

PAKET FASILITASI PEMBERDAYAAN KKG/MGMP MATEMATIKA

Pembelajaran Lingkaran SMA dengan Geometri Analitik

Penulis

Drs. M. Danuri, M.Pd.

Penilai

Drs. Sukardjono, M.Pd.

Editor

Titik Sutanti, S.Pd.Si.

Ilustrator

Muh. Tamimuddin H., M.T.

Dicetak oleh: **Pusat Pengembangan Dan Pemberdayaan
Pendidik Dan Tenaga Kependidikan Matematika**
Tahun 2008



DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
**PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN
TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA**
YOGYAKARTA 2008

KATA PENGANTAR

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika dalam melaksanakan tugas dan fungsinya mengacu pada tiga pilar kebijakan pokok Depdiknas, yaitu: 1) Pemerataan dan perluasan akses pendidikan; 2) Peningkatan mutu, relevansi dan daya saing; 3) Penguatan tata kelola, akuntabilitas, dan citra publik menuju insan Indonesia cerdas dan kompetitif.

Dalam rangka mewujudkan pemerataan, perluasan akses dan peningkatan mutu pendidikan, salah satu strategi yang dilakukan PPPPTK Matematika adalah meningkatkan peran Kelompok Kerja Guru (KKG) dan Musyawarah Guru Mata Pelajaran (MGMP) serta pemberdayaan guru inti/guru pemandu/guru pengembang yang ada pada setiap kecamatan, kabupaten dan kota.

Sebagai upaya peningkatan mutu dimaksud maka lembaga ini diharapkan mampu memfasilitasi kegiatan-kegiatan yang terkait dengan implementasi pengembangan pembelajaran matematika di lapangan. Guna membantu memfasilitasi forum ini, PPPPTK Matematika menyiapkan paket berisi kumpulan materi/bahan yang dapat digunakan sebagai referensi, pengayaan, dan panduan di KKG/MGMP khususnya pembelajaran matematika, dengan topik-topik/bahan atas masukan dan identifikasi permasalahan pembelajaran matematika di lapangan.

Berkat rahmat Tuhan Yang Maha Esa, atas bimbingan-Nya penyusunan Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika dapat diselesaikan dengan baik. Untuk itu tiada kata yang patut diucapkan kecuali puji dan syukur kehadirat-Nya.

Dengan segala kelebihan dan kekurangan yang ada, paket fasilitasi ini diharapkan bermanfaat dalam mendukung peningkatan mutu pendidik

dan tenaga kependidikan melalui forum KKG/MGMP Matematika yang dapat berimplikasi positif terhadap peningkatan mutu pendidikan.

Sebagaimana pepatah mengatakan, tiada gading yang tak retak, demikian pula dengan paket fasilitasi ini walaupun telah melalui tahap identifikasi, penyusunan, penilaian, dan editing masih ada yang perlu disempurnakan. Oleh karena itu saran, kritik, dan masukan yang bersifat membangun demi peningkatan kebermaknaan paket ini, diterima dengan senang hati teriring ucapan terima kasih. Ucapan terima kasih dan penghargaan setinggi-tingginya kami sampaikan pula kepada semua pihak yang membantu mewujudkan paket fasilitasi ini, mudah-mudahan bermanfaat untuk pendidikan di masa depan.

Yogyakarta,

Kepala,

KASMAN SULYONO

NIP.130352806

DAFTAR ISI

PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iii
PETA KOMPETENSI	v
SKENARIO PEMBELAJARAN	vii
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang.....	1
B. Tujuan	1
C. Sasaran	1
D. Cakupan Materi.....	2
E. Pedoman Penggunaan.....	2
BAB II IRISAN KERUCUT BERUPA LINGKARAN DI SMA PADA STANDAR	
ISI	3
A. Pembelajaran Lingkaran di SMA.....	3
B. Posisi Titik dan Garis Terhadap Lingkaran	14
C. Persamaan Garis Singgung yang Melalui Suatu Titik pada Lingkaran.....	27
BAB III PENUTUP	36
DAFTAR PUSTAKA	37
KUNCI JAWABAN	38

PETA KOMPETENSI

Kompetensi yang akan dicapai pada paket ini adalah pembaca memiliki kemampuan mengembangkan diri dalam penyusunan model pembelajaran irisan kerucut khususnya lingkaran yang terdapat pada standar isi

Indikator keberhasilan

- a. Dapat menentukan persamaan lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dan jari-jari r
- b. Dapat menentukan persamaan lingkaran dengan pusat (a, b) dan jari-jari r
- c. Dapat menentukan pusat dan jari-jari dari lingkaran yang diketahui persamaannya dalam bentuk $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
- d. Dapat menentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik pada lingkaran yang persamaannya $x^2 + y^2 = r^2$ atau titik yang terletak di luar lingkaran.
- e. Dari kemampuan a s.d. d juga dapat menyusun model pembelajaran yang dapat mengaktifkan siswa dengan berbagai macam pendekatan yang disesuaikan dengan keadaan siswa masing-masing sekolah

SKENARIO PEMBELAJARAN

Pada kegiatan belajar paket ini,

1. pembaca membaca dan memahami isi paket ini
2. pembaca mengerjakan soal-soal yang ada pada paket
3. pembaca berdiskusi dengan teman sejawat jika dalam memahami paket ini mendapatkan kesulitan-kesulitan
4. dengan cara berdiskusi pembaca mencoba menyusun model pembelajaran

A. Latar Belakang

Salah satu upaya nyata PPPPTK Matematika Yogyakarta dalam meningkatkan mutu guru adalah dengan menerbitkan paket yang nantinya dapat dimanfaatkan guru pada kegiatan MGMP. Paket ini membicarakan masalah pembelajaran lingkaran di SMA yang mengacu pada Standar Isi dengan Standar Kompetensi "Menyusun persamaan lingkaran dan garis singgungnya".

Paket ini memuat materi pembelajaran, metodologi dan pendekatan pembelajaran, serta hal-hal yang berkaitan dengan pembelajaran matematika di SMA. Irisan kerucut di SMA yang termuat dalam Standar Isi adalah tentang lingkaran dengan pendekatan analitis. Pada paket ini dipaparkan tentang materi pembelajaran irisan kerucut di SMA diikuti dengan saran dan pembelajarannya yang berorientasi pada Pembelajaran Aktif Kreatif Efisien dan Menyenangkan (PAKEM). Dipaparkan pula contoh-contoh soal dan tugas yang dapat diberikan kepada siswa selama belajar, maupun soal-soal sebagai latihan di rumah.

B. Tujuan

Tujuan penulisan paket ini adalah untuk membantu guru matematika di SMA dan para pembaca dalam menyiapkan pembelajaran matematika khususnya tentang irisan kerucut yang berupa lingkaran, serta untuk menambah wawasan para pembaca untuk menyongsong pemberlakuan

Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP) di seluruh Indonesia. Selain itu dapat sebagai bahan diskusi guru matematika pada kegiatan MGMP Matematika SMA.

C. Sasaran

Paket ini merupakan salah satu sarana yang diharapkan dapat membantu guru matematika SMA dalam melaksanakan diskusi pada kegiatan Musyawarah Guru Mata Pelajaran (MGMP) Matematika SMA di seluruh Indonesia dalam menyongsong pemberlakuan KTSP.

D. Cakupan Materi

Paket ini berisi materi pembelajaran di SMA yaitu irisan kerucut yang berupa lingkaran seperti tercantum dalam Standar Isi pada Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan dengan diikuti saran dan cara pembelajarannya. Selain itu juga diuraikan contoh-contoh soal atau tugas untuk siswa selama belajar, serta tugas-tugas untuk latihan di rumah.

Pada paket ini diuraikan:

- Menurunkan rumus persamaan lingkaran dengan pusat $(0, 0)$ dan (a, b) .
- Menentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang persamaannya diketahui.
- Menentukan persamaan lingkaran dengan syarat-syarat tertentu.
- Menentukan posisi titik dan garis terhadap lingkaran.
- Menurunkan persamaan garis singgung pada lingkaran yang pusatnya $O(0,0)$.

E. Pedoman Penggunaan

Paket ini disusun sebagai salah satu alternatif untuk membelajarkan siswa tentang materi irisan kerucut berupa lingkaran yang tercantum dalam Standar Isi. Bacalah paket ini secara cermat mulai dari cara menanamkan konsep, pemberian contoh-contoh soal, soal-soal yang harus diselesaikan siswa selama belajar, dan tugas-tugas yang diberikan untuk latihan di rumah. Silahkan mencoba menyelesaikan soal-soal itu dan cocokkan hasilnya dengan kunci jawaban yang telah tersedia.

Apabila dalam memahami paket ini Anda menemui kesulitan, maka Anda dapat mengemukakan permasalahan Anda melalui e-mail p4tkmatematika@yahoo.com atau melalui surat dengan alamat: PPPPTK Matematika, Kotak Pos 31 YK-BS Yogyakarta 55281. Insya Allah kami akan menjawab permasalahan Anda.

IRISAN KERUCUT BERUPA LINGKARAN DI SMA PADA STANDAR ISI

BAB II

Pada bab ini akan diberikan beberapa contoh model pembelajaran tentang lingkaran yang terdiri atas:

A. Pembelajaran Lingkaran di SMA

Mata Pelajaran	: Matematika
Jenjang Pendidikan	: SMA
Program	: Ilmu Pengetahuan Alam
Kelas/Semester	: XI/1
Alokasi waktu	: 4 jam pelajaran
Standar kompetensi	: Menyusun persamaan lingkaran dan garis singgungnya.
Kompetensi dasar	: 3.1. Menyusun persamaan lingkaran yang memenuhi persyaratan yang ditentukan 3.2. Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dalam berbagai situasi.

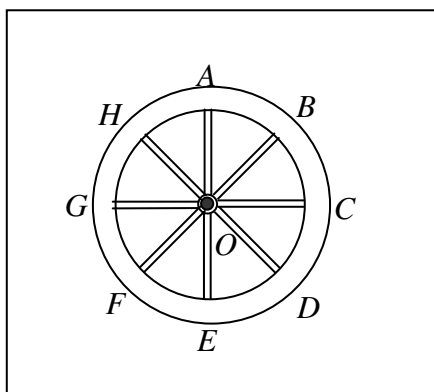
Kegiatan pembelajaran: (Pertemuan ke-1: 2 jam pelajaran dan ke 2: 2 jam pelajaran)

1. Apersepsi

Untuk menuju ke persamaan lingkaran, perlu ditanyakan kepada siswa, benda-benda di sekitar mereka yang berbentuk lingkaran. Beberapa siswa mungkin akan menjawab roda kendaraan, kipas angin, piring, nampan tempat makanan, caping pak tani, dan lain sebagainya. Kemudian siswa dibimbing untuk mendefinisikan lingkaran.

2. Definisi lingkaran

Kita berharap, siswa dapat mendefinisikan lingkaran setelah mereka mencari contoh beberapa benda di sekitar mereka yang berbentuk lingkaran. Dengan pertanyaan-pertanyaan:



Gb. 2.1. Roda gerobak

- bagaimana panjang OA dan OB
- bagaimana panjang OB dan OC
- bagaimana panjang OC dan OD dan seterusnya

Siswa dapat menyimpulkan bahwa:

$$OA = OB = OC = OD = \dots$$

Sehingga diharapkan siswa dapat mendefinisikan lingkaran sebagai berikut:

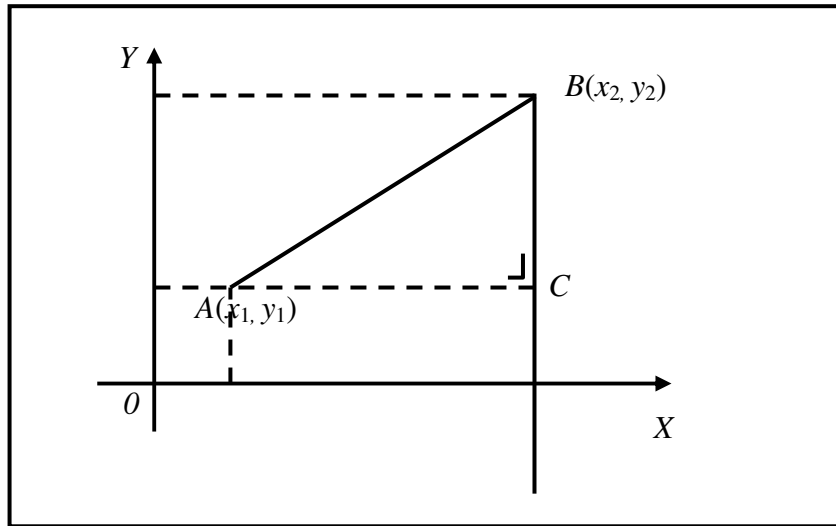
Definisi:

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik (himpunan titik) yang jaraknya terhadap satu titik tertentu adalah sama (konstan).

Titik tertentu disebut pusat lingkaran dan jarak konstan disebut jari-jari lingkaran.

3. Jarak dua titik

Ingatkan kembali kepada siswa tentang jarak antara dua titik, yaitu jarak antara titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$. Diharapkan bahwa siswa dapat menjawab jarak antara titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ adalah $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Jika tidak ada siswa yang ingat tentang jarak dua titik, pancing dengan pertanyaan tentang teorema Pythagoras, yaitu



Gb. 2.2. Segitiga ABC pada sistem koordinat XOY

Dalam $\triangle ABC$ siku-siku di C berlaku

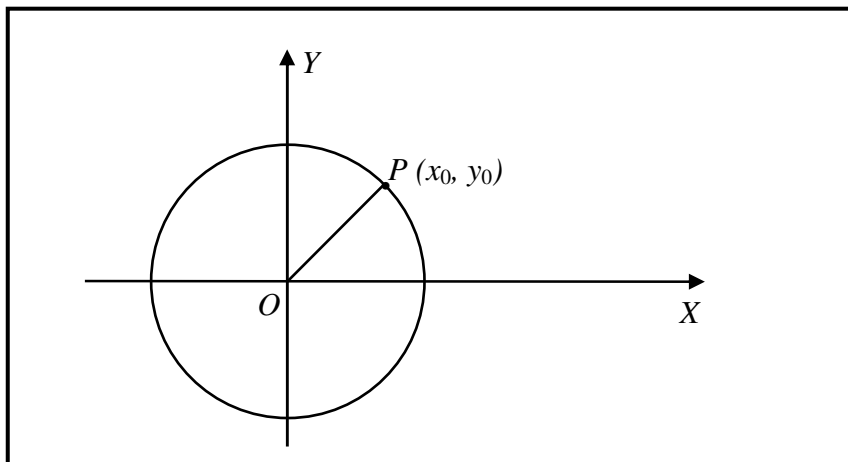
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Kemudian siswa dibimbing untuk dapat menemukan rumus persamaan lingkaran dengan pusat $O (0,0)$ dan jari-jarinya r dengan menggunakan definisi lingkaran dan jarak antara dua titik.

4. Persamaan lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dan jari-jari r .



Gb. 2.3. Lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ jari-jari r .

- a. Ingatkan kembali definisi lingkaran, yaitu tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya konstan terhadap satu titik tertentu.

Ingatkan rumus jarak dua titik, maka dengan bimbingan guru siswa akan dapat menemukan rumus persamaan lingkaran yang pusatnya $O(0, 0)$ dan jari-jarinya r .

- b. Andaikan titik $P(x_0, y_0)$ terletak pada lingkaran, maka:

$$\overline{OP} = r$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - 0)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 0)^2 + (y_0 - 0)^2 = r^2$$

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2$$

Dengan menjalankan titik $P(x_0, y_0)$, yakni dengan membuang indeks 0, maka di dapat:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Jadi persamaan lingkaran dengan pusat $O(0, 0)$ dan jari-jari r adalah:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

- c. Guru memberikan contoh soal persamaan lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dengan jari-jari berbeda-beda. Misal persamaan lingkaran dengan pusat $O(0, 0)$ jari-jarinya:

- 1) 5
- 2) 7
- 3) 10

Siswa diberi pertanyaan secara lisan untuk menjawab persamaan lingkaran apabila diketahui pusat dan panjang jari-jarinya. Harapannya siswa akan menjawab:

- 1) $x^2 + y^2 = 25$
- 2) $x^2 + y^2 = 49$
- 3) $x^2 + y^2 = 100$

- d. Siswa diberi pertanyaan secara lisan untuk mencari panjang jari-jari lingkaran apabila diketahui persamaan lingkarannya, misalnya tentukan jari-jari lingkaran jika persamaannya:

- 1) $x^2 + y^2 = 64$
- 2) $x^2 + y^2 = 12$
- 3) $x^2 + y^2 = 32$

Harapannya siswa akan menjawab:

- 1) $r = \sqrt{64} = 8$
- 2) $r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- 3) $r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

5. Siswa diberi tugas untuk mengerjakan soal-soal sebagai berikut:

Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat $O(0, 0)$ dan jari-jari:

- | | | |
|------------|--------------------|--------------------|
| a. $r = 1$ | c. $r = 3\sqrt{3}$ | e. $r = 13$ |
| b. $r = 6$ | d. $r = 0,5$ | f. $r = 6\sqrt{2}$ |

Tentukan panjang jari-jari lingkaran, jika persamaannya adalah:

a. $x^2 + y^2 = 81$

d. $x^2 + y^2 = 54$

b. $x^2 + y^2 = 64$

e. $x^2 + y^2 = 48$

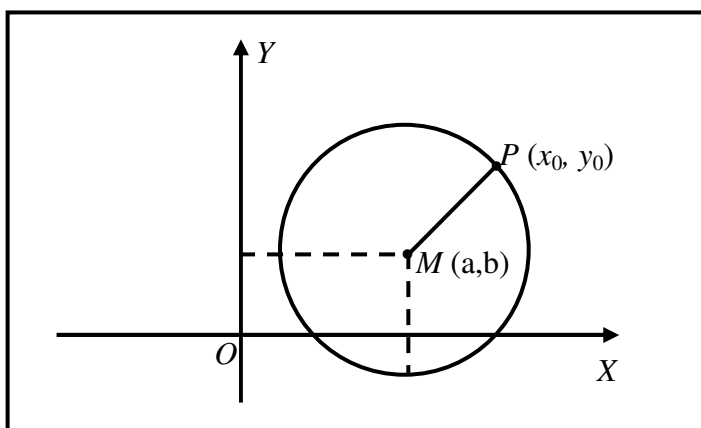
c. $x^2 + y^2 = 45$

f. $x^2 + y^2 = 72$

6. Lingkaran dengan pusat $M(a,b)$ dan jari-jari r .

Untuk mengajak siswa menemukan persamaan lingkaran dengan pusat $M(a,b)$ dan jari-jari r dapat ditempuh dengan dua cara, yaitu.

a. Dengan cara langsung



Gb. 2.4. Lingkaran dengan pusat $M(a,b)$ dan jari-jari r

Ingatkan lagi kepada siswa definisi lingkaran dan rumus jarak dua titik.

Jarak $\overline{MP} = r =$ jari - jari lingkaran

Titik $M(a,b)$ adalah pusat lingkaran.

Andaikata $P(x_0,y_0)$ adalah titik yang terletak pada lingkaran, maka dengan menggunakan definisi lingkaran didapat:

$$\overline{MP} = r$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$$

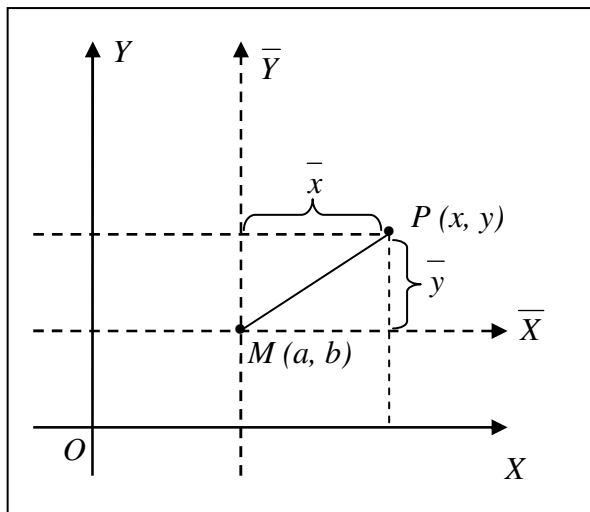
Dengan menjalankan titik $P(x_0, y_0)$, maka didapat:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Jadi persamaan lingkaran dengan pusat $M(a,b)$ dan jari-jari r adalah

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

b. Dengan cara menggunakan rumus Translasi Sumbu Koordinat



Gb. 2.5. Translasi $(0,0) \rightarrow (a,b)$

Dengan tanya jawab, siswa diajak untuk menemukan hubungan antara x dan \bar{x} serta y dan \bar{y} . Garis \bar{x} , \bar{y} adalah sumbu baru sejajar x, y sumbu lama dan melalui (a,b) .

Dengan menggeser titik pusat $O(0,0)$ ke titik $M(a,b)$, maka didapat hubungan bahwa:

$$\bar{x} = x - a$$

$$\bar{y} = y - b$$

Terhadap sistem $\bar{X} M \bar{Y}$, maka persamaan lingkaran $M(a,b)$ yang oleh sistem $\bar{X} M \bar{Y}$ dinyatakan dengan $(0,0)$ dan jari-jari r adalah

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = r^2$$

yang jika dinyatakan dalam susunan sistem XOY menjadi:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Jadi persamaan lingkaran dengan pusat $M (a,b)$ dan jari-jari r adalah:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

7. Diberikan contoh menentukan persamaan lingkaran dengan pusat $M (5,2)$ dan jari-jari 4, dengan tanya jawab, diharapkan diperoleh jawaban siswa sebagai berikut:

Pusat lingkaran $M (5,2)$ dan jari-jari lingkaran $r = 4$, maka persamaan lingkarannya adalah

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 + 25 = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 4y + 13 = 0$$

Siswa diberi tugas untuk menentukan persamaan lingkaran jika diketahui koordinat titik pusat dan panjang jari-jarinya.

Tentukan persamaan lingkaran jika:

- pusatnya $K (5, 1)$ dan jari-jari 3
- pusatnya $L (2, -3)$ dan jari-jari 5
- pusatnya $M (-3, 4)$ dan jari-jari 6
- pusatnya $N (-6, -2)$ dan jari-jari 1

Soal-soal di atas dapat dikerjakan secara berkelompok atau secara mandiri. Diberikan waktu kurang lebih 10 menit, kemudian salah seorang siswa diminta maju untuk menuliskan jawabannya. Siswa yang lain mencocokkan pekerjaan masing-masing, apakah sudah benar atau belum. Apabila ternyata masih ada jawaban siswa yang salah, hendaklah dijelaskan dan guru menandakan lagi apakah siswa benar-benar telah tahu letak kesalahannya.

8. Dari hasil presentasi diharapkan jawaban siswa adalah sebagai berikut.

a. Persamaan lingkaran yang pusatnya $K(5, 1)$ dan jari-jari 3 adalah:

$$(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 2y + 17 = 0$$

b. Persamaan lingkaran yang pusatnya $L(2, -3)$ dan jari-jari 5 adalah:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

c. Persamaan lingkaran yang pusatnya $M(-3, 4)$ dan jari-jari 6 adalah:

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 6^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 36$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$$

d. Persamaan lingkaran yang pusatnya $N(-6, -2)$ dan jari-jari 1 adalah:

$$(x + 6)^2 + (y + 2)^2 = 1^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 12x + 4y + 39 = 0$$

9. Dilanjutkan dengan mencari pusat dan jari-jari lingkaran jika persamaannya diketahui. Siswa diberi contoh, misalnya:

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang persamaannya:

a. $x^2 + y^2 - 10x - 4y - 71 = 0$

b. $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 15 = 0$

Dengan tanya jawab, diperoleh jawaban siswa sebagai berikut.

Jawaban yang diharapkan untuk no. a.:

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y - 71 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 5^2 + y^2 - 4y + 2^2 - 5^2 - 2^2 = 71$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 71 + 25 + 4$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 100$$

Jadi pusat lingkaran (5, 2) dan jari-jari lingkaran 10.

Jawaban yang diharapkan untuk no. b.:

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 3^2 + y^2 + 10y + 5^2 - 3^2 - 5^2 - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 49$$

Jadi pusat lingkaran (3, -5) dan jari-jari lingkaran 7.

Diingatkan kepada siswa cara menambah 3^2 dan 5^2 ke dalam persamaan.

10. Siswa diajak untuk menemukan pusat dan jari-jari lingkaran dalam bentuk umum

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, dengan cara sebagai berikut:

Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + Ax + \left(\frac{1}{2}A\right)^2 + y^2 + By + \left(\frac{1}{2}B\right)^2 + C - \left(\frac{1}{2}A\right)^2 - \left(\frac{1}{2}B\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}A\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}B\right)^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C$$

Dari bentuk terakhir ini, dengan cara tanya jawab, siswa diajak untuk menentukan pusat dari jari-jari lingkaran. Diharapkan siswa akan dapat menyebutkan bahwa jika persamaan lingkarannya

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ maka pusat lingkaran $P\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$ dan jari-

jari lingkaran $R = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$.

$R = -\sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$ tidak diambil, karena jari-jari lingkaran selalu positif.

Siswa diberi tugas untuk menentukan pusat dan jari-jari lingkaran sebagai berikut.

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran jika persamaan lingkarannya adalah:

- $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 23 = 0$
- $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 16 = 0$
- $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 20 = 0$
- $x^2 + y^2 - 4x - 60 = 0$
- $x^2 + y^2 - 10y - 24 = 0$

Soal-soal di atas dikerjakan secara kelompok. Tiap kelompok terdiri atas 4 atau 5 siswa, dengan diberi waktu kurang lebih 10 menit. Kemudian salah satu anggota kelompok mempresentasikan jawaban dari hasil diskusi di papan tulis.

11. Dari hasil presentasi, diharapkan jawaban siswa adalah sebagai berikut

- Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 23 = 0$
 $A = -10, B = 8, \text{ dan } C = -23.$

$$\text{Pusat lingkaran } \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B \right) = (5, -4)$$

$$\begin{aligned} \text{Jari-jari lingkaran } R &= \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (-10)^2 + \frac{1}{4} \cdot 8^2 + 23} \\ &= \sqrt{25 + 16 + 23} \\ &= \sqrt{64} = 8 \end{aligned}$$

b. Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 16 = 0$

$A = 8, B = 4,$ dan $C = -16$

$$\text{Pusat lingkaran } \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = (-4, -2)$$

$$\begin{aligned}\text{Jari-jari lingkaran } R &= \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}.8^2 + \frac{1}{4}.4^2 + 16} \\ &= \sqrt{16 + 4 + 16} \\ &= \sqrt{36} \\ &= 6\end{aligned}$$

c. Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 20 = 0$

$A = -6, B = -12,$ dan $C = 20$

$$\text{Pusat lingkaran } \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = (3, 6)$$

$$\begin{aligned}\text{Jari-jari lingkaran } R &= \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(-6)^2 + \frac{1}{4}(-12)^2 - 20} \\ &= \sqrt{9 + 36 - 20} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$

d. Lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 60 = 0$

$A = -4, B = 0,$ dan $C = -60$

$$\text{Pusat lingkaran } \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = (2, 0)$$

$$\text{Jari-jari lingkaran } R = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{1}{4}(-4)^2 + \frac{1}{4}(0)^2 + 60} \\
&= \sqrt{4 + 0 + 60} \\
&= \sqrt{64} \\
&= 8
\end{aligned}$$

e. Lingkaran $x^2 + y^2 - 10y - 24 = 0$

$$A = 0, B = -10, \text{ dan } C = -24$$

$$\text{Pusat lingkaran } \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = (0, 5)$$

$$\begin{aligned}
\text{Jari-jari lingkaran } R &= \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4}(-10)^2 + 24} \\
&= \sqrt{0 + 25 + 24} \\
&= \sqrt{49} \\
&= 7
\end{aligned}$$

12. Penutup

Pada kegiatan penutup, siswa dibimbing untuk membuat ringkasan dan kesimpulan dari materi yang baru diterima. Diharapkan kesimpulan yang diperoleh siswa adalah:

- Persamaan lingkaran yang pusatnya $O(0,0)$ dan jari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$.
- Persamaan lingkaran yang pusatnya $M(a,b)$ dan jari-jari r adalah $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
- Lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ memiliki

$$\text{pusat } P\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) \text{ dan jari-jari } R = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}.$$

Latihan 1 (Untuk PR)

Sebelum disampaikan kepada siswa, cobalah Anda kerjakan soal latihan 1 di bawah ini tanpa terlebih dahulu melihat kuncinya.

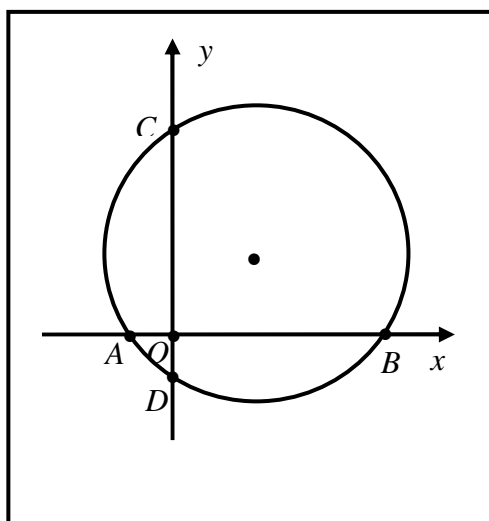
1. Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya $O(0,0)$ dengan jari-jari
 - a. 2
 - b. 7
 - c. $2\sqrt{7}$
 - d. $5\sqrt{2}$
 - e. $\sqrt{13}$
2. Tentukan persamaan lingkaran yang memiliki pusat dan jari-jari sebagai berikut.
 - a. pusat $(5, 1)$ dan jari-jari 4
 - b. pusat $(2, -3)$ dan jari-jari 12
 - c. pusat $(-3, 4)$ dan jari-jari 9
 - d. pusat $(-1, -5)$ dan jari-jari 3

Petunjuk untuk no. 3 dan 4:

Garis singgung pada lingkaran adalah garis yang memotong lingkaran hanya pada satu titik. Titik tersebut dinamakan titik singgung. Garis singgung tegak lurus jari-jari pada titik singgungnya.

3. Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya di titik $A(5, -3)$ serta
 - a. menyinggung sumbu x
 - b. menyinggung sumbu y
4. Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya di titik $(0, 4)$ serta
 - a. menyinggung garis $y = x$
 - b. menyinggung garis $y = -x$
 - c. bagaimana hasil Anda dari soal a dan b?

5. Tentukan pusat dan jari-jari dari lingkaran
 - a. $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$
 - b. $x^2 + y^2 - 10x + 6y - 2 = 0$
 - c. $x^2 + y^2 + 6x - 12y - 4 = 0$
 - d. $x^2 + y^2 + 4x + 16y - 32 = 0$
 - e. $x^2 + y^2 - 10x - 56 = 0$
 - f. $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 25 = 0$
 - g. $x^2 + y^2 + 8y - 33 = 0$
6. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $O(0,0)$, pusatnya pada garis $x + 2y = 5$, dan jari-jarinya 5.
7. Tentukan persamaan lingkaran yang memotong sumbu x dan sumbu y , dimana panjang tali busurnya 20 dan 36, jari-jarinya $5\sqrt{13}$ dan pusat berada pada kuadran pertama. Petunjuk :



- Tali busur AB pada sumbu x
- Tali busur CD pada sumbu y

Gb. 2.6 Lingkaran dengan talibusur AB pada sumbu x dan talibusur CD pada sumbu y

Coba cocokkanlah jawaban Anda dengan kunci yang terdapat pada bagian akhir paket ini. Hitunglah banyak jawaban Anda yang benar. Untuk menghitung pencapaian Anda gunakan rumus di bawah ini.

$$\text{Capaian Anda} = \frac{\text{banyaknya jawaban Anda yang benar}}{7} \times 100\%$$

Jika tingkat capaian anda 90% atau lebih, bagus, Anda dapat melanjutkan pada kegiatan (bab) berikutnya. Tetapi jika kurang dari 90%, harap diulangi lagi terutama bagian-bagian yang belum Anda pahami.

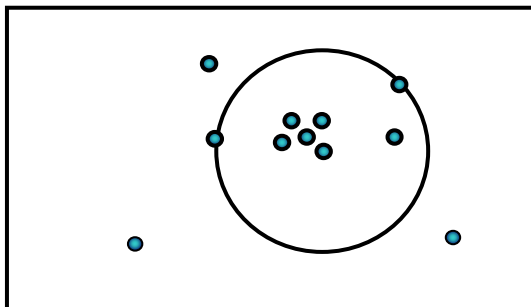
B. Posisi Titik dan Garis Terhadap Lingkaran

Mata Pelajaran	: Matematika
Jenjang Pendidikan	: SMA
Program	: Ilmu Pengetahuan Alam
Kelas/Semester	: II/1
Alokasi waktu	: 2 jam pelajaran
Standar Kompetensi	: Menyusun persamaan lingkaran dan garis singgungnya.
Kompetensi Dasar	: 3.1. Menyusun persamaan lingkaran yang memenuhi persyaratan yang ditentukan. 3.2. Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dalam berbagai situasi.

1. Apersepsi

Sebagai apersepsi dapat digunakan contoh anak-anak yang sedang bermain kelereng.

Yang dilakukan anak dalam bermain kelereng adalah mengeluarkan kelereng dari dalam lingkaran dengan menggunakan kelereng juga.



Kelereng yang telah berhasil dikeluarkan dari dalam lingkaran menjadi miliknya. Dengan cara bergantian mereka mengeluarkan kelereng dari dalam lingkaran itu.

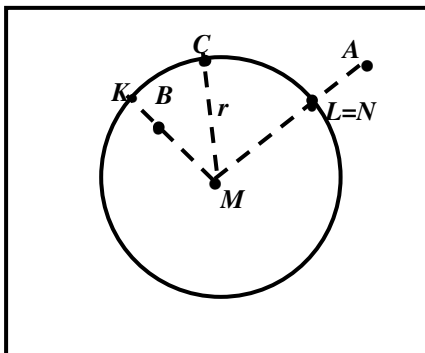
Gb. 2.7. Permainan Kelereng

Pemenangnya adalah siapa yang terbanyak mengeluarkan kelereng dari dalam lingkaran.

Pada proses mengeluarkan kelereng dari dalam lingkaran, ada kalanya bisa berhasil keluar lingkaran, kadang berhenti pada lingkaran, dan kadang tidak berhasil keluar dari lingkaran. Andaikan kelereng tadi dianggap sebagai titik, maka ada 3 kemungkinan posisi titik terhadap lingkaran, yaitu:

- a. titik berada di luar lingkaran
- b. titik berada pada lingkaran
- c. titik berada di dalam lingkaran

Dapat pula dilengkapi dengan apersepsi menggunakan ilustrasi sebagai berikut.



- i) Titik A di luar lingkaran (M, r) : $MA > ML = r$
- ii) Titik B di dalam lingkaran (M, r) : $MB < MK = r$
- iii) Titik C pada lingkaran (M, r) : $MC = MN = r$

Gb. 2.8. Lingkaran (M, r) serta titik A, B , dan C

2. Untuk menjelaskan posisi titik terhadap lingkaran, disajikan terlebih dahulu persamaan lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dan jari-jari r , yaitu: $x^2 + y^2 = r^2$

Siswa ditugasi untuk menulis satu persamaan lingkaran. Misalkan siswa menulis persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 16$, dan sebuah titik $P(2,4)$.

Kemudian siswa ditugasi menghitung jarak dari pusat lingkaran ke titik P . Guru berharap siswa akan mengerjakan sebagai berikut.

$$OP = \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} > r$$

Jadi titik P di luar lingkaran.

Dilanjutkan dengan titik $Q (1,3)$ dan $R (2,2\sqrt{3})$, dimana letak titik Q dan R terhadap lingkaran?

Kemudian siswa ditugasi menghitung jarak dari pusat lingkaran ke titik Q dan R . Guru berharap siswa akan mengerjakan sebagai berikut.

$$OQ = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} < r$$

Jadi titik Q di dalam lingkaran.

$$OR = \sqrt{(2-0)^2 + (2\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4 = r$$

Jadi titik R terletak pada lingkaran.

3. Dilanjutkan dengan lingkaran dengan persamaan bentuk $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Guru memberikan masalah sebagai berikut.

Selidikilah letak titik-titik $P (7,5)$, $Q (-1, 2)$ dan $R (0, 4)$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$.

Siswa ditugasi untuk menentukan pusat lingkaran

$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$, dan diharapkan siswa mengerjakan sebagai berikut.

Lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$, pusatnya $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B) = (3,2)$.

Jika pusat lingkaran adalah titik M , maka $M(3,2)$, dan jari-jari

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}(-6)^2 + \frac{1}{4}(-4)^2 + 3} = \sqrt{16} = 4$$

Siswa ditugasi mencari jarak dari pusat lingkaran ke titik-titik P, Q , dan R .

Guru berharap siswa akan menjawab sebagai berikut.

$$MP = \sqrt{(3-7)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 > r$$

Jadi titik P berada di luar lingkaran.

$$MQ = \sqrt{(3+1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{16+0} = \sqrt{16} = 4 = r$$

Jadi titik Q berada pada lingkaran.

$$MR = \sqrt{(3-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} < r$$

Jadi titik R berada di dalam lingkaran.

Kemudian kegiatan siswa dapat dikembangkan dengan menggambar lingkaran beserta titik-titik yang ditentukan sebagai berikut.

4. Siswa ditugasi menggambar lingkaran itu serta titik-titik $P(7,5)$, $Q(-1,2)$, dan $R(0,4)$ pada satu susunan salib sumbu. Diharapkan siswa akan menggambar lingkaran itu dengan mencari pusat dan panjang jari-jari lingkaran terlebih dahulu (sama pada kegiatan 3).

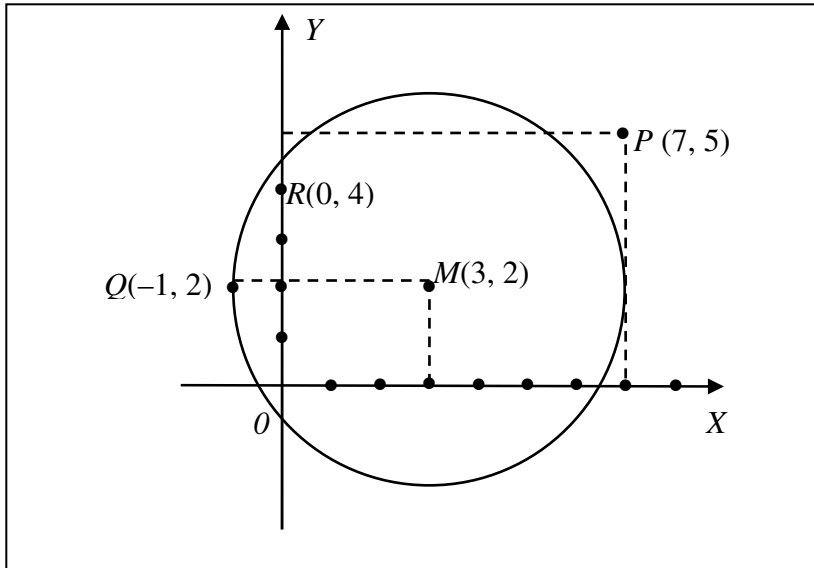
Lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$; $A = -6$, $B = -4$ dan $C = -3$.

Pusat lingkaran $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = (3,2)$ dan jari-jari lingkaran

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(-6)^2 + \frac{1}{4}(-4)^2 + 3} \\ &= \sqrt{9 + 4 + 3} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Jadi pusat $(3, 2)$ dan jari-jari 4.

Siswa menggambar lingkaran dan titik-titik $P(7,5)$; $Q(-1,2)$ dan $R(0,4)$ sebagai berikut:



Gb. 2.9. Lingkaran dengan pusat titik $M(3, 2)$ dan jari-jari $r = 4$

Siswa ditugasi mensubstitusikan titik $P(7,5)$ ke persamaan lingkaran $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$; $M(3, 2)$ dan $r = 4$.

Substitusi $P(7, 5)$:

$$\begin{aligned} (7 - 3)^2 + (5 - 2)^2 &= \overline{PM}^2 \\ &= 4^2 + 3^2 \\ &= 25 \Leftrightarrow \overline{PM} = 5 \end{aligned}$$

Jadi $\overline{PM} = 5 > 4 = r$, maka P di luar lingkaran.

Untuk titik $Q(-1, 2)$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$$

Substitusi $Q(-1, 2)$

$$\begin{aligned} (-1 - 3)^2 + (2 - 2)^2 &= \overline{MQ}^2 \\ &= (-4)^2 + 0 \\ &= 16 \Leftrightarrow \overline{QM} = 4 \end{aligned}$$

Jadi $\overline{QM} = 4 = r$, maka titik Q terletak pada lingkaran

Juga untuk titik $R(0, 4)$.

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$$

Substitusi $R(0, 4)$

$$\begin{aligned}(0 - 3)^2 + (4 - 2)^2 &= \overline{MR}^2 \\ &= (-3)^2 + (2)^2 \\ &= 13 \Leftrightarrow \overline{MR} = \sqrt{13}\end{aligned}$$

Jadi $\overline{RM} = \sqrt{13} < 4 = r$, maka titik R di dalam lingkaran.

Dari gambar dan hasil perhitungan, siswa dibimbing untuk menyimpulkan bahwa:

- $P(7, 5)$ jika disubstitusikan pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ menghasilkan nilai positif, maka titik $P(7, 5)$ berada di luar lingkaran.
 - $Q(-1, 2)$ jika disubstitusikan pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ menghasilkan nilai nol, maka titik $Q(-1, 2)$ berada pada lingkaran.
 - $R(0, 4)$ jika disubstitusikan pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ menghasilkan nilai negatif, maka titik $R(0, 4)$ berada di dalam lingkaran.
5. Siswa ditugasi untuk menyelidiki titik-titik lain, misalnya titik-titik $A(2,3)$; $B(-2,2)$; $C(7,2)$; $D(3,-3)$; $E(5,7)$ apakah terletak di luar lingkaran, pada lingkaran, atau di dalam lingkaran. Diberi waktu kurang lebih 10 menit, kemudian salah seorang siswa mempresentasikan hasil kerjanya, siswa yang lain menyimak dan mencocokkan hasil pekerjaannya.

Diharapkan hasil pekerjaan siswa adalah sebagai berikut.

Lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$

- $A(2, 3) \rightarrow 2^2 + 3^2 - 6.2 - 4.3 - 3 = 4 + 9 - 12 - 12 - 3 = -14 < 0$

Jadi titik $(2, 3)$ berada di dalam lingkaran

- $B (-2, 2) \rightarrow (-2)^2 + 2^2 - 6(-2) - 4(2) - 3 = 4 + 4 + 12 - 8 - 3 = 9 > 0$
Jadi titik $(-2, 2)$ berada di luar lingkaran.
- $C (7, 2) \rightarrow 3^2 + (-3)^2 - 6.3 - 4.(-3) - 3 = 49 + 4 - 42 - 8 - 3 = 0$
Jadi titik $(7, 2)$ berada pada lingkaran
- $D (3, -3) \rightarrow 3^2 + (-3)^2 - 6.3 - 4.(-3) - 3 = 9 + 9 - 18 + 12 - 3 = 9 > 0$
Jadi titik $(3, -3)$ berada di luar lingkaran
- $E (5, 7) \rightarrow 5^2 + 7^2 - 6.5 - 4.7 - 3 = 25 + 49 - 30 - 28 - 3 = 13 > 0$
Jadi titik $(5, 7)$ berada di luar lingkaran.

Mungkin ada siswa yang mengerjakan dengan cara mencari terlebih dahulu pusat dan panjang jari-jari lingkaran kemudian mencari jarak antara titik pusat lingkaran dengan titik-titik $A, B, C, D,$ dan E .

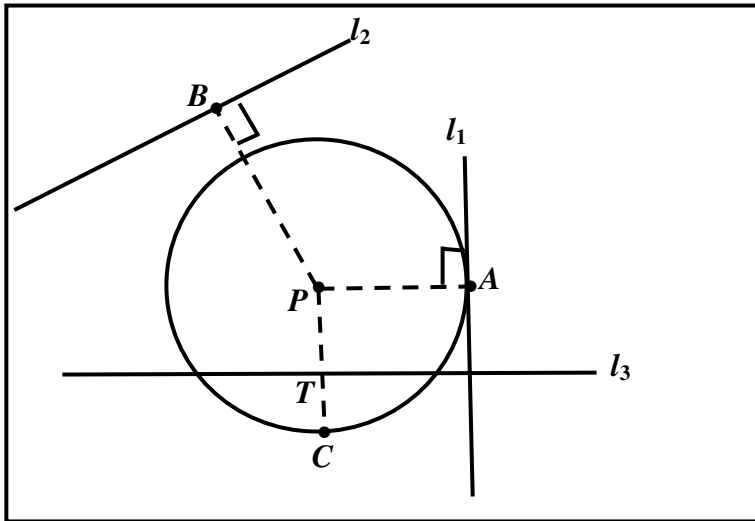
Jika jaraknya $> r$, maka titik berada di luar lingkaran.

Jika jaraknya $< r$, maka titik berada di dalam lingkaran.

Jika jaraknya $= r$, maka titik berada pada lingkaran.

Kemudian pelajaran dilanjutkan dengan penyelidikan posisi garis terhadap lingkaran. Siswa diminta untuk menggambar sembarang lingkaran.

6. Siswa menggambar lingkaran sembarang sebagai berikut:



Gb. 2.10. Lingkaran dengan tiga garis l_1 , l_2 , dan l_3

Dengan memperhatikan gambar di atas, secara intuisi siswa diarahkan untuk memperoleh pengertian bahwa,

- i) Jarak $d = PA = r$, garis menyinggung lingkaran.
- ii) Jarak $d = PB > r$, garis di luar lingkaran (tidak memotong dan tidak menyinggung)
- iii) Jarak $d = PT < r$, garis memotong lingkaran.
- iv) Rumus jarak dari $P(x_0, y_0)$ ke garis $Ax + By + C = 0$

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Siswa diberi tugas untuk menyelidiki letak garis-garis yang ditentukan terhadap lingkaran seperti berikut.

Selidikilah letak garis-garis $l_1 \equiv x + y = 5$, $l_2 \equiv x - y = 8$ dan $l_3 \equiv 3x + 4y = 25$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 25$

Diharapkan siswa akan mengerjakan sebagai berikut.

Lingkaran $x^2 + y^2 = 25$, berpusat pada $O(0,0)$ dan jari-jari $r = 5$.

a) Jarak titik O ke garis $l_1 \equiv x + y = 5$ adalah

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|0 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{5}{2}\sqrt{2} < r = 5.$$

Jadi garis $l_1 \equiv x + y = 5$, memotong lingkaran $x^2 + y^2 = 25$

b) Jarak titik O ke garis $l_2 \equiv x - y = 8$ adalah

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|0 + 0 - 8|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{8}{2}\sqrt{2} = 4\sqrt{2} > r = 5.$$

Jadi garis $l_2 \equiv x - y = 8$, di luar lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ (tidak memotong dan tidak menyinggung)

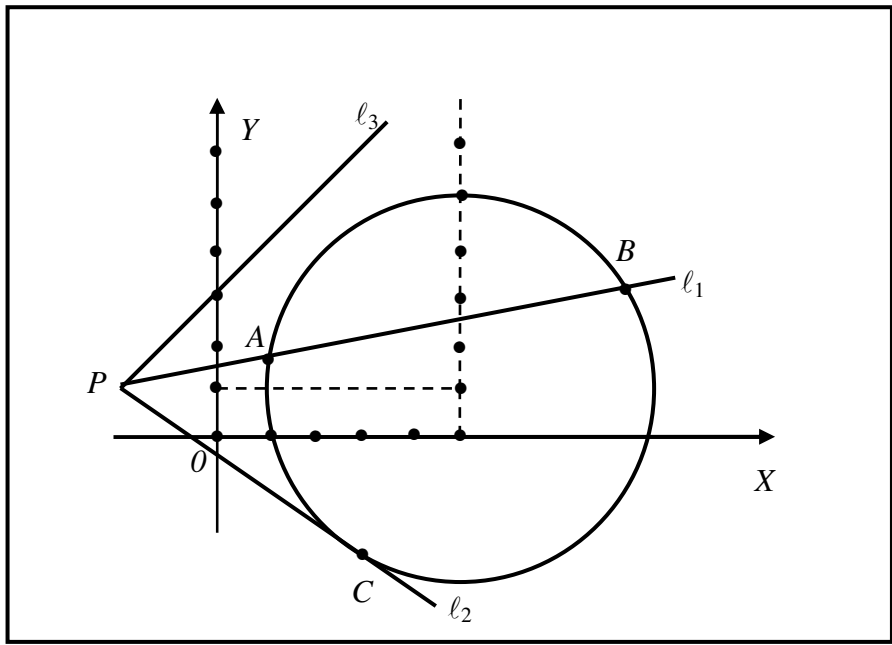
c). Jarak O ke garis $l_3 \equiv 3x + 4y = 25$ adalah

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|0 + 0 - 25|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{25}{5} = r = 5$$

Jadi garis $l_3 \equiv 3x + 4y = 25$, menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$.

Selanjutnya siswa dapat diberi tugas untuk persamaan lingkaran dalam bentuk $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

7. Kemudian dapat dikembangkan cara lain untuk menyelidiki letak garis terhadap lingkaran sebagai berikut.



Gb. 2.11. Kedudukan garis terhadap lingkaran

8. Siswa diminta untuk menentukan sebuah titik sembarang di luar lingkaran, misalnya ia memilih titik P . Melalui titik P siswa diminta untuk menggambar garis l_1 yang memotong lingkaran di dua titik, yaitu di titik A dan titik B , garis l_2 yang memotong lingkaran di satu titik saja, yaitu titik C dan garis l_3 yang tidak memotong lingkaran.
9. Guru menjelaskan kepada siswa posisi garis terhadap lingkaran ada 3 macam, yaitu
- garis memotong lingkaran pada dua titik berbeda.
 - garis memotong lingkaran pada satu titik saja, dan ini disebut garis menyinggung lingkaran
 - garis tidak memotong lingkaran.

10. Guru menugaskan kepada siswa untuk menentukan nilai diskriminan persamaan kuadrat yang didapat dari perpotongan antara garis dan lingkaran berikut, kemudian ditugasi pula untuk menggambar garis beserta lingkarannya.

a. $13y = -2x + 26$

$$x^2 + y^2 = 25$$

b. $12y = -5x + 65$

$$x^2 + y^2 = 25$$

c. $13y = 6x - 78$

$$x^2 + y^2 = 25$$

11. Diharapkan siswa mengerjakan sebagai berikut.

a. $13y = -2x + 26 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-2x + 26}{13}$

$$x^2 + \left(\frac{-2x + 26}{13} \right)^2 = 25$$

$$x^2 + \left(\frac{4x^2 - 104x + 676}{169} \right) = 25$$

$$\Leftrightarrow 169x^2 + 4x^2 - 104x + 676 = 4225$$

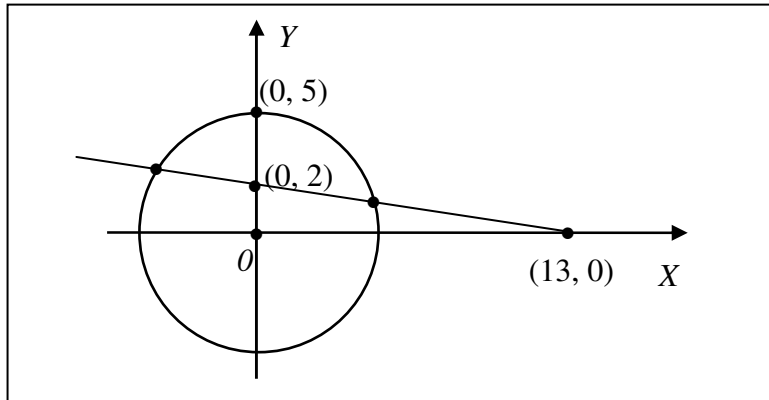
$\Leftrightarrow 173x^2 - 104x - 3549 = 0$, diskriminan dari persamaan kuadrat ini adalah

$$D = 10816 + 2455908$$

$$= 2466724 > 0$$

Jadi $D > 0$

Dan gambarnya sebagai berikut.



Gb. 2.12. Garis memotong lingkaran

$$\text{b. } 12y = -5x + 65 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-5x + 65}{12}$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + \left(\frac{-5x - 65}{12} \right)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{25x^2 - 650x + 4225}{144} \right) = 25$$

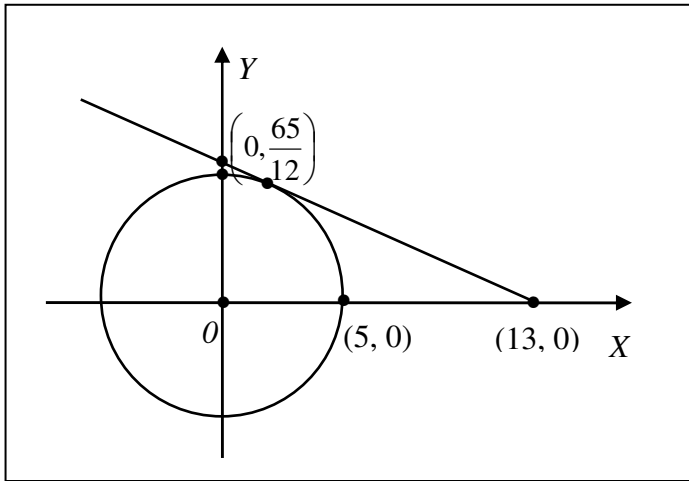
$$\Leftrightarrow 144x^2 + 25x - 650x + 4225 = 3600$$

$$\Leftrightarrow 169x^2 - 650x + 625 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (-650)^2 - 4 \cdot 169 \cdot 625 = \\ &= 422500 - 422500 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi $D = 0$

Dan gambarnya sebagai berikut



Gb. 2.13 Garis menyinggung lingkaran

$$c. 13y = -6x + 78 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-6x + 78}{13}$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + \left(\frac{-6x + 78}{13} \right)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{36x^2 - 936x + 6084}{169} \right) = 25$$

$$\Leftrightarrow 169x^2 + 36x^2 - 936x + 6084 = 4225$$

$$\Leftrightarrow 205x^2 - 936x + 1859 = 0$$

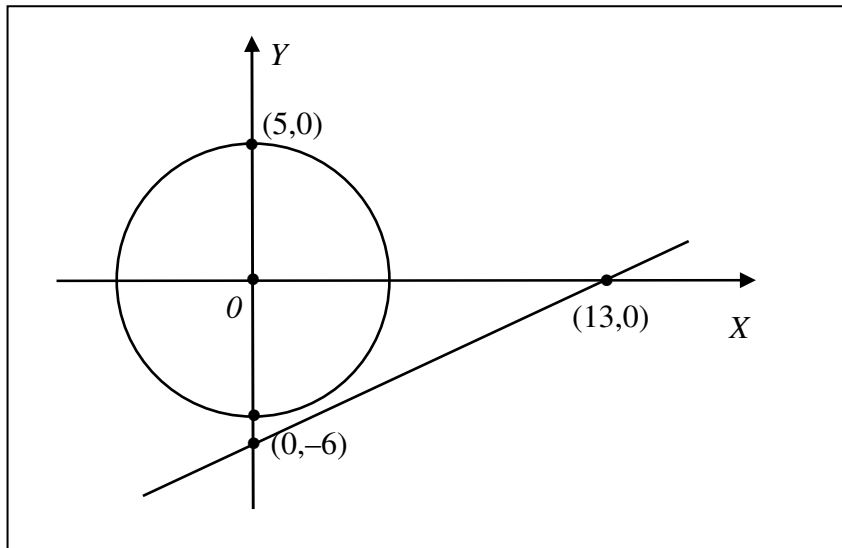
$$D = (-936)^2 - 4 \cdot 205 \cdot 1859$$

$$= 876096 - 1524380$$

$$= -648284 < 0$$

Jadi $D < 0$

Dan gambarnya sebagai berikut:



Gb. 2.14 Garis tidak memotong lingkaran

Dari ketiga gambar di atas siswa diharapkan dapat menyimpulkan bahwa:

- garis memotong lingkaran jika $D > 0$
- garis menyinggung lingkaran jika $D = 0$
- garis tidak memotong lingkaran jika $D < 0$

Penutup

Pada kegiatan penutup, siswa diajak menyimpulkan apa yang telah dipelajari, yaitu:

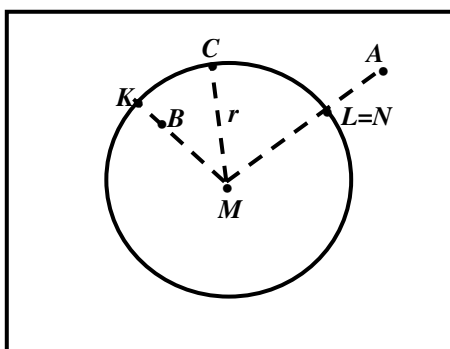
- Persamaan lingkaran dengan pusat $O (0,0)$ jari-jari r adalah:
$$x^2 + y^2 = r^2$$
- Persamaan lingkaran dengan pusat $M (a,b)$ dan jari-jari r adalah:
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

- Pada lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, maka pusat M

$$\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) \text{ dan jari-jarinya } R = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$

Kedudukan sebuah titik terhadap lingkaran.

- titik berada di luar lingkaran
- titik berada pada lingkaran
- titik berada di dalam lingkaran



- Titik A di luar lingkaran (M, r): $MA > ML = r$
- Titik B di dalam lingkaran (M, r): $MB < MK = r$
- Titik C pada lingkaran (M, r): $MC = MN = r$

Gb. 2.15. Lingkaran dengan pusat M

- Lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dan titik $P(x_p, y_p)$.

Jika $x_p^2 + y_p^2 + Ax_p + By_p + C > 0$, maka P diluar lingkaran.

Jika $x_p^2 + y_p^2 + Ax_p + By_p + C = 0$, maka P pada lingkaran.

Jika $x_p^2 + y_p^2 + Ax_p + By_p + C < 0$, maka P di dalam lingkaran

- Lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ } Eliminasikan y sehingga
 Garis $y = mx + n$ } menjadi bentuk
 $px^2 + qx + t = 0$ dan
 $D = q^2 - 4pt$.

Jika $D > 0$, maka garis memotong lingkaran

Jika $D = 0$, maka garis menyinggung lingkaran

Jika $D < 0$, maka garis tidak memotong lingkaran

- Dapat juga digunakan cara sebagai berikut :

Jika jarak diberikan, jarak dari $M \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B \right)$ ke garis

$$mx - y - n = 0$$

$$d = \frac{\left| m \left(-\frac{1}{2}A \right) - \left(-\frac{1}{2}B \right) - n \right|}{\sqrt{m^2 + 1}}, \text{ dan } R \text{ jari-jari lingkaran.}$$

- a) $d = R$, menyinggung
- b) $d > R$, tak memotong dan tak menyinggung (di luar)
- c) $d < R$, memotong

11. Siswa diberi soal-soal untuk latihan di rumah.

Latihan 2

Sebelum disampaikan kepada siswa, cobalah Anda kerjakan soal latihan 2 di bawah ini tanpa terlebih dahulu melihat kuncinya.

1. Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya $O(0,0)$ dan panjang jari-jari:
 - a. 5
 - b. 3
 - c. $2\sqrt{5}$
 - d. $7\sqrt{2}$
2. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran jika persamaannya:
 - a. $x^2 + y^2 = 18$
 - b. $x^2 + y^2 = 32$
 - c. $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 59 = 0$
 - d. $x^2 + y^2 - 10x - 24y = 0$
 - e. $2x^2 + 2y^2 - 15x = 0$
3. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu y di titik asal dan melalui titik $(6, -3)$.
4. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu x , $r = 2$ dan pusatnya pada garis $2x + y = 4$.

5. Tentukan persamaan lingkaran luar segitiga ABC , jika $A (3, 2)$; $B (-1, 0)$, $C (0, 3)$. Tentukan pula titik pusat dan jari-jarinya.
6. Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$. Selidikilah letak titik-titik berikut ini:
 $A (4, -2)$; $B (7, 3)$; $C (-1, -1)$; $D (0, 6)$; $E (8, -1)$.
7. Bagaimana posisi:
 - a. garis $y = x - 5$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 0$
 - b. garis $y = x + 5\sqrt{2}$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 25$
 - c. garis $y = -x - 5$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$
8. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $(2, -1)$, $(4, 5)$ dan $(-3, -2)$.
9. Tentukan persamaan lingkaran yang memotong sumbu x dan sumbu y positif sepanjang 2 dan 4, dan yang melalui titik asal.
10. Tentukan persamaan lingkaran melalui titik asal, pusatnya pada garis $x + 2y = 5$ dan jari-jarinya 5.
11. Tentukan persamaan lingkaran luar segitiga yang sisi-sisinya mempunyai persamaan garis-garis: $x = -2y$, $x = 2$, dan $y = -2$.
12. Seperti no. 11, jika sisi-sisinya adalah garis-garis: $y = -2x + 5$;
 $3x - y = -5$ dan $x - 7y = 25$.
13. Diketahui titik-titik $A (8, 0)$ dan $B (0, 4)$. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui tengah-tengah ketiga sisi segitiga ABO .
14. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu x , $r = 2$ dan pusatnya pada garis $4y = -3x + 16$.
15. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang melalui titik-titik $(0, 5)$; $(12, 0)$ dan titik pusat O .

Coba cocokkanlah jawaban Anda dengan kunci yang terdapat pada bagian akhir paket ini. Hitunglah banyaknya jawaban Anda yang benar. Untuk menghitung pencapaian Anda gunakan rumus di bawah ini;

$$\text{Capaian Anda} = \frac{\text{banyaknya jawaban Anda yang benar}}{15} \times 100\%$$

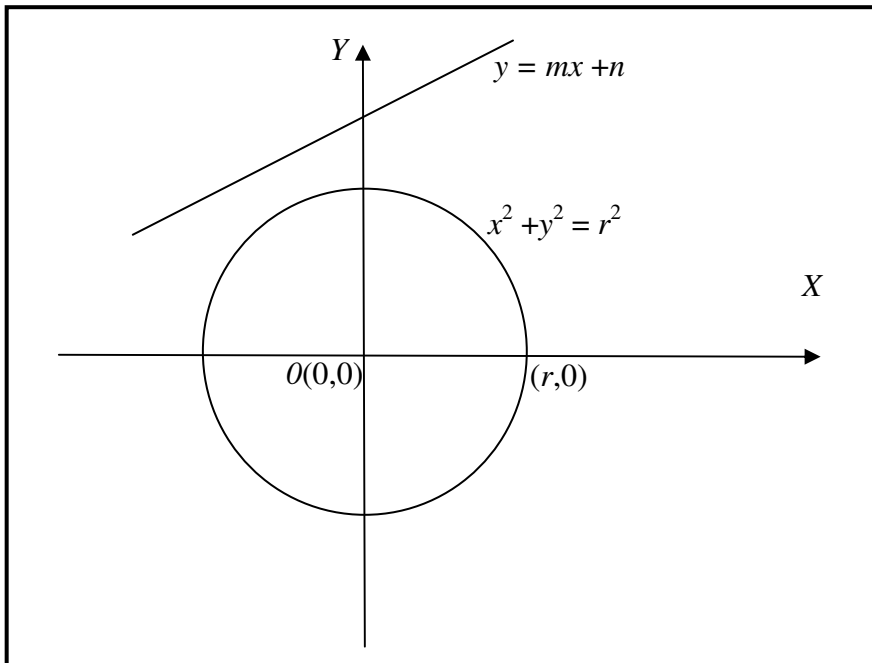
Jika tingkat capaian anda 90% atau lebih, bagus, Anda dapat melanjutkan pada kegiatan (bab) berikutnya. Tetapi jika kurang dari 90% harap diulangi lagi terutama bagian-bagian yang belum Anda pahami.

C. Persamaan Garis Singgung yang Melalui Suatu Titik pada Lingkaran

Mata Pelajaran	: Matematika
Jenjang Pendidikan	: SMA
Program	: Ilmu Pengetahuan Alam
Kelas/Semester	: II/1
Alokasi Waktu	: 2 jam pelajaran
Standar Kompetensi	: Menyusun persamaan lingkaran dan garis singgungnya
Kompetensi Dasar	: 3.2. Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dalam berbagai situasi.

1. Pendahuluan

Sebagai pendahuluan untuk memahami pengertian garis singgung pada lingkaran, dapat digunakan ilustrasi sebagai berikut.



Gb. 2.16. Lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ jari-jari r dan sebuah garis di luarnya

a. Siswa ditugasi untuk memotongkan antara lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dan garis $y = mx + n$ sebagai berikut

b.
$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = mx + n \end{array} \right\} \text{dipotongkan}$$

c. $x^2 + (mx + n)^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 + (m^2x^2 + 2mnx + n^2) = r^2$

$$\Leftrightarrow (1 + m^2)x^2 + 2mnx + (n^2 - r^2) = 0$$

\Leftrightarrow Syarat agar garis menyinggung lingkaran adalah $D = 0$.

$$D = (2mn)^2 - 4(1 + m^2)(n^2 - r^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2n^2 - 4(n^2 - r^2 + m^2n^2 - m^2r^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2n^2 - 4n^2 + 4r^2 - 4m^2n^2 + 4m^2r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4n^2 + 4r^2 + 4m^2r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 = r^2 + m^2r^2$$

$$\Leftrightarrow n = \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

Sehingga persamaan garis singgung dengan gradien m adalah

$$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Jika garis singgung harus sejajar $y = kx + t$, maka $m = k$.

Jika garis singgung harus \perp garis $y = px + q$, maka $m = -\frac{1}{p}$

Jika garis singgung harus melalui titik (x_1, y_1) pada lingkaran, maka gradien garis normalnya (garis normal adalah garis yang tegak lurus garis singgung di titik singgung) adalah $m_1 = \frac{y_1}{x_1}$, jadi gradien garis singgung menjadi

$$m_2 = -\frac{x_1}{y_1}$$

Sehingga persamaan garis singgung menjadi $y = -\frac{x_1}{y_1}x + r\sqrt{1 + \frac{x_1^2}{y_1^2}}$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{x_1}{y_1}x + r\sqrt{\frac{y_1^2}{y_1^2} + \frac{x_1^2}{y_1^2}}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{x_1}{y_1}x + r\sqrt{\frac{y_1^2 + x_1^2}{y_1^2}}, \text{ karena } (x_1, y_1) \text{ pada lingkaran maka berlaku}$$

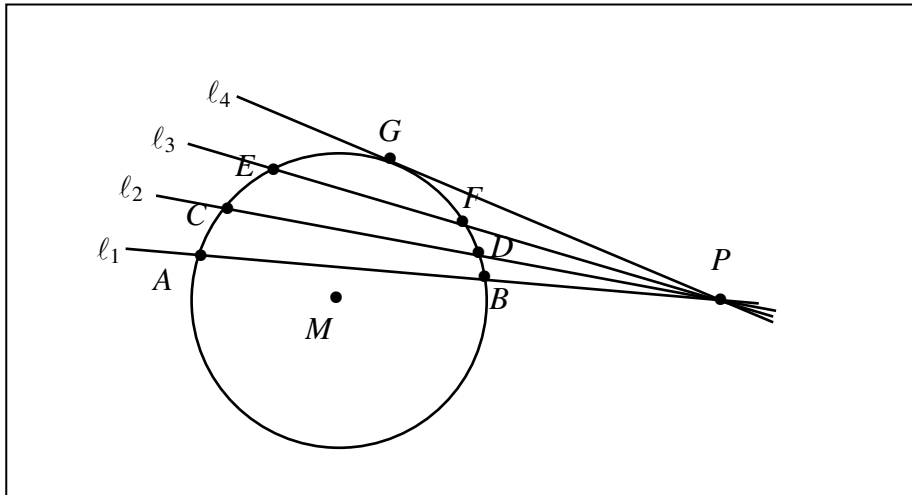
$x_1^2 + y_1^2 = r^2$, sehingga

$$\Leftrightarrow y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{r^2}{y_1} \Leftrightarrow y = -\frac{x_1x + r^2}{y_1} \Leftrightarrow y_1y = -x_1x + r^2 \Leftrightarrow x_1x + y_1y = r^2$$

Jadi persamaan garis singgung yang melalui titik (x_1, y_1) pada lingkaran adalah

$$x_1x + y_1y = r^2$$

Dapat juga digunakan cara lain untuk menemukan persamaan garis singgung yang melalui satu titik yang terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ sebagai berikut.

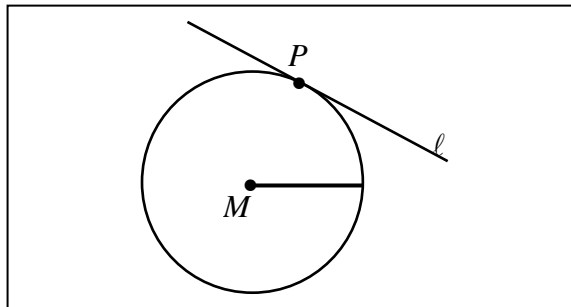


Gb. 2.17. Proses garis menyinggung lingkaran.

- Siswa diminta untuk membuat sebuah lingkaran yang pusatnya titik M dan jari-jarinya 3 cm.
- Letakkan sebuah titik di luar lingkaran dengan jarak $MP = 7$ cm.
- Melalui titik P dibuat garis l_1 yang memotong lingkaran pada titik A dan B .
- Putarlah garis l_1 dengan pusat titik P , sehingga didapat garis l_2 yang memotong lingkaran di titik C dan D .
- Putarlah garis l_2 , dengan pusat titik P , sehingga didapat garis l_3 yang memotong lingkaran di titik E dan F .
- Putarlah garis l_3 , dengan pusat titik P , sehingga didapat garis l_4 yang memotong lingkaran hanya pada satu titik saja, yaitu titik G .
- Maka dikatakan bahwa garis l_4 menyinggung lingkaran di titik G .

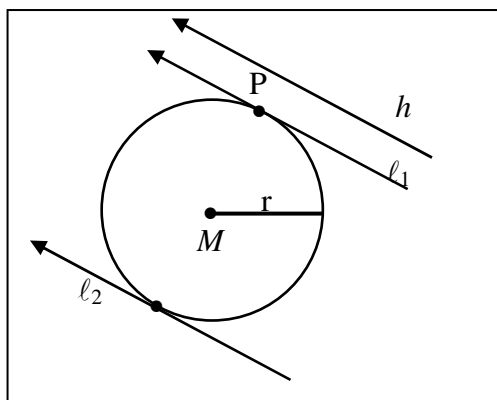
2. Jelaskan kepada siswa bahwa dalam pembicaraan garis singgung selanjutnya, ada 3 jenis garis singgung yang dapat dibuat pada sebuah lingkaran, yaitu:

- a. Garis singgung yang ditarik melalui sebuah titik pada lingkaran. Sebuah titik pada lingkaran tersebut telah diketahui terlebih dahulu.



Gb. 2.18 garis singgung melalui titik P pada lingkaran

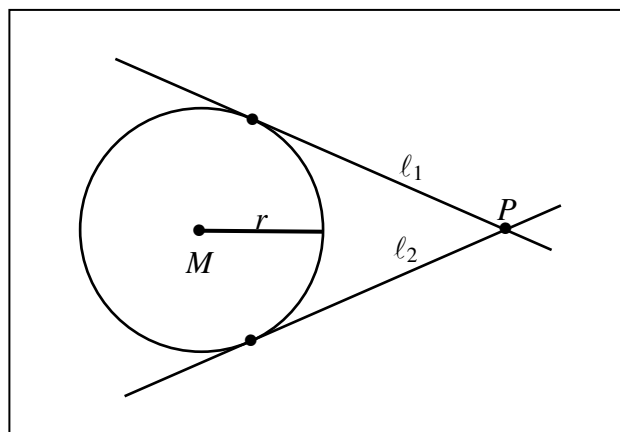
- b. Garis singgung yang ditarik, harus sejajar atau tegak lurus dengan sebuah garis tertentu. Ini juga dapat dikatakan garis singgung yang mempunyai gradien tertentu.



Gb. 2.19. Garis singgung yang sejajar garis h

Diketahui lingkaran (M, r) dan sebuah garis h yang tidak memotong lingkaran. Akan dibuat garis singgung l yang sejajar dengan garis h . Maka terdapat dua garis singgung yang dapat dibuat, yaitu garis singgung l_1 dan l_2 .

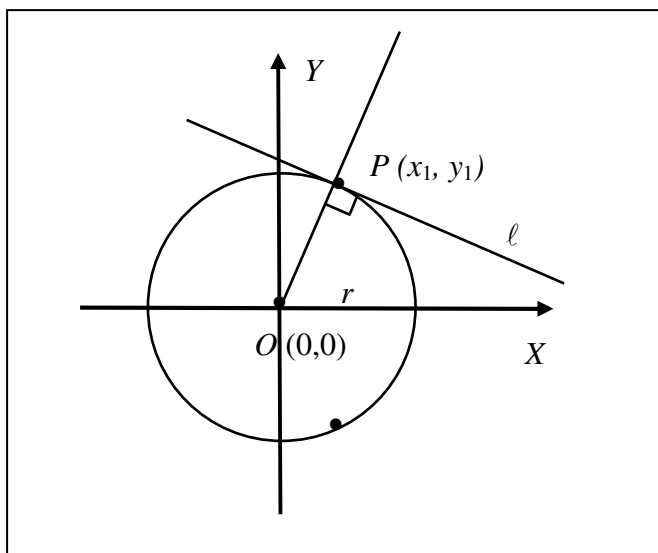
- c. Garis singgung yang ditarik melalui sebuah titik di luar lingkaran. Sebuah titik di luar lingkaran tersebut telah diketahui terlebih dahulu.



Gb. 2.20 garis singgung melalui titik P di luar lingkaran

Diketahui lingkaran (M, r) dan sebuah titik P terletak di luar lingkaran. Akan dibuat garis singgung ℓ yang melalui titik P , maka akan diperoleh dua garis singgung, yaitu garis singgung ℓ_1 dan ℓ_2 yang kedua-duanya melalui titik P .

3. Jelaskan kepada siswa bahwa yang akan menjadi pembicaraan pada pertemuan ini adalah garis singgung yang melalui titik P pada lingkaran, yaitu jenis 2a.
4. Siswa diminta untuk menggunakan sebuah lingkaran yang pusatnya pada $O (0,0)$ dan jari-jarinya r . Letakkan sebuah titik $P (x_1, y_1)$ pada lingkaran.



Gb. 2.21. Garis singgung yang melalui titik P pada lingkaran

5. Siswa diminta untuk menentukan persamaan garis OP , yaitu sebuah garis yang melalui $O(0, 0)$ dengan gradien $\frac{y_1}{x_1}$. Harapan guru, siswa akan menjawab sebagai berikut

$$y - 0 = \frac{y_1}{x_1}(x - 0)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{y_1}{x_1}x$$

Bagaimana kedudukan garis singgung ℓ dengan garis OP ? Harapan guru, siswa akan menjawab bahwa garis singgung ℓ tegak lurus dengan garis OP . Kalau demikian, bagaimana hubungan gradien garis ℓ dengan gradien garis OP ? Harapan guru, siswa akan menjawab bahwa jika gradien OP dinamakan m_1 dan gradien ℓ dinamakan m_2 , maka karena $OP \perp \ell$ sehingga $m_1 \times m_2 = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} \times m_2 = -1$$

$$\Leftrightarrow m_2 = -\frac{x_1}{y_1}$$

6. Kemudian guru menanyakan kepada siswa, bagaimana persamaan dari garis ℓ , yaitu garis yang mempunyai gradien $-\frac{x_1}{y_1}$ dan melalui titik $P(x_1, y_1)$?

7. Harapan guru, siswa akan menjawab

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1} (x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y_1(y - y_1) = -x_1(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y_1y - y_1^2 = -x_1x + x_1^2$$

$$\Leftrightarrow x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2$$

Karena (x_1, y_1) pada lingkaran, maka dipenuhi persamaan $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, sehingga persamaan garis ℓ menjadi :

$$x_1x + y_1y = r^2$$

Akhirnya siswa menemukan bahwa persamaan garis singgung yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah :

$$x_1x + y_1y = r^2. \text{ Rumus ini disebut "pembagian adil".}$$

8. Guru memberikan contoh sebagai berikut:

Tentukan persamaan garis singgung yang melalui:

- titik $P(3, 4)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$
- titik $Q(-5, 12)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 169$
- titik $R(-4, a)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$

9. Dengan tanya jawab, guru bersama siswa menyelesaikan soal di atas sebagai berikut:

- a. Titik $(3, 4)$ dicek terlebih dahulu, apakah benar titik $P(3, 4)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$. Substitusikan titik $(3, 4)$ pada persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$, diperoleh $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Maka benar bahwa titik $(3, 4)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$, sehingga persamaan garis singgung yang melalui titik $(3, 4)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ adalah $3x + 4y = 25$.
- b. Titik $Q(-5, 12)$ dicek terlebih dahulu, apakah benar titik $Q(-5, 12)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 169$. Substitusikan titik $(-5, 12)$ pada persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 169$, diperoleh $(-5)^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Maka benar bahwa titik $(-5, 12)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 169$, sehingga persamaan garis singgung yang melalui titik $(-5, 12)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 169$ adalah $-5x + 12y = 169$.
- c. Titik $R(-4, a)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$, maka terpenuhi persamaan $(-4)^2 + a^2 = 25$
 $\Leftrightarrow 16 + a^2 = 25 \quad \Leftrightarrow a^2 = 9 \quad \Leftrightarrow a = \pm 3$.
 Sehingga titik singgungnya $(-4, 3)$ dan $(-4, -3)$.
 Persamaan garis singgungnya pada titik $(-4, 3)$ adalah $-4x + 3y = 25$ dan persamaan garis singgung pada titik $(-4, -3)$ adalah $-4x - 3y = 25$.

10. Siswa diberi soal latihan untuk dikerjakan di kelas sebagai berikut.

Tentukan persamaan garis singgung yang melalui

- titik $(-6, 8)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$
- titik $(5, b)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 169$
- titik $(a, 24)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 625$

11. Salah seorang siswa siswa maju ke depan untuk mempresentasikan hasil kerjanya, siswa yang lain menyimak dan membetulkan hasil kerjanya jika ternyata hasil pekerjaannya belum benar.

Penutup

12. Guru bersama siswa menyimpulkan hal yang baru saja mereka pelajari. Diharapkan siswa dapat menyimpulkan sendiri bahwa:

Persamaan garis singgung yang mempunyai gradien m terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$

Persamaan garis singgung yang melalui titik (x_1, y_1) pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah: $x_1 x + y_1 y = r^2$

13. Siswa diberi soal-soal untuk latihan di rumah.

Latihan 3

Sebelum disampaikan kepada siswa, cobalah Anda kerjakan soal latihan 3 di bawah ini tanpa terlebih dahulu melihat kuncinya.

1. Tentukan persamaan garis singgung yang melalui
 - a. titik $(4, -3)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$
 - b. titik $(24, -7)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 625$
 - c. titik $(4, b)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 18$
 - d. titik $(m, 2\sqrt{6})$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 32$
 - e. titik $(4\sqrt{2}, n)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 48$
2. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 16$ dan mempunyai gradien 3
3. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkara $x^2 + y^2 = 9$ dan harus membentuk sudut sebesar 45° terhadap sumbu x positif.
4. Sebuah lingkaran berpusat pada $O(0,0)$ dan berjari-jari 5. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran itu dan yang harus sejajar dengan garis $y = 2x - 3$.

5. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 12$ dan harus tegak lurus terhadap garis $x + y = 5$.
6. Sebuah lingkaran berpusat pada $O(0,0)$ dan berjari-jari $3\sqrt{2}$. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran itu dan harus membentuk sudut 135° terhadap sumbu x positif.

Coba cocokkanlah jawaban Anda dengan kunci yang terdapat pada bagian akhir paket ini. Hitunglah banyaknya jawaban Anda yang benar. Untuk menghitung pencapaian Anda gunakan rumus di bawah ini;

$$\text{Capaian Anda} = \frac{\text{banyaknya jawaban Anda yang benar}}{6} \times 100\%$$

Jika tingkat capaian anda 90% atau lebih, bagus, Anda dapat melanjutkan pada kegiatan (bab) berikutnya. Tetapi jika kurang dari 90% harap diulangi lagi terutama bagian-bagian yang belum Anda pahami.

Soal tes sumatif (tes akhir)

1. Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya $O(0,0)$ dengan jari-jari
 - a. 4
 - b. $2\sqrt{5}$
2. Tentukan persamaan lingkaran
 - a. dengan pusat $(5, 2)$ dan jari-jari 6
 - b. dengan pusat $(-2, 3)$ dan jari-jari 8
3. Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya di titik $A(3, -5)$ serta
 - a. menyinggung sumbu x
 - b. menyinggung sumbu y .
4. Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya di titik $(-4, 0)$ serta
 - a. menyinggung garis $y = x$
 - b. menyinggung garis $y = -x$

5. Tentukan pusat dan jari-jari dari lingkaran
 - a. $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 74 = 0$
 - b. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$
6. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $O(0,0)$, pusatnya pada garis $2x + y = 5$, dan jari-jarinya $\sqrt{10}$.
7. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $O(0,0)$; $A(2,1)$; dan $B(1, -3)$
8. Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik $(2, b)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 12$
9. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 18$ dan harus tegak lurus terhadap garis $x - y = 10$!
10. Sebuah lingkaran berpusat pada $O(0,0)$ dan berjari-jari $2\sqrt{5}$. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran itu dan harus membentuk sudut 60° terhadap sumbu x positif!

Coba cocokkanlah jawaban Anda dengan kunci yang terdapat pada bagian akhir paket ini. Hitunglah banyaknya jawaban Anda yang benar. Untuk menghitung pencapaian Anda gunakan rumus di bawah ini;

$$\text{Capaian Anda} = \frac{\text{banyaknya jawaban Anda yang benar}}{10} \times 100\%$$

Jika tingkat capaian Anda 75 % atau lebih, bagus, berarti Anda telah dapat menguasai materi ini dengan baik. Tetapi jika kurang 75% harap diulangi lagi terutama bagian-bagian yang belum Anda pahami.

Bangun lingkaran telah mulai dipelajari oleh siswa sejak kelas 5 Sekolah Dasar, namun lingkaran yang dipandang dari bentuk aljabar atau salah satu bentuk irisan kerucut yang diuraikan secara aljabar analitis baru dikenalkan kepada siswa setelah belajar di SMA. Perlu mendapat penekanan di sini yaitu tentang definisi lingkaran, hendaklah benar-benar dipahami oleh siswa, serta cara menurunkan persamaan lingkaran baik yang pusatnya pada titik asal atau pada suatu titik $M(a,b)$. Jika hal ini telah benar-benar dimiliki oleh siswa, maka untuk menyelesaikan permasalahan tentang lingkaran akan dapat teratasi.

Untuk menentukan persamaan lingkaran dengan kriteria tertentu, kuncinya adalah pada pemahaman tentang apa yang telah diketahui, dibawa ke bentuk geometri (bentuk ilmu ukurnya), kemudian dibawa ke bentuk aljabar, maka akan diperoleh persamaan lingkaran. Jadi dalam hal ini hendaklah guru dapat membimbing siswa agar memahami apa yang telah diketahui kemudian membawanya ke bentuk aljabar.

Pada persamaan garis singgung, pembahasan baru sampai pada persamaan garis singgung yang melalui titik (x_1, y_1) yang terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, sedangkan untuk persamaan garis singgung yang melalui titik (x_1, y_1) yang terletak pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ atau pada lingkaran dengan bentuk umum $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ akan dibahas pada paket berikutnya. Demikian juga persamaan garis singgung yang melalui titik

(x_1, y_1) di luar lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ atau lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ juga akan dibahas pada paket berikutnya.

Model pembelajaran contoh A, B, dan C pada prinsipnya dapat digunakan sebagai salah satu model pembelajaran yang mengaktifkan siswa. Tidak ada model pembelajaran yang standar, oleh sebab itu setiap guru diharapkan dapat mengembangkan model-model pembelajaran yang sesuai dengan karakteristik materi ajar dan kondisi lingkungan dimana guru bertugas.

Selamat bertugas, semoga berhasil dalam membimbing dan mencerdaskan siswa.

Amin.

DAFTAR RUJUKAN

- Depdiknas. 2003. *Kurikulum 2004. Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah*. Jakarta.
- Rawuh dkk. 1972, *Ilmu Ukur Analitik Teori dan Soal-soal untuk SMA- B, Kursus B₁ Ilmu Pasti Jilid I*. Bandung: Terate.
- Sartono Wirodikromo. 1997. *Matematika untuk SMU Kelas 3 Program IPA Caturwulan I*. Jakarta: Erlangga.
- Sriwidodo. *Ilmu Ukur Analitik untuk SMA*. Surakarta: SMA Negeri I.

KUNCI JAWABAN SOAL

Latihan 1

1.
 - a. $x^2 + y^2 = 4$
 - b. $x^2 + y^2 = 49$
 - c. $x^2 + y^2 = 28$
 - d. $x^2 + y^2 = 50$
 - e. $x^2 + y^2 = 13$
2.
 - a. $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 16$
 - b. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 144$
 - c. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 81$
 - d. $(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 9$
3.
 - a. $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 9$
 - b. $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 25$
4.
 - a. $(x + 4)^2 + y^2 = 8$
 - b. $(x + 4)^2 + y^2 = 8$
 - c. hasilnya sama
5.
 - a. Pusat (4,1) dan jari-jari = 5
 - b. Pusat (5, -3) dan jari-jari = 6
 - c. Pusat (-3,6) dan jari-jari = 7
 - d. Pusat (-2, -8) dan jari-jari = 10
 - e. Pusat (5,0) dan jari-jari = 9
 - f. Pusat (-4, -5) dan jari-jari = 4
 - g. Pusat (0, -4) dan jari-jari = 7
6. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ atau $(x - 5)^2 + y^2 = 25$
7. $(x - 1)^2 + (y - 15)^2 = 325$

Latihan 2

1.
 - a. $x^2 + y^2 = 25$
 - b. $x^2 + y^2 = 9$

- c. $x^2 + y^2 = 20$
d. $x^2 + y^2 = 98$
2. a. pusat $O(0,0)$ dan jari-jari $3\sqrt{2}$
b. pusat $O(0,0)$ dan jari-jari $4\sqrt{2}$
c. pusat $(4, 5)$ dan jari-jari 10
d. pusat $(5, -12)$ dan jari-jari 13
e. pusat $\left(\frac{15}{4}, 0\right)$ dan jari-jari $\frac{15}{4}$
3. $2x^2 + 2y^2 - 15x = 0$
4. $2x^2 + 2y^2 - 4y + 1 = 0$ atau $2x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$
5. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$, pusat $(1, 1)$; $r = \sqrt{5}$
6. Titik A di dalam lingkaran
Titik B di dalam lingkaran
Titik C di luar lingkaran
Titik D pada lingkaran
Titik E di luar lingkaran
7. a. garis memotong lingkaran
b. garis menyinggung lingkaran
c. garis tidak memotong lingkaran
8. $x^2 + y^2 + 3x - 7y - 18 = 0$
9. $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$
10. $x^2 - y^2 - 10x = 0$ atau $x^2 - y^2 - 6x - 8y = 0$
11. $x^2 + y^2 - 6x + 3y + 10 = 0$
12. $x^2 + y^2 = 25$
13. $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$
14. $9x^2 + 9y^2 - 15x + 640 = 0$
15. pusat $\left(6, \frac{5}{2}\right)$ dan jari-jari $\frac{13}{2}$

Latihan 3.

- $4x - 3y = 25$
 - $24x - 7y = 625$
 - $4x + y\sqrt{2} = 18$ dan $4x - y\sqrt{2} = 18$
 - $2x\sqrt{2} + 2y\sqrt{6} = 32$ dan $-2x\sqrt{2} + 2y\sqrt{6} = 32$
 - $x\sqrt{2} + y = 12$ dan $x\sqrt{2} - y = 12$.
- $y = 3x \pm 4\sqrt{10}$
- $y = x \pm 3\sqrt{2}$
- $y = 2x \pm 5\sqrt{5}$
- $y = x \pm 2\sqrt{6}$
- $y = -x \pm 6$

Kunci tes sumatif.

- $x^2 + y^2 = 16$
 - $x^2 + y^2 = 20$
- $x^2 + y^2 - 10x - 4y - 7 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 51 = 0$
- $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 25 = 0$
- $x^2 + y^2 - 8y + 8 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 8y + 8 = 0$
- Pusat $(5, -1)$ dan jari-jari = 10.
 - Pusat $(2, -3)$ dan jari-jari = 5.
- $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ atau $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$
- $x^2 + y^2 - \frac{25}{7}x + \frac{15}{7}y = 0$
- $x \pm y\sqrt{2} = 6$

9. $y = -x \pm 6$

10. $y = x\sqrt{3} \pm 4\sqrt{5}$