PAKET FASILITASI PEMBERDAYAAN KKG/MGMP MATEMATIKA

Pembelajaran Barisan, Deret Bilangan dan Notasi Sigma di SMA

Penulis:

Dra. Puji Iryanti, M.Sc. Ed.

Penilai:

Al. Krismanto, M.Sc.

Editor:

Sri Purnama Surya, S.Pd, M.Si.

Ilustrator:

Fadjar N. Hidayat, S.Si.,M.Ed.

Dicetak oleh **Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika**
Tahun 2008

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
YOGYAKARTA

KATA PENGANTAR Σ

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika dalam melaksanakan tugas dan fungsinya mengacu pada tiga pilar kebijakan pokok Depdiknas, yaitu: 1) Pemerataan dan perluasan akses pendidikan; 2) Peningkatan mutu, relevansi dan daya saing; 3) Penguatan tata kelola, akuntabilitas, dan citra publik menuju insan Indonesia cerdas dan kompetitif.

Dalam rangka mewujudkan pemerataan, perluasan akses dan peningkatan mutu pendidikan, salah satu strategi yang dilakukan PPPPTK Matematika adalah meningkatkan peran Kelompok Kerja Guru (KKG) dan Musyawarah Guru Mata Pelajaran (MGMP) serta pemberdayaan guru inti/ guru pemandu/guru pengembang yang ada pada setiap kecamatan, kabupaten dan kota.

Sebagai upaya peningkatan mutu dimaksud maka lembaga ini diharapkan mampu memfasilitasi kegiatan-kegiatan yang terkait dengan implementasi pengembangan pembelajaran matematika di lapangan. Guna membantu memfasilitasi forum ini, PPPPTK Matematika menyiapkan paket berisi kumpulan materi/bahan yang dapat digunakan sebagai referensi, pengayaan, dan panduan di KKG/MGMP khususnya pembelajaran matematika, dengan topik-topik/bahan atas masukan dan identifikasi permasalahan pembelajaran matematika di lapangan.

Berkat rahmat Tuhan Yang Maha Esa, atas bimbingan-Nya penyusunan Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika dapat diselesaikan dengan baik. Untuk itu tiada kata yang patut diucapkan kecuali puji dan syukur kehadirat-Nya.

Dengan segala kelebihan dan kekurangan yang ada, paket fasilitasi ini diharapkan bermanfaat dalam mendukung peningkatan mutu pendidik dan tenaga kependidikan melalui forum KKG/MGMP Matematika yang dapat berimplikasi positif terhadap peningkatan mutu pendidikan.

Sebagaimana pepatah mengatakan, tiada gading yang tak retak, demikian pula dengan paket fasilitasi ini walaupun telah melalui tahap identifikasi, penyusunan, penilaian, dan editing masih ada yang perlu disempurnakan. Oleh karena itu saran, kritik, dan masukan yang bersifat membangun demi peningkatan kebermaknaan paket ini, diterima dengan senang hati teriring ucapan terima kasih. Ucapan terima kasih dan penghargaan setinggi-tingginya kami sampaikan pula kepada semua pihak yang membantu mewujudkan paket fasilitasi ini, mudah-mudahan bermanfaat untuk pendidikan di masa depan.

Yogyakarta,
Kepala,

KASMAN SULYONO
NIP.130352806

DAFTAR ISI

PENDAHULUAN BAB I

A. Latar Belakang

Menurut lampiran Standar Isi (Permendiknas no. 22 tahun 2006) yang termuat dalam Standar Kompetensi (SK) 4, siswa dapat menggunakan konsep barisan dan deret dalam pemecahan masalah. Termasuk ke dalam materi barisan dan deret adalah Barisan dan Deret Aritmetika dan Barisan dan Deret Geometri. Materi ini dibahas di kelas XII baik di program Ilmu Pengetahuan Alam (IPA), program Ilmu Pengetahuan Sosial (IPS), dan program Ilmu Bahasa. Sebenarnya materi ini sudah diperoleh siswa di kelas IX Sekolah Menengah Pertama (SMP) sehingga bagi siswa Sekolah Menengah Atas (SMA) materi ini bukan hal baru. Hanya karena jarak tiga tahun dari SMP ke SMA yang menyebabkan siswa sering lupa dengan konsep-konsep barisan dan deret baik aritmetika maupun geometri.

Umumnya, para guru matematika SMA tidak mempunyai banyak kesulitan dengan pembelajaran dan materi barisan dan deret aritmetika maupun geometri. Walaupun demikian, masih ada bagian dari materi ini yang sering ditanyakan oleh para guru matematika SMA khususnya dalam pendidikan dan pelatihan (diklat) guru matematika SMA yang diadakan di Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika, Yogyakarta. Bagian materi yang sering ditanyakan adalah pengembangan dari konsep-konsep barisan dan deret baik aritmetika maupun geometri yang digunakan untuk menyelesaikan masalah barisan dan deret. Sedangkan untuk materi notasi sigma, masalah yang sering ditanyakan adalah mengubah bentuk penjumlahan ke bentuk notasi sigma dan penyelesaian soal-soal notasi sigma dengan menggunakan sifat-sifat notasi sigma.

Supaya para guru matematika SMA mendapatkan bahan bacaan dan bahan diskusi yang dapat menjadi alternatif bantuan untuk menyelesaikan masalah yang ditanyakan di atas, perlu ditulis suatu paket yang menyajikan alternatif penyelesaian masalah-masalah itu sekaligus juga memuat soal-soal sejenis untuk latihan.

B. Tujuan Penulisan

Paket ini ditulis dengan tujuan:

1. untuk menjadi bahan diskusi dalam pertemuan Musyawarah Guru Mata Pelajaran (MGMP) Matematika mengenai bagian materi Barisan, Deret Bilangan dan Notasi Sigma yang sering menjadi pertanyaan para guru matematika SMA,
2. untuk membantu para guru matematika SMA mendapatkan tambahan alternatif wawasan pembelajaran Barisan, Deret Bilangan dan Notasi Sigma yang dibahas dengan sudut pandang yang berbeda.

C. Ruang Lingkup Penulisan

Paket ini tidak membahas bagaimana mendapatkan konsep-konsep awal barisan dan deret aritmetika maupun geometri, karena konsep-konsep tersebut dianggap sudah dikuasai dan sebagai prasyarat untuk menyelesaikan masalah yang dibahas. Fokus paket ini pada masalah-masalah yang dihadapi para guru matematika SMA dalam materi Barisan, Deret Bilangan dan Notasi Sigma, khususnya tentang:

1. konteks barisan aritmetika dan geometri,
2. soal-soal yang berhubungan dengan konsep barisan aritmetika dan barisan geometri,
3. barisan selain barisan aritmetika dan geometri,
4. soal-soal yang berhubungan dengan konsep deret aritmetika dan deret geometri,
5. soal-soal yang berhubungan dengan konsep deret geometri tak hingga,
6. menyatakan suatu deret dalam notasi sigma,
7. sifat-sifat notasi sigma dan penggunaannya dalam menyelesaikan soal-soal yang terkait dengan notasi sigma.

D. Cara Pemanfaatan Paket

1. Bacalah baik-baik tujuan pembelajaran dan permasalahan yang disajikan dalam Bab II, III, dan IV.

2. Cobalah untuk menyelesaikan terlebih dulu soal-soal yang sering menjadi permasalahan, setelah itu bandingkanlah jawaban Anda dengan alternatif penyelesaian yang ditawarkan.
3. Selesaikan latihan/tugas yang terdapat dalam setiap bab. Anda dapat membandingkan jawaban yang Anda peroleh dengan jawaban latihan/tugas yang terdapat pada lampiran.
4. Selesaikan tes yang terdapat pada Bab V sebagai tolok ukur pencapaian Anda dalam mempelajari paket ini. Bandingkan jawaban Anda dengan jawaban tes yang terdapat pada lampiran. Anda dinyatakan berhasil bila dapat menjawab dengan benar minimal 75% .
5. Jika Anda mendapat kesulitan dalam mengikuti pembahasan yang disajikan, Anda dapat mendiskusikannya dengan teman sejawat, atau Anda dapat menghubungi penulis dengan alamat email kantor: p4tkmatematika@yahoo.com; alamat email pribadi: emelotirto@yahoo.com; alamat surat: Puji Iryanti, PPPPTK Matematika, Jl. Kaliurang Km.6 Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman 55283, DIY; telepon: (0274) 881717.

BARISAN BILANGAN BAB II

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari paket ini, diharapkan pembaca dapat:

1. menyebutkan contoh konteks barisan aritmetika dan geometri,
2. menyelesaikan soal-soal yang menggunakan konsep barisan aritmetika dan geometri,
3. menentukan rumus suku ke-*n* barisan bilangan yang tidak termasuk barisan aritmetika atau geometri menggunakan konsep fungsi.

B. Permasalahan

Apa saja dalam kehidupan sehari-hari yang dapat menjadi konteks barisan aritmetika dan geometri? Bagaimana menyelesaikan soal-soal yang menggunakan konsep barisan aritmetika dan geometri? Bagaimana menentukan rumus suku ke-n barisan bilangan yang tidak termasuk barisan aritmetika atau geometri menggunakan konsep fungsi? Tiga pertanyaan itu merupakan pertanyaan yang sering ditanyakan dalam pendidikan dan pelatihan (diklat) guru matematika SMA yang diadakan di PPPPTK Matematika.

Untuk membantu menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut, pada bab ini akan disajikan contoh dan alternatif jawabannya.

C. Konteks Barisan Aritmetika dan Geometri

Barisan aritmetika dan geometri, demikian juga deret masing-masing sudah dipelajari oleh siswa SMP di kelas IX. Di kelas XII SMA semester 2, siswa mempelajari kembali materi ini. Terbentang jarak 3 tahun yang dapat membuat siswa lupa tentang konsep-konsep barisan dan deret. Walaupun demikian, guru tidak harus mengajar lagi "mulai dari *a* sampai *z*" materi barisan dan deret aritmetika dan geometri. Bagaimana caranya supaya guru dapat mengelola pembelajaran barisan dan deret ini seefisien mungkin? Salah satu alternatif jawabannya adalah sebelum masuk ke pelajaran ini, guru menugaskan siswa untuk membaca kembali dan menjawab pertanyaan yang sudah disiapkan guru tentang konsep-konsep yang terdapat pada barisan aritmetika maupun geometri. Jadi, sewaktu guru membicarakan barisan-barisan ini, siswa sudah "nyambung" apa yang dibicarakan guru. Waktu yang dialokasikan untuk materi ini dapat lebih difokuskan untuk menyelesaikan masalah-masalah yang berkaitan dengan barisan aritmetika atau geometri. Strategi pelaksanaan sudah jelas, tetapi supaya siswa tertarik untuk mempelajari materi ini maka harus diawali dengan memotivasi siswa mengapa mereka harus mempelajari materi ini. Guru dapat mengatakan bahwa materi ini menjadi prasyarat bagi materi matematika yang lain, misalnya dalam membicarakan pembuktian dengan induksi matematika, hitung keuangan untuk siswa jurusan Ilmu Pengetahuan Sosial dan dalam kehidupan sehari-hari. Pertanyaannya: konteks apa dalam kehidupan sehari-hari yang dapat digunakan untuk barisan aritmetika atau geometri?

Bagi Anda yang pernah naik taksi yang menggunakan argometer, pernahkah Anda memperhatikan perubahan bilangan yang tercantum pada argometer? Apakah bilangan-bilangan itu berganti secara periodik dan apakah pergantiannya menuruti aturan tertentu? Jika Anda memperhatikan mulai dari awal bilangan yang tercantum pada argometer dan setiap perubahan yang terjadi, apa yang dapat Anda simpulkan dari barisan bilangan-bilangan tersebut? Perhatikan bahwa perubahan bilangan-bilangan pada argometer taksi menuruti aturan tertentu. Setiap dua bilangan yang berurutan mempunyai selisih yang tetap. Barisan bilangan yang seperti itu disebut barisan aritmetika.

Iwan mencari rumah temannya di Jalan Gambir no. 55. Setelah sampai di Jalan Gambir ia memperhatikan bahwa rumah-rumah yang terletak di sebelah kanan jalan adalah rumah-rumah dengan nomor urut genap 2, 4, 6, 8, dan seterusnya. Dengan memperhatikan keadaan itu, kearah manakah Iwan mencari rumah temannya? Barisan nomor-nomor rumah di atas baik di sebelah kiri maupun kanan merupakan barisan bilangan aritmetika.

Bagi Anda yang sering menjadi pelanggan warung telekomunikasi, tentu juga melihat apa yang terjadi pada display ongkos percakapan ketika Anda telah tersambung. Angka yang tertera, merupakan tarif awal percakapan. Selanjutnya angka itu berubah menurut aturan tertentu, yaitu tarif pulsa per periode waktu. Ini juga contoh dari kehadiran barisan aritmetika.

Amuba berkembang biak dengan cara membelah diri. Misalkan pertama ada satu amuba. Setelah waktu tertentu, amuba kemudian membelah diri sehingga menjadi dua. Selanjutnya pada waktu tertentu lagi amuba-amuba itu membelah diri lagi, sehingga semuanya menjadi empat dan seterusnya. Jika banyak amuba itu dinyatakan dengan bilangan, diperoleh 1, 2, 4, 8, ... Karena perbandingan antara dua suku berturutan adalah tetap, yaitu 2, maka barisan banyaknya amuba itu adalah barisan geometri.

Diasumsikan bahwa harga tanah mengikuti pola selalu bertambah n% dari tahun sebelumnya. Misalkan untuk mempermudah perhitungan n bernilai 5% dan harga tanah di suatu desa sekarang Rp 200.000,- per meter persegi. Ini berarti setahun lagi harga tanah menjadi Rp 210.000,- per meter persegi. Tahun-tahun berikutnya berturut-turut harga tanah per meter persegi dalam rupiah menjadi 220.500, 231.525, dan seterusnya. Ternyata ini juga adalah contoh barisan geometri.

Tugas 1

Carilah minimal masing-masing satu konteks barisan aritmetika dan barisan geometri.

D. Soal-soal yang Berhubungan dengan Konsep Barisan Aritmetika dan Barisan Geometri

Sekedar mengingatkan Anda, berikut ini adalah rumus-rumus yang dipakai dalam barisan aritmetika dan geometri.

Pada barisan aritmetika:

$$\left.\begin{aligned} b &= u_n - u_{n-1} \\ u_n &= a + (n-1)b \end{aligned}\right\}$$ dengan u_n = suku ke-n, a = suku pertama dan b = beda

Sifat yang berlaku,

$2u_t = u_{t-p} + u_{t+p}$, atau

$u_t = \dfrac{u_{t-p} + u_{t+p}}{2}, t > p, t$ dan p bilangan asli.

Contoh penerapan sifat itu adalah $u_2 = \dfrac{u_1 + u_3}{2}, u_6 = \dfrac{u_2 + u_{10}}{2}$.

Pada barisan geometri:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{u_n}{u_{n-1}} \\ u_n &= ar^{n-1} \end{aligned}\right\}$$ dengan u_n = suku ke-n, a = suku pertama dan r = rasio

Sifat yang berlaku:

$u_t^{\,2} = u_{t-p} \times u_{t+p}, t > p$, t dan p bilangan asli

tetapi **tidak berarti selalu** $u_t = \sqrt{u_{t-p} \times u_{t+p}}$

Contoh penerapan sifat itu adalah $u_3^{\,2} = u_1 \times u_5$.

Cobalah Anda selesaikan dulu soal-soal berikut ini. Kemudian bandingkanlah penyelesaian yang Anda kerjakan dengan penyelesaian yang diberikan setelah soal-soal ini.

1. Seorang ibu membagikan permen kepada 5 orang anaknya menurut aturan barisan aritmetika. Semakin muda usia anak semakin banyak permen yang diperoleh. Banyak permen yang diterima anak kedua 11 buah dan anak keempat 19 buah. Berapakah banyak permen yang diterima oleh anak terkecil?

2. Tetangga Beni mempunyai tiga anak yang umurnya membentuk barisan aritmetika. Lima tahun yang lalu, umur anak tertua sama dengan empat kali umur anak termuda. Umur Beni sekarang adalah jumlah umur ketiga anak itu. Separuh umur Beni sekarang sama dengan jumlah umur ketiga anak lima tahun yang lalu. Berapa umur Beni dan ketiga anak itu?
3. Diketahui barisan bilangan asli kurang dari 125. Tentukan banyak bilangan yang:
   a. habis dibagi 2.
   b. habis dibagi 5.
   c. habis dibagi 2 tetapi tidak habis dibagi 5.
4. Tentukan 8 suku pertama dari suatu barisan aritmetika yang suku ke-2 adalah 42 dan suku ke-6 adalah 72
5. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jika suku tengah dikurangi 5 maka terbentuk barisan geometri dengan rasio 2. Tentukan bilangan-bilangan tersebut.
6. Tiga bilangan membentuk barisan geometri. Jumlah tiga bilangan itu adalah 147 dan hasil kalinya adalah 21952. Tentukan barisan geometri itu!

Sekarang cobalah Anda bandingkan penyelesaian soal-soal di atas dengan penyelesaian yang Anda kerjakan.

1. Seorang ibu membagikan permen kepada 5 orang anaknya menurut aturan barisan aritmetika. Semakin muda usia anak semakin banyak permen yang diperoleh. Banyak permen yang diterima anak kedua 11 buah dan anak keempat 19 buah. Berapa banyak permen yang diterima oleh anak terkecil?

   Penyelesaian:

   Misal permen yang diterima 5 anak tersebut mulai dari anak tertua adalah

   $a, a + b, a + 2b, a + 3b, a + 4b$

   $a + b = 11$ ....1)

   $a + 3b = 19$ ....2)

   Persamaan 2) dikurangkan dengan 1) diperoleh $b = 4$, selanjutnya $a = 7$.

$a + 4b = 7 + 4(4) = 23$

Jadi, banyak permen yang diterima anak terkecil adalah 23 buah.

2. Tetangga Beni mempunyai tiga anak yang umurnya membentuk barisan aritmetika. Lima tahun yang lalu, umur anak tertua sama dengan empat kali umur anak termuda. Umur Beni sekarang adalah jumlah umur ketiga anak itu. Separuh umur Beni sekarang sama dengan jumlah umur ketiga anak lima tahun yang lalu. Berapa umur Beni dan ketiga anak itu?

   Penyelesaian:

   Misal umur Beni adalah x dan umur tiga anak mulai dari anak tertua $p+b$, p, $p-b$. (*diambil pemisalan suku-suku barisan aritmetika seperti ini supaya ketika dijumlahkan akan diperoleh persamaan dalam satu peubah*).

   Keadaan sekarang berlaku

   $x = (p+b) + (p) + (p-b) = 3p$ ...1)

   Juga berlaku $\frac{1}{2}x = 3p - 15$ ...2)

   Lima tahun yang lalu berlaku

   $p+b-5 = 4(p-b-5) \Leftrightarrow 3p - 5b = 15$ ....3)

   Dari penyelesaian 1) dan 2) diperoleh $p = 10$.

   Substitusi nilai p ke 3) diperoleh $b = 3$.

   Umur ketiga anak itu mulai dari yang tertua dalam tahun adalah 13, 10, 7.

   Umur Beni sekarang adalah 30 tahun.

3. Diketahui barisan bilangan asli kurang dari 125. Tentukan banyak bilangan yang
   a. habis dibagi 2.
   b. habis dibagi 5.
   c. habis dibagi 2 tetapi tidak habis dibagi 5.

Penyelesaian:

Barisan bilangan itu adalah 1, 2, 3, 4, ..., 124.

a. Barisan bilangan yang habis dibagi 2 adalah 2, 4, 6, 8, ..., 124.
b. Barisan bilangan yang habis dibagi 5 adalah 5, 10, 15, 20, ..., 120.
c. Barisan bilangan yang habis dibagi 2 tetapi tidak habis dibagi 5 adalah anggota penyelesaian pertanyaan bagian a dikurangi anggota penyelesaian pertanyaan b. Jadi, barisan bilangan yang habis dibagi 2, tetapi tidak habis dibagi 5 adalah
2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18, 22, 24, 26, 28, 32, ... ,118, 122, 124.

4. Tentukan 8 suku pertama dari suatu barisan aritmetika yang suku ke-2 adalah 42 dan suku ke-6 adalah 72.

Penyelesaian:
Salah satu alternatif penyelesaian adalah menggunakan sifat barisan aritmetika:

$$u_3 = \frac{u_2 + u_4}{2}\ ;\ u_4 = \frac{u_2 + u_6}{2}\ ;\ u_5 = \frac{u_4 + u_6}{2}\ .$$

Dari informasi yang ada, suku ke-4 barisan ini diperoleh lebih dulu, yaitu $u_4 = \frac{42+72}{2} = 57$.

Kemudian diperoleh $u_3 = \frac{42+57}{2} = 49{,}5$ dan $u_5 = \frac{57+72}{2} = 64{,}5$.

Dari sini diperoleh beda b = 7,5 dan suku pertama a = 34,5.

Jadi 8 suku pertama barisan itu adalah 34,5; 42; 49,5; 57; 64,5; 72; 79,5; 87.

5. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jika suku tengah dikurangi 5 maka terbentuk barisan geometri dengan rasio 2. Tentukan bilangan-bilangan tersebut.

Penyelesaian:
Misalkan barisan aritmetika adalah: $p - b, p, p + b$ dan barisan geometri adalah: $p - b, p - 5, p + b$ dengan $r = 2$

Oleh karena $\frac{p-5}{p-b} = \frac{p+b}{p-5} = 2$, dari sini diperoleh:

$p - 5 = 2p - 2b \Leftrightarrow p - 2b = -5$ ...1)

$2p - 10 = p + b \Leftrightarrow p - b = 10$ ....2)

Persamaan 1) dikurangkan dengan 2) menghasilkan $b = 15$.

Selanjutnya diperoleh $p = 25$.

Jadi barisan aritmetika itu adalah 10, 20, 40.

6. Tiga bilangan membentuk barisan geometri. Jumlah tiga bilangan itu adalah 147 dan hasil kalinya adalah 21952. Tentukan barisan geometri tersebut!

Penyelesaian:

Misalkan tiga bilangan itu adalah $\frac{p}{r}, p, pr$.

(*diambil pemisalan seperti ini supaya ketika ketiganya dikalikan diperoleh persamaam dalam satu peubah*)

Hasil kali ketiga bilangan itu adalah $p^3 = 21952$

$\Leftrightarrow p = 28$

dengan demikian $\frac{28}{r} + 28 + 28r = 147$

$\Leftrightarrow 28 + 28r + 28r^2 = 147r$

$\Leftrightarrow 28r^2 - 119r + 28 = 0$

$\Leftrightarrow 4r^2 - 17r + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (4r - 1)(r - 4) = 0$

$\Leftrightarrow r = \frac{1}{4}$ atau $r = 4$

Untuk $r = \frac{1}{4}$, barisan bilangan adalah 112, 28, 7.

Untuk $r = 4$, barisan bilangan adalah 7, 28, 112.

Latihan 1

Tentukan penyelesaian soal-soal berikut ini!

1. Seorang ayah memberikan uang saku harian yang berbeda-beda kepada lima anaknya. Uang saku seorang adik Rp 1000,00 kurang dari uang saku yang diterima kakak tepat di atasnya. Jika setiap hari ayah

itu mengeluarkan Rp 17.500,00 untuk uang saku semua anaknya, berapakah uang saku harian anak ke-4?

2. Suatu barisan aritmetika, suku ke-2 adalah 25 dan suku ke-11 adalah 79. Berapa banyak suku barisan ini yang kurang dari 200?

3. Empat buah bilangan positif membentuk barisan aritmetika. Hasil kali bilangan pertama dan keempat adalah 46, dan hasil kali bilangan kedua dan ketiga adalah 144. Tentukan jumlah keempat bilangan tersebut!

4. Di antara bilangan-bilangan 8 dan 173 disisipkan 32 buah bilangan sehingga terjadi barisan aritmetika. Tentukan
   a. beda barisan itu
   b. rumus suku ke-*n*

   (*cobalah dulu pertanyaan a dan b untuk soal yang lebih sederhana, misalkan di antara 2 dan 8 disisipkan 2 bilangan, diantara 2 dan 11 disisipkan 3 bilangan, dan seterusnya sehingga diperoleh kesimpulan cara menentukan beda barisan*)

5. Diketahui barisan bilangan asli kurang dari 150. Tentukan banyak bilangan yang:
   a. habis dibagi 4
   b. habis dibagi 6
   c. habis dibagi 4 tetapi tidak habis dibagi 6

6. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jumlah ketiga bilangan itu sama dengan 12. Jika bilangan ke-3 ditambah dengan 2 maka terbentuk suatu barisan geometri. Tentukan bilangan-bilangan tersebut!

7. Kekayaan seorang pedagang setiap 4 tahun menjadi lipat dua dari jumlah sebelumnya. Kekayaan pedagang itu pada tahun 1997 adalah Rp 200.000,00 Berapakah kekayaannya pada tahun 2021? (*dianggap keadaan ini berlaku sampai tahun itu dan pedagang itu masih hidup*)

8. Sebidang tanah berharga Rp. 20.000.000,00. Setiap tahun harga tanah itu naik 5% dari harga tanah tahun sebelumnya. Berapakah harga tanah itu pada tahun ke-8?

9. Tiga bilangan membentuk barisan geometri yang hasil kalinya 1000. Jika jumlah tiga bilangan itu 35, tentukan bilangan-bilangan tersebut.

10.	Dari suatu barisan geometri diketahui jumlah suku pertama dan ke-6 adalah 244 dan hasil kali suku ke-3 dan ke-4 adalah 243. Tentukan rasio dan suku ke-2.

E. Barisan Selain Barisan Aritmetika dan Geometri

Ada banyak barisan bilangan yang dapat dipelajari, tetapi di SMA siswa minimal harus dapat menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan barisan aritmetika dan geometri. Jika dibutuhkan materi pengayaan tentang barisan bilangan selain barisan aritmetika dan geometri, maka materi berikut ini dapat menjadi alternatif tambahan.

Untuk menentukan suku-suku suatu barisan kita melihat keteraturan pola dari suku-suku sebelumnya. Barisan seperti 2, 4, 7, 11, ... memiliki keteraturan karena beda suku ke-2 dengan pertama adalah 2, beda dari suku ke-3 dengan ke-2 adalah 3, beda suku ke-4 dengan ke-3 adalah 4. Perhatikan juga barisan 1, 2, 5, 12, 27, 58, ... Beda suku ke-2 dengan pertama 1, beda suku ke-3 dengan ke-2 adalah 3, beda suku ke-4 dan ke-3 adalah 7, beda suku ke-5 dan ke-4 adalah 15. Jika masing-masing beda ini dibuat menjadi barisan baru dan dicari lagi selisih masing-masing suku, maka akan terlihat keteraturan barisan ini. Bagaimana menentukan rumus suku ke-*n* barisan-barisan seperti ini? Salah satu cara untuk menentukan rumus umum suku ke-*n* barisan adalah menggunakan **konsep fungsi**.

1. Barisan Bertingkat dengan Landasan Barisan Aritmetika

Untuk menentukan rumus umum suku ke-*n* barisan seperti ini caranya adalah dengan memperhatikan selisih antara dua suku yang berurutan. Bila pada satu tingkat pengurangan belum diperoleh selisih tetap, maka pengurangan dilakukan pada tingkat berikutnya sampai diperoleh selisih tetap. Suatu barisan disebut **berderajat satu (linear)** bila selisih tetap diperoleh dalam satu tingkat pengurangan, disebut **berderajat dua** bila selisih tetap diperoleh dalam dua tingkat pengurangan dan seterusnya.

Bentuk umum dari barisan-barisan itu merupakan fungsi dalam *n* sebagai berikut:

Selisih tetap 1 tingkat $\longrightarrow$ $f(n) = an + b$ atau $u_n = an + b$

Selisih tetap 2 tingkat $\longrightarrow$ $f(n) = an^2 + bn + c$

atau $u_n = an^2 + bn + c$

Selisih tetap 3 tingkat $\longrightarrow$ $f(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$

atau $u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

Perlu diperhatikan bahwa a dan b pada fungsi ini **tidak sama** dengan a = suku pertama dan b = beda pada suku-suku barisan aritmetika yang dibicarakan sebelumnya.

Untuk memahami pengertian barisan berderajat satu, berderajat dua, dan seterusnya perhatikan contoh berikut:

- Barisan 2, 5, 8, 11, ... disebut barisan berderajat satu karena selisih tetap diperoleh pada satu tingkat pengurangan.

  2   5   8   11, ...

  3   3   3   selisih tetap = 3

- Barisan 5, 8, 13, 20, 29, ... disebut barisan berderajat dua karena selisih tetap diperoleh pada dua tingkat pengurangan.

  5   8   13   20   29

  3   5   7   9

  2   2   2   selisih tetap = 2

- Barisan 2, 5, 18, 45, 90, ... disebut barisan berderajat tiga karena selisih tetap diperoleh pada tiga tingkat pengurangan.

  2   5   18   45   90

  3   13   27   45

  10   14   18

  4   4   selisih tetap = 4

Untuk menentukan rumus suku ke-n masing-masing barisan itu dilakukan dengan cara sebagai berikut:

a. Barisan Linear (Berderajat Satu)

Bentuk umum $u_n = an + b$, jadi $u_1 = a + b$, $u_2 = 2a + b$, $u_3 = 3a + b$, $u_4 = 4a + b$, dan seterusnya.

(*i*) $\boxed{a + b}$ $\quad 2a + b \quad 3a + b \quad 4a + b, \ldots$

(*ii*) $\boxed{a} \quad a \quad a$

Rumus umum suku ke-*n* barisan 2, 5, 8, 11, ...dapat ditentukan dengan cara:

(*i*) 2 5 8 11, ...

(*ii*) 3 3 3

(*ii*) $a = 3 \rightarrow$ (*i*) $a + b = 2$

$3 + b = 2 \rightarrow b = -1$, sehingga diperoleh $\boldsymbol{u_n = 3n - 1}$

b. Barisan Berderajat Dua

Bentuk umum $u_n = an^2 + bn + c$. Dengan demikian $u_1 = a + b + c$, $u_2 = 4a + 2b + c$, $u_3 = 9a + 3b + c$, $u_4 = 16a + 4b + c$, dan seterusnya. Identifikasi selisih tetapnya adalah sebagai berikut:

(*i*) $\boxed{a + b + c}$, $4a + 2b + c$, $9a + 3b + c$, $16a + 4b + c, \ldots$

(*ii*) $\boxed{3a + b} \quad 5a + b \quad 7a + b$

(*iii*) $\boxed{2a} \quad 2a$

Rumus umum suku ke-*n* barisan 5, 8, 13, 20, 29, ... dapat ditentukan dengan cara:

(*i*) 5 8 13 20 29

(*ii*) 3 5 7 9

(*iii*) 2 2 2

$(iii)\ 2a = 2$

$a = 1 \rightarrow (ii)\ 3a + b = 3$

$b = 0 \rightarrow (\mathrm{i})\ a + b + c = 5$

$c = 4$, sehingga u_n **= n^2 + 4**

c. Barisan Berderajat Tiga

Bentuk umum barisan berderajat tiga $u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$. Dengan demikian $u_1 = a + b + c + d$, $u_2 = 8a + 4b + 2c + d$, $u_3 = 27a + 9b + 3c + d$, $u_4 = 64a + 16b + 4c + d$, dan seterusnya. Identifikasi selisih tetapnya adalah:

(i) $\boxed{a + b + c + d}$, $8a + 4b + 2c + d$, $27a + 9b + 3c + d$, $64a + 16b + 4c + d$

(ii) $\boxed{7a + 3b + c}$ $\quad 19a + 5b + c \quad 37a + 7b + c$

(iii) $\boxed{12a + 2b}$ $\quad 18a + 2b$

(iv) $\boxed{6a}$

Rumus umum suku ke-n barisan 2, 5, 18, 45, 90, ... dapat ditentukan dengan cara:

(i) 2 5 18 45 90

(ii) 3 13 27 45

(iii) 10 14 18

(iv) 4 4

Dengan menyelesaikan persamaan (iv), (iii), (ii) dan (i) diperoleh

$a = \frac{2}{3}$, $b = 1$, $c = -\frac{14}{3}$ dan $d = 5$ sehingga rumus suku ke-n

$$u_n = \frac{2}{3}n^3 + n^2 - \frac{14}{3}n + 5 = \frac{1}{3}(2n^3 + 3n^2 - 14n + 15)$$

2. Barisan Bertingkat dengan Landasan Barisan Geometri

Ada barisan yang setelah dicari beda antara dua suku berurutan tidak juga diperoleh selisih yang tetap sampai beberapa kali tingkat pengurangan, tetapi beda pada tingkat tertentu itu membentuk suatu barisan geometri.

Contoh 1:

1, 2, 5, 12, 27, 58, 121, ...

1 3 7 15 31 63

2 4 8 16 32

2 4 8 16

2 4 8

Barisan di atas dapat dilihat keteraturannya setelah terjadi pengurangan pada tingkat dua. Tampak bahwa pada barisan itu terdapat unsur 2^n ditambah bilangan tertentu. Barisan seperti itu dirumuskan sebagai $u_n = 2^n + kn$.

Untuk $n = 1 \rightarrow 1 = 2 + k \Leftrightarrow k = -1$

Jadi, rumus suku ke-n barisan itu adalah $u_n = 2^n - n$.

Contoh 2:

5, 10, 17, 28, 47, 82, 149, ...

5 7 11 19 35 67 ...

2 4 8 16 32 ...

2 4 8 16 ...

Seperti pada contoh 1 di atas, barisan seperti ini dirumuskan sebagai $u_n = 2^n + kn$. Untuk $n = 1 \rightarrow 5 = 2 + k \Leftrightarrow k = 3$.

Jadi, rumus suku ke-n barisan itu adalah $\boldsymbol{u_n = 2^n + 3n}$.

Tugas 2

Selidiki apa yang menjadi ciri-ciri barisan yang mempunyai rumus umum $u_n = a^n + bn + c$, dengan a, b, c adalah konstanta dan $a \neq 0$.

Latihan 2

1. Tentukan rumus suku ke-n untuk tiap-tiap barisan berikut ini:
   a. 5, 9, 13, 17, ...
   b. 6, 11, 16, 21, ...
   c. 1, 6, 13, 22, ...
   d. 2, 7, 16, 29, ...
   e. 2, 10, 30, 68, ...
2. Tentukan rumus suku ke-n
   a. barisan bilangan persegi panjang 2, 6, 12, 20, ...
   b. barisan 1, 5, 14, 30, ...
3. Tentukan rumus suku ke-n dari:
   a. 5, 13, 33, 69, ...
   b. −3, −1, 3, 11, ...
   c. 4, 7, 12, 21, ...

F. Kegiatan dalam Materi Barisan sebagai Fungsi

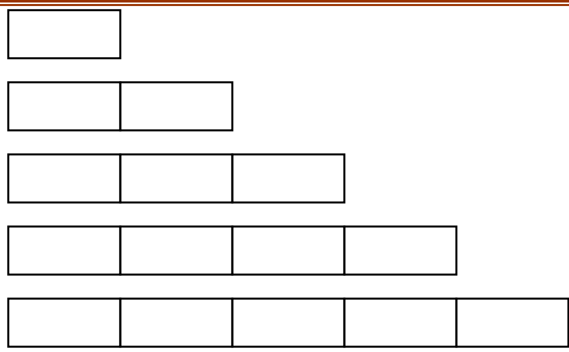
Kegiatan yang bersifat eksplorasi dapat menjadi suatu pilihan untuk mempelajari barisan menggunakan konsep fungsi. Berikut ini beberapa contoh kegiatan eksplorasi yang disajikan dalam bentuk lembar kerja.

Lembar Kerja 1

Materi	: Barisan sebagai Fungsi
Tujuan Pembelajaran	: Menyatakan rumus suku ke-n suatu barisan menggunakan fungsi
Waktu	: 10 menit
Petunjuk	: Bacalah dan pahami terlebih dahulu soal di bawah ini, kemudian kerjakan apa yang diminta.

Langkah-langkah:

1. Perhatikan semua persegi panjang di bawah ini, kemudian lengkapi tabel di bawahnya.



Banyak persegi panjang kecil	Banyak seluruh persegi panjang
1	
2	
3	
4	
5	

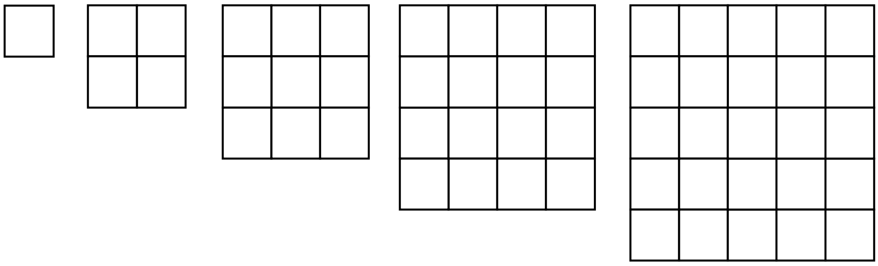
2. Perhatikan pola bilangan yang Anda dapat. Jika ada *n* persegi panjang kecil berapa jumlah seluruh persegi panjang? Jika ada 20 persegi panjang kecil berapa jumlah seluruh persegi panjang?

Lembar Kerja 2

Materi	: Barisan sebagai Fungsi
Tujuan Pembelajaran	: Menyatakan rumus suku ke-*n* suatu barisan menggunakan fungsi
Waktu	: 10 menit
Petunjuk	: Bacalah dan pahami terlebih dahulu soal di bawah ini, kemudian kerjakan apa yang diminta.

Langkah-langkah:

1. Perhatikan semua persegi di bawah ini, kemudian lengkapi tabel berikut.



Panjang sisi persegi	Banyak seluruh persegi
1 satuan	
2 satuan	
3 satuan	
4 satuan	
5 satuan	

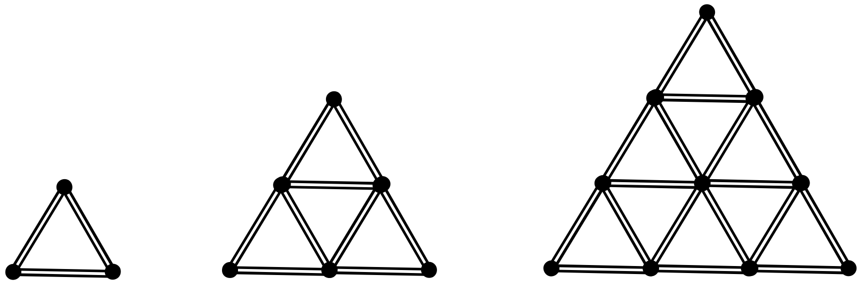
2. Perhatikan barisan bilangan yang Anda peroleh. Jika ada persegi bersisi *n* satuan berapa jumlah seluruh persegi yang ada?

Lembar Kerja 3

Materi	: Barisan sebagai Fungsi
Tujuan Pembelajaran	: Menyatakan rumus suku ke-n suatu barisan menggunakan fungsi
Waktu	: 10 menit
Petunjuk	: Bacalah dan pahami terlebih dahulu soal di bawah ini, kemudian kerjakan apa yang diminta.

Langkah-langkah:

1. Perhatikan semua gambar di bawah ini, kemudian lengkapi tabel berikut.
   Batang-batang korek api disusun sehingga membentuk kerangka, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1, Gambar 2 dan Gambar 3.



Gambar 1 Gambar 2 Gambar 3

Lengkapi tabel berikut ini.

Kerangka	1	2	3	4	5
Banyak korek api					

2. Diperlukan berapa batang korek api untuk membentuk kerangka ke-n? Berapa batang korek api untuk membentuk kerangka ke-10?

Tugas 3

Carilah bentuk-bentuk kegiatan yang bersifat eksplorasi untuk kegiatan pembelajaran barisan sebagai fungsi.

DERET BILANGAN BAB III

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan pembaca dapat:

1. menyelesaikan soal-soal yang berhubungan dengan deret aritmetika,
2. menyelesaikan soal-soal yang berhubungan dengan deret geometri,
3. menyelesaikan soal-soal yang berhubungan dengan deret geometri tak hingga.

B. Permasalahan

Deret bilangan adalah jumlah suku-suku suatu barisan. Pertanyaan yang sering diajukan para guru matematika SMA adalah bagaimana teknik penyelesaian deret yang bukan deret aritmetika atau geometri, tetapi sepintas tampak mirip dengan deret aritmetika atau geometri. Beberapa deret seperti ini alternatif teknik penyelesaiannya ada yang menggunakan konsep deret aritmetika atau geometri. Berikut ini akan dibahas alternatif teknik penyelesaian deret seperti itu.

Masalah deret yang sering diajukan oleh para guru seperti yang disebutkan di atas dapat dikemas menjadi pertanyaan sebagai berikut.

1. Bagaimana teknik penyelesaian deret yang tampak fisiknya mirip dengan deret aritmetika?
2. Bagaimana teknik penyelesaian deret yang tampak fisiknya mirip dengan deret geometri?
3. Bagaimana teknik penyelesaian deret yang tampak fisiknya mirip dengan deret geometri tak hingga?

C. Alternatif Penyelesaian Soal-soal yang Berhubungan dengan Konsep Deret Aritmetika dan Deret Geometri

Untuk mengingatkan Anda, berikut ini adalah rumus-rumus yang dipakai dalam deret aritmetika dan deret geometri. Beberapa soal yang dibahas berikut, bila diberikan kepada siswa, lebih tepat sebagai soal-soal pengayaan.

Dalam deret aritmetika berlaku:

$$S_n = \frac{1}{2}\, n\,(a + u_n) = \frac{1}{2}\, n\,[(2a + (n-1)b], \text{ dan}$$

$$U_n = S_n - S_{n-1}$$

dengan S_n = jumlah n suku pertama, S_{n-1}= jumlah n-1 suku pertama, a = suku pertama, u_n = suku ke-n, b = beda

Dalam deret geometri berlaku:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} \text{ atau } S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)},$$

$$U_n = S_n - S_{n-1}$$

dengan $r \neq 1$; r adalah rasio, S_n = jumlah n suku pertama, a = suku pertama

Perhatikan beberapa soal di bawah ini. Apakah ini menjadi masalah bagi Anda? Cobalah untuk menyelesaikan terlebih dahulu, kemudian Anda dapat membandingkan dengan alternatif penyelesaian yang disajikan.

1. Deret 1 + 3 + 5 + 2 + 4 + 6 + 3 + 5 + 7 + 4 + 6 + 8 + ...
   Tentukan jumlah 100 suku pertama!
2. Tentukan n jika $\frac{1+2+3+4+...+n}{3n} = 36$.
3. Rumus jumlah n suku pertama bilangan kuadrat adalah $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Gunakan informasi itu untuk menentukan jumlah deret 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + ...+ 100.101
4. Diketahui
   $$A = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + ... + \frac{1}{1+2+3+4+...+2004}.$$
   Hitunglah nilai A.
5. Anda diterima bekerja di suatu perusahaan yang menawarkan gaji dengan 2 macam pilihan. Yang pertama, gaji dibayar setiap hari dengan aturan hari kerja dalam sebulan dihitung 16 hari. Hari kerja pertama dibayar Rp 100,00. Pembayaran hari kerja ke-2 dua kali gaji hari pertama. Pembayaran hari kerja ke-3 dua kali gaji hari ke-2, dan

seterusnya. Yang kedua, tiap-tiap akhir bulan Anda mendapat gaji Rp. 5.000.000,00. Sistem pembayaran mana yang Anda pilih? Jelaskan alasan Anda atas pilihan itu!

6. Diketahui $P = 3 + 33 + 333 + 3333 + \ldots + \underbrace{333\ldots333}_{2004 \text{ angka}}$.
   Tentukan nilai P.

Sekarang Anda dapat membandingkan jawaban Anda dengan alternatif penyelesaian soal-soal di atas.

1. Deret 1 + 3 + 5 + 2 + 4 + 6 + 3 + 5 + 7 + 4 + 6 + 8 + ...
   Tentukan jumlah 100 suku pertama.

   Penyelesaian:
   Untuk 100 suku pertama deret dapat dikelompokkan menjadi 3, yaitu:

   1 + 3 + 5
   2 + 4 + 6
   3 + 5 + 7
   4 + 6 + 8
   ⋮
   33 + 35 + 37
   34

   atau dapat ditulis sebagai
   1 + 2 + 3 + 4 + ...+ 34 + 3 + 4 + 5 + 6 + ...+ 35 + 5 + 6 + 7 + 8 + ...+ 37.
   Jumlahnya adalah
   $S = \frac{1}{2}(34)(1 + 34) + \frac{1}{2}(33)(3 + 35) + \frac{1}{2}(33)(5 + 37) = 595 + 1320$
   $= 1915$.

2. Tentukan n jika $\frac{1+2+3+4+\ldots+n}{3n} = 36$.

   Penyelesaian:
   Deret di atas dapat dinyatakan sebagai $\frac{1}{2}\, n\,(1 + n) = 108n$

   $\Leftrightarrow n + n^2 = 216n$
   $\Leftrightarrow n^2 - 215n = 0$
   $\Leftrightarrow n\,(n - 215) = 0$
   $n = 0$ atau $n = 215$

Karena n = 0 tidak memenuhi, maka penyelesaian hanya berlaku untuk $n = 215$.

3. Rumus jumlah n suku pertama bilangan kuadrat adalah $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Gunakan informasi itu untuk menentukan jumlah deret 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + ...+ 100.101

   Penyelesaian:

   Perhatikan bahwa:

   jumlah suku ke-1 dan ke-2 adalah 8(1)

   jumlah suku ke-3 dan ke-4 adalah 8(4)

   jumlah suku ke-5 dan ke-6 adalah 8(9), dan seterusnya.

   Misalkan jumlah deret itu adalah S, maka

   $S = 8(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 50^2)$

   $= 8 \times \frac{1}{6}(50)(51)(101)$

   $= 343400$

4. Diketahui

   $$A = 1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+...+\frac{1}{1+2+3+4+...+2004}$$

   Hitunglah nilai A.

   Penyelesaian:

   Perlu diingat bahwa:

   a. Rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika adalah $S_n = \frac{1}{2}n(a + u_n)$.

   b. Identitas $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

   A dimanipulasi menggunakan rumus jumlah deret aritmetika (a) dan identitas (b) menjadi berikut ini.

   $$A = \frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+...+\frac{1}{1+2+3+4+...+2004}$$

   $$= \frac{1}{\frac{1}{2}(1)(1+1)}+\frac{1}{\frac{1}{2}(2)(1+2)}+\frac{1}{\frac{1}{2}(3)(1+3)}+\frac{1}{\frac{1}{2}(4)(1+4)}+...+\frac{1}{\frac{1}{2}(2004)(1+2004)}$$

   $$= \frac{2}{1.2}+\frac{2}{2.3}+\frac{2}{3.4}+\frac{2}{4.5}+...+\frac{2}{2004.2005}$$

$$= 2\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{2004.2005}\right)$$

$$= 2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2.}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}\right)\right\}$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{2005}\right)$$

$$= \frac{4008}{2005}$$

5. Anda diterima bekerja di suatu perusahaan yang menawarkan gaji dengan 2 macam pilihan. Yang pertama, gaji dibayar dengan aturan hari kerja dalam sebulan dianggap 16 hari, walaupun masuk dalam seminggu 5 hari dari Senin sampai Jumat. Hari kerja pertama dibayar Rp 100,00. Pembayaran hari kerja ke-2 dua kali gaji hari pertama. Pembayaran hari kerja ke-3 dua kali gaji hari ke-2, dan seterusnya. Yang kedua, tiap-tiap akhir bulan Anda mendapat gaji Rp. 5.000.000,00. Sistem pembayaran mana yang Anda pilih? Jelaskan alasan Anda atas pilihan itu!

   Penyelesaian:
   Sistem pertama adalah deret geometri dengan suku pertama a = 100, rasio r = 2, dan n = 16. Rumus yang digunakan adalah
   $$S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}$$
   Misalkan A adalah gaji sebulan dalam rupiah,
   $$A = 100\left(\frac{2^{16}-1}{2-1}\right) = 100\ (65.536-1) = 6.553.500$$
   Jika dilihat dari segi kuantitas dipilih pembayaran gaji sistem pertama karena jumlahnya lebih besar daripada sistem kedua.

6. Diketahui $P = 3 + 33 + 333 + 3333 + \ldots + \underbrace{333\ldots333}_{2004\text{ angka}}$. Tentukan nilai P.

   Penyelesaian:
   Secara sepintas deret ini mirip dengan bentuk deret geometri, sehingga dicari pendekatan menggunakan jumlah deret tersebut.
   $$P = 3 + 33 + 333 + 3333 + \ldots + \underbrace{333\ldots333}_{2004\text{ angka}}$$

$= 3(1+ 11+ 111+ 1111+ ...+ 111...111)$

$= 3\{1+ (1+ 10)+ (1+ 10+ 100)+ (1+ 10+ 100+ 1000)+ ...+(1+ 10+100+ ...)\}$

$= 3\{\frac{10-1}{9}+\frac{(10^2-1)}{9}+\frac{(10^3-1)}{9}+\frac{(10^4-1)}{9}+...+\frac{(10^{2004}-1)}{9}\}$

$= \{\frac{10+10^2+10^3+10^4+...+10^{2004}-2004}{3}\}$

$= \{\frac{10(10^{2004}-1)-9(2004)}{3.9}\} = \frac{10^{2005}-18046}{27}$

Latihan 1

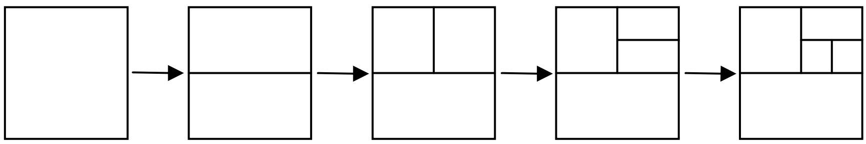
Selesaikan soal-soal berikut ini.

1. Jika 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = aaa, tentukan nilai n dan aaa. (n adalah bilangan dan a adalah angka dari 1 sampai dengan 9)
2. Jika 2004 dinyatakan sebagai penjumlahan beberapa bilangan asli berurutan, tentukan banyaknya cara penjumlahan bilangan asli tersebut.
3. Tentukan nilai $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{2004.2005}$.
4. Hitunglah
   $\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5})+...+(\frac{1}{100}+...+\frac{99}{100})$
5. Diketahui $a = \frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+\frac{4^2}{7}+...+\frac{1002^2}{2003}$ dan
   $b=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\frac{3^2}{7}+\frac{4^2}{9}+...+\frac{1002^2}{2005}$. Tentukan bilangan bulat terdekat dari $a - b$.

D. Soal-soal yang Berhubungan dengan Deret Geometri Tak Hingga

Pembahasan deret geometri tak hingga di kelas disarankan untuk dimulai dengan peragaan benda nyata. Salah satu alternatifnya seperti contoh berikut ini.

Sebagai pembuka guru bertanya berapakah jumlah deret $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+....$ Tentu siswa belum dapat menjawab pertanyaan ini. Selanjutnya guru menginformasikan langkah-langkah kegiatan yang akan mengarahkan para siswa untuk dapat menjawab pertanyaan tadi. Alat yang digunakan adalah kertas yang berbentuk persegi atau bisa juga persegi panjang yang kemudian dibagi menjadi dua bagian. Salah satu bagian kertas itu dibagi lagi menjadi dua bagian. Selanjutnya bagian terkecil dari kertas itu dibagi lagi menjadi dua bagian dan seterusnya seperti digambarkan di bawah ini:



Kertas semula	Pembagian pertama	Pembagian kedua	Pembagian ketiga	Pembagian keempat

Secara teoritis proses pembagian ini dapat diulangi terus menerus sampai tak berhingga kali. Pada pembagian yang pertama diperoleh $\frac{1}{2}$ bagian, yang ke-2 diperoleh $\frac{1}{4}$ bagian , yang ke-3 diperoleh $\frac{1}{8}$ bagian dan seterusnya sampai tak berhingga kali. Karena siswa sudah mengetahui bahwa luas kertas mula-mula adalah 1 bagian, tampak jelas bahwa jumlah dari seluruh hasil pembagian sampai tak berhingga kali adalah:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=1$$

Proses tadi menjelaskan pengertian jumlah deret geometri tak hingga yang bisa diperagakan secara sederhana. Untuk penjelasan secara teoritis perhatikan jumlah n suku pertama deret geometri $S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$. Jika suku-suku deret itu bertambah terus maka deret akan menjadi deret geometri tak hingga. Dengan demikian limit jumlah deret geometri menjadi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1-r)} - \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1-r)} r^n$$

$$= \frac{a}{(1-r)} - \frac{a}{(1-r)} \lim_{n\to\infty} r^n$$

Terlihat jelas bahwa nilai Sn sangat dipengaruhi oleh nilai $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$. Jika

1. $-1 < r < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ akan menjadi nol sehingga deret tak hingga itu mempunyai jumlah $S_\infty = \dfrac{a}{(1-r)}$

   Deret geometri tak hingga yang mempunyai jumlah disebut **konvergen** atau mempunyai **limit jumlah**.
2. $r < -1$ atau $r > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \pm\infty$ sehingga deret tak hingga itu **tidak mempunyai limit jumlah.** Deret yang seperti ini disebut **divergen.**

Apakah soal-soal berikut menjadi masalah bagi Anda? Silakan Anda coba untuk mengerjakan dahulu sebelum melihat alternatif jawaban yang disediakan.

1. Jumlah suatu deret geometri tak hingga adalah $(4 + 2\sqrt{2})$ sedangkan rasionya adalah $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Tentukan suku pertama deret tersebut!
2. Jumlah suku-suku nomor ganjil dari suatu deret geometri tak hingga adalah 18. Deret itu sendiri mempunyai jumlah 24. Tentukan rasio dan suku pertama deret geometri itu!
3. Jumlah deret geometri tak hingga $\frac{1}{2}x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{8}{25}x^3 - \dots$ sama dengan $\frac{1}{3}$. Carilah nilai *x*.
4. Suku pertama suatu deret geometri tak hingga adalah *a*, sedangkan rasionya adalah $r = {}^2\log(x-3)$. Carilah batas-batas nilai *x* sehingga deret geometri itu konvergen!

Sekarang Anda dapat membandingkan penyelesaian Anda dengan alternatif penyelesaian berikut ini.

1. Jumlah suatu deret geometri tak hingga adalah (4 + 2$\sqrt{2}$) sedangkan rasionya adalah $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Tentukan suku pertama deret tersebut!

   Penyelesaian:

   $$S_\infty = \frac{a}{(1-r)} \Leftrightarrow a = S_\infty\,(1-r)$$
   $$= (4 + 2\sqrt{2})\,(1-\frac{1}{2}\sqrt{2})$$
   $$= 4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2 = 2$$

   Jadi, suku pertama deret tersebut adalah 2.

2. Jumlah suku-suku nomor ganjil dari suatu deret geometri tak hingga adalah 18. Deret itu sendiri mempunyai jumlah 24. Tentukan rasio dan suku pertama deret geometri itu!

   Penyelesaian:

   Misal $S_{\infty 1}$ = jumlah deret lengkap dan S_{∞_2} = jumlah suku-suku nomor ganjil.

   $$S_{\infty 1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots = 24 \Rightarrow S_{\infty 1} = \frac{a_1}{(1-r)} = 24$$
   $$a_1 = 24\,(1-r) \quad \ldots\ldots 1)$$
   $$S_{\infty 2} = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots = 18 \Rightarrow S_{\infty_2} = \frac{a_1}{(1-r^2)} = 18$$
   $$a_1 = 18\,(1-r^2) \quad \ldots\ldots 2)$$

   Persamaan 1) = 2), sehingga diperoleh 24(1− r) = 18(1− r^2)

   $$\Leftrightarrow \frac{24}{18} = \frac{1-r^2}{1-r}$$
   $$\Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{(1-r)(1+r)}{1-r}$$
   $$\Leftrightarrow \frac{4}{3} = 1 + r \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}\,;\ a = 16$$

   Jadi, rasio deret tersebut $\frac{1}{3}$ dan suku pertamanya 16.

3. Jumlah deret geometri tak hingga $\frac{1}{2}x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{8}{25}x^3 - \ldots$ sama dengan $\frac{1}{3}$. Carilah nilai *x*.

Penyelesaian:

$a = \frac{1}{2}x$, $S_\infty = \frac{1}{3}$, $r = -\frac{4}{5}x$

$$S_\infty = \frac{a}{(1-r)} = \frac{\frac{1}{2}x}{(1+\frac{4}{5}x)} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \frac{1}{3} + \frac{4}{15}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{4}{15}x = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{30}x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{10}{7}$$

4. Suku pertama suatu deret geometri tak hingga adalah a, sedangkan rasionya adalah $r = {}^2\log(x-3)$. Carilah batas-batas nilai x sehingga deret geometri itu konvergen!

   Penyelesaian:

   Syarat supaya suatu deret geometri konvergen adalah $-1 < r < 1$, sehingga

   $-1 < {}^2\log(x-3) < 1$; syarat $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

   $\Leftrightarrow {}^2\log(x-3) < 1$ dan ${}^2\log(x-3) > -1$

   $\Leftrightarrow x - 3 < 2$ dan $x - 3 > \frac{1}{2}$

   $\Leftrightarrow x < 5$ dan $x > 3\frac{1}{2}$

Dengan memperhatikan syarat, maka batas-batas x adalah $3\frac{1}{2} < x < 5$.

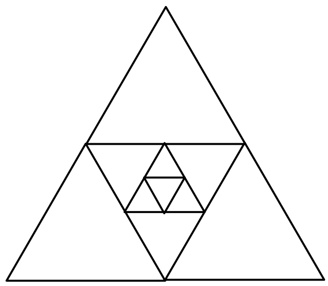
Latihan 2

Selesaikanlah soal-soal berikut ini.

1. Hitunglah jumlah tak hingga deret $\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \ldots$
2. Sebuah bola tenis dijatuhkan ke lantai dari suatu tempat yang tingginya 2 m. Setiap kali setelah bola itu memantul akan mencapai $\frac{2}{3}$ dari tinggi yang dicapai sebelumnya. Hitunglah panjang lintasan bola sampai bola itu berhenti!

3. Diketahui $\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin^2\alpha + \frac{1}{4}\sin^3\alpha + \frac{1}{8}\sin^4\alpha + ...$ adalah deret geometri konvergen yang jumlahnya $\frac{2}{3}$. Hitunglah nilai $\sin 2\alpha$. (gunakan rumus-rumus trigonometri)

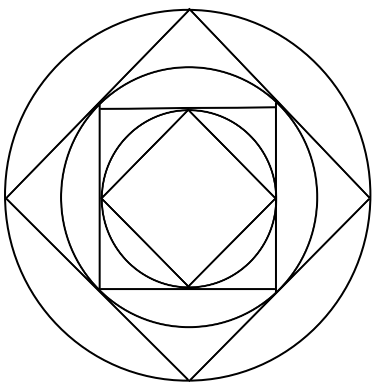
4.



Suatu segitiga sama sisi mempunyai sisi-sisi yang panjangnya 20 cm. Titik tengah sisi-sisi segitiga itu dihubungkan sehingga membentuk segitiga sama sisi lain yang lebih kecil. Jika prosedur ini dilakukan berulang sampai tak hingga kali, tentukan:

a. jumlah keliling semua segitiga!
b. jumlah luas semua segitiga!

5.



Jari-jari lingkaran yang paling besar pada gambar di samping ini adalah *R*. Hitunglah luas:

a. semua lingkaran yang terjadi!
b. semua persegi yang terjadi!

NOTASI SIGMA BAB IV

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan pembaca dapat:

1. menyatakan suatu deret dalam bentuk notasi sigma,
2. menggunakan sifat-sifat notasi sigma dalam menyelesaikan soal-soal yang terkait dengan notasi sigma.

B. Permasalahan

1. Kendala siswa dalam menyatakan suatu deret dalam bentuk notasi sigma adalah menentukan bentuk umum suku ke-*n* pada deret itu.
2. Menyelesaikan soal-soal notasi sigma yang menggunakan sifat-sifat notasi sigma.

C. Menyatakan Suatu Deret Dalam Bentuk Notasi Sigma

Notasi sigma (Σ) pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1755. Makna dari $\sum_{k=1}^{6}(3k+1)^2$ adalah $4^2 + 7^2 + 10^2 + 13^2 + 16^2 + 19^2$, yang didapat dari mensubtitusikan nilai $k = 1$ sampai $k = 6$. Jadi, jelas bahwa notasi ini dapat digunakan untuk menyatakan suatu deret bilangan. Untuk mengekspansikan bentuk notasi sigma bukan suatu masalah bagi siswa, karena hanya dengan mensubtitusikan nilai peubah, selesai sudah pekerjaan itu. Tetapi kalau soalnya diubah dari bentuk penjumlahan menjadi bentuk notasi sigma, ini yang menjadi masalah bagi siswa.

Mengapa siswa mengalami kesulitan dalam menyatakan suatu deret ke dalam bentuk notasi sigma? Umumnya ini terkait dengan kesulitan dalam menentukan bentuk umum suku ke-*n*. Untuk mengatasi hal ini guru harus memulai dengan "pemanasan", yaitu meminta siswa untuk menyatakan penjumlahan bilangan yang bentuk umum suku-sukunya sederhana. Misalnya guru mulai dengan meminta siswa untuk mengerjakan soal berikut.

Tentukan 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 dalam bentuk notasi sigma.

Guru meminta siswa untuk mengamati pola suku-suku pada deret tersebut. Diharapkan siswa dapat melihat pola suku ke-1, suku ke-2, suku ke-3, suku ke-4, dan seterusnya seperti berikut ini.

suku ke-1 = 3 = 2(1) + 1
suku ke-2 = 5 = 2(2) + 1
suku ke-3 = 7 = 2(3) + 1, dan seterusnya sehingga
suku ke-6 = 13 = 2(6) + 1

Dengan melihat pola suku-suku tersebut dapat disimpulkan bahwa suku-suku dalam penjumlahan itu mempunyai pola 2k + 1.

Dengan demikian 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 $= \sum_{k=1}^{6}(2k+1)$

Selanjutnya guru menantang siswa untuk menyatakan dalam notasi sigma bentuk yang sedikit berbeda dengan yang pertama.

Tentukan –1 + 2 –3 + 4 –5 + 6 –7 + 8 –9 +10 dalam bentuk notasi sigma.

Guru memberikan waktu dua sampai lima menit kepada siswa untuk menyelesaikan soal tersebut. Mungkin banyak siswa yang belum dapat menyelesaikan soal ini. Kalau terjadi demikian maka guru memberikan sedikit bantuan dengan meminta siswa untuk memperhatikan "apa yang terjadi kalau –1 dipangkatkan bilangan ganjil" dan "apa yang terjadi kalau –1 dipangkatkan bilangan genap?". Dengan memberikan bantuan itu saja diharapkan siswa dapat meneruskan langkah-langkah berikutnya, yaitu sampai pada kesimpulan bahwa:

$$-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 + 10 = \sum_{k=1}^{10}(-1)^k k$$

Salah satu alternatif yang dapat digunakan sebagai awal berpikir untuk menyatakan penjumlahan dalam bentuk notasi sigma adalah teknik menentukan rumus barisan menggunakan konsep fungsi pada Bab II.

Selanjutnya siswa diberikan soal-soal yang diurutkan mulai dari yang paling mudah. Salah satu alternatif model soalnya seperti contoh berikut ini.

Tulislah penjumlahan berikut dalam bentuk notasi sigma

1. $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$
2. $2 + 4 + 8 + 16 + 32$
3. $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - 64$
4. $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 - 15 + 17$
5. $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49$
6. $1 + 3 + 9 + 27 + 81$
7. $(1\times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + (4 \times 5) + (5 \times 6)$
8. $(1\times 2) + (3 \times 4) + (5 \times 6) + (7 \times 8) + (9 \times 10)$
9. $a + a^2b + a^3b^2 + a^4b^3 + a^5b^4 + a^6b^5$
10. $ab^6 + a^2b^5 + a^3b^4 + a^4b^3 + a^5b^2 + a^6b$

Latihan 1

Tuliskan penjumlahan berikut ini dalam notasi sigma. Setelah Anda mencobanya, tentukan bantuan apa yang diperlukan siswa dalam menyelesaikan soal-soal ini.

1. $6 + 12 + 24 + 48 + 96$
2. $4 + 10 + 28 + 82 + 244$
3. $\frac{3}{7}+\frac{4}{8}+\frac{5}{9}+\frac{6}{10}+...+\frac{23}{27}$
4. $4 + 13 + 28 + 49 + ... + 301$
5. $\frac{-3}{3}+\frac{0}{4}+\frac{3}{5}+\frac{6}{6}+\frac{9}{7}+...+\frac{3(n-1)}{n+3}$
6. $\frac{3}{1\times 2\times 2}+\frac{4}{2\times 3\times 4}+\frac{5}{3\times 4\times 8}+\frac{6}{4\times 5\times 16}+...+\frac{2005}{2003\times 2004\times 2^{2003}}$

D. Sifat-sifat Notasi Sigma dan Penggunaanya dalam Menyelesaikan Soal-soal yang Terkait dengan Notasi Sigma

Dalam menyelesaikan soal-soal berbentuk notasi sigma, sering digunakan sifat-sifat sebagai berikut. Untuk setiap bilangan bulat *a*, *b* dan *n* berlaku:

1. $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

2. $\sum_{k=a}^{b} cf(k) = \text{c}\sum_{k=a}^{b} f(k)$

3. $\sum_{k=a}^{b} (f(k)+g(k)) = \sum_{k=a}^{b} f(k)+\sum_{k=a}^{b} g(k)$

4. $\sum_{k=1}^{m-1} f(k)+\sum_{k=m}^{n} f(k)=\sum_{k=1}^{n} f(k)$

5. $\sum_{k=m}^{n} f(k)=\sum_{k=m+p}^{n+p} f(k-p)$

Tugas 1

Buktikanlah sifat-sifat notasi sigma di atas!

Selanjutnya yang perlu diketahui adalah beberapa jumlah deret khusus.

1. $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$, *jumlah n suku pertama deret bilangan asli.*
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, *jumlah n suku pertama deret bilangan kuadrat.*
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ *, jumlah n suku pertama deret bilangan kubik.*

Masalah yang sering dijumpai adalah ketika membuktikan atau menghitung nilai suatu bentuk notasi sigma, yaitu ketika harus menggunakan sifat-sifat notasi sigma, misalnya bentuk soal notasi sigma seperti soal-soal berikut ini.

1. Buktikan bahwa $\sum_{k=1}^{n} (k^2-(k-1)^2)=n^2$

   Bukti:

   Ruas kiri: $\sum_{k=1}^{n} (k^2-(k-1)^2)=\sum_{k=1}^{n} (k^2-(k^2-2k+1))$

   $= \sum_{k=1}^{n} 2k-1=2\sum_{k=1}^{n} k-\sum_{k=1}^{n} 1$, *menggunakan sifat no. 2 & 1*

   $= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-n$

   $= n^2 + n - n$

   $= n^2$ = ruas kanan, *terbukti*

2. Tentukan nilai $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Penyelesaian:

Berikut ini diberikan dua alternatif penyelesaian, yaitu:

a. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$

$= (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$

$= \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

b. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$

Misalkan S_1 adalah jumlah 1 suku pertama, S_2 adalah jumlah 2 suku pertama, S_3 adalah jumlah 3 suku pertama, dan seterusnya. Dengan demikian,

$S_1 = \frac{1}{2}$,

$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$,

$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$,

$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$, …,

$S_n = \frac{n}{n+1}$

Jadi, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Latihan 2

1. Gunakan sifat-sifat notasi sigma untuk menyelesaikan soal berikut ini.
   Jika diketahui $\sum_{i=1}^{10} i^2 = 385$ dan $\sum_{i=1}^{10} 2i = 110$, tentukan nilai $\sum_{i=4}^{10} (i+1)^2$.
2. Buktikan $\sum_{k=1}^{n} (k^3 - (k-1)^3) = n^3$
3. Hitunglah $\sum_{k=1}^{20} k(k-2)$
4. Hitunglah $\sum_{k=1}^{10} k(k+1)(k+2)$
5. Hitunglah $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$
6. Hitunglah nilai $\sum_{k=1}^{2003} \frac{k+2}{k(k+1)2^k}$

PENUTUP BAB V

A. Rangkuman

Masalah sehari-hari atau soal-soal yang berkaitan dengan barisan aritmetika atau geometri harus dipahami dulu maksudnya, kemudian diselesaikan dengan menggunakan rumus dan sifat-sifat yang berlaku pada barisan yang sesuai.

Untuk menentukan rumus suku ke-n suatu barisan yang tidak berbentuk barisan aritmetika ataupun geometri, tetapi mempunyai keteraturan beda antara dua suku berurutan dapat digunakan konsep fungsi. Jika beda yang tetap diperoleh dalam satu tingkat pengurangan maka barisan itu berderajat satu atau barisan linear dengan rumus suku ke-n adalah $u_n = an + b$. Apabila beda yang tetap diperoleh dalam dua tingkat pengurangan maka barisan itu berderajat dua atau barisan kuadrat dengan rumus suku ke-n adalah $u_n = an^2 + bn + c$, dan seterusnya. Tetapi, apabila beda yang diperoleh dari pengurangan suku-suku pada tingkat kedua dan seterusnya membentuk barisan geometri maka alternatif rumus suku ke-n barisan tersebut adalah $u_n = a^n + bn$

Dari pembahasan bagaimana menyelesaikan soal-soal deret yang tampak fisiknya mirip atau mendekati bentuk deret aritmetika dan geometri, disarankan untuk:

1. mengamati deret itu dengan teliti terlebih dahulu,
2. mencoba untuk memanipulasi deret tersebut apakah dapat diubah ke dalam bentuk deret aritmetika ataupun geometri,
3. menggunakan rumus jumlah n suku deret aritmetika atau geometri.

Dari pembahasan bagaimana mengubah bentuk penjumlahan ke dalam bentuk notasi sigma, disarankan untuk:

1. menentukan apakah deret itu berbentuk deret aritmetika atau geometri, atau apakah deret itu berbentuk deret bilangan berpangkat, atau deret fungsi kuadrat, atau pangkat tiga,

2. menentukan batasan bentuk notasi sigma dengan teliti, supaya diperoleh batas bawah dan batas atas yang tepat.

B. Tes

Tentukan penyelesaian dari soal-soal berikut ini. Anda dinyatakan berhasil bila dapat menjawab semua soal minimal 75% benar.

1. Suatu deret aritmetika dengan suku ke-n dilambangkan dengan u_n. Diketahui $u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + u_9 + u_{11} = 72$. Tentukan nilai $u_1 + u_6 + u_{11}$. (*gunakan sifat-sifat pada barisan aritmetika*)

2. Berapakah banyaknya bilangan antara 1 sampai dengan 1000 yang tidak habis dibagi 5 dan 6?

3. Tiga bilangan merupakan barisan aritmetika turun. Jika yang terbesar ditambah 4, terjadi barisan geometri dengan hasil kali ketiga sukunya 512. Dibentuk deret geometri tak hingga dengan tiga suku pertama yang diperoleh di atas. Tentukan limit jumlah deret tersebut.

4. Diketahui barisan segitiga 1, 3, 6, 10, ...dengan suku ke-n adalah $u_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ dan barisan aritmetika 100, 125, 150, 175, ...
   Tentukan mulai dari suku keberapa dari barisan pertama yang lebih besar dari suku yang bersesuaian dengan barisan kedua.

5. Hitunglah nilai dari
   $$S = (1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})(1-\frac{1}{5^2})...(1-\frac{1}{2003^2})$$

6. Diketahui $A = 6 + 66 + 666 + 6666 + ... + \underbrace{666...666}_{1000\text{ angka}}$.
   Hitunglah nilai A.

7. Hitunglah nilai S bila
   $$S = 12 - 22 + 32 - 42 + 52 - 62 + ... + 20012 - 20022 + 20032.$$

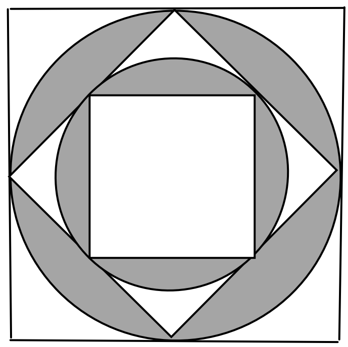
8. Hitunglah jumlah tak hingga deret $6 + \frac{12}{7} + \frac{18}{7^2} + \frac{24}{7^3} + ...$

9. Hitunglah nilai
   $$P = 3 + \frac{3}{1+2} + \frac{3}{1+2+3} + \frac{3}{1+2+3+4} + ... + \frac{3}{1+2+3+4+...+100}$$

10. Tentukan rumus jumlah n suku pertama deret 1.2 + 3.4 + 5.6 + 7.8 + ... + (2n − 1)2n. (salah satu alternatif menggunakan sifat-sifat notasi sigma)

11. Hitunglah hasil penjumlahan deret $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+...+\frac{1023}{1024}$.

12. Hitunglah luas semua daerah yang diarsir jika pola arsiran dilakukan sampai tak hingga kali. Panjang sisi persegi yang paling besar adalah 1 satuan.



13. Buktikan $\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{6} k^2 + 3\sum_{k=1}^{7} k + 210$

14. Nyatakan bentuk penjumlahan $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2$ dalam bentuk notasi sigma dengan batas bawah 1.

DAFTAR PUSTAKA ∑

Bambang Susianto. 2004. *Olimpiade Matematika dengan Proses Berpikir Aljabar dan Bilangan*. Jakarta: PT Gramedia Widiasarana Indonesia

Posamentier, Alfred. 1999. *Teaching Secondary School Mathematics.* New Jersey: Prentice-Hall, Incl

Puji Iryanti. 2005. *Notasi Sigma, Barisan dan Deret Bilangan I*. Yogyakarta: PPPG Matematika

Saint Mary's College. 1971. *Mathematics Contest Problems.* Moraga: Saint Mary's College

Setiawan, dkk. 2005. *Matematika Kelas XII SMA dan MA Program Studi Ilmu Alam.* Yogyakarta: PT Aji Citra Parama

http://hotmath.com/help/gt/genericalg2/section_9_1.html, *Sigma Notation*, diakses tanggal 25 April 2008

http://mathforum.org/dr.math/, *Geometric* Series, diakses tanggal 14 April 2008

LAMPIRAN Σ

I. KUNCI JAWABAN SOAL LATIHAN DAN TES

Bab II Barisan Bilangan
Tugas 1 halaman 7

Konteks yang diberikan sebagai contoh barisan aritmetika dan geometri sangat tergantung kepada lingkungan terjadinya pembelajaran, yaitu apa yang sudah dikenal oleh siswa. Sebagai salah satu alternatif contoh barisan aritmetika adalah tinggi tumpukan gelas aqua plastik. Salah satu kemungkinanyang terjadi, jika gelas hanya 1, tingginya a cm, ketika tinggi tumpukan 2 gelas sejenis diukur, tingginya menjadi $a + b$ cm. Selanjutnya tinggi tumpukkan 3 gelas sejenis diukur menjadi $a + 2b$ cm, dan seterusnya, b adalah tinggi gelas kedua, ketiga dan seterusnya yang terlihat setelah ditumpuk.

Salah satu alternatif contoh barisan geometri adalah tabungan di bank yang menerapkan bunga majemuk. Misalkan bank memberikan bunga 10% setahun. Pada awal tahun A menabung Rp 10.000,00 maka pada akhir tahun diperoleh uang 10.000 + 0,1 (10.000) = 10.000 (1 + 0,1). Pada akhir tahun berikutnya diperoleh uang = 10.000 (1 + 0,1) + 0,1{ 10.000 (1 + 0,1)} = 10.000 (1 + 0,1) (1 +0,1) = 10.000 $(1 + 0{,}1)^2$, dan seterusnya.

Latihan 1 halaman 12

1. Rp 2.500
2. $a = 19$, $b = 6$
   19, 25, 31, 37, ..., 199
   Banyak suku barisan yang kurang dari 200 adalah 31.
3. Barisan bilangan itu adalah 2, 9, 16, 23 atau 23, 16, 9, 2. Jumlah keempat bilangan 50.
4. a. beda = $\dfrac{173-8}{32+1} = 5$
   b. $u_n = 5n + 3$

5. a. 37
   b. 24
   c. 13
6. Bilangan-bilangan itu adalah 2, 4, 6.
7. Rp.12.800.000,00
8. Harga tahun 1 = Rp. 20.000.000,00 harga tahun 2 = Rp. 20.000.000 (1,05),00 harga tahun ke 8 = Rp. 20.000.000 $(1{,}05)^7$,00
9. untuk rasio = 2, barisan adalah 5, 10, 20. Untuk rasio $=\frac{1}{2}$, barisan adalah 20, 10, 5.
10. rasio = 3; barisannya 1, 3, 9, 27, 81, 243; $u_2 = 3$.
    rasio = $\frac{1}{3}$; barisannya 243, 81, 27, 9, 3, 1; $u_2 = 81$.

Tugas 2 halaman 18

Gantikan nilai n dengan 1, 2, 3, 4, ... kemudian kurangkan u_n dengan $u_{n\text{-}1}$. Selanjutnya pada barisan yang baru dilakukan pengurangan u_n dengan $u_{n\text{-}1}$. Barisan yang baru ini adalah barisan geometri. Ciri barisan ini terlihat pada barisan yang diperoleh dari pengurangan tingkat kedua berbentuk barisan geometri dengan rasio a.

Latihan 2 halaman 19

1. a. $u_n = 4n + 1$
   b. $u_n = 5n + 1$
   c. $u_n = n^2 + 2n - 2$
   d. $u_n = 2n^2 - n + 1$
   e. $u_n = n^3 + n$
2. a. $u_n = n^2 + n$
   b. $u_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

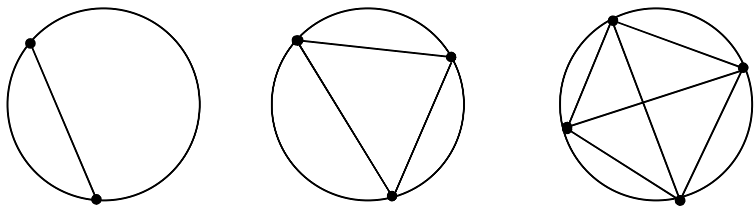
3 a. $u_n = 3^n + 2n$
   b. $u_n = 2^n - 5$
   c. $u_n = 2^n + n + 1$

Tugas 3 halaman 22

Anda dapat mencari berbagai kegiatan yang bersifat eksploratif untuk kegiatan pembelajaran barisan sebagai fungsi dari berbagai sumber. Salah satu alternatif kegiatan seperti berikut ini.

Materi : Barisan sebagai Fungsi
Tujuan Pembelajaran : Menyatakan rumus suku ke-n suatu barisan menggunakan fungsi
Waktu : 10 menit
Petunjuk : Bacalah dan pahami terlebih dahulu soal di bawah ini, kemudian kerjakan apa yang diminta.

Perhatikan 3 lingkaran di bawah ini:



Berikut ini adalah tabel yang menunjukkan hubungan banyak titik pada lingkaran dengan banyak garis yang terbentuk.

Banyak titik	1	2	3	4	5	6
Banyak garis	0	1	3	6	...	....

Jawablah pertanyaan berikut:
1. Terkalah bilangan yang menempati titik-titik pada tabel.
2. Gambarlah lingkaran dengan lima titik pada lingkaran itu. Hubungkan setiap 2 titik. Berapa banyak garis yang terbentuk?
3. Gambarlah lingkaran dengan enam titik pada lingkaran itu. Hubungkan setiap 2 titik. Berapa banyak garis yang terbentuk?
4. Apakah hasil yang Anda peroleh sama dengan terkaan Anda semula?
5. Jika ada n titik pada lingkaran, ada berapa garis yang terbentuk?

Bab III Deret Bilangan
Latihan 1 halaman 28

1. $n = 36, a = 6$
2. 2
3. $\dfrac{2004}{2005}$
4. 2475
5. 501

Latihan 2 halaman 32

1. $\frac{9}{48}$
2. 10 m
3. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

4.a. 120 cm

b. $\frac{400}{3}\sqrt{3}$ cm^2

5.a. $2\pi R^2$

b. $4R^2$

Bab IV Notasi Sigma
Latihan 1 halaman 37

1. $\sum_{k=1}^{5} 3.2^k$ (*perhatikan bahwa ini adalah deret geometri*)
2. $\sum_{k=1}^{5} 3^k + 1$ (*bandingkan dengan deret pangkat dari tiga*)
3. $\sum_{k=1}^{21} \frac{n+2}{n+6}$ (*perhatikan pembilang dan penyebut membentuk barisan aritmetika*)
4. $\sum_{k=1}^{10} 3k^2 + 1$ (*perhatikan bahwa suku-suku deret membentuk beda yang tetap pada tingkat ke-2*)
5. $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3(k-2)}{k+2}$ (*perhatikan pembilang dan penyebut membentuk barisant aritmetika*)
6. $\sum_{k=1}^{2003} \frac{k+2}{k(k+1)2^k}$ (*perhatikan pembilang membentuk barisan aritmetika, penyebut membentuk perkalian barisan aritmetika dan bentuk pangkat dari 2*)

Tugas 1 halaman 38

1. $\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + ... + 1}_{n \text{ suku}} = n\ (1) = n$

2. $\sum_{k=a}^{b} cf(k) = c\, f(a) + c\, f(a+1) + c\, f(a+2) + ... + c\, f(b)$

$$= c\ [f(a) + f(a+1) + f(a+2) + ... + f(b)] = c \sum_{k=a}^{b} f(k)$$

3. $\sum_{k=a}^{b} [f(k) + g(k)]$

$$= [f(a) + g(a)] + [f(a+1) + g(a+1)] + [f(a+2) + g(a+2)] + ...+ [f(b) + g(b)]$$

$$= [[f(a) + [f(a+1)+ f(a+2) +...+ f(b)] + [g(a)+ g(a+1) + g(a+2)+ ...+ g(b)]$$

$$= \sum_{k=a}^{b} f(k) + \sum_{k=a}^{b} g(k)$$

4. $\sum_{k=1}^{m\ 1} f(k) + \sum_{k=m}^{n} f(k)$

$$= \underbrace{f(1)+ f(2)+ f(3)+...+ f(m-1)}_{m\text{-1 suku}} + \underbrace{f(m)+ f(m+1)+ f(m+2)+...+ f(n)}_{n\text{-}m\text{+ 1 suku}}$$

$$= \underbrace{f(1)+ f(2)+ f(3)+...+ f(m-1)+ f(m)+ f(m+1)+ f(m+2)+...+ f(n)}_{n \text{ suku}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

5. $\sum_{k=m+p}^{n+p} f(k-p)$

$$= f(m+p - p) + f(m+p+1- p) + f(m+p+2- p)+...+f(n+p- p)$$

$$= f(m)+ f(m+1) + f(m+2) + ...+ f(n)$$

$$= \sum_{k=m}^{n} f(k)$$

Latihan 2 halaman 40

1. 476
2. Ikuti langkah-langkah seperti contoh 1
3. 2450
4. 4290
5. $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
6. $1-\frac{1}{2^{2003}\times 2004}$

Kunci Tes halaman 42

1. 36
2. 666
3. $S_{\infty}=32$
4. 52
5. $\frac{1002}{2003}$
6. A = $\frac{6}{9}\left(\frac{10(10^{1000}-1)}{10-1}-1000\right)$
7. 1002 (2003)
8. $\frac{49}{6}$
9. $\frac{600}{101}$
10. $\frac{1}{3}n(n+1)(4n-1)$
11. $9\frac{1}{1024}$
12. ($\frac{1}{2}\pi-1$) satuan luas
13. Gunakan rumus $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ dan $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

    Ruas kiri: $\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{1}{6}(10)(11)(21)=385$

Ruas kanan:

$$\sum_{k=1}^{6} k^2 + 3\sum_{k=1}^{7} k + 210 = \frac{1}{6}(6)(7)(13) + 3\{\frac{1}{2}(7)(8)\} + 210 = 91 + 84 + 210 = 385$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, jadi terbukti

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{6} k^2 + 3\sum_{k=1}^{7} k + 210.$$

14. $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = \sum_{k=21}^{24} k^2 = \sum_{k=1}^{4} (k+20)^2$