Al. Krismanto

Tempat/Tanggal Lahir	: Magelang, 18 Juni 1944
Pendidikan	: Sarjana Muda (BSc), Matematika, FIPA, UGM, 1966 Post Graduate Diploma (1991) dan Master of Mathematics Education (1992), Curtin University of Technology, Perth, Australia
Karya Tulis	: 1. Tim Peneliti TIMSS Video Study Indonesia, 2007 s.d. 2008 2. Penulis Buku Matematika SMP Kurikulum 1984, Penerbit Intan Pariwara, 1990 3. Penulis Buku Matematika SMA Kurikulum 1984, Penerbit Intan Pariwara, 1990 4. Penulis Buku PRIMA EBTA Matematika, Penerbit Intan Pariwara, 1990
Pengalaman sebagai Narasumber/Fasilitator	: 1. Asisten dosen matematika di AMN/AKABRI, (1965-1970) 2. Guru Matematika SMA 1 Sleman, Yogyakarta, (1967-1999) 3. Fasilitator Diklat Instruktur PKG Matematika, (1981-1994) 4. Widyaiswara PPPG Matematika, Yogyakarta, (1999-2004)

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA YOGYAKARTA

JL. Kaliurang Km.6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, Yogyakarta
KOTAK POS 31 YK-BS Yogyakarta 55281
Telephone : (0274) 885725, 881717, 885752
Faks : (0274) 885752
E-mail : p4tkmatematika@yahoo.com
Website : www.p4tkmatematika.com

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika

Pembelajaran Trigonometri SMA

SMA

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

PAKET FASILITASI PEMBERDAYAAN KKG/MGMP MATEMATIKA

Pembelajaran Trigonometri SMA

Penulis:

Al. Krismanto, M.Sc.

Penilai:

Winarno, M.Sc.

Editor:

Sri Wulandari Danubroto, S.Si, M.Pd.

Ilustrator:

Fadjar Noer Hidayat, S.Si, M.Ed.

Dicetak oleh **Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika**
Tahun 2008

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
YOGYAKARTA

KATA PENGANTAR ♦

Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika dalam melaksanakan tugas dan fungsinya mengacu pada tiga pilar kebijakan pokok Depdiknas, yaitu: 1) Pemerataan dan perluasan akses pendidikan; 2) Peningkatan mutu, relevansi dan daya saing; 3) Penguatan tata kelola, akuntabilitas, dan citra publik menuju insan Indonesia cerdas dan kompetitif.

Dalam rangka mewujudkan pemerataan, perluasan akses dan peningkatan mutu pendidikan, salah satu strategi yang dilakukan PPPPTK Matematika adalah meningkatkan peran Kelompok Kerja Guru (KKG) dan Musyawarah Guru Mata Pelajaran (MGMP) serta pemberdayaan guru inti/ guru pemandu/guru pengembang yang ada pada setiap kecamatan, kabupaten dan kota.

Sebagai upaya peningkatan mutu dimaksud maka lembaga ini diharapkan mampu memfasilitasi kegiatan-kegiatan yang terkait dengan implementasi pengembangan pembelajaran matematika di lapangan. Guna membantu memfasilitasi forum ini, PPPPTK Matematika menyiapkan paket berisi kumpulan materi/bahan yang dapat digunakan sebagai referensi, pengayaan, dan panduan di KKG/MGMP khususnya pembelajaran matematika, dengan topik-topik/bahan atas masukan dan identifikasi permasalahan pembelajaran matematika di lapangan.

Berkat rahmat Tuhan Yang Maha Esa, atas bimbingan-Nya penyusunan Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG/MGMP Matematika dapat diselesaikan dengan baik. Untuk itu tiada kata yang patut diucapkan kecuali puji dan syukur kehadirat-Nya.

Dengan segala kelebihan dan kekurangan yang ada, paket fasilitasi ini diharapkan bermanfaat dalam mendukung peningkatan mutu pendidik dan tenaga kependidikan melalui forum KKG/MGMP Matematika yang dapat berimplikasi positif terhadap peningkatan mutu pendidikan.

Sebagaimana pepatah mengatakan, tiada gading yang tak retak, demikian pula dengan paket fasilitasi ini walaupun telah melalui tahap identifikasi, penyusunan, penilaian, dan editing masih ada yang perlu disempurnakan. Oleh karena itu saran, kritik, dan masukan yang bersifat membangun demi peningkatan kebermaknaan paket ini, diterima dengan senang hati teriring ucapan terima kasih. Ucapan terima kasih dan penghargaan setinggi-tingginya kami sampaikan pula kepada semua pihak yang membantu mewujudkan paket fasilitasi ini, mudah-mudahan bermanfaat untuk pendidikan di masa depan.

Yogyakarta,
Kepala,

KASMAN SULYONO
NIP.130352806

DAFTAR ISI ♦

PENDAHULUAN

BAB I

A. LATAR BELAKANG

Pada umumnya hasil pembelajaran matematika di Indonesia, termasuk pembelajaran trigonometri di SMA masih jauh dari memuaskan, bahkan kadang-kadang boleh dikatakan masih mengecewakan. Hal ini dapat dilihat dari hasil Nilai UAN dari tahun ke tahun, untuk matematika yang di dalamnya, termasuk trigonometri termasuk dalam kategori “rendah”.

Meskipun sudah banyak dilakukan penataran-penataran guru dalam rangka *inservice training* untuk meningkatkan mutu pembelajaran matematika di SMA yang akhirnya diharapkan akan dapat meningkatkan prestasi siswa dalam matematika, yang sudah barang tentu termasuk trogonometri di dalamnya, pada kenyataannya belum menunjukkan kemajuan yang berarti. Menyimak hasil Monitoring dan Evaluasi (ME) yang diselenggarakan oleh Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika dalam rangka pembinaan dan tindak lanjut pasca penataran sekaligus dalam rangka TNA (*Training Need Assessment),* untuk materi ajar trigonometri menunjukkan bahwa kesulitan guru dalam pengelolaan pembelajaran trigonometri ini menduduki peringkat di atas. Sehingga harus diterima sebagai kenyataan bahwa pengelolaan pembelajaran untuk materi ajar trigonometri di lapangan masih banyak dijumpai berbagai kesulitan dan kendala, baik dari segi pengelolaan pembelajaran dari guru maupun dari sisi pemahaman siswa.

Paradigma baru dalam pendidikan matematika di Indonesia, menurut Zamroni (dalam Sutarto Hadi, 2000), seharusnya memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

1. pendidikan lebih menekankan pada proses pembelajaran (*learning*) dari pada pengajaran (*teaching).*
2. pendidikan diorganisasikan dalam suatu struktur yang fleksibel.
3. pendidikan memperlakukan peserta didik sebagai individu yang memiliki karakteristik khusus dan mandiri.
4. pendidikan merupakan proses yang berkesinambungan dan senantiasa berinteraksi dengan lingkungan.

Mata pelajaran matematika perlu diberikan kepada semua peserta didik untuk membekali peserta didik dengan kemampuan berpikir logis, analitis, sistematis, kritis, dan kreatif, serta kemampuan bekerjasama. Standar kompetensi dan kompetensi dasar matematika yang disusun, khususnya dalam trigonometri, digunakan sebagai landasan pembelajaran untuk mengembangkan kemampuan tersebut di atas, di samping pula untuk mengembangkan kemampuan menggunakan trigonometri dalam pemecahan masalah dan mengkomunikasikan ide atau gagasan dengan menggunakan simbol, tabel, diagram, dan media lain. Kurikulum juga menuntut pendekatan pemecahan masalah merupakan fokus dalam pembelajaran matematika. Juga diharapkan pembelajaran hendaknya dimulai dengan pengenalan masalah yang sesuai dengan situasi (*contextual problem*).

Namun sering dijumpai adanya kesulitan guru membelajarkan siswa dalam lingkup trigonometri dengan pendekatan di atas. Hal itu terutama karena guru lebih terbiasa dengan manipulasi rumus-rumus yang banyak dijumpai dalam trigonometri, sehingga trigonometri menjadi kering. Hal ini menyebabkan adanya anggapan di lapangan matapelajaran matematika, khususnya trigonometri masih merupakan mata pelajaran yang cenderung kurang menarik dan sukar bagi siswa. Jika dicermati, sesungguhnya banyak peluang mengembangkan pembelajaran berbasis masalah dan kontekstual dalam pembelajaran trigonometri. Inilah yang hendak dicoba diatasi melalui paket ini.

B. TUJUAN PENULISAN

Penulisan Paket Fasilitasi Pemberdayaan MGMP bertujuan umum antara lain untuk dapat memfasilitasi MGMP Matematika agar dapat meningkatkan kompetensi guru dalam mengelola pembelajaran matematika yang sesuai dengan standar nasional pendidikan. Secara khusus paket ini berfokus pada Pembelajaran Trigonometri dan mempunyai beberapa tujuan, di antaranya untuk:

1. membekali guru dalam mengantar anak didiknya menguasai standar kompetensi dalam hal menggunakan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri dalam pemecahan masalah, agar siswanya memiliki kompetensi dasar untuk
   a. melakukan manipulasi aljabar dalam perhitungan teknis yang berkaitan dengan perbandingan, fungsi, persamaan dan identitas trigonometri.

b. merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan perbandingan, fungsi, persamaan dan identitas trigonometri.
c. menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan perbandingan, fungsi, persamaan dan identitas trigonometri, dan penafsirannya.

2. menambah wawasan para guru matematika SMA, mengenai trigonometri agar agar dapat menyajikan materi ajar ini dengan baik.
3. menambah referensi tentang pembelajaran trigonometri, dengan pendekatan pemecahan masalah, sehingga diharapkan dapat membantu para guru matematika SMA di dalam mengelola pembelajarannya.

C. RUANG LINGKUP

Ruang lingkup dari penulisan bahan ini mengacu pada standar kompetensi dan kompetensi dasar yang telah dirumuskan dalam Standar Isi, khususnya yang menunjang tercapainya tujuan yang disebutkan di atas. Dengan demikian maka materi dan metodologinya tidak secara ketat dipisahkan, kecuali dalam hal-hal yang memerlukan kondisi untuk itu. Isi bahan yang termuat di sini adalah:

1. "Trigonometri Dasar dan Pembelajarannya" yang mencakup Pengertian Sudut, Ukuran Sudut, Mendefinisikan sinus, kosinus dan tangen, Penguasaan Keterampilan Dasar Perbandingan Trigonometri, dan Perluasan Nilai Perbandingan Trigonometri, dilanjutkan dengan Pembelajaran Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut-sudut Istimewa dan Rumus Perbandingan Trigonometri Sudut yang Berelasi serta Hubungan Perbandingan Trigonometri suatu Sudut.
2. Pembelajaran Identitas, yang memuat Pengertian dan Landasan dasar dalam membuktikan kebenaran identitas.
3. Grafik Fungsi Trigonometri.

Karena keterbatasan ruang yang juga harus dipenuhi, maka tidak semua bahan terkait dengan kompetensi dasar tercakup dalam bahan ini. Adapun bahan yang digunakan dalam tulisan ini utamanya bersumber dari tulisan Drs. Setyawan, M.Pd yang termuat dalam Paket Pembinaan Penataran SMA 2004 dan bahan dari bahan ajar pelatihan Guru Matematika SMA oleh Al. Krismanto, M.Sc. dan Winarno, M.Sc. keduanya dalam kegiatan lingkup PPPPTK Matematika.

D. SASARAN

Sasaran dari paket ini adalah:

1. peserta penataran guru matematika SMA yang diselenggarakan oleh PPPPTK Matematika Yogyakarta.
2. para Guru Inti MGMP Mata Pelajaran Matematika SMA.
3. para guru matematika SMA pada umumnya.

E. PEDOMAN PENGGUNAAN PAKET

Pelajarilah uraian materi yang tercantum dalam ruang lingkup tersebut di atas. Bahan-bahannya terdiri dari bahan yang bersifat informasi materi, dasar dan strategi pembelajaran, dan bagian lain bahan diskusi dan latihan. Bahan yang bersifat informasi tersebut hendaknya dipahami sebagai bahan referensi yang tidak seluruhnya harus disajikan kepada siswa. Yang bersifat dasar dan strategi pembelajaran hendaknya digunakan sebagai bahan alternatif pembelajaran, karena alternatif lain perlu senantiasa dikembangkan dalam rangka penyesuaian dengan kondisi siswa masing-masing. Adapun latihan yang disiapkan untuk siswa hendaknya dikerjakan oleh guru sebelum disampaikan kepada siswa. Bahan diskusi diharapkan dapat digunakan sebagai bahan pembahasan bersama dalam kegiatan di MGMP.

Untuk soal latihan yang ditentukan dikerjakan para pembaca dan pada akhir uraian materi diberikan soal latihan untuk dikerjakan, dengan maksud untuk lebih memantapkan pemahaman materi tersebut. Jadikan soal-soal latihan tersebut sebagai bahan evaluasi diri. Hanya jika telah dapat menjawab paling sedikit 75% maka pengguna dapat dianggap telah menguasai bahan yang diujikan.

Penulis sangat berterima kasih jika pengguna paket memberikan saran-saran dalam rangka perbaikan paket ini. Bagi siapa pun yang ingin memberikan saran perbaikan atau ingin berkomunikasi tentang bahan ini, Anda dapat menyampaikan masalahnya melalui:

1. PPPPTK Matematika, alamat *e-mail*: p4tkmatematika@yahoo.com
   alamat *website*: www.p4tkmatematika.com
   melalui pos, dengan alamat: PPPPTK Matematika, Jalan Kaliurang Km 6, Yogyakarta 55283.
2. *e-mail* penulis, dengan alamat: kristemulawak@yahoo.co.id

TRIGONOMETRI DASAR DAN PEMBELAJARANNYA

BAB II

A. TUJUAN PEMBELAJARAN

Tujuan pembelajaran paket dalam bab ini, yaitu agar pengguna paket:

1. memahami trigonometri dasar yaitu trigonometri yang menyangkut materi dasar dari trigonometri, dari pengertian sudut, pengertian perbandingan dan fungsi trigonometri dan relasi-relasinya beserta penerapannya dalam dan untuk pemecahan masalah.
2. dapat menyusun rencana pembelajaran trigonometri dengan pendekatan pemecahan masalah dan kontekstual.

B. MASALAH

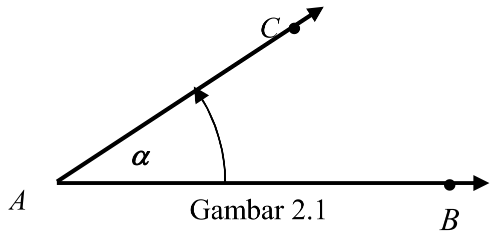
Ketika disajikan sebuah sudut lancip dan diminta menentukan berapa nilai sinus sudut tersebut, beberapa guru menyatakan belum dapat ditentukan besarnya karena tidak jelas segitiga siku-sikunya, dan beberapa yang lain mencari busur derajat, mengukur besar sudutnya, kemudian mencari nilai sinusnya menggunakan tabel atau kalkulator. Hanya sebagian sangat kecil saja yang menggambar segitiga siku-siku dengan sudut tersebut sebagai salah satu sudut lancipnya. Itu pun ukuran segitiganya sembarang, sehingga perlu melakukan pembagian bilangan dengan pecahan yang tidak mudah. Ini menunjukkan bahwa pengetahuan dasar tentang prosedur untuk menentukan perbandingan trigonometri suatu sudut belum mantap. Hal itu hanya salah satu saja dari beberapa penguasaan tentang dasar trigonometri yang belum mantap, meskipun mereka mungkin tidak merasa kesulitan untuk memanipulasi rumus.

Kesulitan lain di antaranya ialah memulai pembelajaran menggunakan pendekatan pemecahan masalah dan pembelajaran kontekstual dalam trigonometri, yang terutama disebabkan terbiasa hanya menekankan pada manipulasi rumus.

C. MEMULAI PEMBELAJARAN TRIGONOMETRI

1. Pengertian Sudut

Di dalam taksonomi belajar menurut Gagne, sudut adalah suatu konsep dasar. Salah satu cara untuk mendefinisikan pengertian sudut ialah melalui rotasi sinar garis sebagai berikut :



Gambar 2.1

Siswa diminta melukis sinar garis (misal $\overrightarrow{AB}$) kemudian sinar garis tersebut diputar berpusat di titik A sampai kedudukan tertentu dan terjadi sinar garis $\overrightarrow{AC}$, sehingga terbentuk sebuah bangun yang dinamakan sudut.

Sudut tersebut dapat dinamai dengan beberapa cara (Barnett & Schmidt, 2000):

a. sesuai nama titik sudutnya: $\angle A$,

b. dengan angka atau huruf kecil. Untuk gambar di atas $\angle\alpha$ (baca: sudut alpha. "α" adalah huruf pertama abjad Yunani). Jika yang dituliskan bukan α melainkan angka 1, nama sudutnya menjadi $\angle 1$,

c. dengan tiga huruf dari titik-titik pada kaki sudut dan titik sudut di antaranya. Sudut di atas adalah $\angle BAC$ atau $\angle CAB$.

Berangkat dari perputaran garis tersebut siswa diajak berdiskusi, agar masing-masing mengkonstruksi konsep sudut pada diri/pikiran siswa masing-masing.

2. Ukuran Sudut

Ada tiga macam satuan besar sudut, yaitu yang mengacu pada sistem seksagesimal, sistem radian dan sistem sentisimal

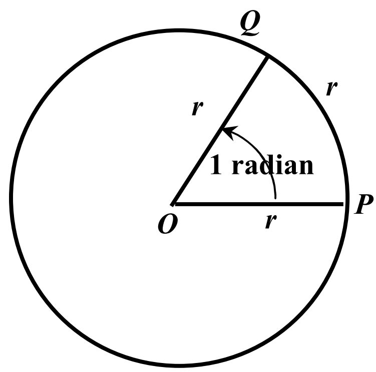
a. Sistem Seksagesimal

Untuk pembelajaran pengukuran sudut ini ditempuh langkah-langkah berikut :

Sebagai motivasi digunakan Sejarah Matematika, bahwa berdasar hasil penggalian situs purbakala di lembah Mesopotamia (sekarang termasuk daerah Irak), ditemukan bahwa ilmu pengetahuan yang dimiliki bangsa Babilonia pada masa itu sudah tinggi, bahkan dari peninggalan bangsa Sumeria (kira-kira 3.000 tahun sebelum Masehi) mereka membagi satu putaran penuh menjadi 360 bagian yang sama. Inilah yang menurut dugaan para ahli bahwa satu lingkaran penuh dibagi menjadi 360 derajat (selanjutnya ditulis dengan simbol 360°). Selanjutnya 1 derajat dibagi menjadi 60 bagian sama yang setiap bagian disebut "1 menit" dan satu menit dibagi menjadi 60 bagian sama yang dinamakan "1 detik". Dengan demikian maka $1° = 60'$, $1' = 60''$ sehingga $1° = 3600''$. Hendaknya tidak dirancukan menit dan detik di sini sebagai ukuran besar sudut dengan menit dan detik ukuran waktu.

b. Sistem Radian

Sebagai motivasi diceriterakan bahwa untuk pengukuran sudut elevasi penembakan meriam dalam kemiliteran zaman dulu digunakan ukuran sudut yang bukan ukuran derajat, namun ukuran lain yang lazim kita kenal dengan ukuran radian.



Gambar 2.2

Dalam sistem radian yang dimaksud besar sudut satu radian adalah besar sudut pusat dari suatu lingkaran yang panjang busur dihadapan sudut tersebut adalah sama dengan jari-jari lingkaran tersebut. Pada gambar di atas,

$$\text{besar sudut } POQ = \frac{\text{panjang busur } PQ}{r} \text{ radian} = \frac{r}{r} \text{ radian}$$

$$= 1 \text{ radian.}$$

Dengan teknik bertanya untuk meningkatkan derajat keaktifan pembelajaran, maka dibahas hubungan antara sudut dalam seksagesimal dan radian. Untuk diingat bahwa dapat ditemukannya hubungan tersebut berdasar pada teorema kesebandingan antara besar sudut dan panjang busur serta luas juring dalam sebuah lingkaran.

Dengan mengingat bahwa $\pi \approx 3{,}14159265358979323846264338 3...$ dan $360° = \frac{2\pi r}{r}$ radian = 2π radian siswa dibawa untuk menemukan bahwa:

1. $180° = \pi$ radian
2. 1 radian $\approx 57{,}296° \approx 57°17'45''$
3. $1° \approx 0{,}017453$ radian

Kadang-kadang 1 radian dibagi lagi dalam 1000 bagian, dan masing-masing bagian disebut miliradian (ditulis dengan tanda $\not{m}$)

c. Satuan Besar Sudut Sistem Sentisimal

Pada instrumen-instrumen untuk keperluan astronomi, peneropongan bintang, teodolit dikenal satuan sudut yang berbeda dengan kedua ukuran di atas. Sistem ini dikenal dengan nama sistem sentisimal. Pada sistem ini satu putaran penuh adalah 400^g (dibaca "400 grad").

Maka diperoleh: besar sudut $\frac{1}{2}$ putaran adalah 200^g

besar sudut $\frac{1}{4}$ putaran adalah 100^g

besar sudut $\frac{1}{400}$ putaran adalah 1^g

Untuk ukuran sudut yang lebih kecil dikenal :

$1^g = 10^{dgr}$ (dibaca : "10 decigrad")

$1^{dgr} = 10^{cgr}$ (dibaca : "10 centigrad")

$1^{cgr} = 10^{mgr}$ (dibaca : "10 miligrad")

$1^{mgr} = 10^{dmgr}$ (dibaca : "10 decimiligrad")

Dengan mengingat definisi ukuran sudut dalam ketiga sistem siswa dapat ditugasi untuk menemukan konversi satuan ukuran sudut antara lain bahwa:

(i) $360^o = 400^g$ atau $1^o = 1{,}1^g$ atau $1^g = 0{,}9^o$

(ii) 2π rad $= 400^g \Leftrightarrow \pi$ rad $= 200^g \Leftrightarrow 1$ rad $\approx 63{,}662^g$ atau $1^g = 0{,}0157$ rad

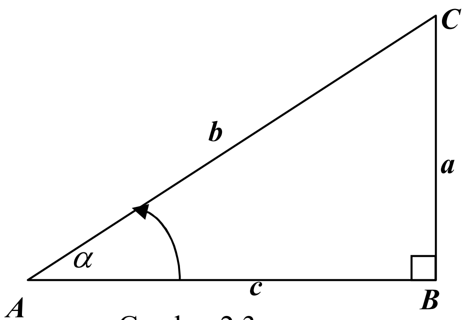
3. Mendefinisikan Sinus, Kosinus dan Tangen

a. Untuk nantinya memahami bahwa fungsi sinus, kosinus dan tangen adalah fungsi sudut dan bukan fungsi segitiga siku-siku maka pengertian sinus, kosinus dan tangen dapat dimulai dengan kegiatan sebagai berikut.

1) Kelas dibagi menjadi beberapa kelompok. Setiap kelompok ditugasi menggambar sebuah sudut yang sama, namakanlah $\angle\alpha$, atau $\angle\beta$ atau lainnya sesuai nomor kelompok, dengan besar sudut kelompok satu dan lainnya tidak perlu sama tetapi satu kelompok sudutnya sama (Jika tidak tersedia jangka atau busur derajat sebelumnya guru menyiapkan gambar sudutnya dengan ketentuan di atas).
2) Setiap anggota kelompok melakukan kegiatan berikut:
   a) memilih sebuah titik pada salah satu kaki sudut
   b) memproyeksikan titik tersebut ke kaki sudut yang kedua.
   c) mengukur panjang ruas garis dari sisi-sisi segitiga yang terbentuk.
   d) menentukan nilai hasil perbandingan panjang pasangan-pasangan sisi segitiga siku-siku, yaitu antara sisi siku-siku dan sisi terpanjang (hipotenusa) serta antara sisi siku-siku di depan dengan pada kaki sudut.
   e) melakukan kegiatan a) – d) untuk 2 atau 3 titik lainnya, dan titik pilihan dapat dilakukan pada kaki yang berbeda dari pilihan pertama.

   Diharapkan bahwa nilai perbandingan sisi-sisi seletak sama.
3) Dilakukan diskusi kelompok untuk memperoleh kesimpulan dari nilai perbandingan yang diperoleh terkait sudut yang sama.
4) Dilakukan diskusi antar kelompok untuk memperoleh kesimpulan dari nilai perbandingan yang diperoleh terkait sudut yang berbeda.

b. Berdasar hasil diskusi di atas dengan tanya jawab didiskusikan pengertian-pengertian perbandingan trigonometri: sinus, kosinus dan tangen suatu sudut dalam bentuk yang disederhanakan, yaitu sudut dalam segitiga siku-siku berikut ini (dengan menekankan bahwa seberapa pun ukuran panjang sisi segitiga, asal sudut lancipnya tertentu nilai perbandingannya sama).



Gambar 2.3

Terhadap sudut α, sisi $\overline{BC}$ disebut sisi siku-siku di hadapan sudut α, (dengan $BC = a$) sisi $\overline{AB}$ disebut sisi siku-siku kaki sudut α ($AB = c$), sedang sisi $\overline{AC}$ disebut hipotenusa ($AC = b$).

Nilai perbandingan trigonometri dari sudut α didefinisikan sebagai berikut :

$$\textbf{sinus } \alpha \text{ (ditulis dengan notasi } \textbf{sin } \alpha) = \frac{\text{sisi siku - siku di hadapan sudut } \alpha}{hipotenusa} = \frac{a}{b}$$

$$\textbf{kosinus } \alpha \text{ (ditulis dengan notasi } \textbf{cos } \alpha) = \frac{\text{sisi siku - siku kaki sudut } \alpha}{hipotenusa} = \frac{c}{b}$$

$$\textbf{tangen } \alpha \text{ (ditulis dengan notasi } \textbf{tan } \alpha) = \frac{\text{sisi siku - siku kaki sudut } \alpha}{\text{sisi siku - siku di dekat sudut } \alpha} = \frac{a}{c}$$

Catatan untuk guru :

(i) Jika sudut α konstanta, maka sin α, cos α, tan α disebut perbandingan trigonometri untuk sudut α, nilainya tertentu.

(ii) Jika sudut α variabel, sin α, cos α dan tan α disebut fungsi trigonometri

(iii) Jika sudutnya bukan lancip, digunakan sudut berelasi (Pasal 7), dengan diawali Pasal 6.b bab ini.

4. Penguasaan Keterampilan Dasar Perbandingan Trigonometri

Sesuai taksonomi belajar menurut Gagne, seusai siswa kelas X mengkonstruksi pemahaman konsep dari perbandingan trigonometri sinus, kosinus serta tangen, barulah dilakukan latihan berikutnya yang berupa latihan teknis menentukan nilai perbandingan trigonometri. Langkah ini dimaksudkan agar pengertian lebih dahulu diasosiasi maupun dimodifikasi di dalam benak siswa tersebut sampai pada pengingatan pengetahuan, barulah kemudian digunakan.

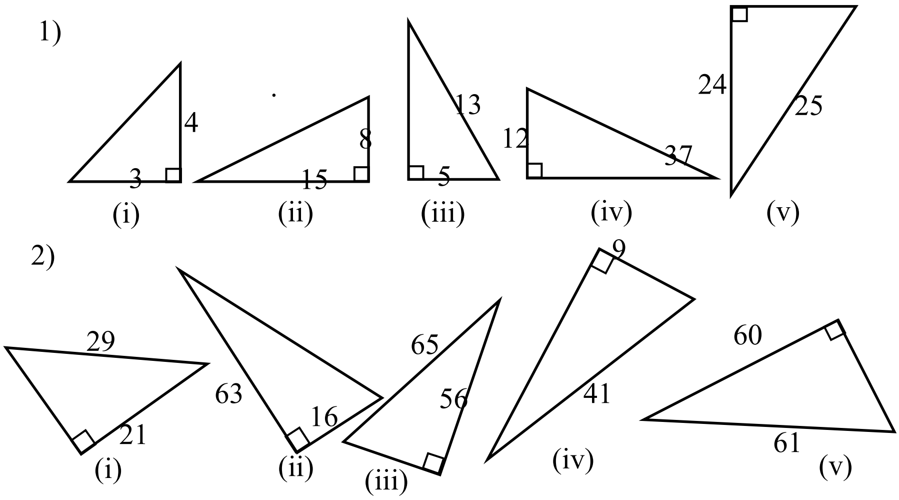
Perbandingan trigonometri merupakan salah satu materi yang diperlukan siswa dalam menguasai berbagai kompetensi yang perhitungan teknisnya berkaitan dengan matematika dan fisika lebih lanjut, yaitu jika siswa berhadapan dengan masalah sudut dalam berbagai kedudukan. Karena itu pelatihan dalam rangka pembinaan keterampilan menggunakan konsep perbandingan trigonometri sangatlah penting. Untuk mengembangkan kemampuan memecahkan masalah, keterampilan ini dapat dipadukan ke dalamnya.

Berikut disampaikan alternatif untuk keperluan di atas.

a. Mengunakan segitiga siku-siku yang panjang dua sisinya diketahui, yang dengan panjang sisinya dapat dihitung tanpa menimbulkan kesulitan perhitungan bentuk akar, dengan kedudukan segitiga yang bervariasi.

Contoh:

Tentukanlah nilai sinus, kosinus dan tangen dari sudut-sudut lancip dalam segitiga siku-siku yang diketahui berikut ini:

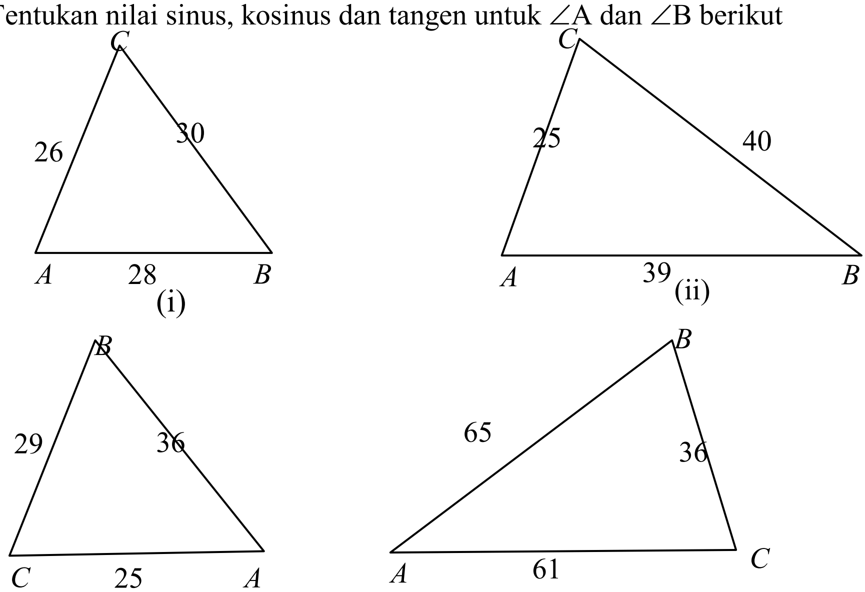


Gambar 2.4

b. Menggunakan segitiga yang tingginya mudah dihitung

Contoh:

Tentukan nilai sinus, kosinus dan tangen untuk ∠A dan ∠B berikut



Gambar 2.5

Di sini strategi pemecahan masalah dikembangkan dalam pembelajaran. Guru tidak harus tergesa-gesa minta atau memperoleh jawaban hasil, melainkan lebih menekankan bagaimana cara memperolehnya. Bimbingan kepada siswa bukan dalam memberikan secara langsung cara mengerjakannya, melainkan dengan tanya jawab, misalnya:

(i) (ruas garis) pertolongan apa yang harus ditambahkan agar muncul suatu bentuk gambar yang memberikan kemungkinan perbandingan trigonometri dapat dihitung?

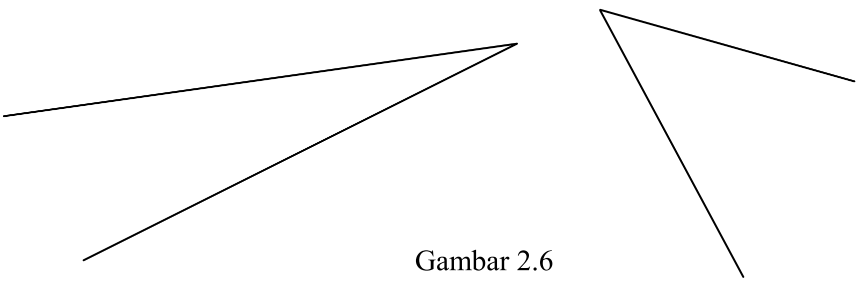
(ii) jika sudah ada gambar, rumus atau teorema apa yang perlu digunakan untuk menentukan panjang ruas-ruas garis yang terbentuk?

(iii) dari relasi-relasi itu bagaimana memanipulasinya untuk memperoleh hasil perbandingan trigonometrinya?

Kompetensi dasar manakah yang ingin dicapai dari kegiatan di sini?

c. Menggunakan sudut (lancip) yang bervariasi. Jika guru ingin lebih mudah memeriksa hasilnya, maka besar sudutnya ditentukan guru. Sudut itu dapat disiapkan misalnya dalam bentuk lembar kerja.
Contoh:

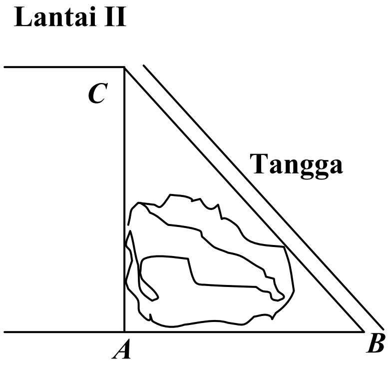
Berapa besar nilai sinus dan kosinus sudut berikut, dinyatakan dalam bentuk desimal sampai dua tempat desimal?



Gambar 2.6

d. Untuk menerapkan pemahaman perbandingan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari dapat dipilih strategi *cooperative learning* dengan model *jigsaw* (Slavin) dan pendekatan kontekstual, sebagai berikut.

1) Guru mempersiapkan tugas yang harus menggunakan sinus, kosinus dan tangen yang diambil dari lingkungan sekolah:
Misalnya :
(a) Keberadaan tangga sekolah menuju lantai II, dapat dimanfaatkan untuk memantapkan pengertian siswa tentang sinus.

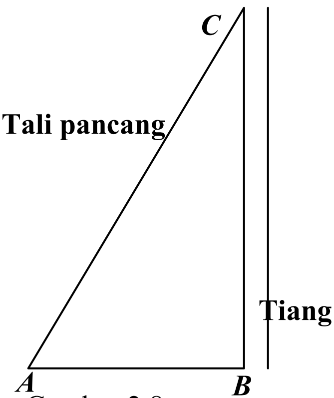


Gambar 2.7

Dengan mengukur panjang tangga $\overline{BC}$, dan mengukur besar sudut ABC, dan menggunakan konsep sinus, maka siswa ditugasi untuk menentukan ketinggian lantai II dari dasar lantai.

(b) Keberadaan suatu tiang (tiang listrik, papan reklame) yang diperkuat dengan talipancang, dapat dimanfaatkan untuk memantapkan konsep kosinus.

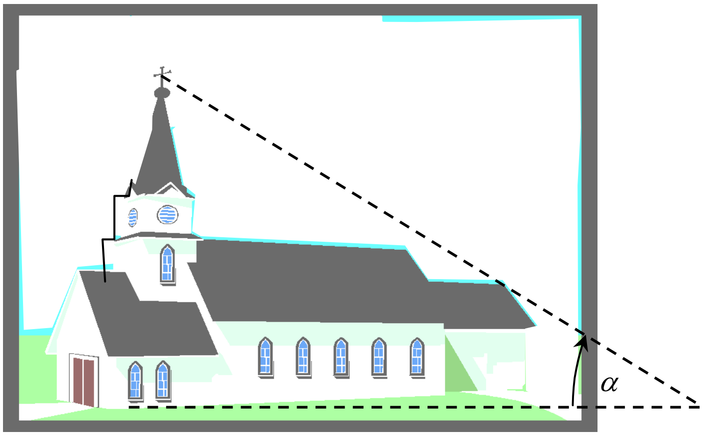
(c) Keberadaan gedung tinggi di dekat sekolah, dapat digunakan untuk memperdalam pemahaman tentang konsep tangen



Gambar 2.8

Dengan mengukur besar sudut BAC dan jarak antara A dan B, serta menggunakan konsep kosinus maka siswa dapat menentukan panjang tali pancang $\overline{AC}$, yang sudah waktunya diganti itu!

Dengan menggunakan klinometer (untuk mencari besar sudut elevasi), mengukur jarak dari dasar gedung dengan tempat berdiri siswa waktu menggunakan klinometer, dan menggunakan perbandingan tangen maka siswa dapat mengukur tinggi bangunan itu. Demikian juga dapat digunakan masalah yang dibuat berdasarkan situasi di sekitar sekolah.



Gambar 2.9

2) Guru membentuk kelompok-kelompok *jigsaw*, yang banyak anggotanya disesuaikan dengan banyak tugas yang dapat dikonstruksi berdasarkan situasi lingkungan sekolah. Kemudian masing-masing kelompok diberi tugas untuk menyelesaikan ke semua tugas yang harus diselesaikan.

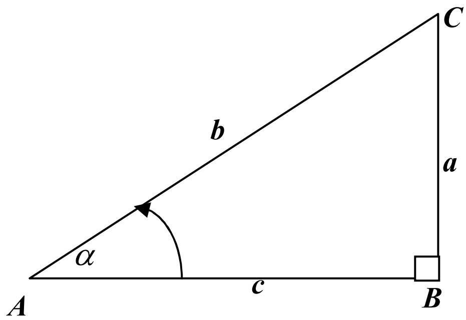
3) Guru membentuk kelompok *expert (counterpart) group*, yang banyak kelompoknya sama dengan banyak tugas yang dibuat oleh guru, dan anggota masing-masing kelompok terdiri dari satu orang dari tiap kelompok *jigsaw*. Kelompok ini dengan menggunakan strategi penyelesaian masalah berdiskusi untuk menyelesaikan tugas yang diberikan kepadanya. Satu hal yang mesti dicatat di sini bahwa masing-masing anggota dari kelompok *expert* ini bertanggung jawab untuk menjelaskan hasilnya kepada anggota lain dari kelompok *jigsaw*-nya. Guru pada kesempatan ini mengawasi dan menjadi nara sumber apakah kerja tim sudah sesuai dengan strategi yang dipilih guru.

4) Setelah masing-masing kelompok bekerja secara kooperatif untuk menyelesaikan tugas, dan mempersiapkan diri menyampaikan hasilnya kepada anggota lain di kelompok *jigsaw*-nya, maka kembalilah masing-masing anggota dari kelompok ekspert ke kelompok *jigsaw* semula, dengan tugas masing-masing menjelaskan hasil yang telah diraih dari kelompok *expert*-nya.

5) Kegiatan ini diakhiri dengan diskusi kelas, di mana guru memantapkan pemahaman tentang sinus, kosinus, dan tangen, dan jangan lupa memberi penghargaan berupa pujian sebagai motivasi dan suasana kompetitif yang sehat, dalam memahami perbandingan trigonometri.

5. Perluasan Nilai Perbandingan Trigonometri

a. Perluasan dari pengertian sinus, kosinus dan tangen di atas, siswa diarahkan untuk memahami konsep perbandingan kotangen, sekan dan kosekan, dari diagram di atas (butir 3.b), bahwa (Perhatikan salinan Gambar 2.3) :



kotangen α (ditulis dengan notasi **cot** α) $= \dfrac{\text{sisi di kaki sudut } \alpha}{\text{sisi di depan sudut } \alpha} = \dfrac{c}{a}$

sekan α (ditulis dengan notasi **sec** α) $= \dfrac{\textit{hipotenusa}}{\text{sisi di kaki sudut } \alpha} = \dfrac{b}{c}$

kosekan α (ditulis dengan notasi **csc** α) $= \dfrac{\textit{hipotenusa}}{\text{sisi di depan sudut } \alpha} = \dfrac{b}{a}$

b. Berpangkal dari definisi perbandingan trigonometri di atas, dengan pendekatan tanya-jawab, dikembangkan sifat hubungan antar masing-masing perbandingan trigonometri.

(i) $\cot \alpha = \dfrac{1}{\tan \alpha}$

(ii) $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$

(iii) $\csc \alpha = \dfrac{1}{\sin \alpha}$

(iv) $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

(v) $\cot \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

c. Untuk pembuktian sifat-sifat lainnya, guru dapat menggunakan pembelajaran kooperatif, dengan model **TAI** (*Team Accelerated Instruction*) misalnya di samping memberi motivasi, juga ada sedikit kompetisi yang sehat dengan tidak meninggalkan kelebihan pembelajaran gotong royong, siswa melakukan *reinvention* (penemuan kembali) yang akhirnya berhasil membuktikan rumus-rumus di bawah ini.

Secara singkat model pembelajaran kooperatif TAI dikembangkan oleh Slavin (1985) dengan beberapa alasan. Pertama model ini mengkombinasikan keampuhan pembelajaran kooperatif dan program pengajaran individual. Kedua, model ini memberikan tekanan pada efek sosial dari belajar kooperatif. Ketiga, TAI disusun untuk memecahkan masalah dalam program pengajaran, misalnya dalam hal kesulitan belajar siswa secara individual. Model ini juga merupakan model kelompok berkemampuan heterogen. Setiap siswa belajar pada aspek khusus pembelajaran secara individual. Anggota tim menggunakan lembar jawab yang digunakan untuk saling memeriksa jawaban teman setim, dan semua bertanggung jawab atas keseluruhan jawaban pada akhir kegiatan sebagai tanggung jawab bersama. Diskusi terjadi pada saat siswa saling mempertanyakan jawaban yang dikerjakan teman se-tim-nya.

Model TAI ini digunakan untuk mendorong siswa menemukan kembali rumus-rumus di bawah ini :

(i) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
(ii) $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$
(iii) $\cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$

6. Pembelajaran Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut-sudut Istimewa

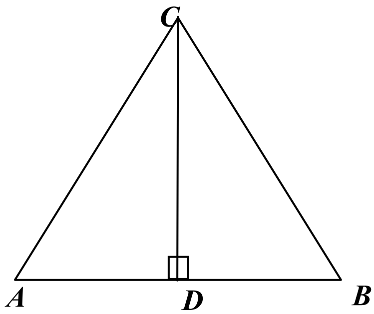
Selanjutnya perlu dibahas nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

a. Untuk memantapkan pemahaman tentang perbandingan trigonometri sudut-sudut 30°, 45°, 60°, dapat digunakan strategi pembelajaran kooperatif dengan model TAI (*Team Assissted Individualization*), di mana sebelumnya dibentuk kelompok-kelompok diskusi, untuk menyelesaikan tugas ini.

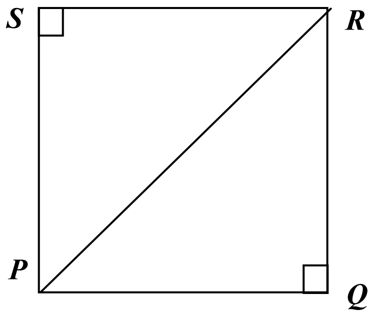
1) Bentuklah kelompok-kelompok belajar kooperatif, masing-masing kelompok beranggotakan kira-kira 5 orang siswa, dengan tugas

masing-masing anggota kelompok mengerjakan seluruh tugas, kemudian anggota kelompok yang satu memeriksa hasil kelompok yang lain, berdiskusi mengapa dan bagaimana dengan bahasa mereka untuk berdiskusi.

2) Tugasi kelompok mengerjakan lembar kerja yang isinya sebagai berikut:



ΔABC sama sisi
panjang sisi = $2a$



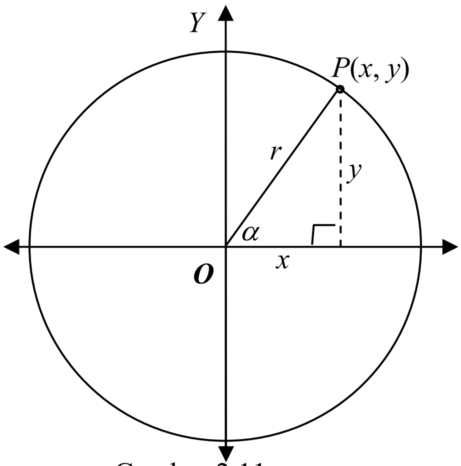
***PQRS* persegi**
panjang sisi = $2a$

Gambar 2.10

Dengan menggunakan gambar di atas, tentukan nilai perbandingan trigonometri sudut-sudut 30°, 45° dan 60°

α	30°	45°	60°
sin α	…….	…….	…….
cos α	…….	…….	…….
tan α	…….	…….	…….
cot α	…….	…….	…….
sec α	…….	…….	…….
csc α	…….	…….	…….

b. Untuk pengembangan sampai dengan perbandingan trigonometri untuk sudut 0° dan 90° (dan nantinya fungsi trigonometri berbagai sudut), dan agar siswa sampai pada *relational understanding* (bukan sekedar *instrumental understanding*), maka dikaitkan nilai perbandingan trigonometri dengan sistem koordinat Cartesius:



Gambar 2.11

Untuk setiap titik $P(x, y)$ dengan $OP = r$ di mana pun P berada dalam sistem koordinat, maka dapat didefinisikan perbandingan trigonometri untuk sudut α, sebagai berikut:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \sec\alpha = \frac{r}{x}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \qquad \csc\alpha = \frac{r}{y}$$

Jadi untuk setiap titik *P* dengan *OP* = *r* dan besar sudut ∠*XOP* adalah α, perbandingan trigonometri untuk sudut ∠*XOP* adalah:

$$\sin\alpha = \frac{\text{ordinat } P}{r} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{ordinat } P}{\text{absis } P} \qquad \sec\alpha = \frac{r}{\text{absis } P}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{absis } P}{r} \qquad \cot\alpha = \frac{\text{absis } P}{\text{ordinat } P} \qquad \csc\alpha = \frac{r}{\text{ordinat } P}$$

Catatan: Sudut yang dalam sistem koordinat sedemikian sehingga titik sudutnya pada titik O dan kaki utama (ingat definisi sudut terkait dengan rotasi sinar garis) pada sumbu *X* dikatakan sebagai sudut dalam **kedudukan baku**.

Dengan berangkat dari definisi yang dihubungkan dengan konteks koordinat di atas, maka, dengan teknik bertanya, dapat dikembangkan untuk mencari nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut 0° dan 90° (Berapa absis/ordinat titik yang terkait dengan sudut tersebut?) Sudut-sudut yang terkait dengan kedudukan titik *P* tersebut selanjutnya dikaitkan dengan istilah besar sudut, sehingga:

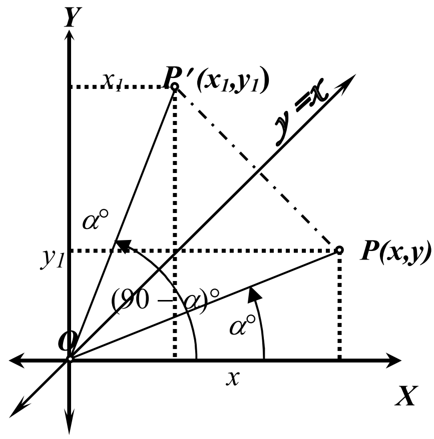
Jika *P* di kuadran I, maka sudut *XOP* dikatakan sudut pada kuadran I
Jika *P* di kuadran II, maka sudut *XOP* dikatakan sudut pada kuadran II
Jika *P* di kuadran III, maka sudut *XOP* dikatakan sudut pada kuadran III
Jika *P* di kuadran IV, maka sudut *XOP* dikatakan sudut pada kuadran IV

(Ingat, arah putar positif *XOP* dalam sistem adalah arah dari *X* ke *P* diputar berpusat di titik *O* dengan arah berlawanan dengan arah putar jarum jam).

7. Rumus Perbandingan Trigonometri Sudut yang Berelasi

Pada pembelajaran materi ajar ini, strategi yang dipilih adalah kombinasi dari eksposisi dengan tanya jawab yang efektif dan pembelajaran kooperatif, dengan langkah-langkah sebagai berikut.

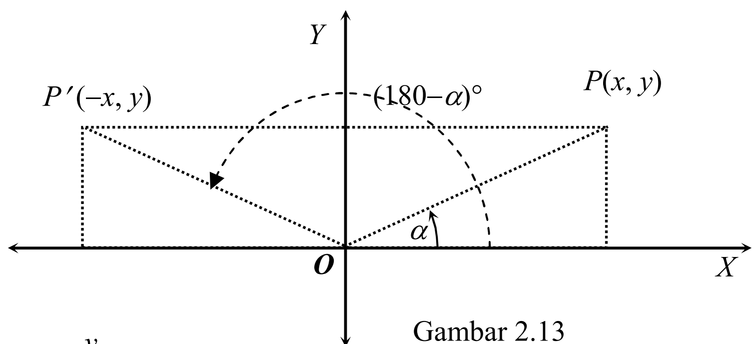
a. Menggunakan pencerminan titik terhadap garis yang persamaannya $y = x$ dan dengan teknik bertanya dibahas hubungan antara x_1 dan y_1 dengan x dan y ($x_1 = y$ dan $y_1 = x$) kemudian hubungan fungsi dengan kofungsinya (sinus dengan kosinus, tangen dengan kotangen, dan sekan dengan kosekan), khususnya untuk menemukan bahwa:
$\sin(90 - \alpha)° = \cos \alpha°$



Gambar 2.12

b. Untuk meninggikan derajat keaktifan siswa pembelajaran relasi $\sin(180 - \alpha)° = \sin \alpha°$ digunakan teknik bertanya

c.



Gambar 2.13

$\sin \alpha° = \dfrac{y}{r}$

$\sin(180 - \alpha)° = \dfrac{\text{ordinat } P'}{r} = \dfrac{y}{r} = \sin \alpha°$

Jadi $\sin(180 - \alpha)° = \sin \alpha°$

d. Dengan dua contoh di atas, dilanjutkan dengan strategi *cooperative learning* (*Jigsaw* misalnya), siswa diberi tugas untuk mencari dan akhirnya menemukan sifat-sifat :
1) (i) $\cos(90 - \alpha)° = \sin \alpha°$
   (ii) $\tan(90 - \alpha)° = \cot \alpha°$

(iii) sifat-sifat $\cot(90 - \alpha)° = \tan \alpha°$, $\sec(90 - \alpha)° = \csc \alpha°$, dan $\csc(90 - \alpha)° = \sec \alpha°$ dijadikan soal untuk penilaian proses

2) (i) $\cos(180 - \alpha)° = - \cos \alpha°$
(ii) $\tan(180 - \alpha)° = - \tan \alpha°$
(iii) sifat-sifat untuk $\cot(180 - \alpha)° = -\cot \alpha°$, $\sec(180 - \alpha)° = -\sec \alpha°$, dan $\csc(180 - \alpha)° = \csc \alpha°$ dijadikan soal untuk penilaian proses.

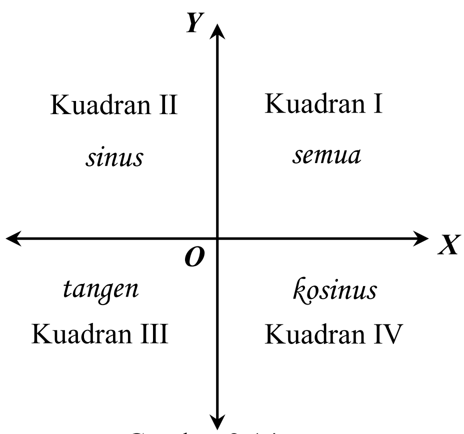
3) (i) $\sin(180 + \alpha)° = - \sin \alpha°$
(ii) $\cos(180 + \alpha)° = - \cos \alpha°$
(iii) $\tan(180 + \alpha)° = \tan \alpha°$
(iv) sifat yang lain dijadikan soal penilaian proses.

4) (i) $\sin(360 - \alpha)° = \sin(-\alpha°) = -\sin \alpha°$
(ii) $\cos(360 - \alpha)° = \cos(-\alpha°) = \cos \alpha°$
(iii) $\tan(360 - \alpha)° = \tan(-\alpha°) = -\tan \alpha°$
(iv) sifat nilai perbandingan yang lain dijadikan penilaian proses.

5) Untuk setiap bilangan bulat n berlaku
(i) $\sin(\alpha + n.360)° = \sin \alpha°$
(ii) $\cos(\alpha + n.360)° = \cos \alpha°$
(iii) $\tan(\alpha + n.180)° = \tan \alpha°$
sifat nilai perbandingan yang lain, dijadikan penilaian proses.

e. Perlu dibahas pula bahwa relasi-relasi di atas juga berlaku untuk sudut-sudut dengan satuan ukuran bukan derajat, sehingga misalnya: $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ dan $\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos \alpha$. Penulisan relasi-relasi di atas untuk sudut dengan ukuran radian dapat ditugaskan kepada siswa, perorangan ataupun secara berkelompok.

f. Akhir dari pembahasan nilai perbandingan trigonometri sudut yang berelasi, sampai pada kesimpulan hubungan antara nilai positif atau negatifnya nilai perbandingan trigonometri suatu sudut dengan kuadrannya.



Gambar 2.14

Pemahaman prinsip-prinsip ini secara relasional, maka langkah berikutnya membawanya menjadi fakta (dalam taksonomi Gagne) atau pengetahuan siap, dan selanjutnya guru dapat menyarankan siswa untuk membuat jembatan keledai (*mnemonic*) untuk itu.

Misalnya "**sem**anis **Sin**ta **tan**pa **kos**metika", yang artinya nilai perbandingan trigonometri positif untuk sudut di mana sudut itu berada.

kuadran I : **sem**ua (sinus, kosinus, tangen, kotangen, sekan dan kosekan)

kuadran II: **sin**us (bersama kosekan)

kuadran III: **tan**gen (bersama kotangen)

kuadran IV: **kos**inus (bersama sekan)

Untuk meyakinkan pemahaman siswa tentang tanda nilai sudut dari berbagai kuadran dan rumus-rumus perbandingan/fungsi trigonometri sudut-sudut yang berelasi, mereka ditugasi untuk menyusun daftar nilai-nilai fungsi trigonometri sudut-sudut istimewa. Yang dimaksud sudut istimewa untuk sudut-sudut di kuadran bukan kuadran pertama adalah sudut-sudut pada ketiga kuadran lain yang terkait dengan sudut-sudut pada kuadran pertama. Misalnya sudut 240° yang terkait dengan 60°, 315° yang terkait dengan 45°, atau dalam ukuran radian, misalnya $\frac{3}{4}\pi$ radian yang terkait dengan $\frac{1}{4}\pi$ radian.

❖ LATIHAN 1

1. Tentukanlah nilai sinus, kosinus dan tangen salah satu sudut lancip pada setiap segitiga siku-siku pada Gambar 2.4.
2. Tentukan nilai sinus dan kosinus untuk $\angle$A dan $\angle$B pada Gambar 2.5 (i) dan (ii).
3. Berikan contoh 3 buah segitiga siku-siku yang panjang sisi-sisinya merupakan bilangan bulat selain yang sudah dituliskan pada Gambar 2.4 dan 2.5 termasuk kelipatannya, yang nilai sinus sudut-sudut lancipnya merupakan bilangan rasional.
4. Berapa besar nilai sinus gambar kiri dan kosinus gambar kanan sudut lancip pada Gambar 2.6 dinyatakan dalam bentuk desimal sampai dua tempat desimal? Jelaskan cara paling efektif yang Anda gunakan.
5. Berikan contoh 3 buah segitiga lancip yang panjang sisi-sisinya merupakan bilangan bulat selain yang sudah dituliskan pada Gambar 2.4 dan 2.5 termasuk kelipatannya, yang nilai sinus dua sudut-sudut lancipnya merupakan bilangan rasional.

6. Berilah 3 contoh masalah yang kontekstual dan memuat masalah perbandingan trigonometri berikut alternatif pemecahannya.
7. Dalam mengerjakan soal seorang siswa menulis:
   a. $\sin 120° = \sin(180 - 120)° = \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
   b. $\cos 240° = -\cos(180 + 60)° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

   Berikanlah komentar tentang pekerjaan siswa tersebut!

D. PEMBELAJARAN IDENTITAS

1. Hubungan Perbandingan Trigonometri Suatu Sudut

Untuk membahas materi ini ditempuh langkah-langkah sebagai berikut :

a. dengan strategi eksposisi dan dan mengefektifkan teknik bertanya diingatkan kembali rumus yang menghubungkan perbandingan trigonometri yang telah ditemukan di atas yaitu bahwa untuk setiap sudut α dan perbandingan trigonometri yang terdefinisi berlaku:

   (i) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (iii) $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$

   (ii) $\tan \alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (iv) $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

b. siswa dibagi beberapa kelompok. Setiap kelompok ditugasi untuk melakukan substitusi berbagai nilai pengganti α, pada relasi-relasi di atas dengan sudut-sudut istimewa. Hasilnya digunakan secara klasikal untuk menyatakan bahwa relasi-relasi di atas berlaku untuk setiap sudut. Relasi semacam itu dikenal sebagai identitas.

c. agar pemahaman tentang prinsip (menurut taksonomi Gagne) di atas dapat ditingkatkan menjadi pengetahuan siap, maka dilatih lewat soal-soal identitas, dan untuk itu strategi yang cocok adalah pemecahan masalah (G. Polya) yang saran langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:
   i. memahami masalah (*understanding the problem*).
   ii. merancang rencana (*devising a plan*), memilih konsep-konsep dan prinsip yang tepat.
   iii. melaksanakan rencana (*carrying out the plan*).
   iv. memeriksa kembali (*looking back*).

Kegiatan dengan pendekatan *problem solving* dapat dilakukan secara berkelompok dengan *cooperative learning* (TAI misalnya), masing-masing kelompok berdiskusi memecahkan suatu masalah.

2. Identitas Trigonometri

a. Pengertian

Identitas trigonometri adalah suatu relasi atau kalimat terbuka yang memuat fungsi-fungsi trigonometri dan yang bernilai benar untuk setiap penggantian variabel dengan konstan anggota domain fungsinya. Domain sering tidak dinyatakan secara eksplisit. Jika demikian maka umumnya domain yang dimaksud adalah himpunan bilangan real. Namun dalam trigonometri identitas yang (langsung atau tak langsung) memuat fungsi tangen, kotangen, sekan, dan kosekan domain himpunan bilangan real sering menimbulkan masalah ketakhinggaan. Karena itu, maka meskipun tidak dinyatakan secara eksplisit, maka syarat terjadinya fungsi tersebut merupakan syarat yang perlu diperhitungkan.

b. Membuktikan Kebenaran Identitas

Kebenaran suatu relasi atau kalimat terbuka merupakan identitas perlu dibuktikan kebenarannya. Ada tiga pilihan pembuktikan identitas, yaitu menggunakan rumus-rumus atau identitas-identitas yang telah dibuktikan kebenarannya dengan cara:

1) ruas kiri diubah bentuknya sehingga menjadi tepat sama dengan ruas kanan.
2) ruas kanan diubah bentuknya sehingga menjadi tepat sama dengan ruas kiri, atau
3) ruas kiri diubah menjadi bentuk lain yang identik dengannya, ruas kanan diubah menjadi bentuk lain juga, sehingga kedua bentuk hasil pengubahan itu tepat sama.

Dua cara pertama merupakan pilihan utama, karena masing-masing jelas tujuan bentuk yang hendak dicapai. Secara umum, yang diubah adalah bentuk yang paling kompleks (rumit), dibuktikan atau diubah bentuknya sehingga sama dengan bentuk yang tidak diubah, yang bentuknya lebih sederhana.

Cara/langkah salah yang sering dilakukan adalah (1) mengumpulkan kedua ruas menjadi satu ruas dan (2) jika dalam bentuk pecahan dilakukan perkalian silang (lihat contoh pada akhir bagian 3. c berikut)

Keberhasilan pembuktian kebenaran identitas memerlukan:

1) telah dikuasainya relasi, aturan, atau rumus-rumus dasar trigonometri dan aljabar.
2) telah dikuasainya proses pemfaktoran, penyederhanaan, operasi pada bentuk pecahan dan operasi hitung lainnya serta operasi dasar aljabar.
3) pelatihan yang cukup.

Dalam proses pembuktian, selain yang disebutkan pada dua butir pertama di atas, yang sangat penting diperhatikan ialah bahwa:

1) perubahan-perubahan bentuk aljabar yang dilakukan berorientasi pada tujuan (ruas lain yang dituju). Maksudnya, bentuk-bentuk yang dituju biasanya adalah bentuk atau derajat yang lebih sederhana dan dapat ”dipaksakan” adanya dengan penyesuaian bentuk-bentuk lainnya (diarahkan ke bentuk yang menjadi tujuan pembuktian).
2) selain menggunakan hubungan antara sekan dan tangen, kosekan dan kotangen, fungsi-fungsi tangen, kotangen, sekan dan kosekan dapat diubah ke fungsi sinus atau kosinus.

c. Contoh menyelesaikan masalah identitas

Misalkan ada soal/masalah: Buktikan bahwa

$\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = 1$

Cara I

Seperti dikemukakan pada langkah pemecahan masalah, guru dapat memberikan contoh, bahwa:

1) langkah pertama adalah **memahami masalah**

   Jelas bahwa masalahnya adalah masalah pembuktian, yaitu bahwa ruas kiri harus sama dengan ruas kanan. Masalah ini memuat keadaan ruas kiri lebih kompleks dari pada ruas kanan. Jadi jika harus membuktikan maka kiranya akan lebih mudah jika dari ruas kiri dibuktikan sama dengan ruas kanan.
2) merancang rencana

   Bentuk ruas kiri adalah $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\ \cos^2\alpha + \cos^4\alpha$ yang harus dibuktikan sama dengan 1.

Karena tujuannya adalah ”1”, sedangkan ”1” dalam trigonometri muncul dalam rumus $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, maka perlu dimunculkan adanya bentuk $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$. Hal ini dapat muncul jika dua suku terakhir dari ruas kiri difaktorkan.

Jika dua suku terakhir difaktorkan diperoleh:

$\sin^2\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\alpha + \cos^4\alpha = \sin^2\alpha + (\sin^2 \alpha + \cos^2\alpha)\cos^2\alpha$

3) melaksanakan rencana

Bukti: Ruas kiri: $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\alpha + \cos^4\alpha$

$= \sin^2\alpha + (\sin^2 \alpha + \cos^2\alpha)\cos^2\alpha$

(cara 1) $= \sin^2\alpha + (1)\cos^2\alpha$

$= \sin^2 \alpha + \cos^2\alpha$

$= 1$ (= ruas kanan (terbukti))

4) memeriksa kembali

Dalam hal ini pemeriksaan dilakukan hanya dalam hal pemeriksaan kembali langkah demi langkahnya.

Cara II

1) Jika strategi awalnya adalah penyederhanaan dengan pemfaktoran, maka dengan memfaktorkan dua suku pertamanya diperoleh:

$\sin^2\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\alpha + \cos^4\alpha = \sin^2\alpha (1 + \cos^2\alpha) + \cos^4\alpha$

Berdasarkan tujuan yang hendak dicapai, yaitu ruas kanan adalah 1, maka 1 dalam trigonometri muncul antara lain dari rumus $\sin^2 \alpha + \cos^2\alpha$ atau secara aljabar dapat muncul dari perkalian bentuk $(1 - x)(1 + x)$. Hal terakhir ‘terpikir’ karena adanya bentuk $(1 + \cos^2\alpha)$ yang jika dikalikan dengan $1 - \cos^2\alpha$ (dari $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2\alpha$) akan menghasilkan $1 - \cos^4\alpha$, ada unsur 1 sesuai tujuan.

2) Dari strategi di atas maka langkah pembuktiannya sebagai berikut:

Bukti: Ruas kiri:

$\sin^2\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\alpha + \cos^4\alpha$

$= \sin^2\alpha (1 + \cos^2\alpha) + \cos^4\alpha$

$= (1 - \cos^2\alpha)(1 + \cos^2\alpha) + \cos^4\alpha$

$= (1 - \cos^4\alpha) + \cos^4\alpha$

$= 1$

= ruas kanan (terbukti)

Cara III

1) Jika strategi awalnya adalah penyederhanaan dari suku berderajat tinggi, maka diperoleh:

   Bentuk ruas kiri diubah menjadi $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\ \cos^2\alpha + \cos^2\alpha\ \cos^2\alpha$ yang harus dibuktikan sama dengan 1.

   Karena tujuannya adalah "1", sedangkan "1" dalam trigonometri muncul dalam rumus $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, maka perlu dimunculkan adanya bentuk $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$, atau bagian-bagiannya. Hal ini dapat muncul jika ruas kiri difaktorkan sehingga

   $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\ \cos^2\alpha + \cos^2\alpha\ \cos^2\alpha$ dan dengan manipulasi lebih lanjut ruas kiri menjadi $= \sin^2\alpha\ (1 + \cos^2\alpha\ ) + \cos^2\alpha\ (1 - \sin^2\alpha)$

   Dengan menjabarkan lebih lanjut hasilnya = 1.

2) Dari strategi di atas maka langkah pembuktiannya sebagai berikut:

   Bukti: Ruas kiri:

   $$\begin{aligned}
   & \sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha \\
   = \ & \sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\alpha \\
   = \ & \sin^2\alpha\,(1 + \cos^2\alpha\,) + \cos^2\alpha\,(1 - \sin^2\alpha) \\
   = \ & \sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\alpha \\
   = \ & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \\
   = \ & 1 \text{ (sama dengan ruas kanan/terbukti)}
   \end{aligned}$$

Berikut ini diberikan contoh cara atau **langkah yang salah**

Bukti: $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = 1$

$1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\ \cos^2\alpha - \cos^4\alpha = 0$ (langkah-langkah pembuktian salah):

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \cos^4\alpha = 0$

$\cos^2\alpha(\ 1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha\ ) = 0$

$\cos^2\alpha\ (\ 1 - 1) = 0$

$\cos^2\alpha \times 0 = 0$

$0 = 0$ (akhirnya tidak sesuai dengan yang harus dibuktikan)

Contoh langkah pembuktian lainnya yang **salah**:

Buktikan: $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$

Bukti: $\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$\Leftrightarrow$ $(1 - \sin\ \theta)(1 + \sin\ \theta) = \cos^2\theta$ (seharusnya tidak boleh menggunakan tanda "=" karena belum sama; masih harus dibuktikan sama)

$\Leftrightarrow$ $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

$\Leftrightarrow$ $\cos^2\theta = \cos^2\theta$ (berbeda dengan perintah yang harus dibuktikan)

d. Arah pembuktian

Telah dinyatakan, bahwa pembuktian identitas dapat dilakukan antara lain mengubah bentuk ruas kiri menjadi sama dengan ruas kanan, atau sebaliknya dari ruas kanan menjadi sama dengan ruas kiri. Hal ini tergantung kompleksitasnya atau ketinggian derajat fungsinya; yang utama adalah dari yang lebih kompleks ke lebih sederhana, atau dari yang pangkatnya tinggi ke yang lebih rendah. Namun jika keduanya sama tingkat kompleksitasnya atau derajat fungsinya, maka dapat dipilih salah satu arah.

Contoh 2: Buktikan bahwa $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$

Bukti: Alternatif 1

Ruas kiri:

$\sec^4\theta - \sec^2\theta$

$= \sec^2\theta(\sec^2\theta - 1)$

$= \sec^2\theta \times \tan^2\theta$

$= (1 + \tan^2\theta)\tan^2\theta$

$= \tan^2\theta + \tan^4\theta$

= ruas kanan

Alternatif 2

Ruas kanan

$\tan^4\theta + \tan^2\theta$

$= \tan^2\theta(\tan^2\theta + 1)$

$= (\sec^2\theta - 1)\sec^2\theta$

$= \sec^4\theta - \sec^2\theta$

= ruas kiri

e. Berlatih memecahkan masalah identitas

Siswa secara berkelompok dengan *cooperative learning* (TAI misalnya), masing-masing kelompok berdiskusi memecahkan masalah identitas berikut

1) $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

2) $\frac{(1-\tan\alpha)(1+\tan\alpha)}{\sin\alpha} = \csc\alpha - \sec\alpha\tan\alpha$

3) $\tan\gamma\cos^4\gamma + \cot\gamma\sin^4\gamma = \sin\gamma\cos\gamma$

4) $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$

5) $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha.\sin^2\alpha$

6) $2\csc x=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

7) $\sec^4\theta-\sec^2\theta=\tan^4\theta+\tan^2\theta$

8) $\frac{\sin A-\cos A+1}{\sin A+\cos A-1}=\frac{\sin A+1}{\cos A}$

Agar pemahaman siswa lebih mendalam, maka jika memungkinkan (mengingat waktu dan kemampuan siswa) maka dapat dilanjutkan tugas *problem posing* yang diajukan dari masing-masing kelompok kooperatifnya. Ini menunjang bagian kompetensi dasar, yaitu merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan identitas trigonometri.

❖ LATIHAN 2

Buktikan kebenaran identitas-identitas pada butir pasal D butir 2.e di atas.

E. GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI

1. Melukis Pendekatan Nilai π Menurut Kochansky

Untuk pembelajaran fungsi trigonometri ini diingatkan pengetahuan prasyaratnya yaitu pengertian fungsi. Dari pengertian fungsi tersebut dikembangkan pengertian fungsi trigonometri f adalah suatu fungsi pada bilangan real f: $x \to f(x)$, di mana rumus fungsi $f(x)$ adalah perbandingan trigonometri yang telah dibahas di depan.

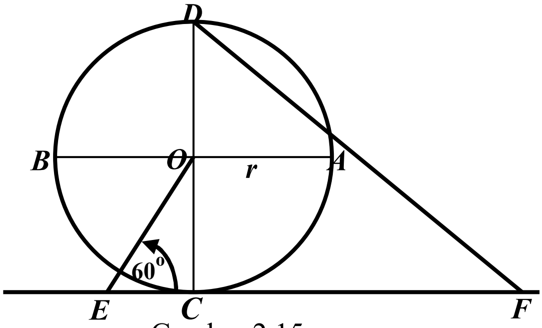
Misalnya : a. Fungsi **sinus** $f: x \to \sin x$

b. Fungsi **kosinus** $f: x \to \cos x$

c. Fungsi **tangen** $f: x \to \tan x$

Jika tidak ada penjelasan apapun besaran sudut dalam x ($x \in R$) sebagai argumen x fungsi adalah sudut dengan ukuran radian.

Agar di dalam melukis fungsi trigonometri, satuan di sumbu-X dan sumbu-Y mempunyai perbandingan panjang yang tepat, yaitu untuk menyiapkan panjang ruas garis sebesar $2\pi r$, maka perlu dikenal cara melukis π sebaiknya diberikan dahulu pemahaman tentang salah satu cara melukis pendekatan nilai π, misalnya dengan cara Kochansky. Gambar situasinya dapat disiapkan guru, sedang perhitungannya dapat ditugaskan kepada siswa. Cara Kochansky itu dasarnya adalah sebagai berikut:



Gambar 2.15

$OA = r$

$EC = r \cot 60^{o}$

$= \frac{1}{3} r\sqrt{3}$

Lukis $EF = 3r$

Sehingga :

$CF = 3r - \frac{1}{3} r\sqrt{3}$

Dengan teorema Pythagoras dapat dicari panjang DF.

$DF = \sqrt{CD^2 + CF^2} = \sqrt{(2r)^2 + (3r - \frac{1}{3} r\sqrt{3})^2} = r\sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} =$ 3,141533....r.

Sedangkan di sisi lain, kita tahu dari hasil perhitungan π yang sebenarnya ≈ 3,14159265358979323846264338327950. Melihat hasil ini pendekatan DF sebagai πr sudah cukup teliti sampai tiga tempat desimal.

2. Menggambar Grafik Fungsi Trigonometri

Untuk menggambar grafik fungsi-fungsi sinus, kosinus dan tangen, dapat dilakukan dengan pemberian tugas kepada siswa.

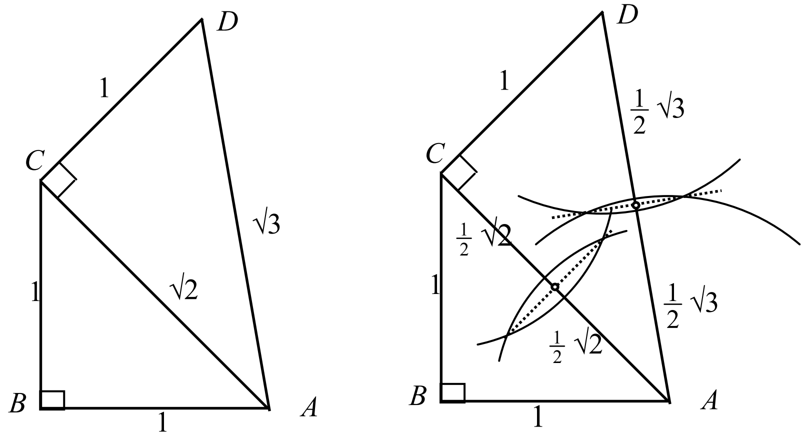
- Dengan tanya jawab dibahas nilai-nilai fungsi trigonometri sudut-sudut istimewa, dengan jalan menentukan nilai fungsi dari sudut-sudut yang mudah dihitung nilai fungsi trigonometrinya.

  Untuk keperluan ini siswa perlu memahami paling sedikit 1 cara menggambar √2 dan √3 satuan. Misalnya sebagai berikut.

  Lukislah sebuah segitiga samakaki (misal ΔABC siku-siku di B) dengan panjang sisi siku-siku 1 satuan sesuai pilihan masing-masing,
  misal 1 satuan = 3 cm.
  Ke arah keluar dari ΔABC tarik $\overline{CD} \perp \overline{AC}$ dengan $CD = 1$ satuan
  Tarik $\overline{AD}$
  Berapakah panjang $\overline{AC}$ dan $\overline{AD}$?
  Lukislah sumbu $\overline{AC}$ dan $\overline{AD}$.

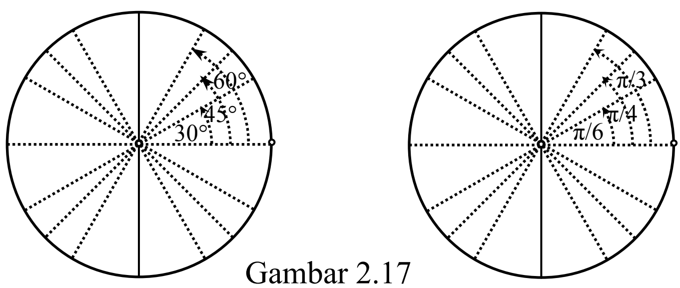
Anda telah memperoleh ruas garis sepanjang $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ satuan dan $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ satuan. Ruas garis manakah itu?

Catatan:
Kelengkapan hasil lukisannya adalah sebagai berikut:



Gambar 2.16

- Lukisan juga dapat didasarkan pada atau menggunakan lingkaran satuan. Untuk menggambar grafik fungsi trigonometri dengan menggunakan lingkaran satuan pertama kali pada lingkaran satuan itu dibuat sudut-sudut khusus, yaitu 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° dan 360° atau sudut-sudut sesuai dengan satuan ukuran radian. Hal ini dilakukan untuk memudahkan meletakkan posisi 30, 45, 60, 90, … , 360 pada sumbu-X.



Gambar 2.17

a. Melukis grafik fungsi sinus menggunakan tabel

1) Menggunakan nilai perbandingan trigonometri sudut istimewa termasuk sudut-sudut berelasinya.

Untuk melukis grafik fungsi f: $x \rightarrow f(x) = \sin x$, mula-mula siswa ditugasi untuk melengkapi nilai-nilai $\sin x$ untuk sudut-sudut istimewa (termasuk sudut relasinya), sebagaimana tabel di bawah ini:

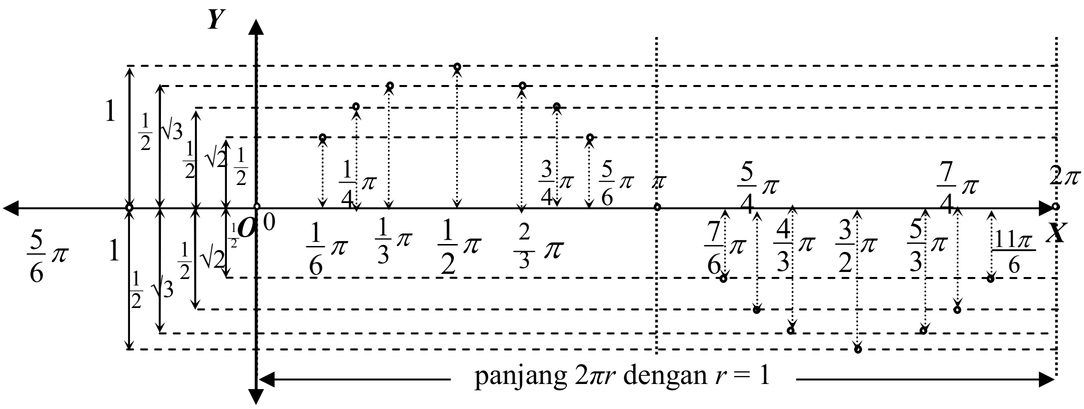
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Untuk melukis grafik fungsi f: $x \rightarrow f(x) = \sin x°$, mula-mula siswa ditugasi untuk melengkapi nilai-nilai $\sin x^{o}$ untuk sudut-sudut istimewa (termasuk sudut relasinya), sebagaimana tabel di bawah ini:

x	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
$\sin x^{o}$	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

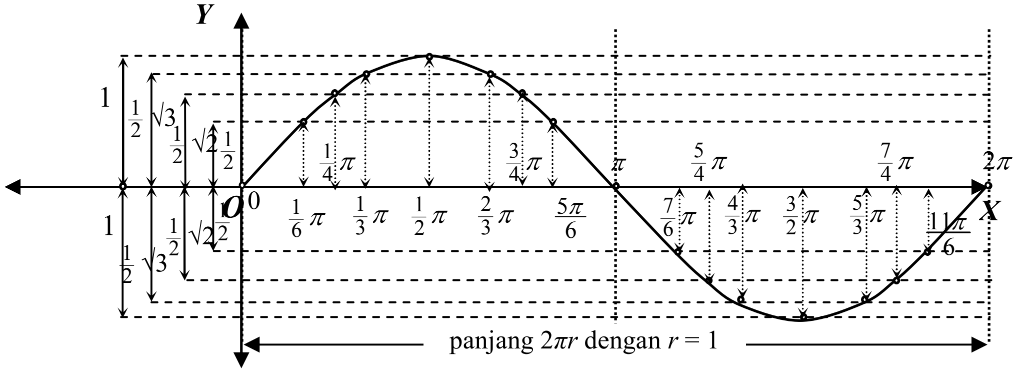
Bila nilai pada tabel telah dibuat lengkap, maka pasangan koordinat titik-titik: (0,0), $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$, … , $(2\pi, 0)$ untuk satuan radian, atau (0,0), $(30, \frac{1}{2})$, $(45, \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(60, \frac{1}{2}\sqrt{3})$, … , (360,0) untuk satuan derajat, selanjutnya titik tersebut digambar dalam sistem koordinat Cartesius yang sesuai.

Untuk kedua jenis satuan derajat, panjang interval $0 \le x \le 360$ digunakan skala 2π satuan, sama dengan yang digunakan ketika menggambar dengan satuan ukuran radian. Panjang interval tersebut menggambarkan keliling lingkaran satu putaran penuh.



Gambar 2.18

(untuk satuan derajat, sesuaikan dengan Gambar 2.17, misal $\frac{1}{6}\pi \rightarrow 30°$). Selanjutnya lukis kurva mulus melalui titik-titik yang diperoleh grafik fungsi $f: x \rightarrow f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$. (Gambar 2.19)



Gambar 2.19

b. Melukis grafik fungsi kosinus dan tangen menggunakan tabel

Langkah kegiatannya melukis grafik fungsi kosinus dan tangen dengan tabel dapat dilakukan seperti pada kegiatan melukis grafik fungsi sinus dengan tabel.

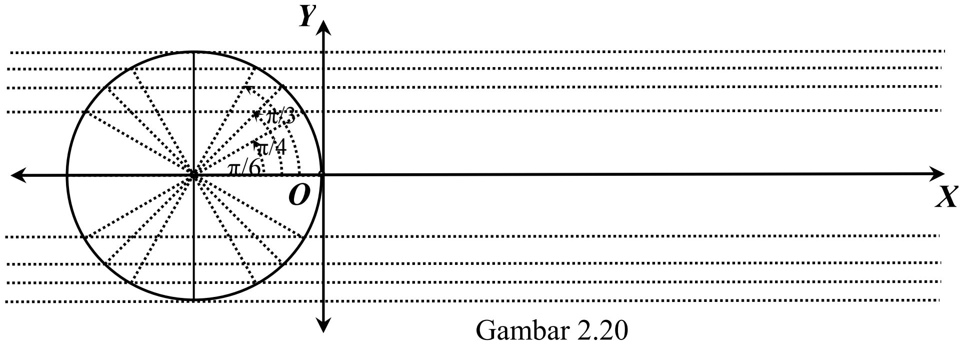
c. Melukis grafik fungsi sinus dan kosinus menggunakan lingkaran satuan

Untuk menentukan nilai sinus suatu sudut dengan menggunakan lingkaran satuan adalah bahwa nilai sinus suatu sudut dapat dinyatakan sebagai panjang proyeksi jari-jari lingkaran pada garis vertikal yang melalui pusat lingkaran.

Sehingga nilai $\sin x$ dari $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, ..., 2\pi$, sehingga nilainya dapat diwakili oleh proyeksi jari-jari lingkaran satuan pada garis vertikal yang melalui pusat lingkaran tersebut. Sedangkan nilai kosinusnya dapat diwakili oleh proyeksi jari-jari lingkaran satuan pada garis mendatar yang melalui pusat lingkaran tersebut.

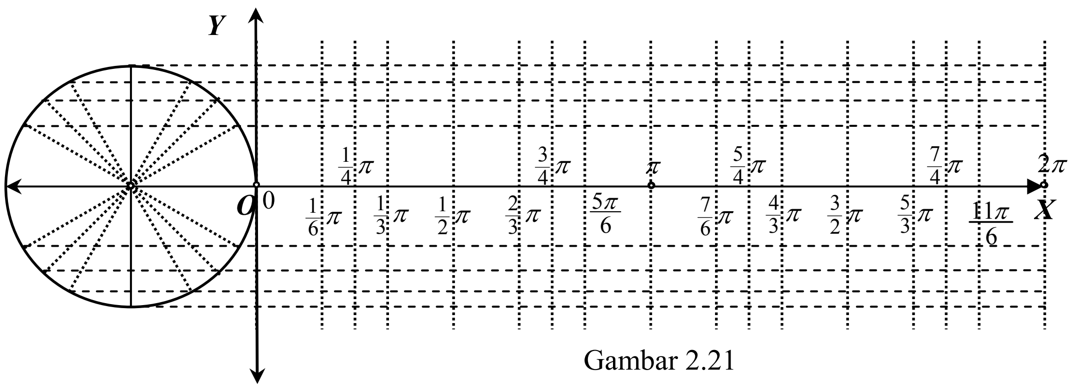
Untuk grafik fungsi sinus, nilai dari hasil proyeksinya langsung dapat digunakan untuk membuat garis bantu sejajar sumbu *X* untuk menggambarkan nilai-nilai sinus sudut bersangkutan.

1) Dari uraian di atas, kemudian dari gambar Gambar 2.17 dapat dibuat proyeksi titik-titik ujung jari-jari yang terkait dengan sudut-sudut istimewa, dibuat garis-garis mendatar sejajar sumbu *X*.



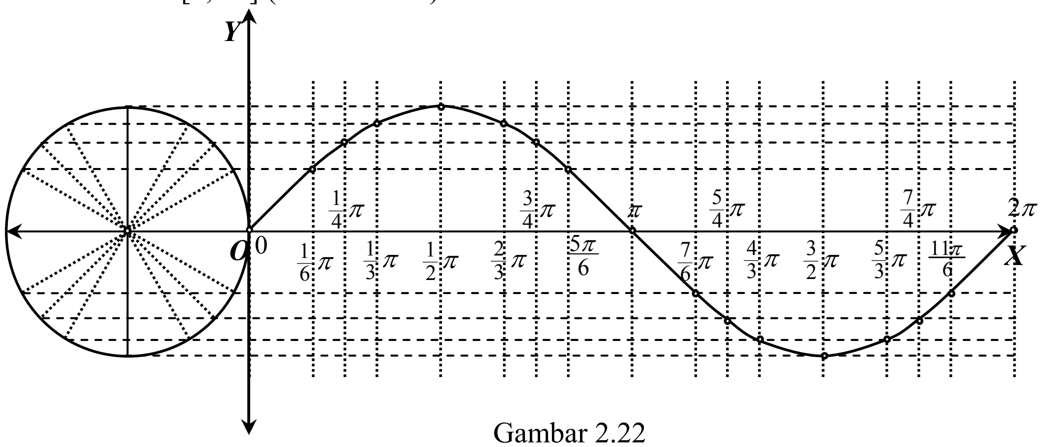
Gambar 2.20

2) Jika sepanjang sumbu X diletakkan nilai-nilai sudut istimewa pada interval $0 \leq x \leq 2\pi$ kemudian dibuat garis-garis vertikal sejajar sumbu-Y, diperoleh hasil sebagai berikut:



Gambar 2.21

3) Dengan menentukan titik-titik potong antara garis-garis pada langkah 1) dan langkah 2) yang bersesuaian, dan melalui titik-titik tersebut dilukis kurva mulus, diperoleh grafik fungsi sinus pada interval $[0, 2\pi]$ (Gambar 2.22)



Gambar 2.22

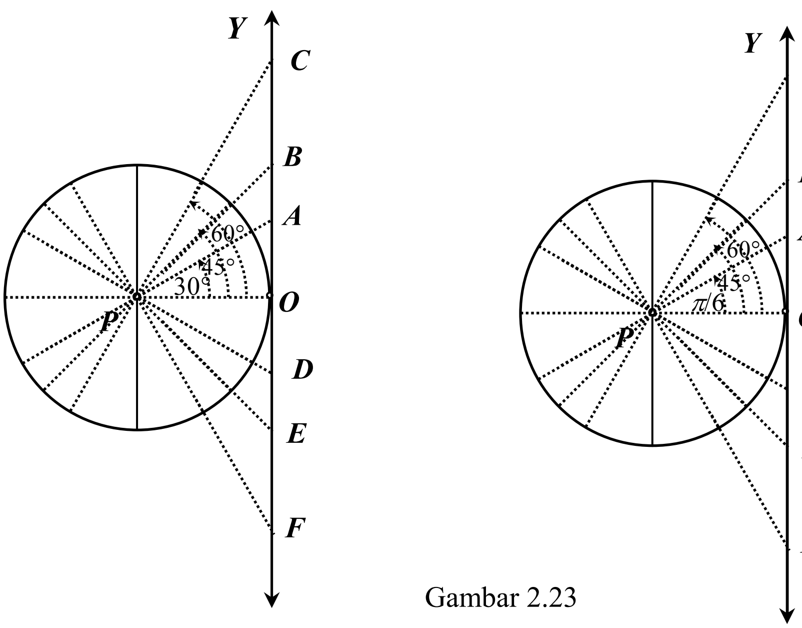
Catatan

1) Untuk menggambar grafik fungsi kosinus menggunakan lingkaran satuan, penggunaan ”perpotongan garis mendatar dan tegak” pada langkah 3) di atas perlu memperhatikan relasi kofungsi, yaitu bahwa cos x = sin($\frac{1}{2}\pi - x$). Dengan demikian maka titik potong yang nantinya dilalui kurva adalah titik potong misalnya antara garis $x = \frac{1}{6}\pi$ dengan garis mendatar yang melalui titik pada ujung jari-jari pembentuk sudut ($\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{6}\pi$) (pada satuan derajat, garis x = 30° dengan garis mendatar yang melalui titik pada ujung jari-jari pembentuk sudut (90 – 30 = 60)°.)

2) Pada dasarnya sudut-sudut yang digunakan di sini tidak harus sudut ”istimewa”. Pemilihan sudut dapat saja dipilih misalnya semua kelipatan 15°, maka Y yang panjangnya 2π dibagi 24 sama panjang, kemudian dari titik-titik bagi itulah garis-garis sejajar sumbu Y dibuat.

d. Melukis grafik fungsi tangen menggunakan lingkaran satuan

Jika dari Gambar 2.17 jari-jarinya diperpanjang sampai memotong sumbu Y, maka diperoleh gambar seperti pada Gambar 2.23.



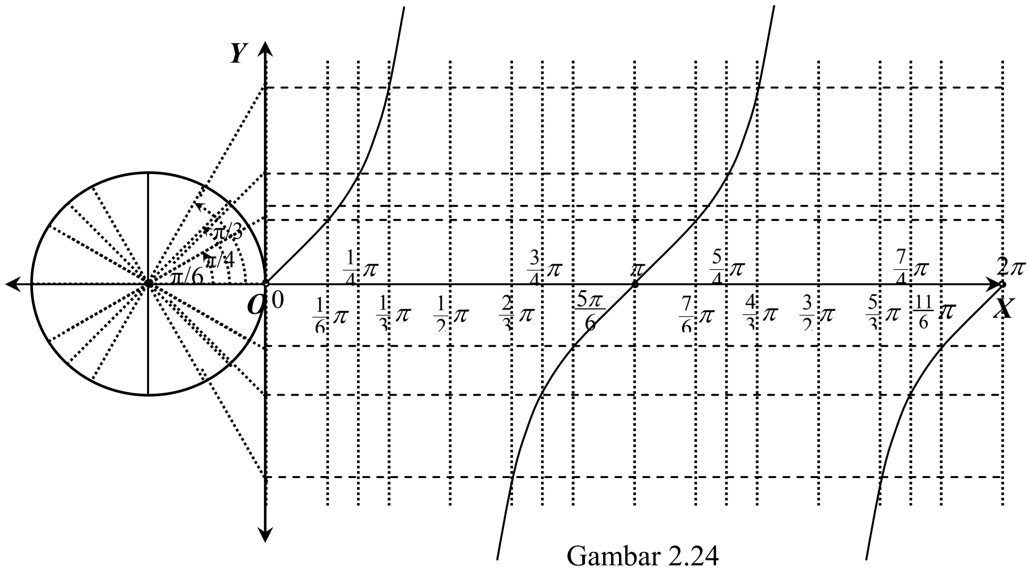
Gambar 2.23

Perhatikan misalnya $\qquad \tan 30^\circ = \dfrac{OA}{PO} = \dfrac{OA}{1} = OA$

$$\tan 60^\circ = \frac{OC}{PO} = \frac{OC}{1} = OC$$

Contoh di atas menggambarkan bahwa panjang ruas-ruas garis sepanjang titik O sampai ke titik potong jari-jari yang terkait dengan suatu sudut (misal sudut x) dengan sumbu Y mengindikasikan nilai tangennya (ke arah atas bertanda positif, ke bawah negatif).

Melukis garis sejajarnya seperti yang dilakukan pada kegiatan melukis grafik fungsi sinus dilakukan bukan melalui titik ujung jari-jari, melainkan melalui titik-titik potong semacam A, B, dan seterusnya seperti pada Gambar 2.24. Untuk melukis grafiknya pembaca dapat menyesuaikan dengan cara yang dilakukan pada grafik fungsi sinus.



Gambar 2.24

❖ LATIHAN 3

1. Lukislah grafik fungsi sinus, kosinus dan tangen menggunakan (i) tabel dan (ii) lingkaran satuan
2. Berikan masing-masing satu cara yang menurut Anda paling efektif untuk membelajarkan siswa melukis grafik fungsi sinus dan kosinus.

BAB III
PENUTUP

A. RANGKUMAN

Dalam Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP) Trigonometri merupakan materi yang baru pertama kali diperoleh di SMA. Bahkan jika diteliti, pengertian sudut pun tidak dipelajari dengan cukup dalam di SMP. Karena itulah maka pembelajaran mengenai sudut yang terkait erat dengan trigonometri sangat perlu memperoleh perhatian. Lebih lanjut kesalahan persepsi bahwa dalam perbandingan trigonometri hanya terjadi pada segitiga siku-siku perlu dieliminasi karena perbandingan trigonometri ditinjau dari fungsi adalah fungsi sudut, dan bukan fungsi segitiga. Pembelajarannya sebaiknya melalui kegiatan siswa menentukan perbandingan-perbandingan yang mengarah kepada perbandingan trigonometri, bukan dimulai dengan definisi yang berawal pada segitiga siku-siku. Tujuannya agar dengan hanya melihat sudut siswa dapat menentukan dimana sudut siku-siku ingin digambarkannya untuk membentuk segitiga siku-siku, menuju ke perbandingan trigonometri yang diperlukan.

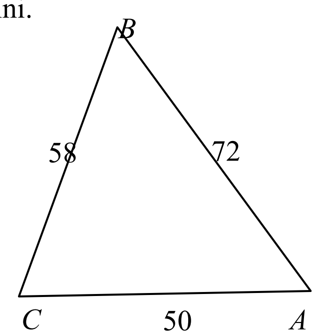
Trigonometri yang banyak aplikasinya di dalam kehidupan sehari-hari sangat mungkin dikembangkan pembelajarannya secara kontekstual. Karena itu melalui pendekatan pemecahan masalah dan penugasan-penugasan sangat memungkinkan dikembangkan di sini. Karena itu, alternatif pembelajaran baik yang terkait pemecahan masalah realistik maupun konteks yang sesuai yang ditawarkan di dalam paket ini masih perlu senantiasa dikembangkan dan diperbaharui. Mengubah bahan ajar menjadi kegiatan merupakan suatu strategi yang sangat mendukung tercapainya kompetensi siswa sesuai tuntutan kurikulum. Diharapkan pengguna paket senantiasa merefleksi pembelajaran yang dikembangkannya, apakah lebih banyak memberikan informasi atau telah membelajarkan siswa dan memberikan dasar yang kuat bagi pengembangan penalaran siswa selanjutnya. Latihan yang umumnya menyangkut bahan trigonometri hendaknya dikembangkan dengan soal-soal yang konkuren dan dapat disusun melalui kegiatan *problem posing* antar peserta MGMP.

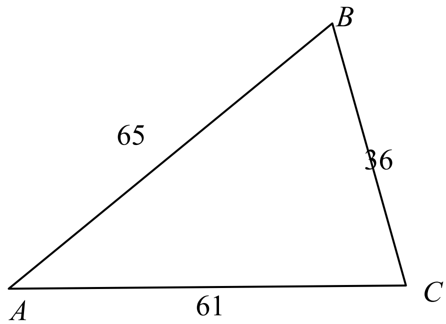
Pada paket ini terdapat tugas akhir dari Pembelajaran Trigonometri-1. Pengguna dinyatakan menguasai paket ini jika telah memperoleh skor minimal 75%.

B. TUGAS AKHIR

Waktu: 60 menit

1. Tentukanlah nilai sinus, kosinus dan tangens sudut *A* dan *B* pada gambar di bawah ini.





2. Gambarlah sebuah segitiga tumpul yang panjang sisi-sisinya merupakan bilangan bulat dan nilai sinus, kosinus dan tangen sudut-sudut lancipnya merupakan bilangan rasional.
3. Buktikan: $\dfrac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \tan A + \sec A$
4. Berdasar pemahaman tentang sudut yang berelasi, jelaskan mengapa:
   a. $\sin x = \sin \alpha$ dipenuhi oleh $x = \alpha + k.2\pi$ atau $x = \pi - \alpha + k.2\pi$
   b. $\cos x = \cos \alpha$ dipenuhi oleh $x = \pm\alpha + k.2\pi$ atau $x = \pi - \alpha + k.2\pi$

DAFTAR PUSTAKA

Cecep E. Rustana. 2001. *Belajar dan Mengajar Kontekstial.* Jakarta: Direktorat SLTP, Depdiknas

Gage, NL. And Berliner,David C. 1988. *Educational Psychology*. Boston: Houghton Mifflin Company

Krismanto Al. 2001. *Beberapa Model dan teknik Pembelajaran Aktif-Efektif Matematika.* Yogyakarta: PPPG Matematika

Marpaung Y. 2001. *Pembelajaran Realistik dan SANI dalam Pembelajaran Matematika. (suatu makalah disajikan dalam Seminar Nasional "Pendidikan Matematika Realistik Indonesia" tanggal 14-15 November 2001.*Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma

Randall Charles and Frank Lester. 1982. *Teaching Problem Solving, What, Why & How.* Palo Alto Ca: Dale Seymour Publications

Setiawan. 2004. *Pembelajaran Trigonometri Berorientasi PAKEM di SMA*. Paket Pembinaan Penataran. Yogyakarta: PPPG Matematika

Skemp, Jerrold E. 1985. *The Instructional Design Process.* New York: Harper & Row, Publisher Co.

Skemp, Richard R. 1977. *The Psychology of Learning Mathematics.* Middlesex, England:Penguin Books Ltd.

Slavin, Robert E. 1995. *Cooperative Learning, Theory, Research, and Practice.* Boston: Allyn Bacon

Paul Suparno. 1997. *Filsafat Konstruktivisme dalam Pendidikan*. Yogyakarta: Penerbit Kanisius

Paul Suparno. 2000. *Teori Perkembangan Kognitif Jean Peaget.* Yogyakarta: Penerbit Kanisius.

Suryanto. 1999. *Matematika Humanistik sebagai Pembelajaran yang Aktif-Efektif.* Yogyakarta: PPPG Matematika

Sutarto Hadi. 2000. *Teori Matematika Realistik.* Enshede: University of Twente

Tim Instruktur PKG Matematika SMU. 1994. *Beberapa Metode dan Ketrampilan dalam Pengajaran Matematika.* Yogyakarta: Direktorat Pendidikan Menengah Umum, Depdiknas.

Winarno & Krismanto Al. 2001. *Trigonometri.* Bahan Ajar Pelatihan Guru. Yogyakarta: PPPG Matematika

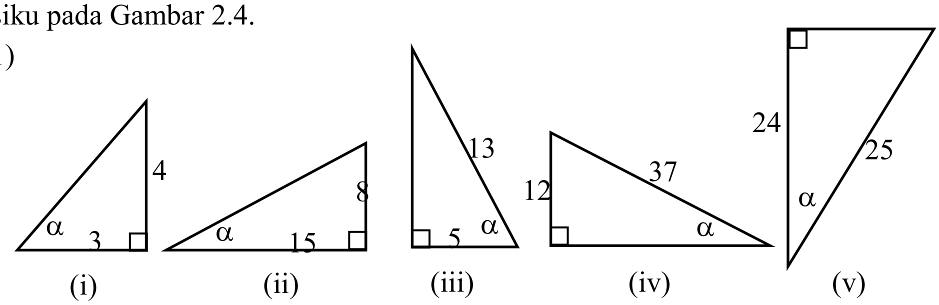
LAMPIRAN ♦

❖ KUNCI/PETUNJUK PENYELESAIAN LATIHAN

Latihan 1

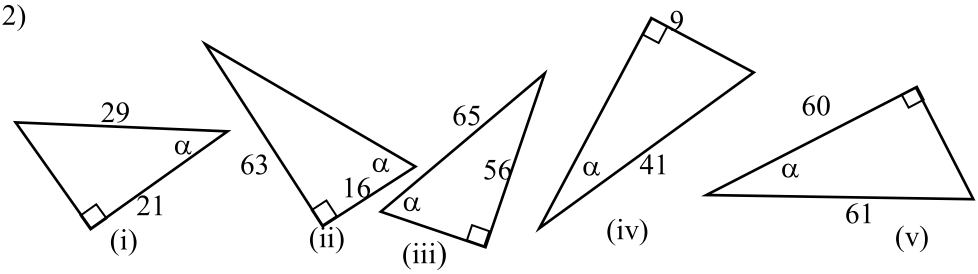
1. Nilai sinus, kosinus dan tangen salah satu sudut lancip pada setiap segitiga siku-siku pada Gambar 2.4.

1)



(i)	$\sin \alpha = \dfrac{4}{5}$	$\cos \alpha = \dfrac{3}{5}$	$\tan \alpha = \dfrac{4}{3}$
(ii)	$\sin \alpha = \dfrac{8}{17}$	$\cos \alpha = \dfrac{15}{17}$	$\tan \alpha = \dfrac{8}{15}$
(iii)	$\sin \alpha = \dfrac{12}{13}$	$\cos \alpha = \dfrac{5}{13}$	$\tan \alpha = \dfrac{12}{5}$
(iv)	$\sin \alpha = \dfrac{12}{37}$	$\cos \alpha = \dfrac{35}{37}$	$\tan \alpha = \dfrac{12}{35}$
(i)	$\sin \alpha = \dfrac{7}{25}$	$\cos \alpha = \dfrac{24}{25}$	$\tan \alpha = \dfrac{7}{24}$

2)



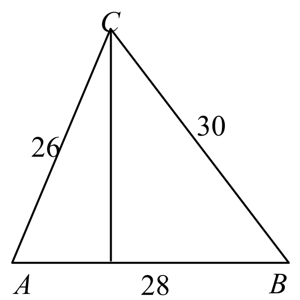
(i)	$\sin \alpha = \dfrac{20}{29}$	$\cos \alpha = \dfrac{21}{29}$	$\tan \alpha = \dfrac{20}{21}$
(ii)	$\sin \alpha = \dfrac{63}{65}$	$\cos \alpha = \dfrac{16}{65}$	$\tan \alpha = \dfrac{63}{16}$

(iii) $\sin \alpha = \dfrac{56}{65}$ $\cos \alpha = \dfrac{33}{65}$ $\tan \alpha = \dfrac{56}{33}$

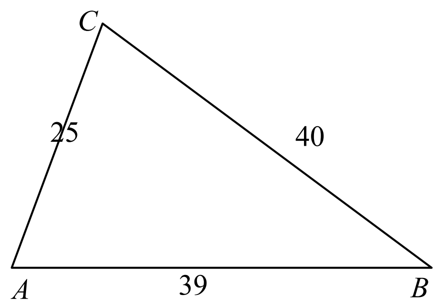
(iv) $\sin \alpha = \dfrac{9}{41}$ $\cos \alpha = \dfrac{40}{41}$ $\tan \alpha = \dfrac{9}{40}$

(v) $\sin \alpha = \dfrac{11}{61}$ $\cos \alpha = \dfrac{60}{61}$ $\tan \alpha = \dfrac{11}{60}$

2. Nilai sinus dan kosinus dan tangen untuk ∠A dan ∠B pada Gambar 2.5 (i) dan (ii)



(i)



(ii)

(i) $\sin A = \dfrac{12}{13}$ $\tan A = \dfrac{12}{5}$ $\sin \beta = \dfrac{4}{5}$ $\tan \beta = \dfrac{4}{3}$

(ii) $\sin A = \dfrac{24}{25}$ $\tan A = \dfrac{24}{7}$ $\sin \beta = \dfrac{3}{5}$ $\tan \beta = \dfrac{3}{4}$

3. -
4. (kiri): sinus α = 0,36 dan (kanan) cos β = 0,72
5. -
6. -.
7. Dalam mengerjakan soal seorang siswa menulis:
   c. $\sin 120° = \sin(180 - 120)° = \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

      Langkah I betul karena kebetulan fungsinya sinus. Tak ada rumus dasarnya.

   d. $\cos 240° = -\cos(180 + 60)° = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$

      Langkah I salah, sebab mengganti 240 dengan 180 + 60 saja tidak mengubah tanda nilai kosinus

      Langkah II juga salah.

      $-\cos(180 + 60)° = -(-\cos 60°) = \cos 60°$

Latihan 2 (sampel bukti)

1. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

Bukti: Kiri: $\cos^4\theta - \sin^4\theta$

$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$= 1 \times (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

6. $2 \csc x = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} + \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

Ruas kanan $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} + \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

$= \dfrac{\sin^2 x + (1+\cos x)^2}{(1+\cos x)\sin x}$

$= \dfrac{\sin^2 x + 1 + 2\cos x + \cos^2 x}{(1+\cos x)\sin x}$

$= \dfrac{1+1+2\cos x}{(1+\cos x)\sin x}$

$= \dfrac{2(1+\cos x)}{(1+\cos x)\sin x}$

$= \dfrac{2}{\sin x}$

$= 2 \csc x$

$=$ *ruas kiri*

7. sec4θ – sec2θ = tan4θ + tan2θ

Ruas kiri:

$\sec^4\theta - \sec^2\theta$

$= \sec^2\theta(\sec^2\theta - 1)$

$= \sec^2\theta \times \tan^2\theta$

$= (1 + \tan^2\theta) \tan^2\theta$

$= \tan^2\theta + \tan^4\theta$

$=$ *ruas kanan*

Latihan 3

2. Melukis grafik fungsi sinus, kosinus dan tangen menggunakan (i) tabel dan (ii) lingkaran satuan

(i) 1). Melukis grafik fungsi sinus menggunakan tabel

Untuk melukis grafik fungsi f: $x \rightarrow f(x) = \sin x$, mula-mula membuat tabel nilai $\sin x$ untuk sudut-sudut istimewa sebagaimana tabel di bawah ini:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Bila nilai pada tabel telah dibuat lengkap, maka pasangan koordinat titik-titik: $(0,0)$, $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$, … , $(2\pi, 0)$ digambar dalam sistem koordinat Cartesius. Melalui titik-titik berurutan yang berurutan dilukis kurva mulus.

Hasilnya lihat Gambar 2.19

2). Melukis grafik fungsi kosinus menggunakan tabel

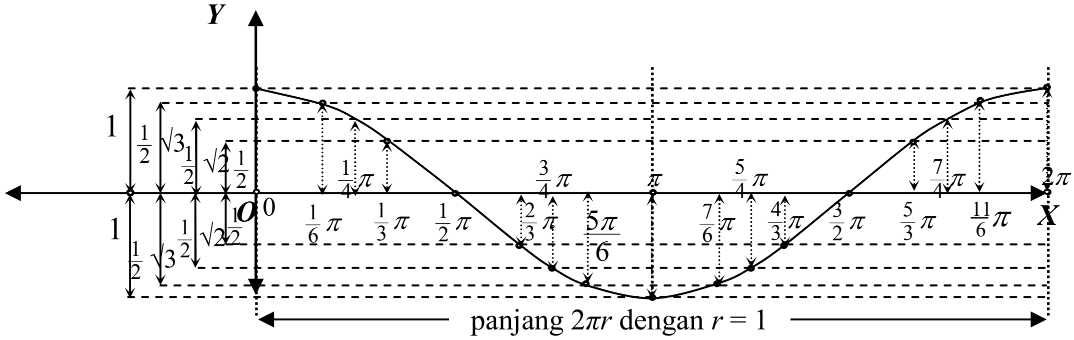
Untuk melukis grafik fungsi f: $x \rightarrow f(x) = \cos x$, mula-mula membuat tabel nilai $\cos x$ untuk sudut-sudut istimewa sebagaimana tabel di bawah ini:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Bila nilai pada tabel telah dibuat lengkap, maka pasangan koordinat titik-titik: (0,1), ($\frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$), ($\frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$), ($\frac{\pi}{3}$, $\frac{1}{2}$), … , (2π, 1) digambar dalam sistem koordinat Cartesius.

Melalui titik-titik berurutan yang berurutan dilukis kurva mulus.



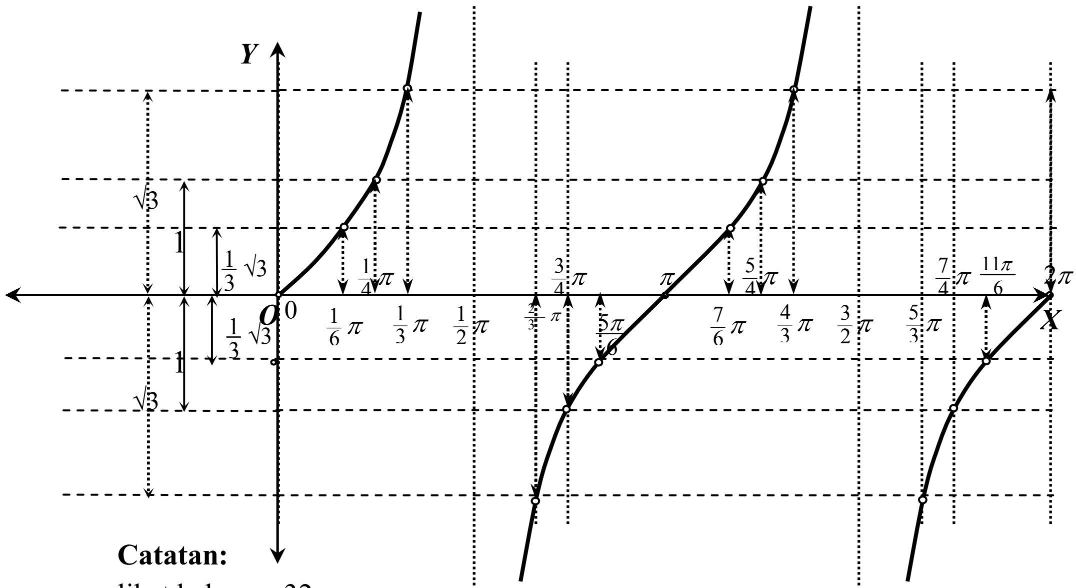
3). Melukis grafik fungsi tangen menggunakan tabel

Untuk melukis grafik fungsi f: $x \rightarrow f(x) = \sin x$, mula-mula membuat tabel nilai $\sin x$ untuk sudut-sudut istimewa sebagaimana tabel di bawah ini:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Bila nilai pada tabel telah dibuat lengkap, maka pasangan koordinat titik-titik : (0,0), ($\frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$), ($\frac{\pi}{4}$, 1), ($\frac{\pi}{3}$, $\sqrt{3}$), … , (2π, 0) digambar dalam sistem koordinat Cartesius. Melalui titik-titik berurutan yang berurutan dilukis kurva-kurva mulus dalam interval $[0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4})$, $(\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$.



Catatan:

lihat halaman 32.

4). Melukis grafik fungsi kosinus dan tangen menggunakan tabel

Langkah kegiatannya melukis grafik fungsi kosinus dan tangen dengan tabel dapat dilakukan seperti pada kegiatan melukis grafik fungsi sinus dengan tabel.

(ii) 1). Melukis grafik fungsi sinus menggunakan lingkaran satuan

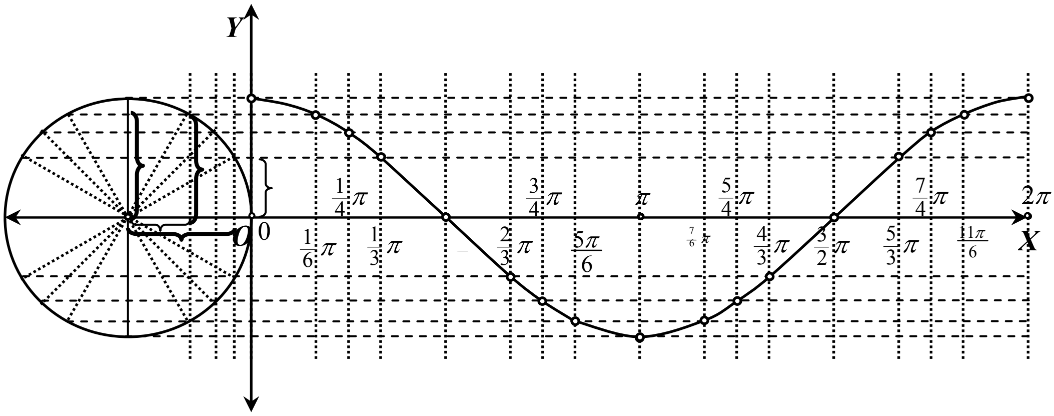
lihat halaman 32-33.

(pengguna bahan ini melakukan kegiatan teknis sendiri, dari membaca contoh pada halaman tersebut)

2) Melukis grafik fungsi kosinus menggunakan lingkaran satuan

(seperti pada sinus, disesuaikan, lihat hlm 34, **Catatan** di bawah Gambar 2.22)

Dengan menentukan titik-titik potong antara garis-garis pada langkah 1) dan langkah 2) yang bersesuaian, dan melalui titik-titik tersebut dilukis kurva mulus, diperoleh grafik fungsi kosinus pada interval [0, 2π] seperti berikut ini.



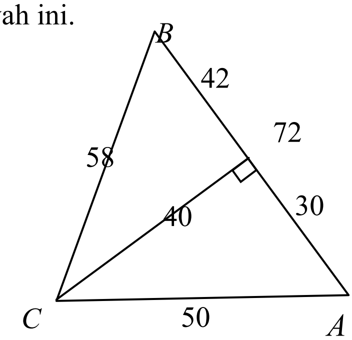
3) Melukis grafik fungsi tangen menggunakan lingkaran satuan

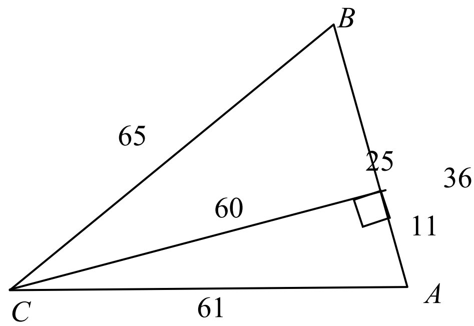
lihat halaman 34-35 pada d. Melukis grafik fungsi tangen menggunakan lingkaran satuan

(pengguna bahan ini melakukan kegiatan teknis sendiri, dari membaca contoh pada halaman tersebut)

Kunci Tugas Akhir

1. Tentukanlah nilai sinus, kosinus dan tangens sudut A dan B pada gambar di bawah ini.





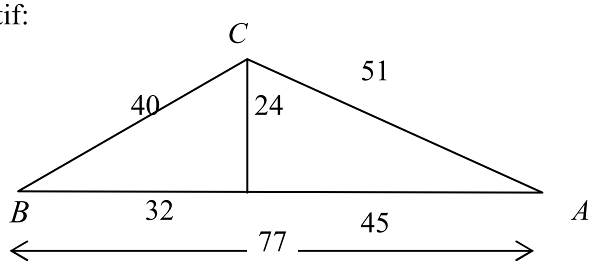
$\sin A = \dfrac{4}{5}$ $\quad \sin B = \dfrac{20}{29}$ $\quad \sin A = \dfrac{60}{61}$ $\quad \sin B = \dfrac{12}{13}$

$\cos A = \dfrac{3}{5}$ $\quad \cos B = \dfrac{21}{29}$ $\quad \cos A = \dfrac{11}{61}$ $\quad \cos B = \dfrac{5}{13}$

$\tan A = \dfrac{4}{3}$ $\quad \tan B = \dfrac{20}{21}$ $\quad \tan A = \dfrac{60}{11}$ $\quad \tan B = \dfrac{12}{5}$

2. Gambarlah sebuah segitiga tumpul yang panjang sisi-sisinya merupakan bilangan bulat dan nilai sinus, kosinus dan tangen sudut-sudut lancipnya merupakan bilangan rasional.

Alternatif:



Tumpul karena: $AB^2 = 77^2 = 5929$

$AC^2 + CB^2 = 51^2 + 40^2 = 2601 + 1600 = 4201 < AB^2 = 5929$

$AB^2 > AC^2 + CB^2$

Dari gambar tampak bahwa nilai sinus, kosinus dan tangen sudut-sudut lancipnya merupakan hasil atau nilai perbandingan bilangan-bilangan bulat; jadi rasional.

3. Buktikan: $\dfrac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \tan \mathrm{A} + \sec \mathrm{A}$

Bukti: Ruas kiri $= \dfrac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1}$

$$= \frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} \times \frac{\tan A + \sec A}{\tan A + \sec A}$$

$$= \frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan^2 A - \sec^2 A + \tan A + \sec A} \times \frac{\tan A + \sec A}{1}$$

$$= \frac{\tan A + \sec A - 1}{-1 + \tan A + \sec A} \times \frac{\tan A + \sec A}{1}$$

$= \tan A + \sec A$

4. Berdasar pemahaman tentang sudut yang berelasi, jelaskan mengapa:
   a. $\sin x = \sin \alpha$ dipenuhi oleh $x = \alpha + \mathrm{k}.2\pi$ atau $x = \pi - \alpha + \mathrm{k}.2\pi$
   b. $\cos x = \cos \alpha$ dipenuhi oleh $x = \pm\alpha + \mathrm{k}.2\pi$ atau $x = \pi - \alpha + \mathrm{k}.2\pi$

   Petunjuk:

   Baca kembali teks pada Bab II butir 7 halaman 19-22, khususnya 7.c, dan d.5 untuk sinus (soal a) serta d.2) dan d.5 untuk kosinus (soal b).