf{R}$, $a \times 0 = 0$, sedang 1 identitas perkalian, $a \times 1 = a$)
Andaikan $1 < 0$, maka $-1 > 0$ (teorema 1), sehingga
$(-1)(-1) > 0.(-1)$ (aksioma IV)
$1 > 0$ (sifat elemen 0 dan $(-a)(-b) = ab$)
Hal ini bertentangan dengan asumsi $1 < 0$, jadi satu-satunya kemungkinan hanyalah $1 > 0$

Perluasan Teorema 2 : $-1 < 0$ (Buktikan!)

Teorema 3: Jika $a > b$ dan $c < 0$, maka $ac < bc$
Bukti :
Dari $c < 0$, berarti $-c > 0$ (perluasan teorema 1)
$a > b \Leftrightarrow a(-c) > b(-c)$ (aksioma IV)
$\Leftrightarrow -(ac) > -(bc)$ (teorema III Kaidah pokok aljabar)
$\Leftrightarrow ac < bc$ (qed) (teorema 1)

Teorema 4 : Jika $a > b$ dan $c > d$ maka $a + c > b + d$
Bukti :
$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$ (aksioma III)
$c > d \Leftrightarrow b + c > b + d$ (aksioma III)
$\Leftrightarrow a + c > b + d$ (qed) (aksioma transitif)

Teorema 5: Jika a, b, c dan d adalah bilangan positif, $a > b$ dan $c > d$ maka $ac > bd$
Bukti:
$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ c > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow ac > bc \quad \text{(aksioma IV)}$$

$$\left.\begin{array}{l} c > d \\ b > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow bc > bd \text{ (aksioma IV),}$$

Dari dua kenyataan di atas, dapat disimpulkan bahwa $ac > bc$ (aksioma II)

2. Pertidaksamaan *Linear Satu Peubah*

Perhatikan persoalan yang dapat kita jadikan konteks ke pertidaksamaan linear berikut.

Pada pelajaran sejarah, akan diselenggarakan tiga kali pengujian. Seseorang dinyatakan berkompeten (tuntas) dan akan mendapatkan predikat A jika jumlah ketiga skor tersebut sekurang-kurangnya 270. Anda telah memperoleh skor 91 dan 86 pada kedua tes terdahulu. Berapa skor pada tes ketiga yang harus diraih agar memperoleh predikat A.

Model matematika dari persoalan di atas, diperoleh dengan memisalkan skor tes ketiga x, maka diperoleh: $91 + 86 + x \geq 270$ $\Leftrightarrow x + 177 \geq 270$. Bentuk yang terakhir ini merupakan pertidaksamaan linear satu peubah. Sehingga dari sini dapat disimpulkan bahwa:

Bentuk umum pertidaksamaan linear satu peubah adalah: $\boldsymbol{ax + b > 0, a \neq 0}$ (termasuk di sini relasi $<$, $\geq$, $\leq$, dan $\neq$)

Penyelesaian umum pertidaksamaan linear:

$ax + b > 0$

$\Leftrightarrow ax + b + (-b) > 0 + (-b)$ (aksioma III)

$\Leftrightarrow ax + (b + (-b)) > -b$ (asosiatif dan sifat netral aditif)

$\Leftrightarrow ax + 0 > -b$

$\Leftrightarrow ax > -b$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a}(ax) > \frac{1}{a}(-b)$ jika $a > 0$ atau $\frac{1}{a}(ax) < \frac{1}{a}(-b)$ jika $a < 0$

$\Leftrightarrow (\frac{1}{a}.a)x > -\frac{b}{a}$ jika $a > 0$ atau $(\frac{1}{a}.a)x < -\frac{b}{a}$ jika $a < 0$ (asosiatif)

$\Leftrightarrow 1.\, x > -\frac{b}{a}$ jika $a > 0$ atau $1.x < -\frac{b}{a}$ jika $a < 0$

$\Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$ atau $x < -\frac{b}{a}$

Jadi himpunan penyelesaiannya $\{x \mid x > -\frac{b}{a}\}$ untuk $a > 0$, atau $\{x \mid x < -\frac{b}{a}\}$ untuk $a < 0$.

Contoh 1

Tentuka solusi dari persoalan: $x + 177 \geq 270$

Jawab:

$x + 177 \geq 270$

$\Leftrightarrow x + 177 + (-177) \geq 270 + (-177)$

$\Leftrightarrow x + 0 \geq 93$

$\Leftrightarrow x \geq 93$

Jadi agar diperoleh predikat A maka pada ujian ketiga sekurang-kurangnya harus memperoleh skor 93

Contoh 2

Tentukan nilai x yang memenuhi $\frac{x}{2} - \frac{1}{3} < \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}$

Jawab:

$\frac{x}{2} - \frac{1}{3} < \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 6\,(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}) < 6(\frac{2x}{3} + \frac{1}{2})$ (aksioma IV)

$\Leftrightarrow 3x - 2 < 4x + 3$

$\Leftrightarrow 3x - 4x < 3 + 2$ (hasil kedua ruas ditambah dengan $(-4x + 3)$)

$\Leftrightarrow -x < 5$

$\Leftrightarrow x > -5$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{ x \mid x > -5 \}$

Latihan 4

Kerjakan soal-soal latihan di bawah ini tanpa melihat kunci jawaban terlebih dulu!

1. Susunlah paling sedikit lima buah ungkapan atau persoalan yang model matematikanya merupakan pertidaksamaan linear satu peubah. Tukarkan hasilnya dengan temanmu agar dapat disusun model matematikanya, dan diskusikan jika ada hal-hal yang kurang jelas.

2. Buktikan bahwa relasi $\geq$ merupakan relasi *anti simetris*, artinya jika $a \geq b$ dan $b \geq a$ maka $a = b$.
3. Jika diketahui $a > b > 0$ maka buktikan $a^2 > b^2$
   Apakah jika $a > b$ maka selalu $a^2 > b^2$
4. Jika diketahui $x > y$ maka buktikan bahwa $x > \frac{1}{2}(x + y) > y$
5. Buktikan bahwa $2xy < x^2 + y^2$ untuk setiap $x, y \in$ R
6. Carilahn nilai x yang memenuhi pertidak samaan :
   a. $2(x + 3) > 3(x - 1) + 6$
   b. $\frac{x}{4} + \frac{2}{3} \leq \frac{2x}{3} - \frac{1}{6}$
   c. $\frac{1}{x} + \frac{3}{4x} > \frac{7}{8}$
7. Untuk nilai x yang manakah memenuhi :
   a. $\begin{cases} x - 2 \leq 3x - 6 \\ 2x - 5 < x + 4 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 4x - 2 \leq x + 7 \\ 1 - 2x < x - 2 \end{cases}$
8. Jika yang dimaksud dengan $a < b < c$ adalah $a < b$ dan $b < c$, maka tentukan penyelesaian dari :
   a. $2x - 3 \leq 4x + 5 < x + 47$
   b. $-\frac{3}{4} \leq \frac{1 - x}{12} \leq -\frac{1}{3}$
   c. $2x + 1 \leq 3x - 1$ atau $x + 3 \leq 2x$

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci yang terdapat pada bagian akhir modul ini. Hitunglah banyak jawaban Anda yang benar. Untuk mengetahui pencapaian Anda gunakan rumus di bawah ini:

$$\textit{Pencapaian Anda} = \frac{1}{8} \times \text{(banyak jawaban Anda yang benar)} \times 100\%$$

Jika tingkat capaian Anda 90% atau lebih, bagus!, Anda dapat melanjutkan pada kegiatan, berikutnya, tetapi jika kurang dari 90% harap diulangi lagi terutama bagian-bagian yang belum Anda pahami!

3. Pertidaksamaan Pecahan

Pertidaksamaan pecahan adalah pertidaksamaan yang berbentuk pecahan, dan mengandung peubah pada penyebutnya.

Perlu diingat bahwa bentuk $\frac{a}{b}$ akan bernilai 0 hanya untuk $a = 0$. Nilai yang menyebabkan $\frac{a}{b}$ sama dengan nol disebut pembuat nol dari pertidaksamaan itu, dan untuk $b = 0$, yang menyebabkan pecahan bernilai tak terdefinisi, disebut pembuat kutub. Baik pembuat nol maupun pembuat kutub akan menandai perubahan tanda dari positif ke negatif dan sebaliknya.

Contoh:

Tentukan penyelesaian dari $\frac{2x+1}{5x-1} \le 1$

Jawab:

Langkah pertama buat ruas kanan sama dengan nol,

$$\frac{2x+1}{5x-1} - 1 \le 0$$

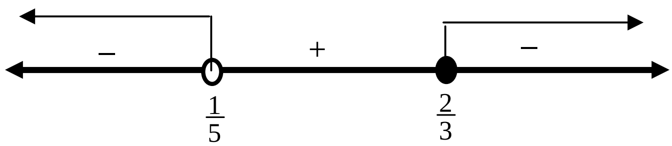
$$\Leftrightarrow \frac{2x+1-(5x-1)}{5x-1} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x+2}{5x-1} \le 0$$

Pembuat nol $-3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

Pembuat kutub $5x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

Garis bilangan penyelesaiannya:



Jadi himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan tersebut adalah

HP = $\{ x \mid x < \frac{1}{5}$ atau $x \ge \frac{2}{3} \}$

Latihan 4

Kerjakan soal-soal di bawah ini tanpa melihat kunci jawaban terlebih dahulu!

Tentukan batas-batas x yang memenuhi:

1. $\dfrac{2x+1}{x-2} \geq 1$
2. $\dfrac{2x-1}{x-2} \leq \dfrac{x+5}{x+2}$
3. $\dfrac{2-x}{x+2} \geq \dfrac{x-1}{3-x}$
4. $\dfrac{3-2x}{3x+1} \leq \dfrac{2x-1}{4-3x}$
5. $\dfrac{9x-6}{x} - \dfrac{3(2x-3)}{x} > -9$
6. $3 < \dfrac{1-3x}{2x+1} \leq 4$
7. $\dfrac{x-1}{x^2} < \dfrac{x+1}{x^2+x+1} \leq \dfrac{1}{x+1}$
8. $\dfrac{x+1}{x^2+x+1} < \dfrac{1}{x-1}$
9. $-4 \leq \dfrac{2x^2+7x-8}{x^2+3x-7} < 2$
10. $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x^2+4x+3} \geq \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{5-x}{3x^2-4x-7} < \dfrac{2x}{3x-7} \end{cases}$

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci yang terdapat pada bagian akhir modul ini. Hitunglah banyak jawaban Anda yang benar. Untuk mengetahui pencapaian Anda gunakan rumus di bawah ini:

$$Pencapaian\ Anda = \frac{1}{10} \times \text{(banyak jawaban Anda yang benar)} \times 100\%$$

Jika tingkat capaian Anda 90% atau lebih, bagus!, Anda dapat melanjutkan pada kegiatan, berikutnya, tetapi jika kurang dari 90% harap diulangi lagi terutama bagian-bagian yang belum Anda pahami!

4. Pertidaksamaan Irasional

Pada pertidaksamaan irasional di samping ketentuan yang diminta, yang juga harus diperhatikan adalah sebagai berikut.

a. Yang ada di bawah tanda akar ≥ 0
b. Hasil penarikan akar ≥ 0

Contoh

Tentukan batas-batas x yang memenuhi $\sqrt{x+4} < \sqrt{2-x}$

Jawab:

$\sqrt{x+4} < \sqrt{2-x}$ jika kedua ruas dikuadratkan.

$(x + 4) < (2 - x)$

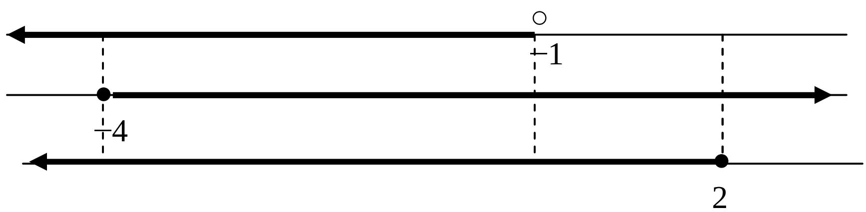
$2x < -2$

$x < -1$

Syarat tambahan:

(i) $x + 4 \geq 0 \rightarrow x \geq -4$
(ii) $2 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 2$

Jika ketiga interval ini kita iriskan, akan ketemu penyelesaian pertidaksamaan tersebut



Himpunan penyelesaianya, yang merupakan irisan ketiga interval itu adalah:

HP = { x | $-4 \leq x < -1$ }

Latihan 5

Kerjakan soal-soal di bawah ini tanpa melihat kunci jawab terlebih dulu!

Tentukan batas-batas yang memenuhi pertidaksamaan di bawah ini

1. $\sqrt{6+2x} < 2$
2. $\sqrt{4-2x} > 5$
3. $x - 3 < \sqrt{2x-1}$
4. $x - 3 < \sqrt{x^2 + 2x - 48}$
5. $\sqrt{x^2 + x - 12} < x$
6. $\sqrt{4x^2 - 4x - 3} > 2x$
7. $\sqrt{-(x^2 + 8x)} < \sqrt{x^2 + 3x + 2}$
8. $\sqrt{x^2 - 4x} < \sqrt{x^2 + 2x + 1}$
9. $\sqrt{4x + 17} > 2x - \sqrt{8x + 17}$
10. $\sqrt{2x-6} < 2 + \sqrt{1+x}$

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci yang terdapat pada bagian akhir modul ini. Hitunglah banyak jawaban Anda yang benar. Untuk mengetahui pencapaian Anda gunakan rumus di bawah ini:

$$\textit{Pencapaian Anda} = \frac{1}{10} \times \text{(banyak jawaban Anda yang benar)} \times 100\%$$

Jika tingkat capaian Anda 90% atau lebih, bagus!, Anda dapat melanjutkan pada kegiatan, berikutnya, tetapi jika kurang dari 90% harap diulangi lagi terutama bagian-bagian yang belum Anda pahami!

RELASI DAN FUNGSI BAB III

A. Relasi

Masalah yang sangat penting dan esensial dalam matematika adalah konsep fungsi, dan untuk mendesain konsep fungsi maka konsep dasar yang digunakan adalah konsep relasi. Oleh karena itu masalah relasi di sini dibahas agak mendalam, sehingga dapat digunakan guru matematika untuk memperkuat latar belakang materinya, sehingga nantinya dapat dengan mudah memilih pendekatan dan konteks yang serasi untuk pembelajaran matematikanya.

1. Pengertian Relasi

Dari data pribadi siswa yang dapat diambil dari Bimbingan dan Konseling, dicatat hobi dari beberapa siswa, diantaranya: Ali gemar bermain badminton, Budi gemar bermain sepakbola, Citra gemar bermain basket dan pingpong, Desy gemar bermain basket dan pingpong, sedang Elly tak satupun cabang olahraga yang digemarinya.

Kalau dipandang hubungan antar elemen-elemen dari semesta ini pada hakikatnya hubungan ini dalam matematika dikenal dengan nama **relasi.**

Unsur-unsur yang menjadikan hubungan antar elemen ini dikatakan relasi adalah:

a. adanya dua himpunan yang tidak kosong yakni:
   A = {Ali, Budi, Citra, Desy, Elly}
   B = {badminton, sepakbola, basket, pingpong}
b. adanya aturan pengawanan antar elemen-elemen, yakni suatu kalimat terbuka “*a* gemar bermain *b*”.

Sebenarnya kita kenal dua relasi berkenaan dengan himpunan, yaitu:

a. relasi antarhimpunan, misalnya suatu himpunan dimuat oleh himpunan yang lain (misalnya A $\subset$ B), dua himpunan berimpit, dan dua himpunan saling asing.
b. relasi antar elemen-elemen dari satu atau lebih himpunan.

Yang dibahas di sini adalah relasi-relasi di dalam suatu himpunan maupun dengan anggota dari himpunan lain. Relasi yang menyangkut dua anggota sebuah himpunan disebut **relasi binar (*diadic*),** relasi yang menyangkut tiga elemen disebut relasi **terner (*triadic*),** sedang yang menyangkut empat elemen disebut **relasi kuarterner (*tetradic*),** dan yang menyangkut lebih dari empat elemen disebut **relasi *polyadic*.**

Di bawah ini diberikan beberapa contoh tentang relasi-relasi tersebut.

a. Contoh relasi binar (*diadic*):
   1) "x lebih dari atau sama dengan y"
   2) "Abdor adalah ayah dari Andini"
b. Contoh relasi terner (*triadic*):
   1) "garis a sejajar b karena b sejajar c"
   a. "Ali benci pada Budi yang kerenanya Elly tak mempedulikannya lagi"
c. Contoh relasi kuarterner (*tetradic*) :
   1) "p, q, r, dan s adalah sisi-sisi empat persegi panjang *PQRS*"
   2) "Anik, Budi, Citra dan Desy duduk mengitari meja makan"
d. Contoh relasi *polyadic* :
   1) "Ketujuh penjahat itu saling berkelahi karena merasa dicurangi dalam pembagian hasil kejahatannya"
   2) "Para guru matematika SLTP se Kabupaten Bantul saling berdiskusi dengan dipandu Guru Inti MGMP-nya".

Untuk dapat mendefinisikan relasi (relasi binar) diperlukan:

a. suatu himpunan A yang tidak kosong,
b. suatu himpunan B yang tidak kosong,
c. suatu kalimat terbuka, yang kita singkat sebagai P(x,y), di mana P(a,b) dapat bernilai benar atau salah untuk tiap pasangan berurut (a,b).

Jika P(*a*,*b*) benar pada suatu relasi R maka kita tulis *a*R*b* atau R(*a*,*b*), dan sebaliknya jika salah kita tulis $a \not R b$ atau $\not R(a,b)$.

<u>Contoh 1</u>

A = {2, 3, 4, 5, 6}

B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}

Dan ambilah kalimat terbuka P(*x*,*y*) yang merumuskan relasi dari *A* ke *B* dengan "*x* adalah faktor dari *y*", maka:

2R2, 2R4, 2R6, 3R3, 3R6, 4R4, 5R5, 6R6 sedangkan $2 \not R 5$, $3 \not R 5$, $5 \not R 6$… .

<u>Contoh 2</u>

P = {Ali, Budi, Citra, Desy, Elly}

Q = {badminton, sepakbola, bolabasket, pingpong}

Ambilah dari contoh pengertian relasi di muka, suatu kalimat terbuka yang mendefinisikan relasinya: "*x* gemar bermain *y*". sehingga:

Ali R badminton, Budi R sepakbola, Citra R pingpong , dan sebagainya, tetapi

Ali $\not R$ basket, Desy $\not R$ sepakbola serta Elly $\not R$ sepakbola.

2. Relasi Determinatif

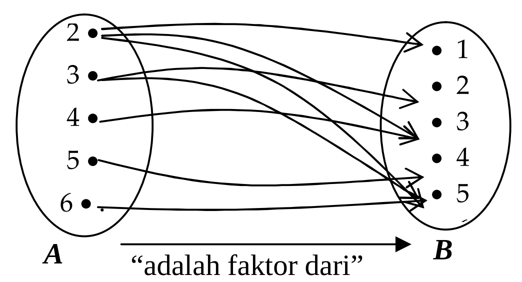
Suatu relasi R dikatakan determinatif antar anggota-anggota S, apabila ***a*R*b*** merupakan kalimat deklaratif (pernyataan) untuk setiap *a* dan *b* dalam S.

Sebagai contoh relasi yang ditentukan oleh kalimat terbuka "*x* habis dibagi *y*" merupakan relasi determinatif untuk semesta bilangan asli *A*, tetapi tidak determinatif untuk semesta manusia. Andaikan *a* dan *b* bilangan asli **N**, maka "*a*R*b*" merupakan kalimat deklaratif, sebagai contoh "12R3" yang berarti "12 habis dibagi oleh 3" adalah suatu kalimat deklaratif, tetapi untuk *p* dan *q* pada semesta manusia, misalnya Siti dan Pardi, maka "Siti habis dibagi oleh Pardi" merupakan kalimat yang bukan deklaratif. Sehingga relasinya bukan relasi determinatif untuk semesta manusia.

3. Cara Menyajikan Suatu Relasi.

Suatu relasi R dari himpunan *A* ke himpunan *B*, dapat disajikan dengan:

a. Diagram panah



Gb. 2.1

Diagram di samping ini menyajikan diagram relasi dari himpunan: $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ke himpunan $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ yang ditentukan oleh kalimat terbuka "x adalah faktor dari y".

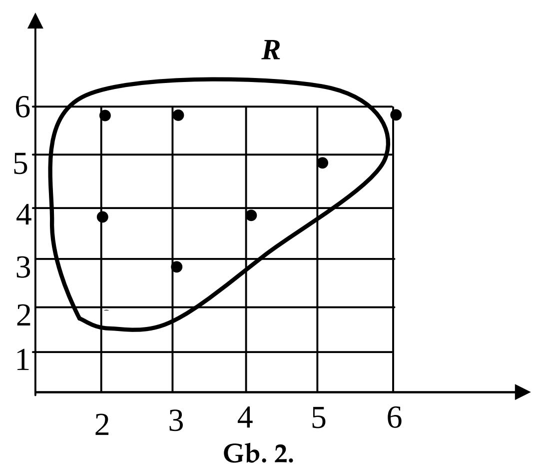
b. Himpunan Pasangan Terurut

Jika relasi di atas, yaitu relasi dari himpunan $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ke himpunan $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ yang didefinisikan dengan kalimat terbuka "x adalah faktor dari y", jika disajikan dalam himpunan pasangan terurut akan menjadi:

R = {(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (6,6)}

c. Dengan Diagram Cartesius

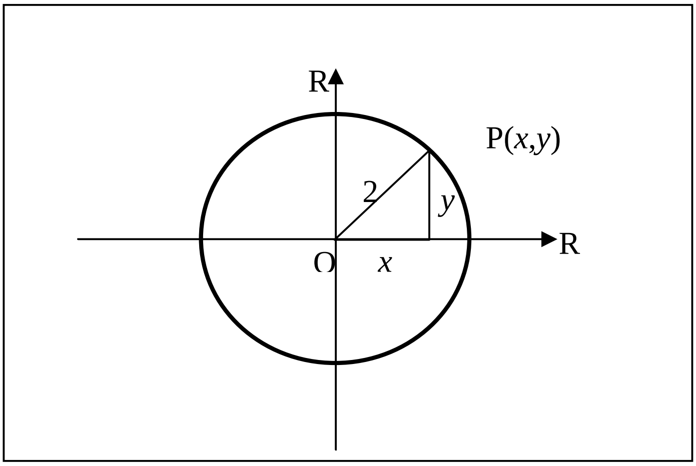
Jika relasi R = {(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (6,6)} dari contoh di atas disajikan dalam diagram Cartesius maka grafiknya akan tampak sebagai berikut:



Gb. 2.

Contoh

Suatu relasi pada R = {x | x = bilangan real} yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "$x^2 + y^2 = 4$", jika disajikan dalam diagram Cartesius, akan menjadi seperti diagram di bawah ini:



Gb. 2.3

Grafik dari rela-si di samping berupa lingkar-an, yang akan membagi daerah **R** × **R** menjadi tiga bagian yakni lingkaran itu sendiri yaitu:

R = {(x,y) | $x^2 + y^2 = 4$},

daerah di dalam lingkaran, yaitu: R = {(x, y) | $x^2 + y^2 < 4$}, dan

daerah di luar lingkaran, yaitu: R = {(x, y) | $x^2 + y^2 > 4$}.

4. Relasi Invers

Setiap relasi R dari himpunan A ke himpunan B memiliki invers R^{-1} dari B ke A yang dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

Jadi dapat juga dikatakan bahwa R^{-1} adalah himpunan semua pasangan terurut yang bersifat bahwa jika urutan elemen dalam pasangan itu ditukar, maka pasangan terurut baru tersebut adalah anggota R

Contoh 1

Jika A = { 2, 3, 4, 5} dan B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}, sedangkan relasi:

R = {(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (6,6)}, maka

R^{-1} = {(2,2), (3,3), (4,2), (4,4), (5,5), (6,2), (6,3), (6,6)}

Dan kalimat terbuka yang menentukan relasi R^{-1} adalah "*x* mempunyai faktor *y*"

<u>Contoh 2</u>
Himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{0, 1\}$, maka :
$A \times B = \{(a,0), (b,0), (c,0), (a,1), (b,1), (c,1)\}$, dan jika
$R = \{(a,0), (b,0), (b,1), (c,1)\}$ maka
$R^{-1} = \{(0,a), (0,b), (1,b), (1,c)\}$ dan dari
$B \times A = \{(0,a), (1,a), (0,b), (1,b), (0,c), (1,c)\}$, maka $R^{-1} \subset B \times A$
Dalam hal ini domain dari R adalah range dari R^{-1}, dan range dari R^{-1} adalah domain dari R

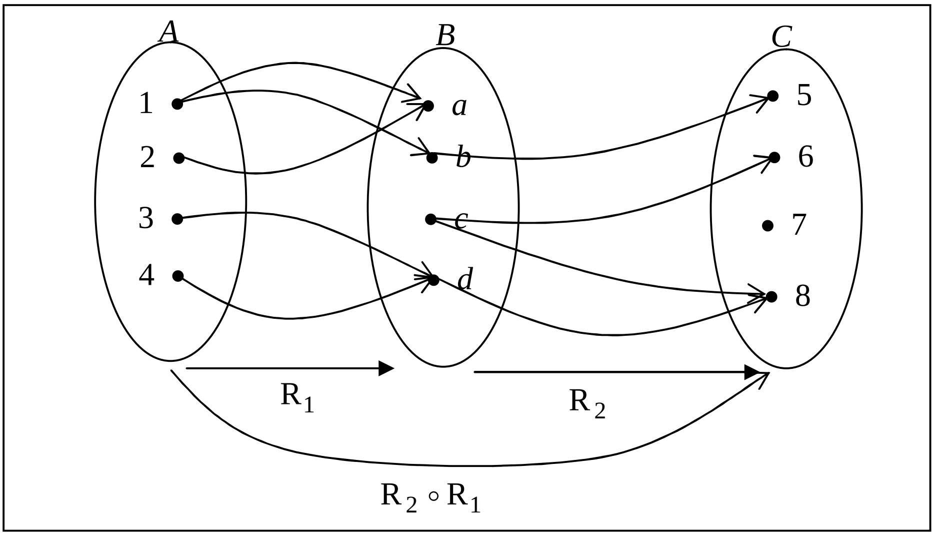
Catatan:
Suatu relasi yang domain dan rangenya sama ($A = B$), maka relasi dari *A* ke *B* adalah sama dengan relasi dari *A* ke *A* dan relasi tersebut cukup dikatakan sebagai **relasi pada *A*.**

Catatan:
Suatu relasi pada *A* dikatakan sebagai **relasi identitas** dan dinyatakan dengan Δ_A, apabila $\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$
Contoh:
Jika $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ maka $\Delta_A = \{1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$.
Relasi identitas ini sering juga disebut sebagai **diagonal.**

5. Komposisi Relasi

Misalkan R_1 suatu relasi dari himpunan *A* ke himpunan *B*, dan R_2 adalah relasi dari himpunan *B* ke himpunan *C*, maka relasi R dari himpunan *A* ke *C*, yang terdiri atas $(a,c) \in R$ sedemikian hingga $(a,b) \in R_1$ dan $(b,c) \in R_2$, dinamakan relasi komposisi dari *A* ke *C* dan ditulis dengan notasi $R = R_2 \circ R_1$
Jadi $R_2 \circ R_1 = \{(x, y\} \mid x \in A, y \in C$ sedemikian hingga $(x, p) \in R_1$ dan $(p, y) \in R_2\}$

<u>Contoh 1</u>
Jika $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ dan $C = \{5, 6,7,8\}$ dan relasi $R_1 = \{(1,a),(1,b),(2,a),(3,d),(4,d)\}$ dan $R_2 = \{(b,5),(c,6),(c,8),(d,8)\}$, tentukan $R_2 \circ R_1$
Jawab : Jika relasi-relasi di atas kita sajikan dalam suatu diagram panah



Gb. 2.4

Jadi $R_2 \circ R_1$= {(1,5), (3,8),(4,8)}

<u>Contoh 2</u>

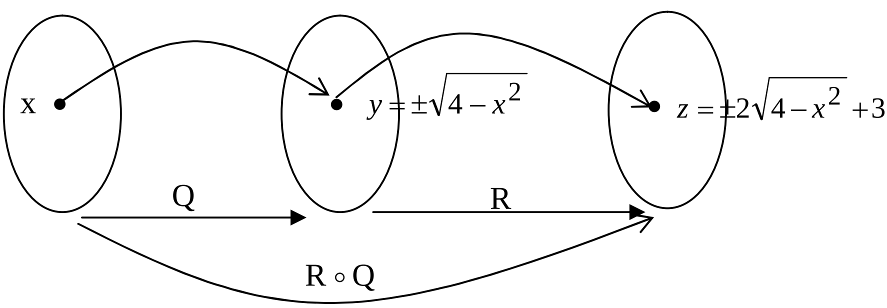
Diketahui relasi - relasi Q dan R adalah relasi-relasi pada bilangan real, yang didefinisikan sebagai berikut :

$$Q = \{(x,y)\} \mid x^2 + y^2 = 4\} \text{ dan } R = \{(y,z) \mid z = 2y + 3\}$$

Tentukan $R \circ Q$

Jawab:

Relasi $R \circ Q$ merupakan komposisi relasi dari relasi Q yang dilanjutkan dengan relasi R, dengan kalimat terbuka yang menyatakan aturan perkawanannya diperoleh dengan mengeliminir y dari persamaan rumus relasi keduanya.



Gb. 2.5

Jadi relasi RoQ = $\{(x,z) \mid z = \pm 2\sqrt{4 - x^2} + 3\}$.

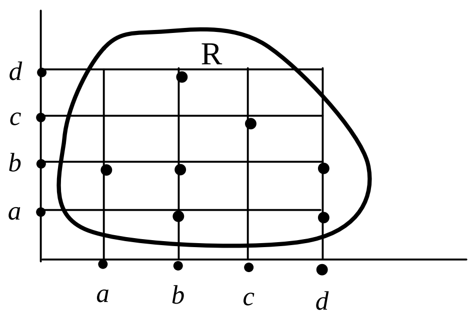
Latihan 6

Kerjakan soal-soal berikut tanpa melihat kunci jawaban terlebih dahulu!

1. Jika R adalah relasi dari himpunan A = { 1, 2, 3, 4} ke himpunan B = { 1, 3, 5} yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "x lebih kecil dari y", maka :
   a. nyatakan R dalam himpunan pasangan berurut.
   b. sajikan R pada diagram Cartesius $A \times B$.

2. Jika R adalah relasi dari himpunan C = { 2, 3, 4, 5} ke D = { 3, 6, 7, 10} yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "y habis dibagi oleh x", maka :
   a. nyatakan R dalam himpunan pasangan berurut.
   b. sajikan R pada diagram Cartesius $C \times D$.

3. Diketahui E = { a, b, c, d} dan R suatu relasi pada E, yang diagramnya sebagai berikut:



Gb. 2.6

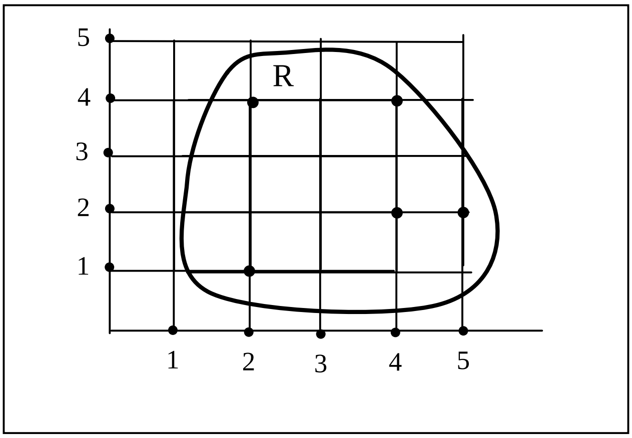
   a. Tentukan nilai dari pernyataan:
      (i) $c\mathrm{R}b$ (ii) $d\not\mathrm{R}a$ (iii) $a\not\mathrm{R}c$
      (iv) $b\not\mathrm{R}b$
   b. Carilah $\{\, x \mid (x,b) \in \mathrm{R}\}$ yaitu semua elemen yang berkawan dengan b.
   c. Carilah $\{\, \mathrm{x} \mid (d,x) \in \mathrm{R}\}$

4. Masing-masing kalimat terbuka berikut mendefinisikan suatu relasi pada bilangan real. Buatlah seketsa masing-masing relasi pada diagram Cartesius **R** × **R** untuk :

a. $\mathrm{x} \geq 4$	d. $y = x^2$	g. $y \leq 3 - x$
b. $y \leq 3$	e. $y \geq x^2$	h. $y \geq 3 - x$
c. $y > 2x$	f. $y \leq x^2$	i. $y \geq x^3$

5. Pandang relasi R = {(1,5),(4,5),(1,4),(4,6),(3,7),(7,6)}, maka tentukanlah:
   a. domain dari relasi R
   b. range dari relasi R
   c. relasi invers dari R (R^{-1})

6. Relasi R pada F = { 1, 2, 3, 4, 5 }, yang disajikan dengan diagram berikut.

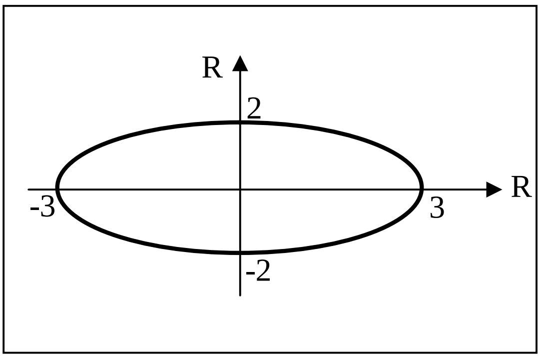


Carilah :

a. domain dari R
b. range dari R
c. invers dari relasi R
d. sketsa R^{-1} pada $F \times F$

Gb. 2.7

7. Diketahui relasi R pada himpunan bilangan real yang didefinisikan oleh $\mathrm{R} = \{(x,y) \mid 4x^2 + 9y^2 = 36\}$ maka tentukanlah :



a. domain dari R
b. range dari R
c. relasi invers dari R (R^{-1})

Gb. 2.8

8. Misalakan relasi R pada bilangan asli A = {1, 2, 3, …} yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "$x + 2y = 10$", maka tentukanlah:
   a. domain dari R
   b. range dari R
   c. relasi invers dari R (relasi R^{-1})
9. Misalkan R_1 dan R_2 adalah relasi-relasi pada bilangan real yang disajikan dalam bentuk himpunan pasangan berurut :

   $\mathrm{R}_1 = \{(x,y) \mid y \geq x^2\}$

$R_2 = \{(x, y) \mid y \le x + 2$

a. Buatlah sketsa $R_1 \cap R_2$ pada diagram Cartesius.

b. Carilah domain dari $R_1 \cap R_2$!

c. Cariah jangkauan (range) dari $R_1 \cap R_2$!

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci yang terdapat pada bagian akhir modul ini. Hitunglah banyak jawaban Anda yang benar. Untuk mengetahui pencapaian Anda gunakan rumus di bawah ini:

$$\textit{Pencapaian Anda} = \frac{1}{9} \times \text{(banyak jawaban Anda yang benar)} \times 100\%$$

Jika tingkat capaian Anda 90% atau lebih, bagus!, Anda dapat melanjutkan pada kegiatan, berikutnya, tetapi jika kurang dari 90% harap diulangi lagi terutama bagian-bagian yang belum Anda pahami!

B. Fungsi

1. Pengertian Fungsi

Konsep fungsi terdapat hampir dalam setiap cabang matematika, sehingga fungsi merupakan suatu materi esensial yang sangat penting artinya dan banyak sekali aplikasinya baik dalam matematika itu sendiri maupun dalam ilmu-ilmu yang lain. Ada sedikit perbedaan pengertian fungsi dalam kehidupan sehari-hari dengan pengertian fungsi dalam matematika. Dalam kehidupan sehari-hari fungsi adalah sinonim dari guna atau manfaat, sedang pengertian fungsi dalam matematika adalah mengacu adanya relasi yang khas antara dua himpunan.

Pengertian fungsi ini pertama kali diperkenalkan oleh Gottfried W. Leibniz (1646-1716) pada tahun 1694. Menurut Leibniz fungsi dapat dikatakan sebagai suatu relasi biner antar dua himpunan yang khusus.

Gootfried W. Leibniz (1646 – 1716)

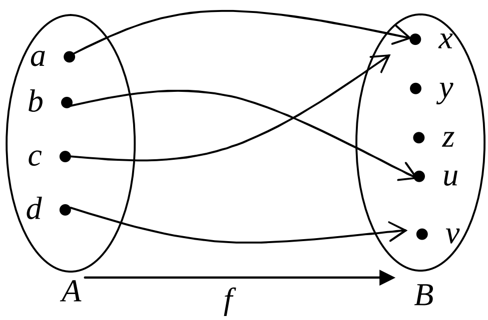
Senada dengan relasi, maka pada fungsi terdapat tiga unsur yang harus dipenuhi, yakni:

a. suatu himpunan tidak kosong, katakanlah A

b. suatu himpunan tidak kosong lain, katakanlah B

c. suatu kalimat terbuka, yang juga disebut **aturan pengawanan** yang mengakibatkan setiap elemen di A, menentukan dengan tepat elemen tunggal di B

Relasi khusus ini sering disebut dengan **relasi fungsional,** yang sering disingkat dengan **fungsi** saja, atau disebut juga dengan istilah **pemetaan (*mapping*).**



Fungsi di atas secara formal biasa didefinisikan sebagai berikut.

Gb. 2.9

> **Definisi :**
> **Suatu fungsi *f* dari himpunan *A* ke dalam himpunan *B* adalah suatu relasi yang memasangkan setiap elemen dari *A* dengan tepat satu elemen di *B***

Fungsi f dari himpunan A ke dalam B ini biasa ditulis dengan notasi:

$\boldsymbol{f : A \to B}$ dibaca "fungsi f memetakan A ke dalam B"

Unsur tunggal di dalam B yang dihubungkan dengan $a \in A$ oleh f dinyatakan dengan $f(a)$ dan disebut **peta** atau **bayangan *a*** oleh f, atau disebut juga **nilai *f* pada *a***. Dalam hal ini a adalah **prapeta (*preimage*)** dari $f(a)$.

Notasi yang digunakan untuk menyatakan suatu fungsi f yang memetakan setiap anggota x dari himpunan A ke anggota y dari himpunan B adalah:

$\boldsymbol{f : x \to y}$ dibaca "f memetakan x ke y"

Catatan:

Untuk menuliskan fungsi yang mendeskripsikan hubungan antarelemennya agar dari setiap x diperoleh f (x), Abrahamson (1971), menganjurkan menuliskannya dengan $\boldsymbol{f : x \mapsto f\ (x)}$ (lambang "$\mapsto$" digunakan untuk membedakan "$\to$" pada f : $A \to B$).

Pandanglah pemetaan $f : A \to B$ sebagaimana di atas, dalam hal ini:

a. Himpunan A disebut **daerah asal (*domain*)** dari f
b. Himpunan B disebut **daerah kawan (*codomain*)** dari f
c. Himpunan semua peta unsur A dalam B disebut **daerah hasil (*range*)** dari f, dan ditulis dengan notasi $\boldsymbol{f(A)}$**.** Sehingga f (A) = $\{ f(a) \mid a \in \text{A} \}$

Karena fungsi pada hakikatnya adalah relasi khusus, maka representasi fungsi dapat dilakukan dengan diagram panah, himpunan pasangan terurut maupun dengan diagram Cartesius.

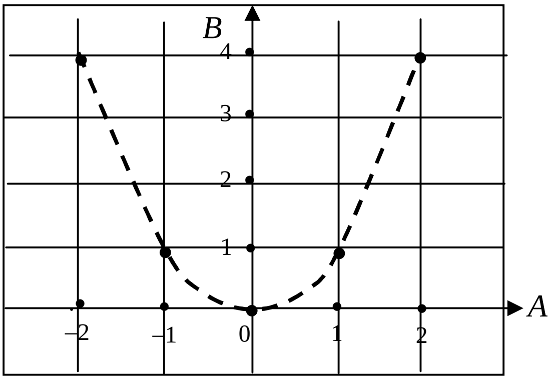
<u>Contoh 1</u>

Misalkan $A = \{ -2, -1, 0, 1, 2\}$ dan $B = \{ 0, 1, 2, 3, 4\}$. Jika f adalah suatu pemetaan dari A ke dalam B sedemikian hingga $f(x) = x^2$, tentukan:

a. himpunan pasangan terurut yang menyajikan fungsi tersebut
b. daerah hasil dari f
c. diagram Cartesiusnya

Jawab:

a. Himpunan pasangan terurutnya adalah $\{(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)\}$
b. Daerah hasil dari f adalah $f(A) = \{ 0, 1, 4\}$
c. Diagram Cartesiusnya adalah :



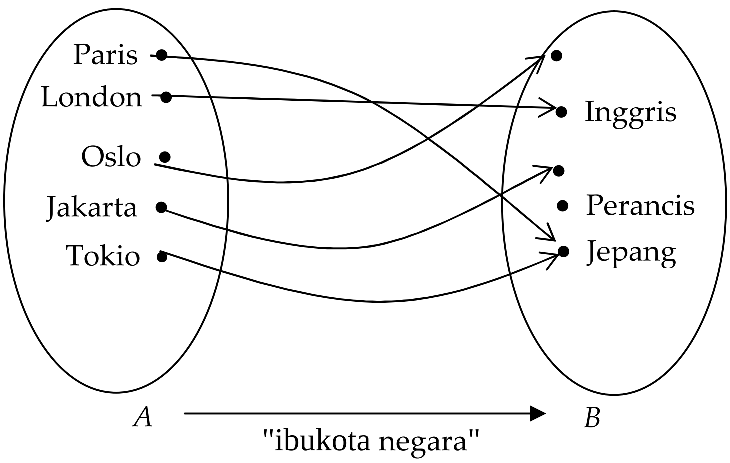
Gb. 2.10

Catatan:

Diagram Cartesius berupa noktah-noktah yang dilewati oleh kurva putus-putus, dan apabila daerah asalnya himpunan semua bilangan real pada interval tersebut maka diagram Cartesiusnya akan menjadi kurva mulus yang ditentukan oleh kurva putus-putus tersebut.

Contoh 2

Jika A = {Paris, London, Oslo, Jakarta, Tokio}dan B = {Norwegia, Inggris, Indonesia, Perancis, Jepang}, maka relasi yang menetapkan negara-negara dengan ibukotanya, dari A ke B, adalah suatu **fungsi** yang diagram panahnya dengan jelas adalah sebagai berikut.



Gb. 3.1

Contoh 3

Diketahui suatu fungsi $f: A \to \mathbf{R}$ di mana $A = \{\, x \mid -3 \le x \le 2,\ x \in \mathbf{R} \,\}$ yang ditentukan oleh rumus $f(x) = x^2 + 1$, maka tentukan :

a. $f(-1)$, $f(0)$, dan prapeta dari 5

b. dengan menyajikannya dalam diagram Cartesius tentukan daerah hasil dari f

Jawab :

a. $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

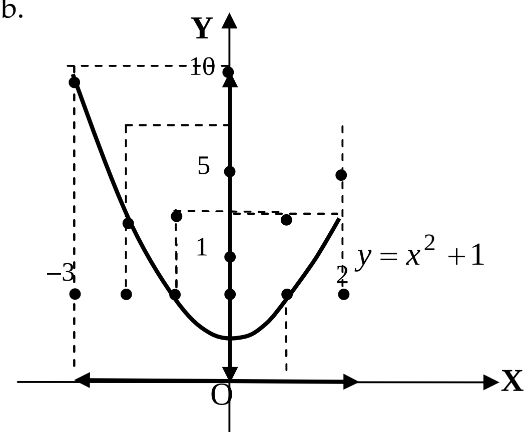
$f(0) = 0^2 + 1 = 1$

Prapeta dari 5, dicari dengan jalan menyelesaikan persamaan

$$f(x) = 5 \Rightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Sehingga prapeta dari 5 adalah 2 atau –2.

b.



Gbr 3.2

Dibuat grafik $y = x^2 + 1$

$f(-3)(-3)^2 + 1 = 10$

$f(2) = 2^2 + 1 = 5$

Jadi daerah hasil dari f adalah

$f(A) = \{\, y \mid 1 \le y \le 10,\ y \in \mathbf{R} \}$

Catatan:

Jika domain dan kodomain dari suatu fungsi kedua-duanya adalah himpunan yang sama, katakanlah fungsi $f: A \to A$, maka f seringkali disebut **operator** atau **transformator** pada A.

2. Fungsi Surjektif, Injektif dan Bijektif.

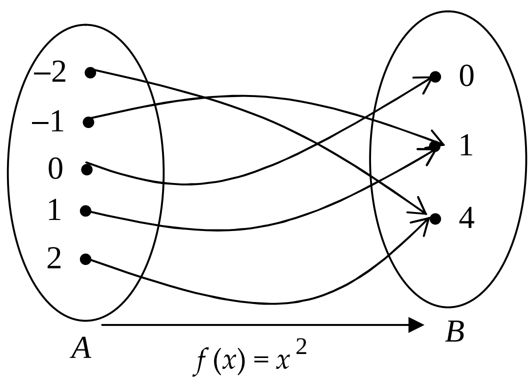
a. Fungsi Surjektif

Misalkan f suatu fungsi dari A ke dalam B, maka daerah hasil $f(A)$ dari fungsi f adalah impunan bagian dari kodomain B atau
$f(A) \subset B$, fungsi ini kita kenal dengan nama **fungsi into (ke dalam)** atau **fungsi** saja**.** Tetapi jika $f(A) = B$ artinya setiap anggota B muncul sebagai peta dari sekurang-kurangnya satu elemen A, maka kita katakan "***f* adalah suatu fungsi *A* pada *B*".** Fungsi **pada (*onto function*)** biasa juga kita kenal dengan nama fungsi **surjektif.**

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif, jika untuk setiap $b \in B$ sekurang-kurangnya satu $a \in A$ sedemikian hingga $b = f(a)$

Contoh 1

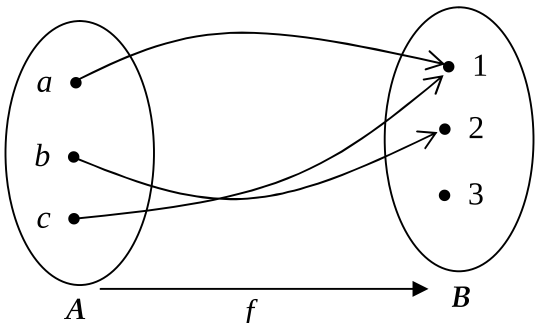
Fungsi f dari himpunan $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ke dalam himpunan $B = \{0, 1, 4\}$ yang didefinisikan oleh rumus fungsi $f(x) = x^2$ adalah suatu fungsi yang surjektif, karena setiap elemen di B merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu elemen di A.



Gb. 3.3

Contoh 2

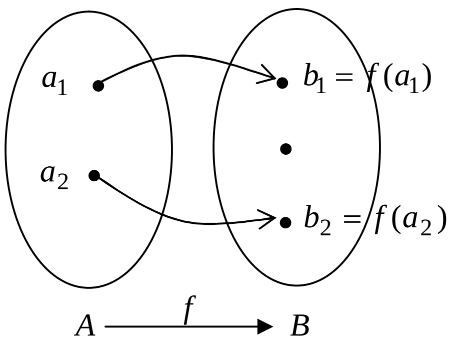
Misalkan fungsi f didefinisikan sebagaimana diagram panah di bawah ini



Fungsi f di samping ini bukan fungsi surjektif, karena: $f(A) = \{1, 2\} \neq B$

Gb. 3.4

b. Fungsi Injektif.



Gb. 3.5

Suatu fungsi $f : A \to B$ sedemikian hingga untuk setiap anggota A yang berbeda mempunyai peta yang berbeda pula di B, dikatakan f sebagai fungsi yang **injektif** atau **fungsi satu-satu.**

> **Fungsi $f : A \to B$ disebut fungsi injektif (satu-satu), jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$ akan berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.**

Dari ketentuan bahwa suatu fungsi $f : A \to B$ merupakan fungsi injektif, jika untuk setiap pasang anggota $a_1, a_2 \in A$ berlaku $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

Rumus ini bernilai logika sama dengan pernyataan:

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

Pernyataan terakhir inilah yang biasa digunakan untuk menunjukkan apakah suatu fungsi itu injektif atau bukan.

<u>Contoh 1</u>

Selidikilah injektif tidaknya fungsi di dalam bilangan real **R** (f : **R** $\to$ **R**), yang didefinisikan dengan rumus $f(x) = 2x - 3$.

Jawab :

untuk setiap $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ yang memenuhi $f(x_1) = f(x_2)$, maka

$$(2x_1 - 3) = (2x_2 - 3) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Sehingga dari $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, yang berarti f adalah fungsi injektif di dalam **R**

<u>Contoh 2</u>

Relasi dari himpunan negara N ke himpunan bendera nasional B, yang didefinisikan dengan kalimat terbuka "negara x bendera nasionalnya adalah y" adalah suatu fungsi, sebab setiap negara pasti mempunyai bendera nasional, dan bendera nasionalnya hanya satu, tetapi bukan suatu fungsi injektif sebab ada dua negara yang berbeda (misalnya Indonesia dan Monaco) tetapi mempunyai bendera nasional yang sama yaitu sama-sama merah putihnya.

<u>Contoh 3</u>

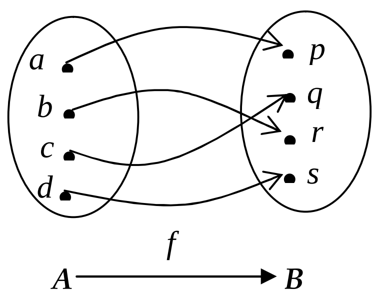
Fungsi f : **R** $\to$ **R** dimana **R =** {bilangan real}, yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^2$ bukan suatu fungsi injektif, sebab untuk $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ sedemikian hingga:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow {x_1}^2 = {x_2}^2 \Leftrightarrow {x_1}^2 - {x_2}^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ atau } x_1 = -x_2$$

Hal ini menunjukkan adanya dua elemen yang berlainan, yang mempunyi peta yang sama.

c. Fungsi Bijektif.



Gb. 3.6

Jika suatu fungsi $f : A \to B$ sedemikian hingga f suatu fungsi yang surjektif dan injektif sekaligus, sebagaimana ilustrasi di samping, maka dikatakan f adalah suatu fungsi **bijektif** atau **korespondensi satu-satu.**

> **Definisi:**
> **Fungsi $f : A \to B$ disebut suatu fungsi bijektif jika f sekaligus fungsi surjektif dan fungsi injektif.**

Contoh 1

Fungsi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = 2x - 3$ adalah fungsi bijektif sebab untuk setiap y peta dari x pasti akan dipenuhi: $2x - 3 = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(y+3)$, yang menunjukkan prapeta dari y di B. Dengan demikian f adalah fungsi yang surjektif.

Sedang untuk setiap pasang $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, yang dipenuhi $f(x_1) = f(x_2)$, akibatnya $2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Hal ini menunjukkan f suatu fungsi yang injektif, dan dari f injektif dan surjektif sekaligus ini, dapat disimpulkan bahwa f adalah fungsi bijektif.

Contoh 2

Suatu fungsi f di dalam bilangan real **R,** yang didefinisikan oleh $f(x) = x^2$ bukan fungsi bijektif sebab untuk $f(x) = 4$ misalnya, akan diperoleh:

$$f(x) = 4$$

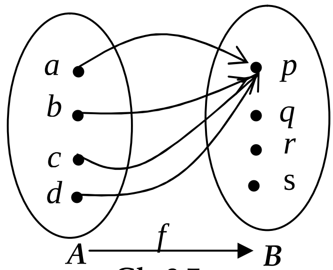
$$\Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ atau } x = 2$$

ini menunjukkan f bukan fungsi injektif yang berarti f juga bukan fungsi yang bijektif.

3. Fungsi-fungsi Khusus.

Di dalam matematika, banyak sekali dijumpai beberapa macam fungsi, yang beberapa di antaranya memiliki ciri-ciri yang khas. Fungsi-fungsi khusus tersebut di antaranya adalah:

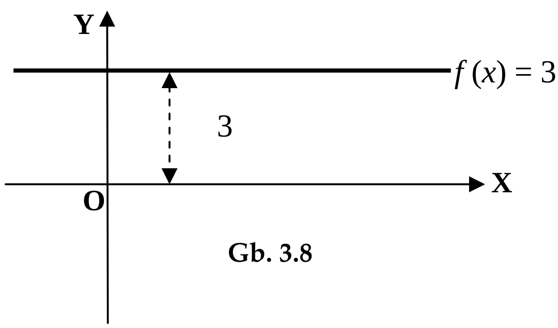
a. **Fungsi Konstanta.**



Gb. 3.7

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ dimana untuk semua elemen di A berkaitan hanya dengan sebuah unsur di B disebut **fungsi konstanta.**
Sebagaimana ilustrasi di samping yang memasangkan setiap elemen di dalam himpunan A dengan hanya satu elemen saja di B.

<u>Contoh</u>
Suatu fungsi f di dalam himpunan real **R,** atau $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, yang didefinisikan oleh rumus $f(x) = 3$, adalah sebuah fungsi konstanta .



Gb. 3.8

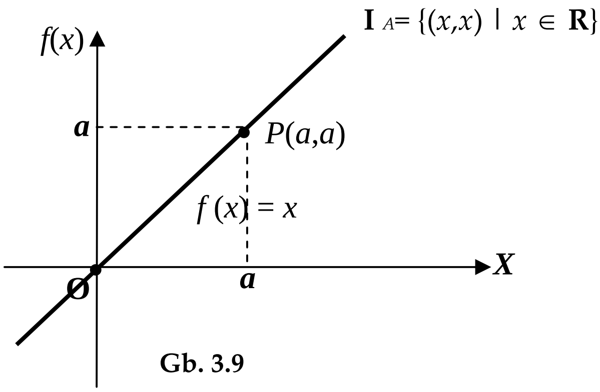
Dari kurva di samping terlihat jelas:
$f(-3) = 3$
$f(0) = 3$
$f(1) = 3$
$f(5) = 3$

b. **Fungsi Identitas**
Suatu fungsi $f : A \rightarrow A$ yang didefinisikan oleh rumus $f(x) = x$, yaitu fungsi yang menetapkan setiap elemen dalam A dengan elemen yang bersangkutan itu sendiri, maka f disebut **fungsi satuan** (*identity function*), atau **transformasi satuan** pada A. Dan kita nyatakan dengan **I** atau $\mathbf{I}_A$.

<u>Contoh 1</u>
Fungsi identitas $\mathbf{I}_A$ pada $A = \{a, b, c\}$ adalah $\mathbf{I}_A = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$.

Contoh 2

Fungsi identitas pada himpunan bilangan real **R,** adalah:



Gb. 3.9

c. Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut **fungsi genap** jika $f(-x) = f(x)$, dan fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut **fungsi ganjil** jika $f(-x) = -f(x)$, sedang fungsi yang tidak memenuhi salah satu dari pernyataan di atas dikatakan fungsi yang tidak genap maupun tidak ganjil.

Contoh

1. Fungsi $f :\ x \rightarrow x^2$ adalah fungsi genap, sebab $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
2. Fungsi $f :\ x \rightarrow x^3 - 2x$ adalah fungsi ganjil, sebab $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$
3. Fungsi $f :\ x \rightarrow x^2 - x$ adalah bukan fungsi genap maupun ganjil, sebab $f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x$, di mana bentuk terakhir ini tidak sama dengan $f(x)$ maupun $-f(x)$

d. Fungsi Modulus

Berdasarkan definisi dari modulus atau nilai mutlak, bahwa nilai mutlak suatu bilangan real x didefinisikan sebagai :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ jika } x \geq 0 \\ -x \text{ jika } x < 0 \end{cases}$$

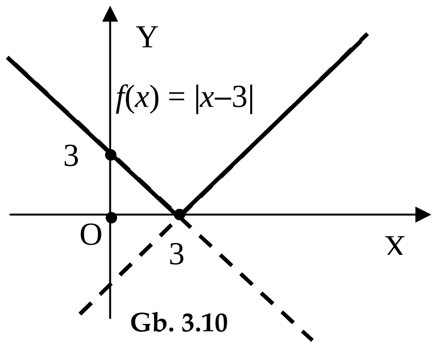
Contoh :

$| 3 | = 3$

$|-3| = 3$

Fungsi $M : x \to M(x)$ disebut fungsi modulus jika $M(x) = |\, f(x)\,|$

<u>Contoh</u>
Fungsi f di dalam bilangan real **R** didefinisikan oleh $f(x) = |x - 3|$. Tentukan kurva grafiknya.
Jawab : $f(x) = |x - 3|$



Gb. 3.10

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x\text{-}3 \text{ jika } x\text{-}3 \geq 0 \\ -(x\text{-}3) \text{ jika } x\text{-}3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x\text{-}3 \text{ jika } x \geq 3 \\ -x + 3 \text{ jika } x < 3 \end{cases}$$

e. Fungsi Tangga atau Fungsi Nilai Bulat Terbesar

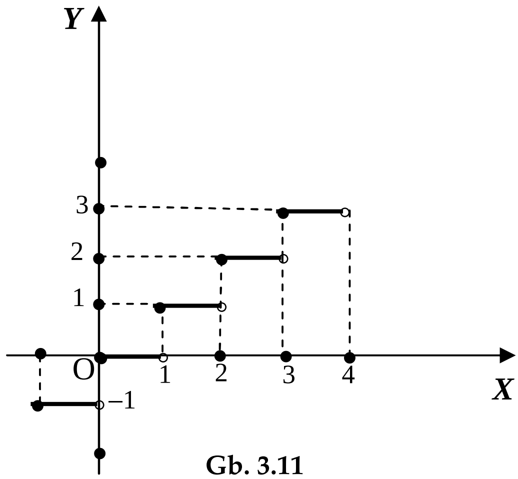
Berdasarkan ketentuan bahwa yang dimaksud dengan pembulatan adalah pembulatan ke nilai bulat terbesar, maka fungsi tangga didefinisikan sebagai:

$$[[\, x \,]] = \{b \mid b \leq x < b + 1, \text{ b bilangan bulat, } x \in \mathbf{R}\}$$

<u>Contoh</u>:

Jika $-2 \leq x < -1$ maka $[[x]] = -2$
$-1 \leq x < 0$ maka $[[x]] = -1$
$0 \leq x < 1$ maka $[[x]] = 0$
…
$7 \leq x < 8$ maka $[[x]] = 7$

Fungsi $f: x \to [[x]]$ disebut fungsi nilai bulat terbesar.
Grafik fungsi $f(x) = [[x]]$, untuk $x \in$ **R** , diperlihatkan sebagaimana kurva di bawah:

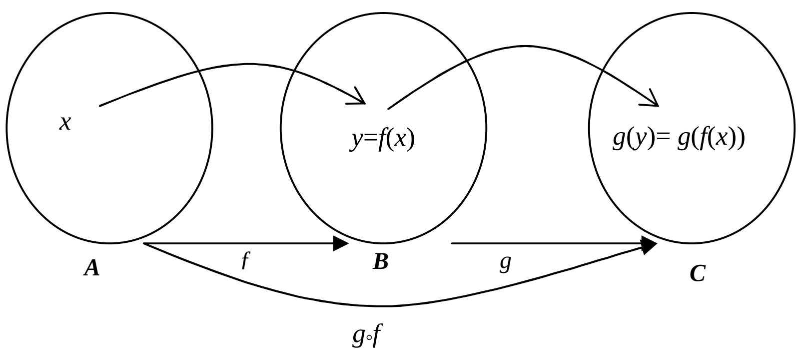


Gb. 3.11

Oleh karena grafiknya menyerupai tangga, maka $f\ (x)\ =\ [[x]]$, sering disebut fungsi tangga.

4. Fungsi Komposit

Misalkan fungsi f memetakan himpunan A ke dalam B, dan fungsi g memetakan himpunan B ke dalam C sebagaimana ilustrasi di bawah ini:



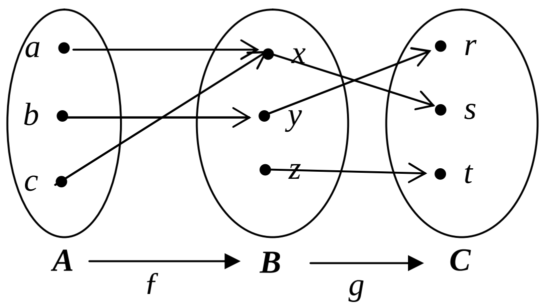
Gb. 3.12

Untuk $a \in A$ maka petanya $f\ (a)$ berada di B yang juga merupakan domain dari fungsi g, oleh sebab itu pasti diperoleh peta dari $f\ (a)$ di bawah pemetaan g yaitu $g(\ f\ (a))$. Dengan demikian kita mempunyai suatu aturan yang menentukan setiap elemen $a \in A$

dengan tepat satu elemen $g(f(a)) \in C$. Fungsi baru inilah yang disebut **fungsi komposit** dari f dan g, yang dinyatakan dengan notasi $g \circ f$ (dibaca "g bundaran f").
Secara singkat jika f: $A \rightarrow B$, dan g: $B \rightarrow C$ maka kita definisikan suatu fungsi komposisi $g \circ f$: $A \rightarrow C$ sedemikian hingga $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Catatan:
Perhatikan bahwa fungsi komposit $g \circ f$ adalah penggandaan fungsi yang mengerjakan f dahulu, baru kemudian mengerjakan g.

<u>Contoh 1</u>
Misalkan f: $A \rightarrow B$ dan g: $B \rightarrow C$ yang didefinisikan sebagaimana diagram panah di bawah ini



Gb. 3.13

$(g \circ f): A \rightarrow B$ ditentukan oleh:

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(x) = s$
$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(y) = r$
$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(x) = s$

<u>Contoh 2</u>
Fungsi f: R $\rightarrow$ R dan g: R $\rightarrow$ R didefinisikan oleh rumus $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = 3x^2$. Tentukan:

a. $(g \circ f)(1)$ dan $(f \circ g)(1)$
b. rumus untuk $(g \circ f)$ dan $(f \circ g)$

Jawab :

a. $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(1 + 2) = g(3) = 3(3^2) = 27$

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3.1^2) = f(3) = 3 + 2 = 5$

b. $(g \circ f) : x \to (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = 3(x + 2)^2 = 3x^2 + 12x + 12$

Sehingga $(g \circ f) : x \to 3x^2 + 12x + 12$

$(f \circ g) : x \to (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x^2) = 3x^2 + 2$

Sehingga $(f \circ g) : x \to 3x^2 + 2$

Catatan:

Dari jawaban b didapat fungsi $g \circ f$ dan $f \circ g$ tidak sama, sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa komposisi fungsi tidak bersifat komutatif.

5. Fungsi Invers

a. Invers Suatu Fungsi

Misalkan f suatu fungsi dari A ke dalam B dan misalkan untuk suatu $a \in A$ petanya adalah $f(a) = b \in B$, maka invers dari b (dinyatakan dengan $f^{-1}(b)$) adalah elemen-elemen dalam A yang memiliki $b \in B$ sebagai petanya.

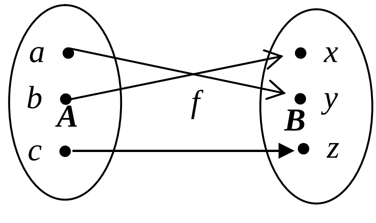
Secara singkat, jika $f : A \to B$ sedemikian hingga $f : x \to f(x)$ maka yang dimaksud dengan invers fungsi b:

$$f^{-1}(b) = \{x \mid x \in A, f(x) = b\}$$

(notasi f^{-1} dibaca "f invers")

<u>Contoh</u>

Misalkan fungsi $f : A \to B$ didefinisikan sebagaimana diagram panah berikut:



maka: $f^{-1}(x) = b$

$f^{-1}(y) = a$

$f^{-1}(z) = c$

Gb. 3.14

b. Fungsi Invers

Misalkan f adalah suatu fungsi dari A ke dalam B. Pada umumnya
$f^{-1}(b)$ untuk suatu $b \in B$ dapat terdiri lebih dari satu elemen atau mungkin tidak ada. Jika $f: A \rightarrow B$ adalah suatu fungsi yang bijektif, maka untuk setiap $b \in B$, invers $f^{-1}(b)$ akan terdiri dari sebuah elemen tunggal dalam A. Dengan demikian kita mendapatkan suatu aturan yang menetapkan untuk setiap $b \in B$ dengan suatu elemen tunggal $f^{-1}(b)$ dalam A. Oleh sebab itu f^{-1} adalah suatu fungsi dari B ke ga ga ding, mung aku ro mb undalam A, dan kita tulis fungsi $f^{-1}: B \rightarrow A$. Di sini fungsi f^{-1} kita sebut "fungsi invers dari f"

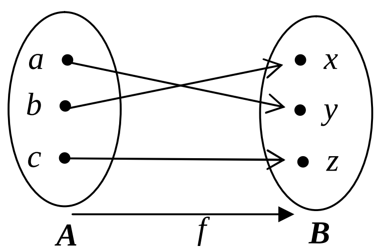
Catatan:

Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ akan diperoleh fungsi invers $f^{-1}: B \rightarrow A$ hanya apabila f suatu fungsi yang bijektif (injektif dan surjektif sekaligus)

Mengacu definisi di atas, maka $f \circ f^{-1}: x \rightarrow x$ demikian juga $f^{-1} \circ f: x \rightarrow x$, yang ini berarti: $\boxed{f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I}$

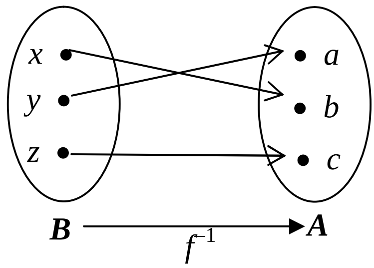
Contoh 1

Jika fungsi $f: A \rightarrow B$ didefinisikan dengan diagram



Gb. 3.15

maka fungsi invers $f^{-1} : B \to A$ didefinisikan oleh diagram panah:



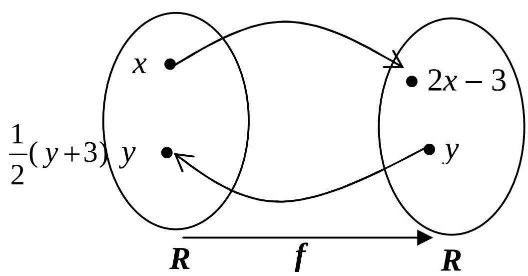
Gb. 3.16

Dari diagram panah di atas, terlihat bahwa:

- $f^{-1} \circ (f(x)) = f^{-1}(b) = x = I(x)$, dan
- $f \circ (f^{-1}(y)) = f(a) = y = I(y)$, yang ini mempertegas sifat $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I$.

<u>Contoh 2</u>

Misalkan fungsi $f : A \to B$ didefinisikan dengan $f(x) = 2x - 3$. Karena fungsi f adalah fungsi yang bijektif, maka akan diperoleh fungsi inversnya. Untuk menentukan rumus fungsi invers f^{-1} ditempuh langkah-langkah sebagai berikut :



Misalkan $2x - 3 = y$
Maka $2x = y + 3$
Sehingga $x = \frac{1}{2}(y+3)$

Gb. 3.17

Oleh karena itu fungsi invers $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y+3)$

Jadi fungsi invers $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ditentukan oleh $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x+3)$

6. Menentukan Domain dan Kodomain Suatu Fungsi Agar Memiliki Fungsi Invers

Dengan memperhatikan syarat bahwa suatu fungsi f mempunyai invers f^{-1}, haruslah f suatu fungsi bijektif. Dari ketentuan ini maka kita dapat menentukan domain dan kodomain suatu fungsi agar fungsi tersebut mempunyai invers.

Contoh:
Suatu fungsi f pada bilangan real ditentukan oleh rumus fungsi $f(x) = \dfrac{x-4}{2x+3}$

Tentukan domain dan kodomain f agar diperoleh fungsi invers f^{-1}
Jawab:
Dengan memperhatikan rumus fungsi f yang berupa fungsi pecah, maka domain dari fungsi f adalah:

$$D_f = \{x \mid 2x + 3 \neq 0,\ x \in R\}$$
$$= \{x \mid x \neq -\frac{3}{2},\ x \in R\}$$

Untuk menentukan kodomainnya terlebih dulu dicari rumus inversnya.
Misalkan $f(x) = y$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-4}{2x+3} = y$

$\Leftrightarrow x - 4 = y(2x + 3)$

$\Leftrightarrow (1 - 2y)x = 3y + 4$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3y+4}{1-2y}$

$\Rightarrow$ f-1(y) $= \dfrac{3y+4}{1-2y}$

$\Rightarrow$ f-1(x) $= \dfrac{3x+4}{1-2x}$

Dengan memperhatikan bahwa syarat suatu fungsi memiliki fungsi invers bila fungsi tersebut adalah bijektif. Sehingga kodomain dari fungsi f adalah domain dari f^{-1}, sehingga kodomain dari $f = D_{f^{-1}} = \{x \mid 1 - 2x \neq 0, x \in R\} = \{x \mid x \neq \frac{1}{2}, \quad x \in R\}$.

7. Fungsi Invers dari Fungsi Komposisi

Misalkan fungsi h merupakan fungsi komposisi dari fungsi f dan g ($h = g \circ f$), maka invers dari fungsi h adalah fungsi invers dari fungsi komposisi h dan biasa ditulis dengan notasi $h^{-1} = (g \circ f)^{-1}$

<u>Contoh:</u>

Misalkan f dan g masing-masing fungsi pada bilangan real yang didefinisikan sebagai $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = 2x - 1$, tentukan $(g \circ f)^{-1}$ dan $(f \circ g)^{-1}$

Jawab:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 3) = 2(x+3) - 1 = 2x + 5$

Misalkan $y = (g \circ f)(x)$

$$y = 2x + 5 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y-5)$$

$$(g \circ f)^{-1}(x) = \mathrm{y}^{-1} = \frac{1}{2}(x-5)$$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1) + 3 = 2x + 2$

Misalkan $y = 2x + 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y-2)$

Jadi $(f \circ g)^{-1} = y^{-1} = \frac{1}{2}(x-2)$

Kecuali cara di atas secara umum kita dapat menurunkan rumus invers fungsi komposit sebagai berikut:

$$(f \circ g)^{-1} \circ (f \circ g) = I$$

$\Leftrightarrow (f \circ g)^{-1} \circ (f \circ g) \circ g^{-1} = I \circ g^{-1}$ (dikomposisikan dengan g^{-1})

$\Leftrightarrow (f \circ g)^{-1} \circ f \circ (g \circ g^{-1}) = g^{-1}$ (sifat asosiatif)

$\Leftrightarrow (f \circ g)^{-1} \circ f \circ I = g^{-1}$ (sifat invers)

$\Leftrightarrow (f \circ g)^{-1} \circ f = g^{-1}$ (sifat identitas)

$\Leftrightarrow (f \circ g)^{-1} \circ f \circ f^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ (dikomposisikan dengan f^{-1})

$\Leftrightarrow (f \circ g)^{-1} \circ I = g^{-1} \circ f^{-1}$ (sifat invers)

$\Leftrightarrow (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ (sifat identitas)

Dengan demikian kita dapatkan rumus:

$$\boxed{(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}}$$

<u>Contoh:</u>

Diketahui fungsi-fungsi f dan g pada **R**, ditentukan oleh $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x) = x^3$

Tentukan: f^{-1}, g^{-1}, $(f \circ g)^{-1}$ dan $(g \circ f)^{-1}$

Jawab:

Misalkan $f(x) = 2x - 3 = y$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(y+3)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x+3)$$

Misalkan $g(x) = x^3 = y$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

Untuk menentukan $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x))$

$$= g^{-1}\left(\frac{1}{2}(x+3)\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(x+3)} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4(x+3)}$$

Dan $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x}+3)$.

PENUTUP BAB IV

Dengan mengucap syukur Alhamdulillah bahwa paket Pembelajaran Fungsi Persamaan dan Pertidaksamaan Aljabar telah dapat dituntaskan. Meskipun masih banyak kekurangan di sana-sini namun dapat dijadikan acuan dalam diskusi-diskusi di Sanggar MGMP Matematika SMA.

A. Kesimpulan

Terkait dengan wacana yang penulis kembangkan dalam modul ini, dapat ditarik kesimpulan hal-hal sebagai berikut.

1. Persamaan adalah kalimat terbuka yang menggunakan relasi "sama dengan"
   a. Untuk menyelesaikan persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, adalah dengan jalan:
      a. memfaktorkan
      b. melengkapkan kuadrat sempurna
      c. menggunakan rumus abc
   b. Untuk menyelesaikan persamaan irasional pada prinsipnya adalah dengan jalan mengkuadratkan kedua ruas. Tetapi dengan mengkuadratkan kedua ruas ada kemungkinan kita menyelundupkan akar lain yang bukan akar dari persamaan tersebut. Maka hasil penyelesaian harus diperiksa.
2. Pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang berkaitan dengan relasi: $>$, $<$, $\leq$, $\geq$, atau $\neq$.
   a. Untuk menyelesaikan pertidaksamaan pecahan, prinsipnya pembuat nol hanya dimiliki oleh pembilang dan tidak oleh penyebut.
   b. Untuk menyelesaikan pertidaksamaan irasional, harus ditentukan terlebih dulu syarat tambahan mengingat bilangan real di bawah akar adalah bilangan non negatif
3. Relasi binar (R) dari himpunan A ke himpunan B diperlukan;
   a. himpunan A yang tidak kosong

b. himpunan B yang tidak kosong

c. suatu kalimat terbuka, yang kita singkat $P\ (x,y)$, di mana $P\ (a,b)$ dapat bernilai benar atau salah untuk setiap pasangan terurut (a,b), $a \in A$ dan $b \in B$.

4. Fungsi f dari himpunan A ke dalam (*into*) B adalah suatu relasi binar yang memasangkan setiap elemen dari A dengan tepat satu elemen B.

   a. Fungsi – fungsi istimewa:

      1) fungsi surjektif (onto) f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu fungsi yang setiap $b \in B$ menjadi peta dari sekurang-kurangnya satu $a \in A$.

      2) fungsi injektif (satu-satu) f dari himpuan A ke himpunan B adalah suatu fungsi yang untuk $a_1, a_2 \in A$ dengan $a_1 \neq a_2$ diperoleh $f\,(a_1) \neq f\,(a_2)$

      3) fungsi bijektif (korespondensi satu-satu) dari himpunan A ke himpunan B, sedemikian hingga f surjektif dan injektif sekaligus.

   b. Fungsi komposit $g \circ f$ dari fungsi f: $A \rightarrow B$ dan g: $B \rightarrow C$ adalah suatu fungsi $h : A \rightarrow C$, sedemikian hingga $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$

   c. Fungsi invers f^{-1} dari fungsi $f : A \rightarrow B$ adalah suatu fungsi dari B ke dalam A sedemikian hinga $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}: x \rightarrow x$. Atau dengan kata lain $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$

B. Tugas Akhir

Kerjakan soal-soal di bawah ini tanpa terlebih dahulu melihat kunci jawab yang penulis sertakan di bagian akhir dari modul ini!

1. Diketahui $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{p, q, r\}$. Apakah relasi-relasi berikut ini merupakan fungsi dari A ke dalam B ?
   a. $R_1 = \{(a,q), (c,p)\}$
   b. $R_2 = \{(a,q), (b,r), (c,p)\}$
   c. $R_3 = \{(a,p), (b,r), (c,p)\}$
2. Gunakan sebuah rumus untuk mendefinisikan fungsi-fungsi
   a. Untuk tiap-tiap bilangan real f_1 menetapkan dengan pangkat tiganya!

b. Untuk tiap-tiap bilangan real f_2 menetapkan dengan bilangan 3
c. Untuk tiap-tiap bilangan real positif, f_3 menetapkan kuadratnya, sedangkan bilangan real yang lain f_3 menetapkannya dengan bilangan 5.

3. Misalkan $f(x) = x^2$ dengan domain $\{ x \mid -2 \le x \le 8, x \in R\}$ tentukanlah :
   a. $f(4)$
   b. $f(-3)$
   a. $f(t-3)$, dan tentukan nilai t agar masih tetap pada domainnya.
4. Diketahui fungsi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ yang didefinisikan dengan rumus :
   $$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ jika } x \text{ rasional} \\ 0 \text{ jika } x \text{ irasional} \end{cases}$$
   a. Tulis kalimat terbuka yang menentukan f
   b. Tentukan $f(1\frac{1}{2})$, $f(3{,}141414\ldots\}$, $f(\sqrt{3})$, $f(\pi)$
5. Diketahui fungsi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ yang ditentukan oleh rumus :
   $$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 \text{ untuk } x > 3 \\ x^2 - 2 \text{ untuk } -2 \le x \le 3 \\ 2x + 3 \text{ untuk } x < -2 \end{cases}$$
   maka tentukanlah :
   a. $f(2)$ b. $f(4)$ c. $f(-1)$ d. $f(-3)$
6. Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{x, y\}$
   Berapa banyak fungsi berlaianan yang dapat didefinisikan dari A ke dalam B?
7. Misalkan $A = \{ a, b, c, d \}$ dan suatu fungsi f dari A ke dalam A, didefinisikan oleh $f(a) = a$, $f(b) = c$, $f(c) = a$ dan $f(d) = a$
   Tentukanlah daerah hasil dari fungsi tersebut.
8. Jika $B = \{ -2, -1, 0, 1, 2\}$ dan suatu fungsi $g : B \to \mathbf{R}$ didefinisikan oleh rumus $g(x) = x^2 + 1$
   Carilah daerah hasil dari g !
9. Tiap-tiap rumus di bawah ini mendefinisikan sebuah fungsi dari **R** ke dalam **R.** Tentukan range dari masing-masing fungsi di bawah ini !
   a. $f(x) = 2x + 3$
   b. $f(x) = x^3$
   c. $f(x) = x^2$
   d. $f(x) = x^2 + 1$
   e. $f(x) = \sin x$

10. Misalkan $A = \{ a, b, c, d, e \}$ dan B himpunan huruf-huruf dalam alfabet. Misalkan f, g, h dari A ke dalam B didefinisikan oleh:
    a. $f(a) = r; f(b) = c; f(c) = s; f(d) = t; f(e) = e$
    b. $g(a) = a; g(b) = c; g(c) = e; g(d) = r; g(e) = e$
    c. $h(a) = z; h(b) = y; h(c) = x; h(d) = y; h(e) = z$
    Nyatakanlah apakah tiap-tiap fungsi di atas injektif atau bukan?
11. Nyatakanlah apakah tiap-tiap fungsi berikut ini satu –satu atau bukan!
    a. Untuk tiap-tiap penduduk bumi, di tetapkan dengan bilangan yang berkaitan dengan usianya.
    b. Untuk tiap-tiap negara di dunia ini, ditetapkan dengan bilangan yang menyatakan jumlah penduduknya.
    c. Untuk tiap-tiap buku yang ditulis oleh seorang pengarang tunggal, ditetapkan dengan nama pengarangnya.
    d. Untuk tiap –tiap negara di bumi ini yang mempunyai perdana menteri, ditetapkan dengan nama perdana menterinya.
12. Jika $K = [-1, 1] = \{ x \mid -1 \leq x \leq 1, x \in \mathbf{R} \}$; $L = [1, 3]$ dan $M = [-3, -1]$, dan misalkan fungsi $f_1 : K \to \mathbf{R}$, $f_2 : L \to \mathbf{R}$, dan $f_3 = M \to \mathbf{R}$ sedemikian hingga masing – masing fungsi didefinisikan oleh aturan untuk tiap–tiap bilangan menetapkan kuadratnya.
    Yang mana dari dari fungsi – fungsi ini satu – satu ?
13. Dapatkah suatu fungsi konstan itu injektif ?
14. Yang manakah fungsi-fungsi dari himpunan $A = \{ a, b, c \}$ ke himpunan $B = \{ x, y \}$ ini satu – satu ?
15. Misalkan fungsi $f : A \to B$. Carilah f(A) yaitu daerah hasil dari f, jika f suatu fungsi yang surjektif ?
16. Andaikan $A = [-1, 1]$ dan misalkan fungsi – fungsi f, g dan h dari A ke dalam A di definisikan oleh:
    (a) $f(x) = x^2$ (b) $g(x) = x^3$ (c) $h(x) = \sin x$
    Manakah dari fungsi – fungsi ini yang surjektif ?

17. Mungkinkah suatu fungsi konstanta itu menjadi fungsi yang surjektif ?

18. Manakah fungsi dari himpunan $A = \{ a, b, c \}$ ke dalam himpunan $B = \{ x, y\}$ yang surjektif.
19. Jika $A = [-1, 1]$ maka tentukan yang manakah fungsi – fungsi $f : A \to \mathbf{R}$ di bawah ini yang bijektif, jika f didefinisikan dengan:
    a. $f(x) = x - 3$ d. $f(x) = x^3$
    b. $f(x) = 2x + 1$ e. $f(x) = x^4$

c. $f(x) = x^2$

20. Jelaskan fungsi – fungsi di bawah ini apakah injektif, surjektif dan bahkan bijektif
    a. Masing–masing orang di bumi dikaitkan dengan bilangan yang menyatakan umurnya.
    b. Masing–masing negara di bumi dikaitkan dengan populasi warganya.
    c. Buku–buku dengan pengarang tunggal dikaitkan dengan pengarangnya.
    d. Masing–masing negara di dunia dikaitkan dengan kepala negaranya.
    e. Masing -masing negara di dunia dikaitkan dengan kepala pemerintahannya.

22. Diketahui himpunan $A = \{ a, b, c \}$; $B = \{ x, y, z \}$ dan $C = \{ r, s, t \}$ fungsi $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ yang didefinisikan dengan $f = \{(a,y),(b,x),(c,y)\}$ dan $g = \{(x,s),(y,t),(z,r)\}$ tentukanlah :
    a. fungsi komposisi $(g \circ f) : A \to C$
    b. range dari $(g \circ f)$

23. Suatu fungsi f dan g di dalam himpunan $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ yang masing-masing di definisikan sebagai berikut
    $f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 3, f(4) = 1$ dan $f(5) = 2$
    $g(1) = 4, g(2) = 1, g(3) = 1, g(4) = 2$ dan $g(5) = 3$

    Tentukanlah fungsi komposisi $f \circ g$ dan $g \circ f$

24. Fungsi – fungsi f dan g di dalam himpunan bilangan real yang didefinisikan sebagai berikut : $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 – 2$. Tentukan rumus-rumus fungsi $(f \circ g)$ dan $(g \circ f)$

25. Fungsi – fungsi f dan g di dalam himpunan bilangan real yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^2 + 2x – 3$dan $g(x) = 3x – 4$ maka tentukanlah :
    a. $(g \circ f)(2)$ dan $(f \circ g)(2)$
    b. $(g \circ f)(\mathrm{x})$ dan $(f \circ g)(\mathrm{x})$

26. Diketahui $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ dan f sebuah fungsi dalam A yang didefinisikan sebagai berikut: $f = \{(1,4),(2,1),(3,4),(4,2)(5,4)\}$.
    Tentukanlah :
    a. $f^{-1}(2)$ b. $f^{-1}(3)$ c. $f^{-1}(4)$ d. $f^{-1}(\{1,2\})$ e. $f^{-1}(\{2,3,4\})$

27. Diketahui A = { 1,2, 3, 4, 5} dan fungsi f, g dan h di dalam A yang masing-masing didefinisikan sebagai berikut :
    a. f = {(1,2),(2,3),(3,2),(4,5),(5,1)}
    b. g = {(1,3),(2,2),(3,1),(4,4),(5,4)}
    c. h = {(1,2),(2,4),(3,3),(4,5),(5,1)}

    Jika mungkin tentukan fungsi – fungsi inversnya.
28. Diketahui fungsi–fungsi di dalam A = [–1, 1] masing–masing didefinisikan sebagaimana di bawah ini. Manakah fungsi-fungsi berikut yang memiliki fungsi invers ?

    a. $f_1(x) = x^2$ d. $f_4 = \sin x$

    b. $f_2(x) = x^3$ e. $f_5 = \sin(\frac{\pi x}{2})$

    c. $f_3(x) = x^4$
29. Ambillah A = **R** – {2} dan B = **R** – {1}, dan misalkan $f : A \to B$ didefinisikan oleh $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$.

    Maka apakah f adalah fungsi bijektif ?. Tentukan rumus yang mendefinisikan f^{-1} ?
30. Fungsi f dan g pada bilangan real didefinisikan dengan $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ dan $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

    Tentukan: a. f^{-1} dan g^{-1}
    b. $(g \circ f)^{-1}$ dan $(f \circ g)^{-1}$
    c. Tentukan daerah asal dan hasil dari f, g, $f \circ g$ dan $g \circ f$

Untuk mengukur pencapaian Tugas Akhir Anda:

Cocokkan jawabab Anda dengan kunci yang terdapat pada bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban Anda yang benar. Untuk menghitung *pencapaian* Anda gunakan rumus di bawah ini:

Capaian Anda = $\dfrac{1}{30}$ ×(banyaknya jawaban Anda yang benar) × 100%

Jika tingkat pencapaian Anda 75% atau lebih, bagus!, Anda telah menyelesaikan modul ini dengan baik. Nantikan modul berikutnya!

Daftar Pustaka

Keedy, Merrin L. et.al. 1986. *Algebra and Trigonometry.* Menlo Park, California: Addison-Wesley Publising Company

Krismanto, Al. 2003. *Aljabar (Modul Penataran Guru Matematika SMP).* Yogyakarta: PPPG Matematika

Nedi Sunaedi et.al. 1992. *Aljabar untuk Sekolah Menengah Umum Tingkat Pertama (SMP).* Bandung : Penerbit Pakar Raya

Spiegel, Murray R. 1956. *Theory and Problems of College Algebra* (Edisi Terjemahan oleh Kasir Iskandar, 1999), Jakarta: Penerbit Erlangga

Sri Widodo. *Diktat Ilmu Aljabar dan Ilmu Ukur Analit.* Surakarta: Stc S.W

Vance, Elbridge P. 1962. *Modern Algebra and Trigonometry.* Massachusetts: Addison Wesley Publishing Company Co.

Zuckerman, Martin M. 1985. *Algebra and Trigonometry.* New York: John Wiley

LAMPIRAN 1

Hukum-Hukum Dasar dalam Aljabar

Pada aljabar elementer ini, semua hukum atau aturan dasar berkaitan dengan operasi hitung aljabar adalah berlakunya 11 sifat yang disebut *aksioma lapangan (field)*. Dalam himpunan bilangan real **R** didefinisikan dua operasi hitung yaitu *penjumlahan* (yang dilambangkan dengan "+") dan *perkalian* (yang dilambangkan dengan "×" , atau dilambangkan dengan "•" , dan dalam aljabar kadang-kadang tidak ditulis). Himpunan bilangan real **R** bersama operasi binar *penjumlahan* (+) dan *perkalian* (×) ini membentuk suatu *sistem aljabar.*

1. Aksioma Lapangan (Field)

Ada 11 sifat dalam sistem aljabar bilangan real:

a. *Sifat Tertutup (Closure)*

Untuk setiap a, $b \in$ **R**, berlaku $a + b \in$ R dan $a \bullet b \in$ **R**. Di sini berlaku sifat hasil penjumlahan setiap dua bilangan real merupakan bilangan
real, demikian juga hasil perkalian setaiap dua bilangan real juga berupa bilangan real pula.

b. *Sifat Pengelompokan (Asosiatif)*

Untuk setiap a, b, $c \in$ **R**, berlaku:

1) $a + (b + c) = (a + b) + c$
2) $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

c. *Sifat Komutatif*

Untuk setiap a, $b \in$ **R**, berlaku:

1) $a + b = b + a$
2) $a \times b = b \times a$

d. *Adanya elemen netral*

1) elemen netral penjumlahan (elemen nol) adalah 0 dengan sifat untuk setiap $a \in$ **R**, $a + 0 = 0 + a = a$

2) elemen netral perkalian (elemen satuan) adalah 1 dengan sifat untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ berlaku: $a \times 1 = 1 \times a = a$

e. *Adanya Elemen Invers*

1) Untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ mempunyai invers aditif (negatifnya) $-a$ (dibaca negatif a), sedemikian hingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$
2) Untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ dan $a \neq 0$, mempunyai invers perkalian (kebalikan): $\frac{1}{a}$ sedemikian hingga $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$

f. Sifat Distributif

Berlakunya sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan baik kiri maupun kanan, untuk setiap $a, b, c \in \mathbf{R}$:

1) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
2) $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

2. Beberapa Teorema yang Diturunkan dari Aksioma Lapangan

Teorema I: **Untuk setiap $a \in \mathbf{R}$, $a \bullet 0 = 0$**

Bukti: Untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ berlaku:

$a + 0 = a$	(0 elemen netral aditif)
$a \times (a + 0) = a \times a$	(kedua ruas dikalikan dengan a)
$a \times a + a \bullet 0 = a \times a$	(distributif)
$-(a \times a) + (a \times a) + a \bullet 0 = -(a \times a) + (a \times a)$	(kedua ruas ditambah $-(a\times a)$)
$0 + a \bullet 0 = 0$	(sifat elemen invers)
$a \bullet 0 = 0$ (qed)	(sifat netral aditif)

Teorema II (Sifat dasar penyelesaian persamaan):

Untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$, jika $a \bullet b = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$

Bukti :

(i) Jika $a = 0$ maka $a \times b = 0 \times b = 0$ (sifat I)

(ii) Demikian juga jika $b = 0$ maka $a \times b = 0$, kenyataan ini menunjukkan baik jika $a = 0$ dan $b \neq 0$ atau sebaliknya $b = 0$ dan $a \neq 0$ maka hasil kali $a \times b = 0$.

(iii) Jika $a \neq 0$ maka $\frac{1}{a}$ ada, sehingga dari $a \bullet b = 0$, akan dipenuhi

$\frac{1}{a} \times (a \times b) = \frac{1}{a} \times 0$ (kedua ruas dikalikan $\frac{1}{a}$)

$(\frac{1}{a} \times a) \times b = \frac{1}{a} \times 0$ (asosiatif perkalian)

$1 \times b = 0$ (invers kali dan sifat I)

$b = 0$ (sifat elemen satuan)

(iv) Dengan jalan yang sama dapat ditunjukkan, bahwa jika $b \neq 0$ dan $a \bullet b = 0$ maka dapat dipastikan $a = 0$, sehingga dari (i), (ii), (iii) dan (iv) terbuktilah sifat di depan.

Teorema III: **Untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$, berlaku :**

(i) $(-a) \bullet b = -(a \bullet b)$

(ii) $a \bullet (-b) = -(a \bullet b)$

(iii) $(-a) \bullet (-b) = a \bullet b$

Bukti:

(i) $(-a) + a = 0$, untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ (sifat invers aditif)

$((-a) + a) \times b = 0 \times b$ (kedua ruas dikalikan b)

$(-a) \times b + a \times b = 0$ (distributif dan sifat I)

$(-a) \times b + (a \times b) + (-(a \times b)) = 0 + (-(a \times b))$ (kedua ruas ditambah $-(a \times b)$)

$(-a) \times b + 0 = -(a \times b)$ (sifat invers dan netral aditif 0)

$(-a) \times b = -(a \times b)$ (sifat netral aditif 0)

(ii) Dengan menukar a dengan b pada bukti (i) maka berakibat (ii) terbukti

(iii) $(-b) + b = 0$ (sifat invers aditif)

$(-a)\bullet((-b) + b) = (-a) \bullet$ (kedua ruas dikalikan $-a$)

$(-a) \bullet (-b) + (-a)\bullet b = 0$ (distributif dan sifat I)

$(-a)\bullet(-b) + (-a)\bullet b + a\bullet b = 0 + a\bullet b$ (kedua ruas ditambah $a\bullet b$)

$(-a)\bullet(-b) + ((-a)+a)\bullet b = a \bullet b$ (distributive dan netral aditif 0)

$(-a)\bullet(-b) + 0\bullet b = a \bullet b$ (invers jumlah)

$(-a)\bullet(-b) + 0 = a \bullet b$ (sifat I)

$(-a)\bullet(-b) = a\bullet b$ (qed) (identitas aditif 0)

3. Bentuk Aljabar

Beberapa istilah dan pengertian yang perlu dimengerti kaitannya dengan beberapa penyataan dalam aljabar adalah :

a. **Ekspresi Aljabar** adalah sebuah gabungan bilangan biasa dan huruf-huruf yang dipasangkan dengan bilangan-bilangan tersebut, demikian juga penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian dua ekspresi, pemangkatan dan penarikan akar dari dari sebuah, dua atau lebih ekspresi aljabar, adalah merupakan ekspresi pula.

Contoh ekspresi:

$3x^2 - 5xy + 2y^4$, $2a^3b^5$, $\dfrac{5xy+3z}{2a^3-c^2}$, dan sebagainya

Dua buah bentuk ekspresi aljabar (disebut juga pernyataan aljabar) E_1 dan E_2 yang memuat huruf dikatakan ekuivalen (dilambangkan dengan " $\Leftrightarrow$ ") jika dengan substitusi pada keduanya menghasilkan nilai yang sama.

Contoh: $(2x + y)^2$ adalah ekuivalen dengan $4x^2 + 4xy + y^2$ karena untuk setiap $x,y \in \mathbf{D}$ (D = domain) kedua hasil substitusinya sama.

Mengacu pada sifat-sifat relasi, maka relasi ekuivalensi adalah merupakan relasi yang ekuivalen, yaitu relasi yang mempunyai sifat :

1) *refleksif,* yaitu setiap ekspresi ekuivalen dengan dirinya sendiri ($E_1 \Leftrightarrow E_1$)
2) *simetris,* jika $E_1 \Leftrightarrow E_2$ akan berakibat $E_2 \Leftrightarrow E_1$
3) *transitif,* jika $E_1 \Leftrightarrow E_2$ dan $E_2 \Leftrightarrow E_3$ maka akan berakibat $E_1 \Leftrightarrow E_3$

Sebagaimana telah kita ketahui setiap relasi yang dipenuhi sifat-sifat *refleksif, simetris* dan *transitif* dikatakan relasi yang ekuivalen.

b. **Pernyataan (kalimat deklaratif, statement)** adalah kalimat (berita) yang bernilai benar saja atau salah saja (tidak sekaligus benar dan salah). Dan kebenaran yang diacunya adalah kecocokan dengan pernyataan itu dengan keadaan yang sebenarnya.

Contoh :

a. $4 + 7 = 11$ (pernyataan bernilai benar)
b. $4^2 < 11$ (pernyataan bernilai salah)
c. $25 : 5 = 4$ (pernyataan bernilai salah)

c. **Konstanta** adalah lambang yang mewakili (menunjuk) anggota tertentu dari semesta pembicaraan

d. **Peubah (variabel)** adalah lambang yang mewakili (menunjuk) anggota sembarang dari semesta pembicaraan.
Contoh ekspresi aljabar dalam semesta bilangan Real: $2x^2 - 3x + 7 = 0$, berarti x adalah peubah (variable) sedangkan 2, 3, 7, dan 0 adalah konstanta

e. **Kalimat terbuka** adalah kalimat yang didalamya mengandung variabel dan akan berubah menjadi pernyataan jika variabel tersebut disubstitusi dengan konstanta.
Contoh:
$2x + 3 = 7$ adalah anak kalimat terbuka sebab jika variabel x disubstitusi dengan konstanta (misalnya 3) maka $2 \,.\, 3 + 3 = 7$ adalah pernyataan yang bernilai salah.

f. **Persamaan** adalah kalimat terbuka yang menggunakan relasi "sama dengan" (dilambangkan dengan "="), dapat juga persamaan dipandang sebagai dua ekspresi aljabar (bentuk aljabar) yang dihubungkan dengan tanda "=", sehingga bentuk umum persamaan adalah $E_1 = E_2$ dengan paling sedikit satu di antara E_1 atau E_2 memuat peubah. Dan jika $E_1 = E_2$ tetapi kedua E_1 ataupun E_2 tidak memuat peubah disebut suatu **kesamaan.** Sedangkan persamaan yang bernilai benar untuk setiap anggota semesta disebut **identitas**
Contoh:

a. $2x^3 - 16 = 0$	merupakan suatu persamaan
b. $4 + 15 = 19$	merupakan suatu kesamaan
c. $x^2 + 9 \geq 6x$	merupakan suatu identitas (sebab untuk setiap bilangan real x, pernyataan disamping akan bernilai benar)

g. **Pertidaksamaan** adalah suatu kalimat terbuka yang menggunakan relasi : $>, <, \geq, \leq$ atau $\neq$

h. **Penyelesaian** adalah konstanta (konstanta-konstanta), dari anggota semestanya yang jika disubstitusikan ke dalam variable dari kalimat terbukanya, akan tebentuk pernyataan yang bernilai benar. Penyelesaian dari suatu persamaan biasa disebut **akar-akar persamaan.** Sedangkan himpunan dari semua penyelesaian dari suatu kalimat terbuka disebut **himpunan penyelesaian**
Contoh :
–1 dan 3 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 2x - 3 = 0$, sebab, baik $(-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$ maupun $3^2 - 2.3 - 3 = 0$ keduanya pernyataan bernilai benar

Untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$, berlaku $a + b \in$ R dan $a \bullet b \in \mathbf{R}$. Di sini berlaku sifat hasil penjumlahan setiap dua bilangan real merupakan bilanga

LAMPIRAN 2

Relasi Ekuivalensi

A. Refleksifitas Relasi

1. Relasi Refleksif :

Relasi R pada A disebut suatu relasi refleksif, jika untuk setiap $a \in A$ dipenuhi $(a,a) \in$ R , jadi ini berarti bahwa untuk tiap elemen $x \in$ R harus berlaku xRx.

Contoh 1

Jika A = { 1, 2, 3, 4, 5} dan R = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)}, maka R adalah suatu relasi yang refleksif.

Contoh 2

Jika A = { garis-garis pada bidang V}, dan suatu relasi R pada A yang ditentukan oleh kalimat terbuka "x sejajar y", maka relasi R adalah suatu relasi yang refleksif sebab untuk setiap $g \in A$ akan berlaku $g//g$.

Contoh 3

Jika A = {manusia}, dan suatu relasi R pada A yang ditentukan oleh kalimat terbuka "x sebaya y", adalah relasi refleksif sebab setiap manusia akan sebaya dengan dirinya sendiri.

B. Simetrisitas Relasi

1. Relasi Simetri

Relasi R pada himpunan A dikatakan relasi yang simetris, jika untuk setiap $a,b \in A$, jika $(a,b) \in$ R maka $(b,a) \in$ R

Contoh 1.

Jika A = {1, 2, 3, 4} suatu relasi R pada A disajikan dengan himpunan pasangan berurut R = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2)}, maka relasi R adalah relasi yang simetris.

Contoh 2

Jika A = { garis-garis pada bidang V}, dan relasi R pada A didefinisikan oleh kalimat terbuka "garis a sejajar garis b", relasi R ini adalah relasi yang simetris sebab untuk setiap pasang garis $a,b \in A$, akan berlaku: $a//b \Rightarrow b//a$.

Contoh 3

Jika A = { manusia}. Relasi R pada A yang ditentukan dengan kalimat terbuka "x bersaudara kandung y" adalah relasi simetris, sebab setiap pasangan manusia jika a bersaudara kandung b, maka b pasti akan bersaudara kandung dengan a.

2. Relasi Anti Simetris.

Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan sebagai **relasi yang anti simetris** jika dipenuhi $(a,b) \in \mathrm{R}$ dan $(b,a) \in \mathrm{R}$ maka berarti $a = b$

Contoh 1

Misalkan N = { bilangan asli }, dan relasi R pada N yang didefinisikan oleh "x habis dibagi y", maka relasi R adalah relasi yang anti simetris sebab jika a habis dibagi b dan b habis dibagi a berarti $a = b$.

Contoh 2

Relasi R = {1,3), (4,2), (4,4), (2,4)} pada A = { 1, 2, 3, 4} bukan suatu relasi yang anti simetris sebab $(4,2) \in \mathrm{R}$ dan $(2,4) \in \mathrm{R}$.

Contoh 3

Misalkan A adalah suatu keluarga himpunan, dan relasi R pada A yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "x adalah himpunan bagian dari y", maka R adalah relasi anti semetris sebab untuk tiap dua himpunan jika $A \subset B$ dan $B \subset A$ maka $A = B$

C. Transitifitas Relasi

Relasi Transitif

Relasi R pada himpunan A dikatakan suatu relasi yang **transitif** jika untuk setiap tripel $a,b,c \in A$ dipenuhi: $(a,b) \in \mathrm{R}$ dan $(b,c) \in \mathrm{R} \Rightarrow (a,c) \in \mathrm{R}$

Contoh 1

Relasi R = { (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (1,3),(3,1),(3,3),(2,3),(3,2),(3,3)} pada A = {1,2,3} adalah suatu relasi yang transitif..

Contoh 2

Jika A = { garis-garis pada bidang V}, dan suatu relasi R pada A yang didefinisikan oleh kalimat terbuka " garis x sejajar y" adalah relasi yang transitif , sebab untuk setiap tripel garis $a,b,c \in A$ akan dipenuhi: $a//b$ dan $b//c \Rightarrow a//c$

Contoh 3

Jika A = {manusia} dan relasi R pada A yang didefinisikan oleh "x adalah adik kandung y", maka relasi R adalah transitif sebab untuk setiap tiga orang anak manusia jika A adik kandung B, sedangkan B adalah adik kandung C maka tentulah A itu adik kandung C.

D. Ekuivalensi.

Relasi R pada himpunan A dikatakan sebagai **relasi equivalen,** jika R memenuhi sifat- sifat sebagai berikut:

a. R adalah refleksif, yaitu untuk setiap $a \in \mathrm{A}, (a,a) \in \mathrm{R}$
b. R adalah simetris, yaitu untuk setiap $a,b \in \mathrm{A}, (a,b) \in \mathrm{R} \Rightarrow (b,a) \in \mathrm{R}$
c. R adalah transitif, yaitu untuk setiap
   $a,b,c \in \mathrm{A}, (a,b) \in \mathrm{R} \,\&\, (b,c) \in \mathrm{R} \Rightarrow (a,c) \in \mathrm{R}$

Contoh 1

Jika R = { bilangan real} dan relasi R pada **R** yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "$x = y$", maka relasinya adalah relasi ekuivalen sebab untuk setiap bilangan real akan dipenuhi:

a. $a = a$ (relasi refleksif)
b. Jika $a = b$ maka $b = a$ (relasi simetris)
c. Jika $a = b$ dan $b = c$ maka $a = c$ (relasi transitif)

Contoh 2

Jika A = { segitiga-segitiga pada bidang Euclid}, dan relasi R pada A didefinisikan oleh kalimat terbuka "x kongruen dengan y", adalah relasi yang ekuivalen sebab untuk setiap segitiga yang terletak pada suatu bidang,

a. $\Delta ABC \cong \Delta ABC$
b. Jika $\Delta ABC \cong \Delta KLM$ maka $\Delta KLM \cong \Delta ABC$
c. Jika $\Delta ABC \cong \Delta KLM \,\&\, \Delta KLM \cong \Delta PQR$ maka $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

Contoh 3

Jika A = {manusia} dan relasi R pada A yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "x sebaya dengan y" adalah relasi ekuivalen sebab, untuk setiap manusia P, Q dan R:

a. P sebaya dengan dirinya sendiri.
b. Jika P sebaya dengan Q maka pastilah Q sebaya dengan P.
c. Jika P sebaya dengan Q dan Q sebaya dengan R pastilah antara P sebaya dengan R.

LAMPIRAN 3

Kunci Jawab

Latihan 1

1. –
2. a. {–7, 4} b. $\{\frac{8}{5}, 5\}$ c. { } d. {–3} e. $\{\frac{3}{2}p, -\frac{2}{3}p\}$
3. –4 dan –17
4. Ukuran 10 kaki × 25 kaki
5. Penjang kaki-kakinya: 16 inci dan 30 inci

Latihan 2

1\. a. $x \geq 0$ b. $x \geq 0$

2\. a $\{0, \frac{8}{5}\}$ b. {6,2} c. {4}

3\. {2}

4\. $\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{422}$

5\. $\{\frac{-4 \pm 2\sqrt{86}}{41}\}$

6\. {10}

7\. {3}

8\. {2}

9\. {3}

10\. $\{x \mid x \geq 5, x \in R\}$

Latihan 3

1. –
2. $a \geq b \Rightarrow a - b \geq 0$ ......(1)
   $b \geq a \Rightarrow b - a \geq 0$ ....(2)
   Dari (1) dan (2) ini benar apabila $a - b = b - a = 0$,
   atau dengan kata lain $a = b$

3. $a > b \Rightarrow a - b > 0$
$\left.\begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \end{array}\right\} a + b > 0$
$\Bigg\}\ (a + b)(a - b) > 0 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$

4. Bukti: Dari $x > y \Rightarrow x + x > x + y \Rightarrow 2x > x + y$ ....(1)
$x > y \Rightarrow x + y > y + y \Rightarrow x + y > 2y$ ....(2)
Dari (1) dan (2) diperoleh $2x > x + y > 2y$, sehingga $x > \frac{1}{2}(x + y) > y$

5. Bukti: $\left.\begin{array}{l} x \in R \\ y \in R \end{array}\right\}$ $(x - y) \in R \Rightarrow (x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$
$\Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$

6. a. $x < 3$ b. $x \geq 2$ c. $0 < x < 2$
7. a. $2 \leq x < 9$ b. $1 < x \leq 3$
8. a. $-4 \leq x < 14$ b. $5 \leq x \leq 10$ c. $x \geq 2$

Latihan 4
1. $x \leq -3$ atau $x > 2$
2. $-2 < x \leq 1$ atau $2 < x \leq 5$
3. $x < -2$ atau $1\frac{1}{2} \leq x < 3$
4. $x < -3$ atau $\frac{13}{16} < x < 1\frac{1}{3}$
5. $x < -\frac{1}{4}$ atau $x > 0$
6. $-\frac{3}{11} < x < -\frac{2}{9}$
7. $-1 < x \leq 0$
8. $-1 < x < 0$
9. $x < -6$ atau $\frac{-3-\sqrt{37}}{2} < x \leq 1\frac{1}{3}$
10. $x < -3$ atau $-1 < x < 1$ atau $x \geq 0$

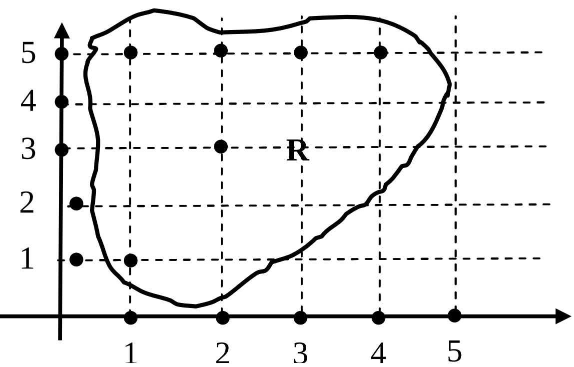
Latihan 5
1. $-3 \leq x < -1$
2. $x < -10\frac{1}{2}$
3. $4 - \sqrt{6} < x < 4 + \sqrt{6}$

4. $x > 7\frac{1}{3}$ atau $x \leq -8$
5. $x \leq -4$ atau $3 \leq x \leq 12$
6. $x < -\frac{3}{4}$
7. $-8 \leq x < \dfrac{-11-\sqrt{105}}{4}$ atau $\dfrac{-11+\sqrt{105}}{4} < x \leq 0$
8. $-\frac{1}{6} < x \leq 0$ atau $x \geq 4$
9. $-2\frac{1}{8} \leq x < 1$ dan $x \neq 0$
10. $x \geq 35$ atau $x = 3$

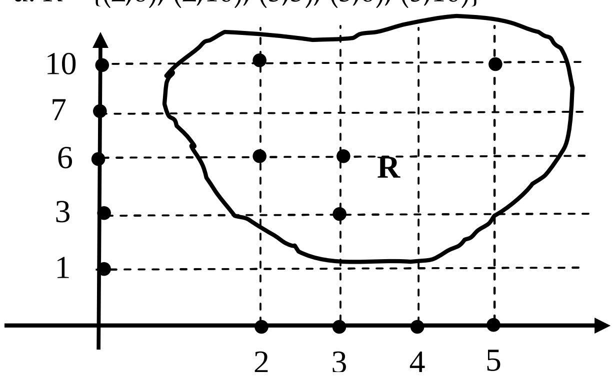
Latihan 6

1. a. R = {(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,5), (4,5)}

   b.

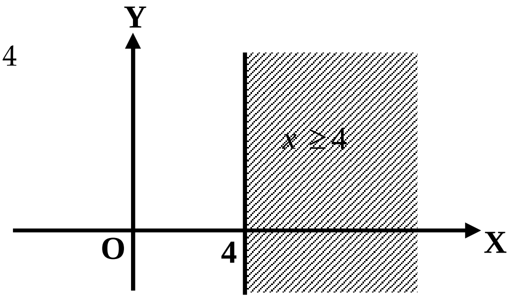


2. a. R = {(2,6), (2,10), (3,3), (3,6), (5,10)}

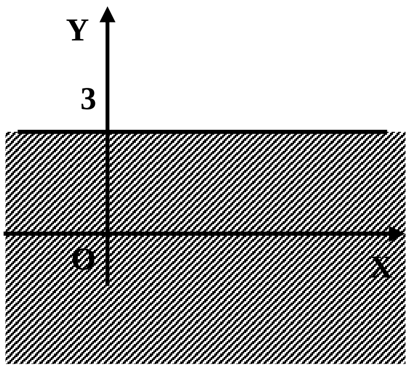


3. a. R = {(a,b), (b,a), (b,b), (b,d), (c,c), (d,a), (d,b)}
   (i) salah, (ii) benar, (iii) salah, (iv) benar
   b. $\{x \mid (x,b) \in R\} = \{a, b, d\}$
   c. $\{x \mid (d,x) \in R\} = \{a, b\}$

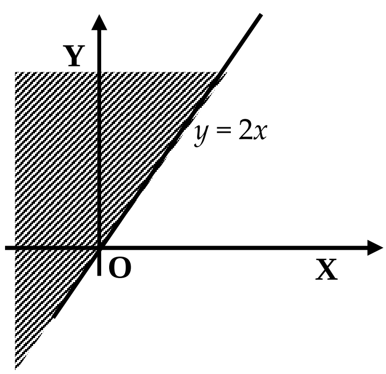
4. a. $x \geq 4$



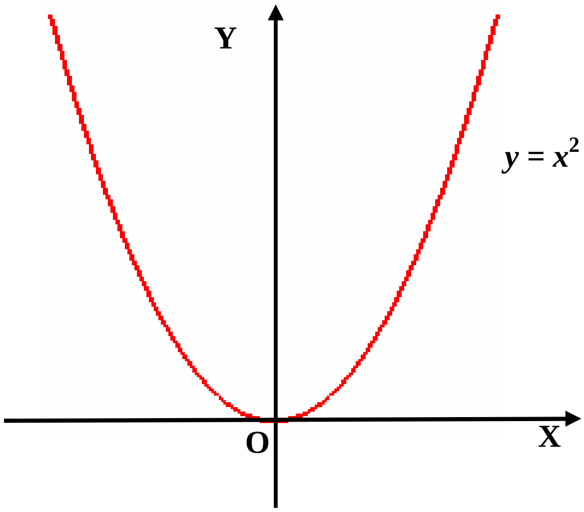
b. $y \leq 3$



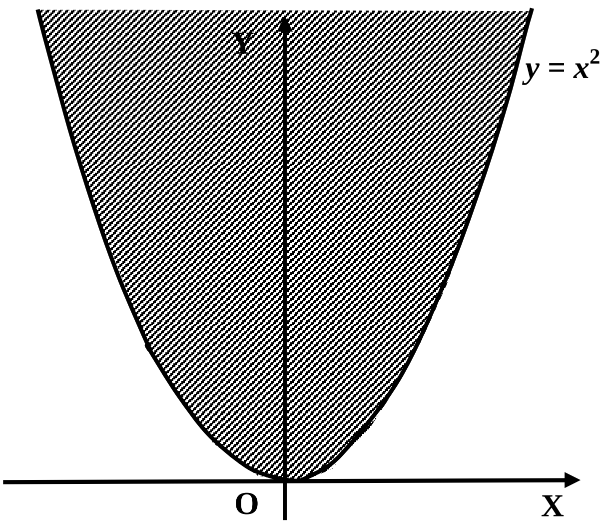
c. $y \geq 2x$



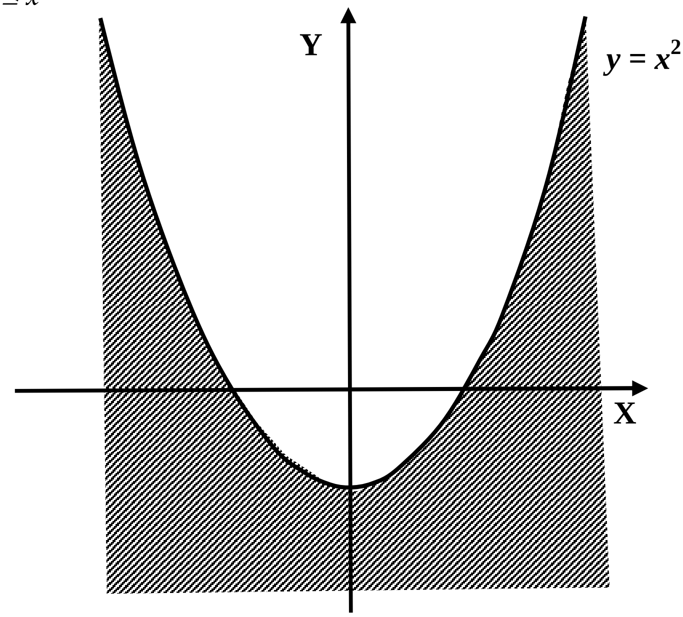
d. $y = x^2$



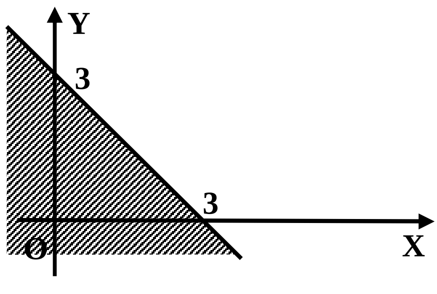
e. $y \geq x^2$



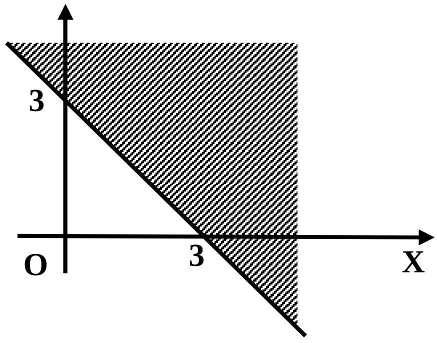
f. $y \leq x^2$



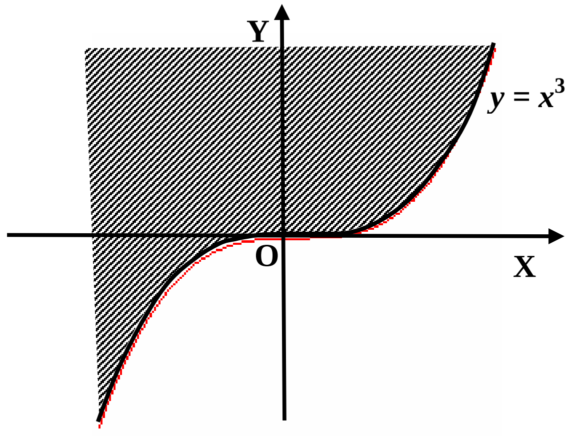
g. $y \leq 3 - x$



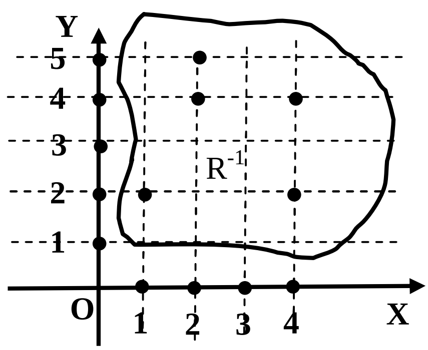
h. $y \geq 3 - x$



i. $y \geq x^3$

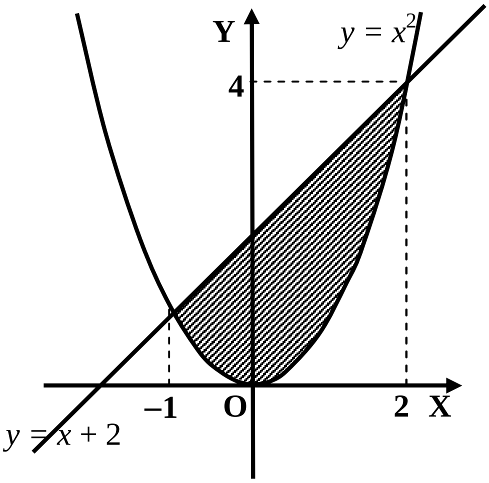


5. R = {(1,4), (1,5), (3,7), (4,5), (4,6), (7,6)}
   a. Domain dari relasi R = {1, 3, 4, 7}
   b. Range dari relasi R = { 4, 5, 6, 7}
   c. Relasi invers R^{-1} = {(4,1), (5,1), (5,4), (6,4), (6,7)}
6. a. Domain relasi R = {2, 4, 5}
   b. Range relasi R = {1, 2, 4]
   c. Relasi invers R^{-1} = {(1,2), (2,4), (2,5), (4,2), (4,4)}
   d.



7. a. Domain dari R = $\{x \mid -3 \leq x \leq 3, x \in R\}$
   b. Range dari R = $\{y \mid -2 \leq y \leq 2, y \in R\}$
   c. Relasi inversnya $R^{-1} = \{(x,y) \mid 9x^2 + 4y^2 = 36\}$

8. R = {(2,4), (4,3), (6,2), (8,1)}
   a. Domain dari R = {2, 4, 6, 8}
   b. Range dari R = {1, 2, 3, 4}
   c. Relasi inversya R^{-1} = {(1,8), (2,6), (3,4), (4,2)} atau dengan kalimat terbuka "$2x + y = 10$"
9. $R_1 = \{(x,y) \mid y \geq x^2\}$
   $R_2 = \{(x,y) \mid y \leq x + 2\}$
   Sketsa dari $R_1 \cap R_2$



Domain dari $R_1 \cap R_2 = \{x \mid -1 \leq x \leq 2, x \in R\}$
Range dari $R_1 \cap R_2 = \{y \mid 0 \leq y \leq 4, y \in R\}$

Tugas Akhir

1. a. R_1 bukan fungsi, b. R_2 fungsi, c. R_3 fungsi
2. a. $f(x) \rightarrow x^3$
   b. $f(x) = 3$
   c. $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ jika } x > 0, x \in R \\ 5 \text{ jika } x \leq 0, x \in R \end{cases}$
3. a. $f_1(4) = 16$
   b. $f_2(-3)$ tidak ada
   c. $f_3(t\text{-}3) = (t-3)^2$ untuk $1 \leq t \leq 11$, $t \in R$
4. a. Fungsi f mengawankan setiap bilangan rasional dengan 1 dan bilangan irasional dengan 0
   b. $f(1\frac{1}{2}) = 1$, $f(3{,}1414...) = 1$, $f(\sqrt{3}) = 0$, $f(\pi) = 0$

5. a. $f(2) = 2$, b. $f(4) = 11$, c. $f(-1) = -11$,
   d. $f(-3)` = -3$
6. Ada enam fungsi dari A ke B
7. Daerah hasil R = $\{a, c\}$
8. Daerah hasil $R_g = \{1, 2, 5\}$
9. a. $\{ y \mid -\infty < y < \infty, y \in R\}$
   b. $\{ y \mid -\infty < y < \infty, y \in R\}$
   c. $\{ y \mid 0 < y < \infty, y \in R\}$
   d. $\{ y \mid 1 < y < \infty, y \in R\}$
   e. $\{ y \mid -1 < y < 1, y \in R\}$
10. a. f fungsi injektif (mengapa?)
    b. g bukan fungsi injektif (mengapa?)
    c. h bukan fungsi injektif (mengapa?)
11. a. Bukan fungsi satu-satu
    b. pada prinsipnya bukan fugsi satu-satu, tetapi kenyatan di lapangan fungsi satu-satu.
    c. bukan fungsi satu-satu
    d. fungsi satu-satu
12. f_2 dan f_3 fungsi satu-satu
13. Suatu fungsi konstanta $f : x \rightarrow c$ dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu fungsi satu-satu apabila A suatu *singleton*
14. Tak satupun fungsi $A \rightarrow B$ yang satu-satu
15. $f(A) = B$
16. b dan c
17. Jika $f(A) = \{c\}$
18. Fungsi $f : A \rightarrow B$ yang surjektif adalah: $\{(a,x), (b,x), (c,y)\}$, $\{(a,x), (b,y), (c,y)\}$, $\{(a,y), (b,x), (c,y)\}$, atau $\{(a,x), (b,y), (c,x)\}$
19. a, b, dan d
20. a. fungsi into biasa
    b. fungsi surjektif
    c. fungsi surjektif
    d. fungsi surjektif
    e. fungsi bijektif
22. a. $g \circ f = \{(a,t), (b,s), (c,t)\}$
    b. range dari $g \circ f = \{t, s\}$
23. $f \circ g = \{(1,1), (2,3), (3,3), (4,5), (5,3)\}$
    $g \circ f = \{(1,1), (2,3),(3,1), (4,4), (5,5)\}$

24. $f \circ g: x \to 2x^2 - 3$
    $g \circ f: x \to 4x^2 + 4x - 1$
25. a. $(g \circ f)(2) = 11$
       $(f \circ g)(2) = 5$
    b. $(g \circ f)(x) = 3x^2 + 6x - 9$
       $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 18x + 5$
26. $f^{-1} = \{(1,2), (2,4), (4,1), (4,3), (4,5)\}$
    a. $f^{-1}(2) = 4$
    b. $f^{-1}(3) = 1$ (tidak ada)
    c. $f^{-1}(4) = 1$, $f^{-1}(4) = 3$, $f^{-1}(4) = 5$, invers fungsi f^{-1} bukan berupa fungsi invers.
    d. $f^{-1}(\{1,2\}) = \{2,4\}$
27. a. f tidak punya fungsi invers
    b. g tidak punya fungsi invers
    c. $h^{-1} = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,4)\}$
28. a. f_1 tidak memiliki fungsi invers
    b. $f_2^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$
    c. f_3 tidak memiliki fungsi invers
    d. f_4 tidak memiliki fungsi invers
    e. f_5 memiliki invers yakni $f_5^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin x$
29. Fungsi $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ dari A ke B, merupakan fungsi injektif, sedangkan invers fungsinya yakni $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{x-1}$, dari B ke A juga merupakan fungsi yang injektif, mengingat definisi fungsi dan kenyataan bahwa baik f maupun f^{-1} fungsi injektif, berarti f fungsi bijektif, yang ini berarti f memilki fungsi invers $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{x-1}$.
30. a. $f^{-1}(\text{x}) = 1 - \frac{1}{x}$ dan $g^{-1}(\text{x}) = \frac{1}{1-x}$
    b. $(g \circ f)^{-1}(x) = x = I(x)$ dan $(f \circ g)^{-1}(x) = x = I(x)$
    c. Daerah asal dari:
       1) $D_f = \{x \mid x \neq 1,\ x \in R\}$
       2) $D_g = \{x \mid x \neq 0,\ x \in R\}$
       3) $D_{f \circ g} = \{x \mid x \neq 0,\ x \in R\}$
       4) $D_{g \circ f} = \{x \mid x \neq 1,\ x \in R\}$