ALJABAR

(Oleh: Al. Krismanto, M.Sc.)

I. PENDAHULUAN

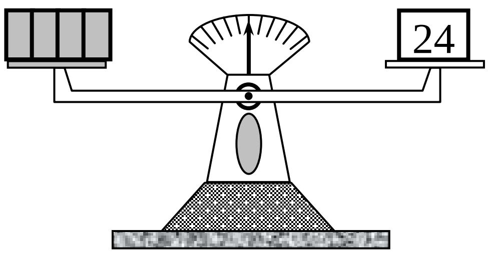
Aljabar merupakan bahasa simbol dan relasi. Aljabar digunakan untuk memecahkan masalah sehari-hari. Dengan bahasa simbol, dari relasi-relasi yang muncul, masalaha-masalah dipecahkan secara sederhana. Bahkan untuk hal-hal tertentu ada algoritma-algoritma yang mudah diikuti dalam rangka memecahkan masalah simbolik itu, yang pada saatnya nanti dikembalikan kepada masalah sehari-hari. Jadi belajar aljabar bukan semata-mata belajar tentang keabstrakannya, melainkan belajar tentang masalah sehari-hari.

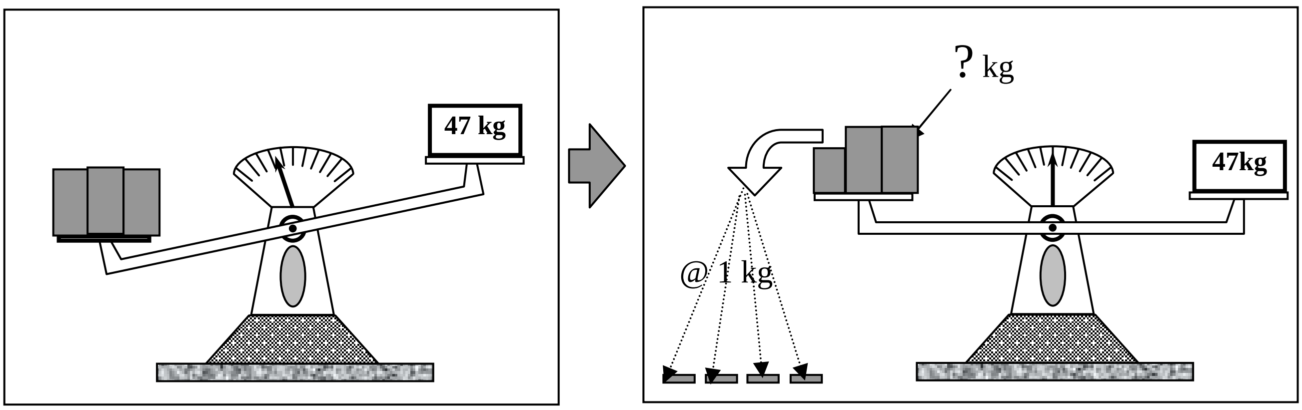
Di SD dipelajari aritmetika atau ilmu hitung. Simbol-simbol yang digunakannya adalah angka-angka yang dengan langsung sering dapat dibayangkan seberapa besarnya, atau paling tidak murid dapat mengenalinya sebagai bilangan tertentu. Karena bahasa aljabar menggunakan simbol yang bukan hanya angka melainkan huruf, maka **bentuk aljabar** yang dimulai di kelas I SLTP sungguh merupakan bagian yang sangat perlu dipahami siswa. dengan kata lain, pembelajaran bentuk aljabar sangat perlu memperoleh perhatian. Membedakan 2x dengan x^2, memehami $2 \times x$ yang sama dengan $x + x$, memahami $2x^3$ bernilai 16 (dan bukan 64) untuk $x = 2$ merupakan awal yang bagi kebanyakan siswa tidak mudah.

Sifat-sifat operasi hitung dengan bilangan yang dikenal di SD berlaku untuk operasi aljabar, khususnya dalam penjumlahan dan perkalian. Karena itu 11 sifat dasar operasi tersebut harus dikuasai siswa untuik memasuiki aljabar.

Kompetensi siswa dalam memahami dan kemudian menyusun bentuk aljabar merupakan prasyarat siswa untuk mampu atau kompeten dalam menyelesaikan masalah verbal baik yang menyangkut persamaan maupun pertidaksamaan dan pengembangannya. Karena itu kemampuan dasar ini perlu mendapatkan perhatian atau penanganan sebelum masuk ke persamaan dan pertidaksamaan, juga ke fungsi dalam aljabar. Kemampuan dasar itu dapat digali dari **pengalaman belajar** siswa.

Apa yang dapat Anda ungkapkan dari gambar di bawah ini?





II. HUKUM-HUKUM DASAR ALJABAR DAN PENGGUNAANNYA

Semua hukum atau aturan dasar dalam aljabar elementer, berkenaan dengan operasi hitung aljabar, sesuai yang berlaku dalam 11 aturan atau sifat penjumlahan dan perkalian bilangan real. Dalam himpunan bilangan real R didefinisikan dua operasi hitung yaitu *penjumlahan* (dengan lambang operasi "+") dan *perkalian* (dengan lambang operasi "×", atau dalam aljabar sering menggunakan "•", atau kadang tidak dituliskan).

1. Hukum-hukum atau Sifat-sifat Dasar Aljabar

Ada 11 (sebelas) hukum dasar tentang penjumlahan dan perkalian bilangan real yaitu:

a. *Sifat Tertutup (Closure)*:
   Untuk setiap $a, b \in R$, jika $a + b = c$ dan $a \times b = d$, maka (i) $c \in R$ dan (ii) $d \in R$

b. *Sifat Asosiatif* (Pengelompokan)
   Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku: (i) $a + (b + c) = (a + b) + c$ dan (ii) $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

c. *Ada elemen netral*, yaitu 0 (nol) pada penjumlahan dan 1 pada perkalian. Sesuai namanya maka sifat elemen netral tersebut adalah:
   Untuk setiap $a \in R$ maka: (i) $a + 0 = 0 = 0 + a$, dan (ii) $1 \times a = a = a \times 1$

d. *Elemen Invers*. Setiap bilangan real a mempunyai invers penjumlahan (aditif) yaitu $-a$ (baca: negatif a) dan untuk setiap $a \in R$ dan $a \neq 0$ mempunyai sebuah invers perkalian $\frac{1}{a}$ (kebalikan a). Dalam hal ini: (i) $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ dan $a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a$, asal $a \neq 0$

   Pemahaman tentang invers inilah yang sangat diperlukan dalam penyelesaian persamaan/ pertidaksamaan linear satu variabel (peubah)

e. *Sifat Komutatif*:

   Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku: (i) $a + b = b + a$ dan (ii) $a \cdot b = b \cdot a$

f. *Distributif*: Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a \cdot (b + c) = ab + ac$

2. Beberapa Akibat Sifat Distributif

Teorema I: **Untuk setiap $a \in R$, berlaku $a \cdot 0 = 0$**

Bukti:

Untuk setiap $a \in R$ berlaku $a + 0$	$= a$	*sifat bilangan 0 (elemen identitas)*
$a \times (a + 0)$	$= a \times a$	*mengalikan kedua ruas dengan a*
$a \times a + a \times 0$	$= a \times a$	*sifat distributif*
$-(a \times a) + (a \times a) + a \times 0$	$= -(a \times a) + a \times a$	*kedua ruas ditambah $-(a \times a)$*
$0 + a \cdot 0$	$= 0$	*sifat invers, $-(a \times a) + a \times a = 0$*
$a \cdot 0$	$= 0$	*sifatpenjumlahan dengan 0*

3. Dasar Penyelesaian Persamaan

Selain butir 1.d di atas, dasar penyelesaian persamaan, khususnya persamaan kuadrat adalah:

Teorema II: **Misalkan a dan b bilangan real dan $a \cdot b = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$**
(maksudnya: salah satu: $a = 0$ atau $b = 0$, atau kedua-duanya a dan b masing-masing 0)
Bukti:
Dari Teorema I: $a \times 0 = 0$ berlaku untuk setiap $a \in R$.
Jika $a = 0$, maka $a \times b$ dapat dinyatakan dengan $0 \times b$, yang menurut Teorema I bernilai 0.
Jadi $a \times b = 0$ dapat terjadi untuk a (saja) = 0

Jika $a \neq 0$, maka $\frac{1}{a}$ ada. Karena yang diketahui $a \times b = 0$, maka

$\frac{1}{a} \times (a \times b)$	$= \frac{1}{a} \times 0$	*mengalikan kedua ruas dengan* $\frac{1}{a}$
$(\frac{1}{a} \times a) \times b$	$= \frac{1}{a} \times 0$	*sifat asosiatif perkalian*
	$= 0$	*sifat perkalian bilangan dengan 0*
$1 \times b$	$= 0$	*perkalian bilangan dengan kebalikannya*
b	$= 0$	*definisi elemen identitas*

Jadi, jika $a \times b = 0$ dan $a \neq 0$, maka $b = 0$

Analog dapat dibuktikan: jika $a \times b = 0$ dan $b \neq 0$, maka $a = 0$.

Jika $a = 0$ dan $b = 0$, maka $a \times b = 0$ (sifat perkalian dengan 0). Jadi $a \times b = 0$ dapat terjadi jika a dan b keduanya 0.

4. Sifat Distributif pada Perkalian Dua Binomial

Bentuk aljabar seperti $a + b$, $ax + b$ dan $a^2 + b^2$ merupakan contoh-contoh *binomial* (suku dua). Setiap bagian yang dipisahkan oleh tanda "+" tersebut dinamakan *suku*. Jadi binomial terdiri dari dua suku.

Teorema 3 **Untuk setiap a, b, c, d $\in$ R berlaku $(a + b)\bullet(c + d) = a\bullet c + a\bullet d + b\bullet c + b\bullet d$**

Bukti:

$$(a + b)\bullet(c + d) = a\bullet(c + d) + b\bullet(c + d)$$
$$= (a\bullet c + a\bullet d) + b\bullet c + b\bullet d$$
$$= a\bullet c + a\bullet d + b\bullet c + b\bullet d \text{ (dan biasa ditulis: } ac + ad + bc + bd)$$

Dengan berlakunya sifat komutatif, maka urutan mana pun yang digunakan dalam perkalian suku-suku tidak mempengaruhi hasil perkalian tersebut.

Teorema 4 **Untuk setiap a, b $\in$ R, berlaku**

(i) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

(ii) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

(iii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Bukti:

(i)

$(-a) + a$	$= 0$	*definisi penjumlahan bilangan dan lawannya*
$((-a) + a) \cdot b$	$= 0 \cdot b$	*kedua ruas dikalikan b*
	$= 0$	*Teorema I*
$(-a) \cdot b + a \cdot b$	$= 0$	*sifat distributif*

Ini menunjukkan bahwa $(-a) \cdot b$ adalah lawan atau negatif dari $a \cdot b$

Jadi: $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

(ii) Dengan cara sama seperti (i) yaitu menukar a dengan b dan sebaliknya, maka diperoleh: $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

(iii)

$(-b) + b$	$= 0$	*definisi penjumlahan bilangan dan lawannya*
$(-a) \cdot ((-b) + b)$	$= (-a) \cdot 0$	*kedua ruas dikalikan (–a)*
	$= 0$	*Teorema I*
$(-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot b$	$= 0$	*sifat distributif*

Ini menunjukkan bahwa $(-a) \cdot (-b)$ adalah lawan atau negatif dari $(-a)\cdot b$, yang berdasar (i) ab juga negatif $(-a) \cdot b$. Berarti $(-a) \cdot (-b) = ab$

III. BENTUK ALJABAR

Beberapa ungkapan tentang konsep atau pengertian yang digunakan dalam tulisan ini dan dalam pembelajaran di kelas di antaranya adalah:

a. *Ekspresi* (expression). Semua angka dan semua huruf menyatakan suatu ekspresi. demikian juga penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian dari dua ekspresi, pemangkatan dan penarikan akar dari sebuah, dua atau lebih ekspresi merupakan ekspresi pula. Pembagian dengan 0 (nol) dan penarikan akar berderajat genap dari bilangan negatif, dikecualikan dari hal di atas. Dalam bahasa aljabar, ekspresi juga dikenal sebagai **bentuk aljabar.**

Contoh ekspresi: 5; $\frac{4}{17}$; a; 5x; a + b; 5(a + b); $\frac{2x+3}{4}$; $\sqrt[3]{a}$

Dua bentuk aljabar E_1 dan E_2 yang memuat variabel dikatakan ekuivalen (dilambangkan dengan "$\Leftrightarrow$") jika dengan substitusi bilangan sama pada keduanya, menghasilkan nilai yang sama. Misalnya 4a + 5a dengan 9a adalah ekuivalen karena setiap $a \in D$ (D = domain) kedua hasil substitusi sama. Di antara sifat-sifat ekuivalensi adalah:

a. Setiap bentuk aljabar E ekuivalen dengan dirinya sendiri.
b. Jika $E_1 \Leftrightarrow E_2$ maka $E_2 \Leftrightarrow E_1$.
c. Jika $E_1 \Leftrightarrow E_2$ dan $E_2 \Leftrightarrow E_3$, maka $E_1 \Leftrightarrow E_3$.

b. *Pernyataan* adalah kalimat (berita) yang bernilai benar saja atau salah saja (tetapi tidak sekaligus benar dan salah). Kebenaran pernyataan mengacu pada kecocokan pernyataan itu dengan keadaan sesungguhnya.

Contoh:	1) Hasil penjumlahan 3 dan 7 adalah 10 (Benar)	
	(Secara singkat: 3 + 7 = 10)	$\rightarrow$ contoh kesamaan
	2) 3 + 5 < 10	(Benar, contoh ketidaksamaan)
	3) 25 : 7 = 3	(Salah)

c. *Konstanta* adalah lambang yang mewakili (menunjuk pada) anggota tertentu pada suatu semesta pembicaran)

d. *Variabel* (peubah) adalah lambang yang mewakili (menunjuk pada) anggota sebarang pada suatu semesta pembicaraan.

e. *Kalimat Terbuka* adalah kalimat yang memuat variabel, dan jika variabelnya diganti dengan konstanta akan menjadi sebuah pernyataan (yang bernilai saja atau salah saja).

f. *Dua Kalimat Terbuka* dikatakan *ekuivalen* jika untuk domain yang sama keduanya memiliki himpunan penyelesaian yang sama.

g. *Persamaan* adalah kalimat terbuka yang menggunakan relasi "sama dengan" (lambang: "="). Persamaan dapat dinyatakan pula sebagai dua bentuk aljabar yang dihubungkan dengan tanda "=". Secara umum, persamaan berbentuk $E_1 = E_2$, dengan paling sedikitsatu di antara E_1 dan E_2 memuat variabel. Dalam hal ini E_1 disebut ruas kiri dan E_2 ruas kanan persamaan tersebut. Jika E_1 dan E_2 keduanya ekuivalen dan tidak memuat variabel dinamakan **kesamaan**. Persamaan yang bernilai benar untuk setiap variabel angggota domain disebut **identitas.** Misalnya $x^2 + 1 \geq 2x$ adalah identitas, karena untuk setiap penggantian x dengan sebarang bilangan real, pernyataan yang diperoleh selalu bernilai benar

Contoh:	Bentuk aljabar/Bukan Persamaan	Persamaan
	$2x - 7$	$2x - 7 = 9$
	$2x^2 + 7x - 22$	$2x^2 + 7x = 22$

h. *Pertidaksamaan* adalah kalimat terbuka yang menggunakan tanda relasi <, >, $\leq$, $\geq$, atau $\neq$.

i. *Penyelesaian suatu kalimat terbuka*

Penyelesaian kalimat terbuka dengan satu variabel adalah konstanta (atau konstanta-konstanta) anggota daerah definisinya yang jika digantikan (disubstitusikan) pada variabel dalam kalimat itu, kalimat terbuka semula menjadi pernyataan yang bernilai benar. Penyelesaian persamaan disebut juga **akar** persamaan. Dikatakan pula bahwa penyelesaian itu **memenuhi** kalimat terbuka tersebut. Jika kalimat terbukanya memuat dua, tiga, empat,… n variabel, maka penyelesaiannya merupakan *pasangan, tripel, kuadrupel … n tupel* dengan sifat bahwa substitusi urutan variabel dengan urutan bilangan atau konstanta penganti pada n-tupelnya, kalimat terbuka itu menjadi pernyataan bernilai benar.

Contoh:

a. Untuk domain himpunan bilangan real, maka pada persamaan $2x + 6 = 0$,

   a) -3 adalah penyelesaian, karena $2(-3) + 6 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ bernilai benar

   b) 3 bukan penyelesaian, karena $2(3) + 6 \Leftrightarrow 12 = 0$ merupakan pernyataan bernilai salah.

   Untuk domain himpunan bilangan positif, $2x + 6 = 0$ tidak mempunyai penyelesaian. Meskipun -3 memenuhi, tetapi karena -3 bukan anggota domain, maka bukan penyelesaian.

b. Pada persamaan $2x - 3y = 12$ dengan $x, y \in R$, maka:

   $(3, -2)$ adalah salah satu penyelesaian, karena jika x diganti 2 dan bersamaan dengan itu y diganti -3, diperoleh $2(3) - 3(-2) = 12 \Leftrightarrow 12 = 12$ yang bernilai benar. Demikian juga dengan pasangan $(0, -4)$, $(6, 0)$ dan masih banyak lagi pasangan lainnya. Tetapi $(3, 2)$ bukan penyelesaian karena pengantian x dengan 3 dan y dengan 2 menjadikan pernyataan $2(3) - 3(2) = 12 \Leftrightarrow 0 = 12$ yang bernilai salah.

j. Himpunan penyelesaian suatu kalimat terbuka adalah himpunan semua penyelesaian kalimat terbuka tersebut.

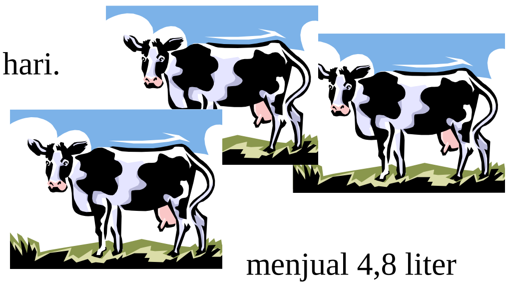
IV. PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN SATU PEUBAH

1. Persamaan Linear dengan Satu Peubah

a. *Pengalaman Belajar*

   1) Pak Budi memiliki tiga ekor sapi perah yang menghasilkan susu yang sama banyaknya setiap hari. Bulan lalu setiap hari ia dapat menjual 4,5 liter susu dari ketiga sapinya. Berapa liter yang dihasilkan dari setiap ekor sapi perah itu?

   2) Jika setiap sapi menghasilkan h liter susu, dan bulan ini setiap hari pak Budi dapat menjual 4,8 liter susu, tulislah kalimat terbuka yang berkaitan dengan jumlah susu yang dihasilkan dan banyak sapinya.



   3) Jika ternyata suatu hari seekor di antaranya hanya menghasilkan 0,5 liter kurang dari sapi lainnya dan jumlah susu yang dihasilkan seluruhnya 4,6 liter, (a) susunlah kalimat terbuka yang mengaitkan peristiwa di atas dan (2) berapa liter yang dihasilkan masing-masing sapi?

   Masalah di atas merupakan satu di antara masalah yang dapat dijumpai di peternakan petani yang memiliki hanya beberapa ekor sapi. Masalah itu berkaitan dengan persamaan linear satu variabel

b. *Bentuk Umum*

   Bentuk umum persamaan linear dengan satu peubah adalah $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$. Persamaan tersebut juga dapat dinyatakan dengan $ax = b$, dengan $a = a_1 - a_2$ dan $b = b_2 - b_2$.

c. *Sifat Dasar*

Suatu persamaan tidak berubah himpunan penyelesaiannya, jika kedua ruas persamaan:

1) ditambah atau dikurangi dengan bilangan yang sama
2) dikalikan atau dibagi dengan bilangan yang sama, asal pembaginya bukan 0

Persamaan baru dan persamaan aslinya dikatakan ekuivalen. Keduanya mempunyai himpunan penyelesaian yang sama.

Catatan: mengalikan kedua ruas persamaan dengan 0 tidak menghasilkan penyelesaian.

d. *Langkah Dasar Penyelesaian*

Langkah dasar untuk menyelesaikan persamaan linear satu variabel adalah menerapkan satu atau dua sifat dasar pada butir c di atas, sedemikian sehingga:

- semua yang memuat variabel tertulis di ruas kiri persamaan dan semua konstanta di ruas kanan.
- jika telah terbentuk satu suku pada masing-masing ruas dan koefisien variabel bukan 1, maka nilai variabel pengganti yang memenuhi persamaan diperoleh dengan mengalikan kedua ruas dengan kebalikan koefisien variabelnya.

Contoh: Tentukan himpunan penyelesaian $2x + 7 = -x - 5$

Jawab:	$2x + 7$	$= -x - 5$	
$\Leftrightarrow$	$2x + 7 + x$	$= -x - 5 + x$	*kedua ruas ditambah x, lawan –x*
$\Leftrightarrow$	$3x + 7$	$= -5$	
$\Leftrightarrow$	$3x + 7 - 7$	$= -5 - 7$	*kedua ruas ditambah –7*
$\Leftrightarrow$	$3x$	$= -12$	
$\Leftrightarrow$	x	$= -4$	*kedua ruas dikalikan* $\frac{1}{3}$ *(kebalikan 3)*

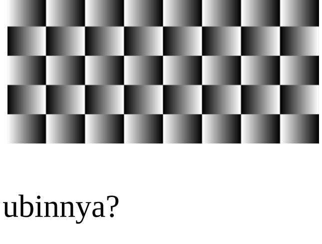
Jadi penyelesaiannya adalah – 3 dan himpunan penyelesaiannya adalah {–3}

e. *Masalah verbal*

Masalah verbal baik yang menyangkut persamaan linear maupun bukan persamaan linear senantiasa merupakan masalah di kelas. Salah satu di antara sebabnya adalah kesulitan siswa dalam menerjemahkan masalah sehari-hari dalam bentuk verbal ke bentuk simbolik (model matematika). Di antara akar permasalahannya adalah (1) Sejak awal persoalan aljabar langsung disajikan dalam bentuk simbolik dan (2) baru pada akhir topik (pokok atau subpokok bahasan) kepada siswa disampaikan soal verbal "secara tiba-tiba". *Menerjemahkan bentuk verbal ke bentuk simbolik atau model matematika dapat dimulai dengan menyatakan suatu peristiwa dalam bentuk aljabar. Apa pun variabel yang dipilih bukanlah menjadi masalah, sepanjang memudahkan atau tidak merancukan. Siswa diberi kesempatan memilih variabel (pada awalnya dapat saja guru memberikan clue). Dengan cukup banyak latihan dasar diharapkan siswa mempunyai sekumpulan "kata kunci", tentang lambang yang digunakan: "+", "–", "×" atau lainnya.*

Contoh: Nyatakan dalam bentuk aljabar!

1) Robi memiliki 12 kelereng. Ade memiliki kelereng dua kali milik Robi. Berapa butir kelereng Ade?



2) Setelah dijual 10 butir, telurnya tinggal 6 butir. Berapa butir telur semula?
3) Sebanyak 87 butir semangka yang sama ukurannya dimasukkan ke dalam karung hingga setiap karung penuh semangka. Diperoleh 4 karung dan 11 butir di antaranya tidak memenuhi karung. Berapa butir semangka pada setiap karung yang penuh?
4) Luas lantai gambar di atas adalah 7,68 m^2. Berapa luas setiap ubinnya?

Untuk menyelesaikan masalah verbal secara umum dapat dilakukan dengan langkah-langkah dasar antara lain sebagai berikut:

1) ***Pilihlah (sebuah atau jika perlu lebih) variabel. Variabel ini biasanya adalah sesuatu yang ditanyakan, atau dapat juga yang terkait langsung dengan yang ditanyakan. Jika perlu, buatlah sebuah diagram.***
2) ***Nyatakan setiap bilangan yang ada dalam masalah verbal itu dengan variabel terpilih, atau jika tidak, tuliskan bilangan itu sebagai konstanta.***
3) ***Nyatakan relasi antara bilangan-bilangan dan variabel yang telah diperoleh sehingga tersusun kalimat terbuka. Relasi ini mungkin dalam aljabar dapat dinyatakan dengan "=", "<", ">", "≤", atau "≥".***
4) ***Selesaikan kalimat terbukanya.***
5) ***Nyatakan jawabnya sesuai yang ditanyakan pada masalah itu dalam bentuk verbal.***

Contoh 1.

Karim mengendarai sepeda moto dengan kecepatan 40 km/jam. Dari tempat yang sama sejam kemudian Budi berkendaraani ke arah yang sama dengan kecepatan 56 km/jam.

a. *Setelah berapa jam Budi perjalanan menyalip/mendahului Karim?*
b. *Berapa jarak yang mereka tempuh pada saat Budi menyalip Karim?*

Jawab:

Menyelesaikan soal a.

1) *Memilih variabel.* Pertanyaan pertama tentang lamanya perjalanan Budi dari berangkat sampai menyalip. Misalkan lama perjalanan Budi sampai menyalip adalah t jam.
2) *Menyatakan setiap bilangan yang muncul pada soal dengan variabel yang telah dipilih:*
   Bilangan 40 terkait dengan Karim. Karim berangkat 1 jam lebih dahulu daripada Budi. Berarti ketika Karim disalip Budi ia telah berjalan selama (t + 1) jam. Kecepatannya 40 km/jam. Jadi jarak yang ditempuhnya sampai disalip Budi adalah $40 \times (t + 1)$ km.
   Bilangan 56 terkait dengan Budi. Ia berkendaraan selama t jam, kecepatannya 56 km/jam. Berarti jarak yang ditempuh sampai menyalip Karim adalah $56 \times t$ km.
3) *Menyatakan relasi antara bentuk-bentuk aljabar:*
   Pada saat Budi mendahului Karim, keduanya menempuh jarak yang sama, Berarti:
   $56 \times t = 40 \times (t + 1)$. Inilah kalimat terbuka (persamaan) yang terbentuk.
4) *Menyelesaikan kalimat terbuka*
   $56t = 40(t + 1) \Leftrightarrow 56t = 40t + 40 \Leftrightarrow 16t = 40 \Leftrightarrow t = 2{,}5$
5) *Menyatakan jawabnya sesuai pertanyaan:*
   Budi menyalip Karim setelah Budi berjalan selama 2,5 jam.

Menjawab pertanyaan b.

Jarak yang ditempuh Budi (dan Karim) saat Budi menyalip Karim = $56 \times 2{,}5$ km = 140 km.

TUGAS 1

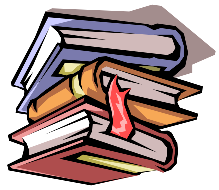
1. Susunlah paling sedikit 5 buah ungkapan atau peristiwa dalam bentuk verbal yang terkait dengan **bentuk aljabar**. Tukarkanlah hasil ungkapan tersebut dengan yang disusun oleh teman Saudara untuk disusun model matematikanya oleh orang bukan penyusun ungkapan verbal.. Diskusikan jika ada masalah yang tidak jelas.

2. Susunlah paling sedikit 5 buah ungkapan atau peristiwa yang terkait dengan masalah **persamaan linear satu variabel.** Tukarkanlah hasil ungkapan tersebut dengan yang disusun oleh teman Saudara untuk disusun model matematikanya oleh orang bukan penyusun ungkapan verbal.. Diskusikan jika ada masalah yang tidak jelas

3. Susunlah masing-masing sebuah konteks yang berkaitan dengan persamaan linear berikut:

a. $4x + 1 = 25$ b. $5x + 4 = 2x - 14$ c. $2x - 5 = \frac{2}{3}x + 1$

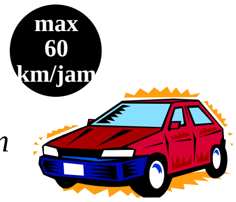
4. Susunlah bentuk simboliknya, kemudian jawablah setiap pertanyaan berikut ini.
   a. Besar salah satu sudut sebuah segitiga 20^o. Besar sudut kedua 3 kali yang ketiga. Berapa besar sudut yang ketiga?
   b. Tigabelas persen berat sekarung barang adalah 52 kg. Berapa berat bagian lainnya?
   c. Pada temperatur skala Fahrenheit berapakah terbaca 20 derajat lebih dari yang terbaca dalam skala Celcius?
   d. Dari titik T di luar sebuah lingkaran ditarik dua garis. Garis pertama memotong lingkaran di titik A dan B dengan TA = 5 cm dan AB = 16 cm. Garis kedua memotong lingkaran di titik C dan D dengan panjang ruas garis TC = 7 cm. Berapa panjang ruas garis CD?



   e. Di perpustakaan, Agung dan Bayu membaca buku yang sama. Agung telah membaca 24 halaman pertama. Yang belum dibaca Bayu 96 halaman. Ternyata banyak halaman yang belum dibaca Agung dua kali banyak halaman yang telah dibaca Bayu. berapa banyak halaman buku tersebut?

2. Pertidaksamaan Linear dengan Satu Peubah

a. *Pengalaman Belajar*



Contoh:

1) *Apa arti tulisan maksimum 60 km di tepi jalan?*
   Jika kecepatan kendaraan di jalan itu t km/jam, nyatakan dalam bentuk aljabar kecepatan kendaraan di jalan itu!
2) *Sebuah iklan menawarkan pekerjaan sebagai SATPAM. Salah satu syaratnya, tinggi pelamar tidak kurang dari 160 cm. Nyatakan hal ini dalam bentuk aljabar!*
3) *Yang diterima di SMU X NEM terkecilnya adalah 42,31. Nyatakan hal itu dalam bentuk aljabar.*
4) *Lulusan SLTP K NEM tertingginya 51,2. Nyatakan dalam bentuk aljabar tentang NEM itu.*

b. *Konsep dan Notasi Pertidaksamaan*

Untuk setiap x dan y bilangan real dan $x - y$ bernilai positif, hubungan antara x dan y dinyatakan dengan $x > y$ (x lebih dari y) atau $y < x$ (y kurang dari x). Meskipun $x \neq y$ juga menyatakan hubungan antara x dan y, namun hubungan tersebut di sini tidak banyak dibahas.

Dari hubungan di atas, secara khusus:

jika $y = 0$ maka $x - y > 0$ berarti $x > 0$ atau dikatakan x bilangan positif.
Dalam hal $x < 0 \Leftrightarrow 0 < -x$, maka $-x$ adalah bilangan positif

Sebuah bilangan x disebut* non negatif *jika bilangan itu salah satu: 0 (nol) atau positif.
$x - y$ non negatif ditulis $x - y \geq 0$, yang berarti $x \geq y$ atau $y \leq x$. Jadi $x \geq y \Leftrightarrow x - y > 0$

Jika kedua bilangan dibayangkan berada pada sebuah garis bilangan maka:

1) *$x > y$ dinyatakan dengan x berada di sebelah kanan y dan y di sebelah kiri x.*
   Grafiknya adalah sebagai berikut:
   y x
2) *untuk $x = y$, grafiknya x berimpit dengan y*
   x =y

c. *Aksioma untuk Pertidaksamaan*

1) *Untuk setiap bilangan real x, ada satu dan hanya satu dari yang berikut ini (**Trikotomi**):*
   (i) $x = 0$ (ii) $x > 0$ (iii) $-x > 0$

2) *Untuk setiap $x > 0$ dan $y > 0$, maka $x + y > 0$ dan $xy > 0$*

Contoh penggunaan: Untuk setiap $x \neq 0$ maka $x^2 > 0$
Bukti:
Karena $x \neq 0$, maka dari trikotomi bilangan pastilah salah satu benar: $x > 0$ atau $-x > 0$
Jika $x > 0$, maka $x \times x = x^2 > 0$ (Aksioma 2)
Jika $-x > 0$, maka $(-x) \times (-x) > 0$ (Aksioma 2)
$\Leftrightarrow -(x) \times (-x) > 0$ (Teorema 4)
$\Leftrightarrow x \times x > 0$ (Teorema 4)
$\Leftrightarrow x^2 > 0$ (Aksioma 2)
Jadi baik untuk $x > 0$ maupun $-x > 0$ (atau $x < 0$) maka $x^2 > 0$.

d. *Beberapa Sifat Pertidaksamaan*

1) Jika a < b dan b < c, maka a < c
Diketahui: $a < b$ dan $b < c$
Buktikan : $a < c$
Bukti: $a < b$ berarti $a - b < 0$ atau $b - a > 0$
$b < c$ berarti $b - c < 0$ atau $c - b > 0$
Berdasar perjumlahan dua bilangan positif menghasilkan bilangan positif, maka:
$(b - a) + (c - b) > 0 \Leftrightarrow b - a + c - b > 0 \Leftrightarrow -a + c > 0 \Leftrightarrow c > a$ atau $a < c$

2) Pertidaksamaan tidak berubah tandanya jika kedua ruas ditambah atau dikurangi dengan bilangan yang sama.
Diketahui: $x > y$ dan $a \in R$
Buktikan : $x + a > y + a$

Bukti:	$x > y$ berarti	$x - y > 0$	*arti $x > y$*
		$x - y + 0 > 0 + 0 = 0$	
		$x - y + a + (-a) > 0$	$a + (-a) = 0$
		$x + a - y - a > 0$	*komutatif*
		$x + a - (y + a) > 0$	
		$x + a > y + a$	*kebalikan pengertian $x > y$*

3) Pertidaksamaan tidak berubah tandanya jika kedua ruas dikalikan dengan bilangan positif yang sama.
Diketahui : $x > y$ dan $p > 0$
Buktikan : $px > py$

Bukti	: $x > y$ berarti $x - y > 0$	*arti $x > y$*
	$(x - y) \times p > 0$	*perkalian dengan bilangan positif*
	$px - py > 0$	*distributif*
	$px > py$ (terbukti)	(kebalikan) arti $px - py > 0$

4) Pertidaksamaan berbalik tandanya jika kedua ruas dikalikan dengan bilangan negatif yang sama.
Diketahui : $x > y$ dan $n < 0$
Buktikan : $nx < ny$

Bukti : $x > y$ berarti $x - y > 0$ *arti $x > y$*

$(x - y) \times (-n) > 0$ *perkalian dengan bilangan positif*

$-nx + ny > 0$ *distributif*

$-(-nx + ny) < 0$ *invers aditif*

$nx - ny < 0$ Teorema 4

$nx < ny$ arti bilangan negatif

5) Beberapa rumus lain sebagai pengembangan sifat-sifat di atas di antaranya:

a) Jika $0 < a < b$ atau $a < b < 0$ maka $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

b) Jika $a < b$ maka $-a > -b$

c) Jika $0 < a < c$ dan $0 < b < d$, maka $ab < cd$

(**Buktikan sendiri)**

Catatan: $a < b < c$ sama artinya dengan $a < b$ dan $b < c$

TUGAS 2

1. Seekor katak yang terkejut karena ada seekor ular di dekatnya, tiba-tiba meloncat. Loncatan pertama sejauh 30 cm. Pada loncatan kedua sampai ketujuh dengan loncatan yang sama jauh ia telah berada lebih dari 1,7 m dari tempatnya semula. Nyatakan peristiwa ini secara simbolik (model matematik)

2. Susunlah paling sedikit 5 buah ungkapan atau peristiwa yang terkait dengan masalah pertidaksamaan linear satu variabel. Tukarkanlah hasil susunan tersebut dengan yang disusun oleh teman Saudara untuk disusun model matematikanya. Diskusikan jika ada masalah yang tidak jelas.
3. Diketahui $x \leq y$ dan $y \leq x$. Buktikanlah bahwa $x = y$
4. Diketahui $x > y > 0$, buktikanlah bahwa $x^2 > y^2$.
   Apakah selalu berlaku: $x > y \Rightarrow x^2 > y^2$?
5. Tunjukkanlah bahwa $a^2 + b^2 \geq 2ab$ untuk setiap $a, b \in R$.
6. Diketahui $x < y$. Buktikanlah bahwa $x < \frac{1}{2}(x + y) < y$
7. Jika $a > 3$ dan $b < 2$, buktikanlah bahwa $ab + 6 < 2a + 3b$

3. Penyelesaian Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

Bentuk umum pertidaksamaan linear dengan satu variabel adalah $ax + c_1 \left\{ \begin{matrix} < \\ > \\ \leq \\ \geq \end{matrix} \right\} bx + c_2$

(bentuk $ax + c_1 \neq bx + c_2$ tidak dibahas). Langkah dasr penyelesaiannya ialah menggunakan Sifat atau Hukum ketiga pada I. 1, sehingga semua yang memuat variabel "dikumpulkan" di ruas kiri dan semua konstanta di ruas kanan pertidaksamaan. jika koefisien variabel ruas kiri bukan 1, maka kedua ruas pertidaksamaan dikalikan dengan invers variabelnya. Tanda terakhir tetap seperti sebelumnya jika pengalinya positif dan berbalik jika pengalinya negatif. Misalnya dipilih salah satu bentuk:

$ax + c_1 \quad > bx + c_2$

$\Leftrightarrow ax - bx \quad > c_2 - c_1$ *kedua ruas ditambah $-bx - c_1$*

$\Leftrightarrow (a - b)x \quad > c_2 - c_1$

$\Leftrightarrow \quad x \quad (\boxed{\ldots}) \ \frac{c_2 - c_1}{a - b}$ (asal $a \neq b$)

$\downarrow \qquad \downarrow$

" > " jika $a > b$ " < " jika $a < b$

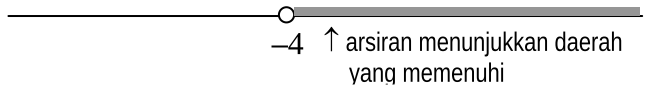
Contoh1: Tentukan himpunan penyelesaian $2x + 7 < -x - 5$

Jawab:

$$\begin{array}{lll} & 2x + 7 & < -x - 5 \\ \Leftrightarrow & 2x + 7 + x & < -x - 5 - x \quad \textit{kedua ruas ditambah x} \\ \Leftrightarrow & 3x + 7 & < -5 \\ \Leftrightarrow & 3x + 7 - 7 & < -5 - 7 \quad \textit{kedua ruas ditambah –7} \\ \Leftrightarrow & 3x & < -12 \\ \Leftrightarrow & x & < -4 \quad \textit{kedua ruas dikalikan } \frac{1}{3} \end{array}$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x < -4\}$

Grafik himpunan penyelesaiannya :



Contoh2: Untuk $m < 0$, tentukan himpunan penyelesaian $mx + 9 < 5mx - 11$,

Jawab:

$$\begin{array}{lll} & mx + 9 & < 5mx - 11 \\ \Leftrightarrow & mx - 5mx & < 11 + 9 \\ \Leftrightarrow & -4mx & < 20 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{-4m} \times (-4mx) & < \frac{1}{-4m} \times 20 \end{array}$$

Karena $m < 0$, maka $\frac{1}{-4m}$ positif, sehingga perkalian kedua ruas dengan $\frac{1}{-4m}$ tidak mengubah tanda pertidaksamaan.

$$\Leftrightarrow \quad x < -\frac{5}{m}$$

Jadi untuk $m < 0$, himpunan penyelesaian $2x + 7 < -x - 5$ adalah $\{x \mid x < -\frac{5}{m}\}$

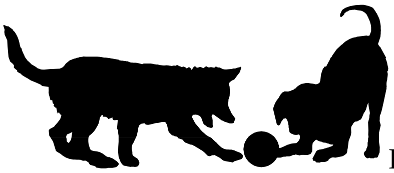
TUGAS 3

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan No. 1- 18 berikut

1. $-3 < 2x - 5 < 7$
2. $2x - 1 < x + 1 \leq 3 - x$
3. $2x - 3 \leq 4x + 5 < x + 47$
4. $1 < x < 3$, $-2 < x < 2$, dan $-3 < x < 4$
5. $-4 < \frac{3p-9}{2} < 3$
6. $-\frac{3}{4} \leq \frac{1-q}{12} \leq -\frac{1}{3}$
7. $2x + 4 < 5$ dan $3 - x \geq 1$
8. $-2x + 3 \geq 0$ dan $4x - 1 \geq 0$
9. $-2x + 3 \geq 0$ atau $4x - 1 \geq 0$
10. $2x + 1 \leq 3x - 1$ dan $x + 3 \leq 2x$
11. $2x + 1 \leq 3x - 1$ atau $x + 3 \leq 2x$
12. $(m - 3)x > 6m - 18$, $m > 3$
13. $ax - 8 < 4ax + 16$, $a < 0$
14. $mx - 8 > 4m - 2x$, $m < -2$
15. $(m - 2)x > 6m - 12$
16. $ax - 8 < 4ax + 16$
17. $mx - 8 > 4m - 2x$
18. $bx + c < ax - d$, untuk $a > b$

Untuk soal-soal berikut ini susunlah lebih dahulu model matematikanya, kemudian jawablah soalnya.

19. Sebuah perusahaan memproduksi suatu jenis hasil produksi seharga Rp 15.000,00 per buah dan biaya tetapnya Rp 1.000.000,00 per bulan. Berapa buah paling sedikit yang harus diproduksi dengan harga jual Rp 19.000,00 agar perusahaan itu per bulan memperoleh keuntungan bersih tidak kurang dari Rp. 2.500.000,00 per bulan?

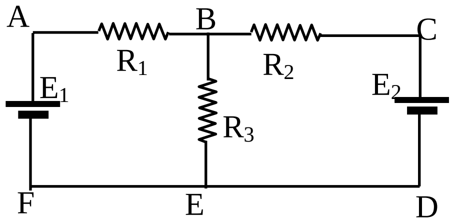
20.  Dua ekor anjing terpisah sejauh 6 m, berada di dua arah berlawanan dari sepotong tulang. Sekali loncat, anjing pertama meloncat 60 cm. Dengan 4 kali meloncat anjing pertama sampai ke tulang itu. Berapa panjang loncatan anjing kedua jika untuk sampai ke tulang itu ia melakukan 8 kali loncatan?

V. SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA PEUBAH

1. Konteks- Pengalaman Belajar-Masalah

(1) *Bu Atun membeli 2 kg gula pasir dan 5 kg beras seharga Rp 25.600,00 di warung bu Tini. Bu Yayuk membeli 3 kg gula pasir dan 4 kg beras di warung yang sama. Ia membayar Rp 27.200,00. Berapa yang harus dibayar bu Reni jika di warung tersebut ia membeli 4 kg gula pasir dan 7 kg beras, dan ketiga ibu membeli barang dengan kualitas sama?*

(2)



Jika R_1, R_2, dan R_3 berturut-turut 3Ω, 6Ω, dan 12Ω dan $E_1 = 60$ Volt, $E_2 = 72$ Volt, berapa besar dan bagaimana arah arus antara AB dan BC masing-masing?

2. Sistem persamaan linear **(SPL)** dua peubah merupakan pokok bahasan yang banyak digunakan dalam matematika di tingkat menengah maupun lanjut, misalnya sistem persamaan linear tiga peubah dan program linear.

3. Sistem persamaan linear disebut juga persamaan linear simultan (simultaneous linear equations). SPL paling sederhana ialah SPL dua persamaan dua variabel, bentuk umumnya:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

4. Penyelesaiannya ialah pasangan bilangan $(\bar{x}, \bar{y})$ sedemikian sehingga jika $\bar{x}$ digantikan pada x dan $\bar{y}$ digantikan pada y terbentuk pernyataan yang secara simultan benar untuk kedua persamaan.

Tiga masalah dalam penyelesaian sistem persamaan linear
1) ada tidaknya penyelesaian
2) metode untuk menentukan
3) deskripsi selengkapnya tentang penyelesaian tersebut.

Manipulasi sistem persamaan berikut tidak mengubah ada tidaknya penyelesaian-penyelesaian sistem persamaan:

- penambahan ruas-ruas persamaan (persamaan-persamaan) ke ruas-ruas persamaan lain dalam sistemnya
- perkalian setiap ruas pada suatu persamaan dengan sebarang bilangan bukan 0 (nol)
- pengubahan urutan persamaan dalam sistemnya.

5. Secara numerik, di antara penyelesaian secara elementer dikenal:
   - metode substitusi
   - metode eliminasi
   - metode ekuasi (penyamanan)

   yang sesungguhnya ketiga-tiganya mengarah pada eliminasi salah satu variabelnya.

Contoh: Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan: $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

Jawab:

a. dengan substansi: $\begin{cases} 3x - y = 3 & (1) \\ x + 2y = 8 & (2) \end{cases}$

(1) $3x – y = 3 \Leftrightarrow y = 3x – 3$ ………. (3)

Substitusikan y pada (3) ke (2) diperoleh: $\rightarrow x + 2 (3x – 3) = 8 \Leftrightarrow 7x = 14 \Leftrightarrow x = 2.$

Jika x = 2 disubstitusikan ke (3) diperoleh y n= 3(2) – 3 = 3

Himpunan penyelesaiannya ialah {(2, 3)}.

b. dengan eliminasi:

$$\begin{array}{l|l|l} 3x - y = 3 & \times 2 & \Leftrightarrow 6x - 2y = 6 \\ x + 2y = 8 & \times 1 & \Leftrightarrow \underline{x + 2y = 8}\,+ \end{array} \qquad \begin{array}{l|l|l} 3x - y = 3 & \times 1 & \Leftrightarrow 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 & \times 3 & \Leftrightarrow \underline{3x + 6y = 24}\,- \end{array}$$

$7x = 14 \Leftrightarrow x = 2$ $\qquad$ $–7y = – 21 \Leftrightarrow y = 3$

Himpunan penyelesiannya ialah {(2, 3)}

c. dengan ekuasi (penyamaan)

$3x – y = 3 \Leftrightarrow y = 3x – 3$	$3x – y = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}y + 1$
$x + 2y = 8 \Leftrightarrow y = –\frac{1}{2}x + 4$	$x + 2y = 8 \Leftrightarrow x = –2y + 8$
Berarti $3x – 3 = –\frac{1}{2}x + 4$	Berarti $\frac{1}{3}y + 1 = – 2y + 8$
$\Leftrightarrow 3\frac{1}{2}x = 7$	$\Leftrightarrow 2\frac{1}{3}y = 7$
$\Leftrightarrow x = 2$	$\Leftrightarrow y = 3$

Himpunan penyelesiannya ialah {(2, 3)}

6. Penyelesaian secara gemetrik (geometri analitik)

Penyelesaian secara geometrik haruslah dilandasi dengan pemahaman menggambar grafik persamaan linear dan gambar yang disajikan haruslah teliti. Penyelesaian cara ini pada dasarnya mencari titik persekutuan antara dua garis yang persamaannya disajikan dalam setiap persamaan dalam sistem tersebut.

Ada tiga kemungkinan:

a. Garis sejajar ⇔ tidak ada titik persekutuan ⇔ Himpunan Penyelesaiannya ϕ

b. Garis berpotongan ⇔ Ada satu titik potong → Himpunan penyelesaiannya beranggota sebuah pasangan bilangan.

c. Garis berimpit ⇔ Setiap titik yang terletak pada garis pertama pasti terletak pada garis kedua dan sebaliknya → Himpunan penyelesaiannya adalah himpunan yang pasangan titiknya memenuhi salah satu persmaan.

Contoh : $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 4x - 2y = 14 \end{cases}$

Grafiknya adalah dua garis berimpit, sehingga himpunan penyelesaian sistem persamaan di atas adalah $\{(x, y) \mid 2x – y = 7, x, y \in R\}$

7. Tinjauan Umum

$a_1x + b_1y = c_1$ (1) $\Leftrightarrow a_1 a_2 x + a_2b_1y = a_2c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$ (2) $\Leftrightarrow a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2$ (–)

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y = a_2c_1 - a_1c_2 \Leftrightarrow y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Analog diperoleh: $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

Jadi: $\mathbf{x = -\frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}}$ $\mathbf{y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}}$

Nilai-nilai x dan y **ada, jika dan hanya jika $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ atau $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.** Tetapi jika nilai $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ atau $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ maka ada tidaknya nilai-nilai x dan y tergantung dari pembilang pecahan itu. Jika $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ atau $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ maka nilai y tidak terdefinisi. Demikian juga $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$ atau $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ nilai x tidak terdefinisi. Penyebab terjadinya hal tersebut secara singkat disebabkan oleh $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

Jika $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ atau $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$, maka terdapat hubungan $-0 \times y = 0$, yang dipenuhi oleh setiap nilai y. Demikian juga jika $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ atau $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, maka ada hubungan $(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$ yang berdasar nilai itu berarti $0 \times x = 0$, sehingga dipenuhi oleh setiap nilai x. Dengan demikian maka setiap pasangan terurut (x, y) yang memenuhi pada persamaan pertama juga memenuhi pada persamaan yang kedua.

Dari uraian di atas hal itu terjadi jika ($\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ dan $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$) atau ($\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ dan $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$). Secara singkat hal itu terjadi karena $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Simpulan dari uraian di atas: Dari sistem persamaan $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

(i) jika $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ maka ada satu penyelesaian,

(ii) jika $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ maka tidak ada penyelesaian

(iii) jika $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, maka ada tak berhingga penyelesaian

Ketiga kemungkinan di atas jika dikaitkan dengan grafiknya adalah bahwa keduanya merupakan garis-garis lurus yang:

(i) berpotongan pada sebuah titik
(ii) sejajar
(iii) berimpit

TUGAS 4

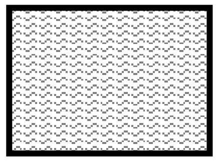
1. Berikan beberapa contoh masalah yang merupakan pengalaman pembelajaran dalam sistem persamaan linear dengan dua peubah.
2. Tentukan himpunan penyelesaian setiap sistem persamaan berikut

   a. $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$ d. $\begin{cases} 2x + 4y - 5 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$ e. $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 6y - 2x + 4 = 0 \end{cases}$

3. Tiga tahun yang akan datang umur seorang ayah 3 kali umur anaknya, sedangkan 8 tahun yang lalu umur ayah tersebut 14 kali umur anaknya tersebut. Berapa tahun lagi umur ayah itu mencapai setengah abad?

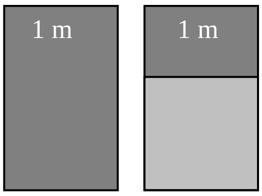
VI. PERSAMAAN KUADRAT

1. Masalah



a. Seutas tali sepanjang 20 m digunakan untuk membatasi bagian taman seperti tampak pada gambar. Jika luas taman itu 24 m^2, bagaimana menemukan ukuran taman itu?

b.



Selembar tripleks berbentuk persegi panjang yang lebarnya 1 m (gambar pertama) dipotong menjadi dua bagian, yang sepotong berbentuk persegi (seperti tampak pada gambar kedua). Ternyata sisi-sisi persegipanjang sisa dan persegipanjang semula dan panjangnya sebanding. Berapa panjang persegi semula?

Kedua masalah di atas ternyata secara matematis menyangkut suatu bentuk persamaan yang nanti dikenal sebagai persamaan kuadrat.

a. Jika panjang tamannya p meter, maka akan diperoleh bentuk $p(10 - p) = 24$

b. Jika panjang tripleks x meter, maka akan diperoleh $x : 1 = 1 : (x - 1) \Leftrightarrow x^2 - x = 1$

2. Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Bentuk umum persamaan kuadrat adalah $ax^2 + bx + c = 0$, dengan $a \neq 0$, dan a, b, c $\in$ R. Setiap pengganti x yang memenuhi persamaan dinamakan penyelesaian atau akar persamaan kuadrat tersebut. Dalam hal ini (untuk SLTP) $x \in R$.

Persamaan kuadrat adalah salah satu persamaan polinomial berderajat n:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

yang mempunyai akar sebanyak n (mungkin real, mungkin (ada yang) tidak real, mungkin ada yang sama, mungkin semua berbeda). Jadi persamaan kuadrat adalah persamaan polinomial berderajat 2 yang memiliki dua buah akar (mungkin real, mungkin tidak real, mungin sama, mungkin berbeda). Di SLTP persamaan kuadrat yang dibahas umumnya adalah:

- persamaan kuadrat rasional, yaitu bila a, b, dan c bilangan-bilangan rasional, dan
- akar-akarnya nyata (yang terjadi jika diskriminan = $D = b^2 - 4ac \geq 0$).

Persamaan kuadrat dapat diselesaikan dengan cara:

- memfaktorkan
  Cara ini efektif digunakan bila diskriminannya merupakan bilangan kuadrat sempurna, lebih-lebih jika koefisien kuadratnya 1.
- melengkapkan kuadrat sempurna, atau
- menggunakan rumus.

a. *Penyelesaian dengan pemfaktoran*

Dasar:

i. Pemfaktoran merupakan proses kebalikan penjabaran perkalian dua polinom berderajat 1 dengan yaitu penggunaan hukum distributif perkalian terhadap penjumlahan

Contoh 1:

Penjabaran	Pemfaktoran	
$(x + 3)(x + 5)$	$x^2 + 8x + 15$	
$= x(x + 5) + 3(x + 5)$	$= x^2 + 5x + 3x + 15$	*$8x = 5x + 3x$ $5x \times 3x = 1x^2 \times 15$*
$= x^2 + 5x + 3x + 3\times 5$	$= x(x + 5) + 3(x + 5)$	*setiap dua suku difaktorkan*
$= x^2 + 8x + 15$	$= (x + 5)(x + 3)$	*difaktorkan dengan faktor sama: $x + 5$*

Perhatikan pada pemfaktoran:
8x diubah bentuknya menjadi $5x + 3x$, yaitu penjumlahan dua suku, yang jika dikalikan hasilnya sama dengan hasil kali dua suku lainnya ($x^2 \times 15$)

Contoh 2:

Penjabaran	Pemfaktoran	
$(2x – 3)(x + 8)$	$2x^2 + 13x – 24$	
$= 2x(x + 8) – 3(x + 8)$	$= 2x^2 + 16x – 3x – 24$	*$13x = 16x – 3x$ $16x \times (–3x) = 2x^2 \times (–24)$*
$= 2x^2 + 16x – 3x – 3\times 8$	$= 2x(x + 8) – 3(x + 8)$	*setiap dua suku difaktorkan*
$= 2x^2 + 13x – 24$	$= (x + 8)(2x – 3)$	*difaktorkan dengan faktor sama: $x + 5$*
	$= (2x – 3)(x + 8)$	

ii. Teorema II (lihat I. 3) $\rightarrow a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ atau $b = 0$

Dari Contoh 1 di atas, misalkan untuk menyelesaikan persamaan $x^2 + 8x + 15 = 0$, maka ruas kiri difaktorkan sehingga diperoleh $(x + 5)(x + 3) = 0$, yang menurut Teorema II ekuivalen dengan $x + 5 = 0$ atau $x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x = – 5$ atau $x = – 3$

sehingga himpunan penyelesaian $x^2 + 8x + 15 = 0$ adalah $\{–5, –3\}$.

Jika pemfaktoran seperti Contoh 1, yaitu yang koefisien kuadratnya 1 sudah lancar, maka untuk bentuk kuadrat pada Contoh 2: $2x^2 + 13x – 24$ pemfaktorannya dapat dilakukan sebagai berikut:

$$2x^2 + 13x – 24$$
$$= \frac{1}{2}(2.2x^2 + 2.13x – 2.24)$$
$$= \frac{1}{2}((2x)^2 + 13(2x) – 48); \qquad \textit{bayangkan ada bentuk } p^2 + 13p – 48$$
$$= \frac{1}{2}((2x + 16)(2x – 3))$$
$$= (x + 8)(2x – 3)$$

Dalam penyelesaian persamaan kuadrat faktor $\frac{1}{2}$ tidak diperlukan.

$$2x^2 + 13x – 24 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2.2x^2 + 2.13x – 2.24 = 0 \qquad \textit{kedua ruas dikalikan 2}$$
$$\Leftrightarrow (2x)^2 + 13(2x) – 48 = 0 \qquad \textit{bayangkan ada persamaan } p^2 + 13p – 48 = 0$$
$$\Leftrightarrow (2x + 16)(2x – 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x + 16 = 0 \text{ atau } 2x – 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = – 8 \text{ atau } x = 1\tfrac{1}{2}$$

Himpunan penyelesaian persamaan adalah $\{–8, 1\tfrac{1}{2}\}$

b. *Penyelesaian dengan melengkapkan kuadrat sempurna*

Dasar: 1) Untuk setiap $p \geq 0$, $x^2 = p \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{p}$ (artinya, $x = \sqrt{p}$ atau $x = –\sqrt{p}$)

2) $(x + k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$

Implikasinya: bentuk $x^2 + 2kx$ dapat diubah menjadi bentuk kaudrat sempurna dengan cara menambah (dan mengurang) dengan k^2, yaitu setengah koefisien suku berderajat satu, dikuadratkan.

Contoh: Tentukan himpunan penyelesaian $x^2 + 6x – 2 = 0$

Jawab: $x^2 + 6x – 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 6x = 2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 6x + (\frac{1}{2}\times 6)^2 = (\frac{1}{2}\times 6)^2 + 2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 6x + 9 = 9 + 2$

$\Leftrightarrow \quad (x + 3)^2 = 11$

$\Leftrightarrow \quad x + 3 = \sqrt{11}$ atau $x + 3 = -\sqrt{11}$

$\Leftrightarrow \quad x = -3 + \sqrt{11}$ atau $x = -3 - \sqrt{11}$

Jadi himpunan pernyelesaian $x^2 + 6x - 2 = 0$ adalah $\{-3 + \sqrt{11}, -3 - \sqrt{11}\}$

- Untuk D bukan kuadrat sempurna cara ini lebih efektif daripada pemfaktoran.
- Cara ini merupakan dasar untuk memperoleh rumus penyelesaian persamaan kuadrat dan banyak digunakan dalam berbagai keperluan, misalnya dalam penentuan nilai ekstrem fungsi kuadrat.

c. *Penyelesaian dengan rumus*

Rumus penyelesaian persamaan dapat ditemukan sendiri oleh siswa jika pelatihan penyelesaian persamaan kuadrat dengan melengkapkan kuadrat sempurna cukup efektif.

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$

$\Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$

$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\quad \left(\text{karena } \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|2a|} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$,

dengan syarat: $b^2 - 4ac \geq 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ atau $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Contoh: Tentukan himpunan penyelesaian $x^2 + 6x – 2 = 0$

Jawab: $x^2 + 6x - 2 = 0$; $a = 1$, $b = 6$, dan $c = -2$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times1\times(-2)}}{2(1)}$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-6\pm\sqrt{44}}{2(1)}$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-6\pm2\sqrt{11}}{2(1)}$

$\Leftrightarrow \quad x = -3 + \sqrt{11}$ atau $x = -3 - \sqrt{11}$

Jadi himpunan pernyelesaian $x^2 + 6x - 2 = 0$ adalah $\{-3 + \sqrt{11}, -3 - \sqrt{11}\}$

TUGAS 5

1. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan-persamaan kuadrat berikut dengan ketiga cara penyelesaian persamaan kuadrat:

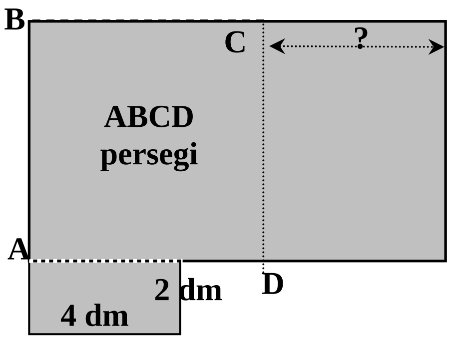
   a. $(x - 5)(x - 6) = 2$ b. $\frac{1}{2}x^2 + 3\frac{1}{3}x + 2 = 0$

2. Salah satu akar persamaan $2x^2 - 3x + m = 0$ adalah -2. Berapa akar lainnya?

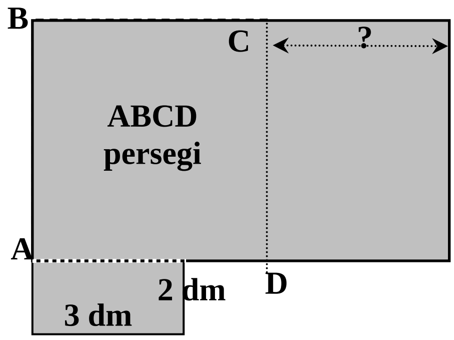
3. Persamaan $x^2 + ax = 10$ dan $2x^2 + ax = 14$ mempunyai sebuah akar sama. Berapa nilai a?

4. Dua bilangan positif jumlahnya 39 dan hasil kalinya 324. Tentukan kedua bilangan tersebut!

5. Papan yang gambarnya pada gambar (i) luasnya sama dengan luas papan yang diperoleh jika AB dan DC pada persegi ABCD diperpanjang masing-masing dengan 2 dm dan BC dan AD diperpanjang masing-masing dengan 4 dm. Berapa panjang bagian bertanda "?" ?



(i)



(ii)

6. Kerjakan seperti No. 5, jika kesamaan luas itu diperoleh karena perpanjangan AB dan DC masing-masing dengan 1 dm dan perpanjangan BC dan AD masing-masing dengan 6 dm

7. Di sebuah kota di daerah dekat beberapa kampus perguruan tinggi, Aman memiliki 60 kamar kost. Selama ini setiap kamar disewakan Rp 180.000,00 per bulan. Dengan kenaikan tarip sewa, permintaan menurun, sehingga beberapa kamar kosong. Dari pengalamannya ia peroleh bawa rata-rata kenaikan Rp 5000,00 per kamar akan terjadi sebuah kamar kosong yang dengan demikian tidak ada sewa kamar. Berapa harga sewa per kamar per bulan jika yang diterimanya seluruhnya sebesar Rp 11.475.000,00?

VII. RELASI DAN FUNGSI

1. RELASI

a. Perhatikan Daftar Harga di sebuah warung berikut:

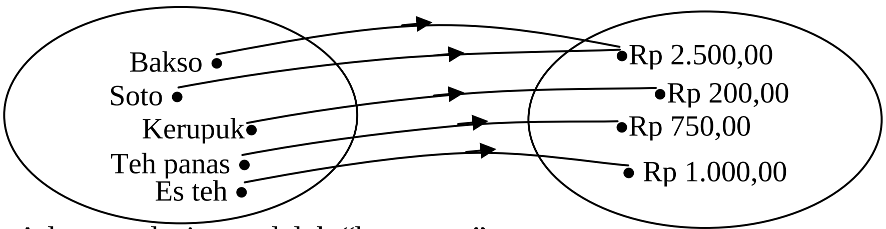
WARUNG SEDERHANA	
Makanan/ Minuman	Harga
Bakso	Rp 2.500,00
Soto	Rp 2.500,00
Kerupuk	Rp 200,00
Teh Panas	Rp 750,00
Es Teh	Rp 1.000,00

b. Di bawah ini adalah nomor telepon penting yang dicatat Heri dari buku telepon

TELEPON DARURAT/PENTING	
Hubungan Interlokal	100
Hubungan Internasional	101
Informasi Waktu	103
Penerangan Lokal	108
Informasi Tagihan	109
Polisi	110
Dinas Kebakaran	113
Gangguan Telepon	117

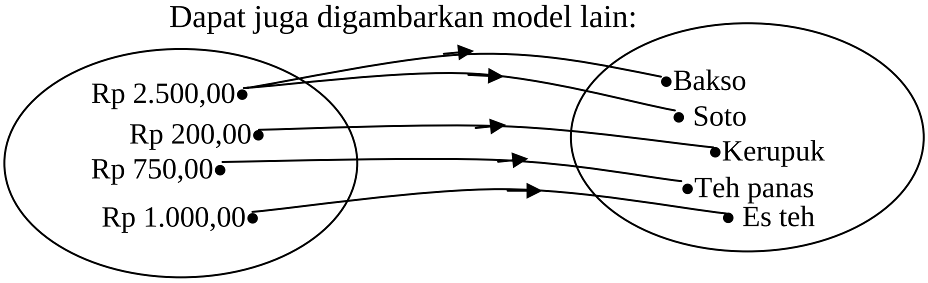
Kedua tabel menginformasikan suatu hubungan atau relasi (a) antara makanan atau minuman dan harganya, dan (b) antara Nama Yang Dapat Dihubungi dan nomor teleponnya.

b. Relasi pada a) di atas juga dapat digambarkan sebagai berikut:



Adapun relasinya adalah "harganya"

Dapat juga digambarkan model lain:



Di sini relasinya: “yang harganya”
Kedua relasi terakhir dikatakan “saling invers”, yang satu invers dari relasi lainnya.

Contoh lain yang memuat relasi misalnya daftar pegawai dan gajinya, daftar siswa dengan nilai ulangannya dan masih banyak lagi. Dalam amtematika misalnya dapat dicari relasi antara bilangan-bilangan asli dengan pembagi (bulat)-nya atau antara bilangan dan kelipatannya, dan masih banyak lagi.

Pada diagram di atas relasi menggambarkan adanya dua himpunan tak kosong dengan suatu ungkapan yang menyatakan hubungan atau relasi antara anggota himpunen pertama ke himpunan kedua. Himpunan pertama dinamakan **domain (**atau **daerah asal,** dan himpunan kedua disebut **kodomain** atau **daerah kawan.** Himpunan semua anggota daerah kawan yang berelasi dengan anggota domain dinamakan **range** atau **daerah hasil** atau **daerah jelajah** relasi tersebut.

c. Relasi dapat dinyatakan dengan tabel, diagram (diagram seperti di atas atau dalam diagram Kartesius) atau pasangan berurutan dari anggota-angota domain dan rangenya.

2. FUNGSI

a. Pengalaman Belajar/Masalah

Masalah 1

Lima buah gelas yang sama ukurannya, tingginya masing-masing 12 cm disusun seperti pada gambar di samping. Gelas kedua dan seterusnya hanya separo yang dapat masuk ke gelas di bawahnya. Jika diukur tinggi keseluruhannya diperoleh:

Banyak gelas	1	2	3	4	5
Tinggi tumpukan	12 cm	18 cm	24 cm	30 cm	36 cm

Jika ada 8 gelas, berapa tinggi tumpukannya?

Jika tinggi sebuah gelas adalah t dan ada 10 gelas, berapa tinggi tumpukannya?

Di sini: tinggi tumpukan “**merupakan fungsi”** banyak gelas. Perubahan banyaknya gelas terkait atau berelasi langsung dengan perubahan tinggi tumpukan.

Masalah 2

Selembar karton berbentuk persegi panjang berukuran 24 cm × 16 cm pojoknya untuk membuat sebuah kotak terbuka, sehingga pemotongannya harus berupa persegi. Apa yang diketahui tentang volum balok terbuka yang terjadi?

Perhatikan tabel berikut:

Panjang potongan = tingi balok	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5	...	x cm
Panjang balok	22 cm	20 cm	18 cm	16 cm	14 cm		(24–2x)cm
lebar balok	14 cm	18 cm	...	...	...	...	(16–2x) cm
volum balok	...	...	...	..	..	..	..

Tampak bahwa baik panjang, lebar, maupun volum berbeda-beda sesuai dengan ukuran persegi pemotongan di pojoknya. Dikatakan bahwa panjang, lebar dan volum balok yang terjadi merupakan fungsi panjang persegi pemotongannya.

Persoalan yang dapat muncul, misalnya berapa ukuran pemotongannya agar:

- volumnya 540 cm^3
- volumnya maksimum?

Masalah 3

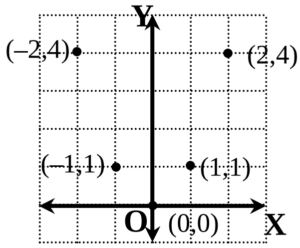
Setiap kali memasang kaca misalnya kaca jendela, kacanya tidak dipasang sangat rapat , mengapa?

Apa yang telah dipelajari di Fisika atau IPA dalam hal ini?

b. Pengertian

Relasi khusus yang mengawankan setiap anggota himpunan D dengan tepat satu anggota K dinamakan **fungsi** dari D ke K.

Jika relasi yang menyatakan fungsi itu dinamakan f, maka fungsi dari D ke K dilambangkan dengan f: D $\rightarrow$ K.



Grafik di samping menyajikan sebuah fungsi, namakanlah fungsinya dalah f. Misalnya domainnya D_f dan kodomainnya K dan rangenya R_f maka pada fungsi itu:

- D_f = D = {–2, –1, 0, 1, 2}, R_f = {0, 1, 4}. Fungsi f yang demikian dinyatakan sebagai fungsi f: D$\rightarrow$K yang didefinisikan dengan f: x $\rightarrow$ f(x) = x^2.

- 4 disebut **bayangan (peta)** fi di K dari 2 dan juga dari –2. Karena itu fungsi disebut juga **pemetaan**. Karena 4 diperoleh berdasar aturan yang mendefinisikan f, maka dalam hal ini dituliskan f(2) = 4 dan juga f(–2) = 4. Pernyataan tersebut sering diungkapkan sebagaiilai fungsi f untuk (pada) x = 2 dan pada x = –2 adalah 4"

- – 2 dan 2 diseburt **prapeta** dari f, dan dilambangkan $f^{-1}(4)$ = 2 atau – 2.

- Nilai f bernilai 0 untuk x = 0. Nilai yang menyebabkan f bernilai 0 disebut **pembuat nol** atau **harga nol** fungsi. Misalnya persamaan fungsinya f(x) = $x^2 - 2x$, maka ada dua pembuat nol yaitu 0 dan 2. Pembuat nol tidak lain adalah akar-akar persamaan f(x) = 0.

- Grafik Kartesius suatu relasi merupakan grafik fungsi hanya apabila setiap garis sejajar sumbu-Y yang memotong grafik hanya memotong di tepat satu titik saja. dengan kata lain, setiap nilai x berkorespondensi hanya dengan satu nilai y.

c. Representasi (penyajian, cara menyatakan) Fungsi

Ada beberapa cara penyajian fungsi, di antaranya:

1) Dalam diagram panah.

2) f: D $\rightarrow$ K. Ini menyatakan bahwa fungsi f mempunyai domain D dan kodomain K. Untuk selanjutnya jika tidak ditentukan lain, domain dan kodomain fungsi adalah himpunan "terbesar" semua bilangan real yang mungkin memenuhi terjadinya fungsi.

   Misalnya f(x) = $\sqrt{x}$, hanya terdefinisi bila $x \geq 0$ dan $x \in$ R.

   Lambang fungsi tidak harus f. Contoh:

   - $l_t = l_0(1 + \lambda t)$ atau $l(t) = l_0(1 + \lambda t)$ (lihat "Masalah 3")
   - $u_n = n^2 + 2n$ atau $u(n) = n^2 + 2n$

3) Dalam bentuk **aturan-aturan** atau dengan **kata-kata**, misalnya:

   a) tambah 1 dan (kemudian) kuadratkan.

   b) kuadratkan dan (kemudian) tambah 1

4) Aturan seperti pada 2. a) dan b) dapat dinyatakan dalam bentuk aljabar:
   a) $(x + 1)^2$ atau $f(x) = (x + 1)^2 \rightarrow$ yang terakhir ini disebut persamaan fungsi
   b) $x^2 + 1$ atau $f(x) = x^2 + 1 \rightarrow$ yang terakhir ini disebut persamaan fungsi

5) Dalam bentuk persamaan yang
   eksplisit, misalnya $y = 2x + 3$ dengan $y = f(x)$. Dalam hal ini x disebut peubah bebas, y peubah terikat.
   implisit, misalnya $2x – y + 3 = 0$

6) Penyajian parametrik:
   Jika sebuah fungsi $f: x \rightarrow y = f(x)$ atau bentuk relasi tertentu disajikan dalam dua fungsi secara terpisah dalam bentuk $x = f_1(t)$ dan $y = f_2(t)$, t dinamakan sebuah **parameter.**
   Contoh: $\begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$ merupakan bentuk parameter dari $y = \frac{1}{4}x$, yang diperoleh dengan mengeliminasi t dari kedua persamaan.

7) Jika fungsi f didefinisikan dengan mengekspresikan cara terjadinya (atau aturan antar elemennya) agar dari setiap x diperoleh f(x). Abrahamson menganjurkan menuliskannya dengan $f: x \mapsto f(x)$, untuk membedakannya dari $f: D \rightarrow K$.
   Dari uraian di atas maka:
   f dapat dipandang sebagai fungsi dalam bentuk aturannya, dan
   f dipandang sebagai fungsi atau pemetaan dari himpunan satu ke lainnya

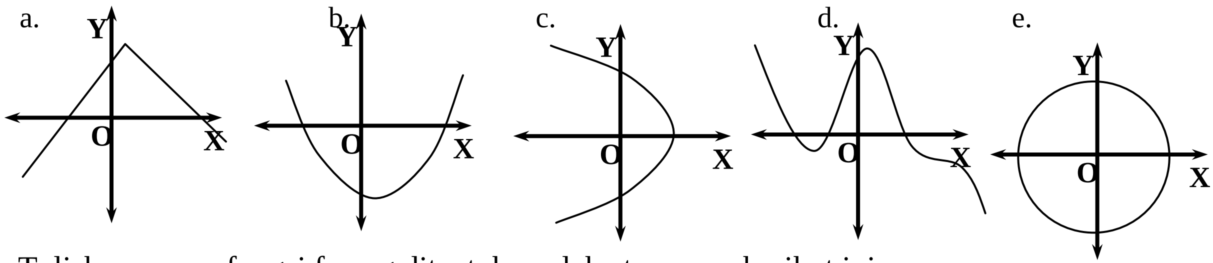
8) Penyajian pasangan terurut
   Cara ini efektif hanya jika himpunannya terbatas dan anggotanya "diskrit"
9) Fungsi kuadrat yang persamaannya $f(x) = x^2$ dengan domain himpunan semua bilangan cacah kurang dari 11 mungkin lebih mudah dihami dengan menyajikannya dalam bentuk tabel:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

TUGAS 5

1. Fungsi f dari D ke R (himpunan bilangan real) ditentukan oleh rumus $f(x) = 4 – x^2$.
   a. Susunlah tabel nilai fungsi f jika $D = \{x \mid –2 \le x \le 2, x \in B\}$, B himpunan bilangan bulat.
   b. Nyatakan f sebagai himpunan pasangan terurut.

2. Nyatakan apakah grafik-grafik berikut adalah grafik fungsi. Berilah alasannya:



3. Tuliskan rumus fungsi f yang ditentukan oleh aturannya berikut ini:
   a. tambah 3, kemudian kuadratkan
   b. kuadratkan, kemudian kurangi dengan dua kalinya
   c. kuadratkan, tambah 3, kemudian kalikan dengan 4
   d. kurang dengan 3, kuadratkan, kemudian tarik akar kuadratnya

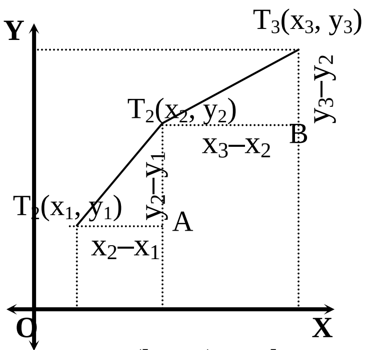
4. Susunlah tabel yang menunjukkan pasangan koordinat titik yang memenuhi f(x) = 5 untuk $–3 \le x \le 6$, x bilangan bulat. Gambarlah pada diagram Kartesius. Apa yang Saudara peroleh? Jika $x \in R$, grafik apa yang Saudara peroleh?

5. Perhatikan kembali “Masalah 1”. Jika tinggi setiap gelas t cm dan banyak gelas g, nyatakan sebuah fungsi yang menyatakn hubungan antara tinggi tumpukan dan banyak gelas yang ditumpuk.
6. Perhatikan kembali “Masalah 2”. Nyatakan persamaan fungsi yang mendefinisikan volum kotak terbuka oleh perubahan ukuran potongan karton di pojok lembar karton.

3. Fungsi Linear dan Garis Lurus

a. *Grafik Fungsi Linear*

Persamaan fungsi linear f: $x \to f(x) = mx + n$, $m \neq 0$ adalah $y = mx + n$. Grafik fungsi linear adalah garis lurus.



Bukti:

Misalkan $T(x_1, y_1)$ pada grafik, maka $y_1 = mx_1 + n_1$ (1)

$T(x_2, y_2)$ pada grafik, maka $y_2 = mx_2 + n_2$ (2)

$T(x_3, y_3)$ pada grafik, maka $y_1 = mx_3 + n_3$ (3)

Dari (2) – (1) diperoleh: $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$ atau $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Dari (3) – (2) diperoleh: $y_3 - y_2 = m(x_3 - x_2)$ atau $m = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$

Berarti tan $\angle T_2T_1A = \angle T_3T_2B$. Akibatnya, T_1, T_2, dan T_3 segaris (lurus). Hal serupa dapat ditunjukkan untuk setiap tiga titik T_n yang terletak pada grafik, sehingga grafiknya adalah garis lurus.

Dalam persamaan $y = mx + n$, nilai tertentu untuk garis tersebut dinamakan **gradien** garis tersebut. Dari jabaran di atas tampak bahwa gradien tersebut merupakan nilai perbandingan antara selisih komponen y dan selisih komponen x dari dua sebarang dua titik pada garis tersebut. Nilai perbandingan itu dalam trigonometri dikenal sebagai **tangens** sudut yang dibentuk oleh garis tersebut ke arah belakang terhadap sumbu-X arah positif, dengan arah putar berlawanan dengan arah putar jarum jam. Nilai tersebut positif untuk sudut lancip, negatif untuk sudut tumpul dan tak terdefinisi jika sudutnya 90^o.

b. *Persamaan Garis Lurus*

Telah dikemukakan di atas bahwa grafik fungsi konstan $y = f(x)$ dengan $f(x) = c$ adalah garis lurus yang sejajar sumbu X untuk $c \neq 0$ dan berimpit dengan sumbu X jika $c = 0$. Dapat dibuktikan bahwa untuk setiap garis yang tidak sejajar atau berimpit dengan sumbu Y persamaannya adalah $y = mx + n$.

1) Persamaan umum sebuah garis lurus (yang tidak sejajar atau berimpit dengan sumbu Y) adalah $\mathbf{y = mx + n}$. (i)
m adalah gradien garis yang menunjukkan kecondongan garis. Garisnya condong ke kanan jika dan hanya jika $m > 0$ dan condong ke kiri jika dan hanya jika $m < 0$.

2) Jika garis $y = mx + n$ melalui titik (x_1, y_1), maka dipenuhi
$y_1 = mx_1 + n$
diperoleh: $\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$ ii). persamaan garis melalui (x_1, y_1) dengan gradien m.

3) Jika garis (ii) juga melalui titik (x_2, y_2) maka $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \Leftrightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Jika nilai m tersebut disubstitusikan ke persamaan (ii) maka diperoleh:

$$\mathbf{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Leftrightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$ yang merupakan persamaan garis melalui dua titik (x_2, y_2) dan (x_1, y_1).

4) Persamaan garis juga dapat dinyatakan dalam bentuk implisit: **$Ax + By + C = 0$** yang ekuivalen dengan $y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{A}$ dengan **gradien $m = -\frac{A}{B}$**.

c. *Hubungan dua garis*

Dengan mengacu pada yang telah dibahas dalam Sistem persamaan Linear dengan Dua Variabel di peroleh hubungan sebagai berikut:

untuk setiap pasang garis $g_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$g_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$, maka:

1) $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ $\Leftrightarrow$ g_1 dan g_2 berpotongan pada sebuah titik.

2) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ $\Rightarrow g_1 \,//\, g_2 \Leftrightarrow$ tidak ada titik persekutuan

3) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ $\Rightarrow g_1 = g_2$ atau keduanya berimpit $\Leftrightarrow$ ada tak berhingga titik persekutuan

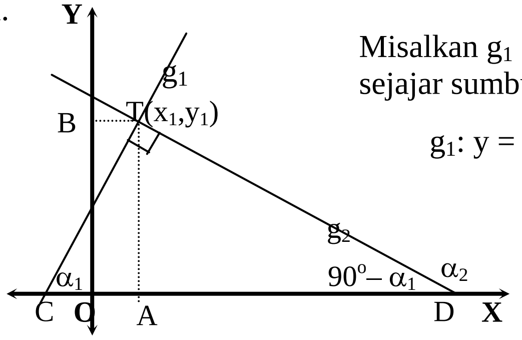
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Leftrightarrow -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

Dari hubungan tersebut diperoleh:

i. $m_1 = m_2 \Rightarrow g_1//g_2$ atau $g_1 = g_2$.

atau: $g_1//g_2 \Rightarrow m_1 = m_2$ dan $g_1 = g_2 \Rightarrow m_1 = m_2$

ii.



Misalkan g_1 dan g_2 adalah dua garis yang masing-masing tidak sejajar sumbu koordinat dan keduanya saling tegak lurus.

g_1: $y = m_1x + n_1$ memotong sumbu X di $C(-\frac{n_1}{m_1},0)$ dan

g_2 memotong sumbu X di titik $D(-\frac{n_2}{m_2},0)$.

Misalkan kedua garis berpotongan di $T(x_1, y_1)$, maka diperoleh $y_1 = m_1x_1 + n_1$ dan $y_1 = m_1x_1+n_1$.

ΔTAC dan ΔDAT sebangun, sehingga $AC : TA = TA : AD$.

Diperoleh: $(x_1 - (-\frac{n_1}{m_1})) : y_1 = y_1 : (-\frac{n_2}{m_2} - x_1) \Leftrightarrow y_1^2 = -\frac{(m_1x_1+n_1)(m_2x_1+n_2)}{m_1m_2}$

$$= -\frac{y_1 \times y_1}{m_1m_2}$$

Berarti: $m_1m_2 = -1$

Jadi untuk setiap **g_1 dan g_2 tidak sejajar atau berimpit sumbu koordinat**:

$$\mathbf{g_1 \perp g_2 \Leftrightarrow m_1m_2 = -1}$$

TUGAS 6

1. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik potong garis $2x - y = 3$ dan $5x + 2y = 3$ dan melalui titik (4, 1)
2. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik potong garis $2x + y = 3$ dan $5x - 2y = 4$ dan (1) sejajar garis $3x + 5y = 1$, (2) tegaklurus garis $3x - 5y = 2$
3. Diketahui: g_1: $2x + y - 4 = 0$ dan g_2: $5x - 2y - 5 = 0$.

a. Tulis persamaan $g_1 + pg_2 = 0$. Berapa gradien garis tersebut? Apa syaratnya?

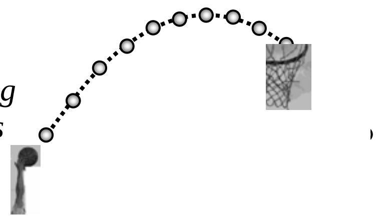
b. Tuliskan garis yang melalui titik potong g_1 dan g_2 dan sejajar dengan garis $7x - y + 5 = 0$

4. Buktikanlah bahwa persamaan garis melalui A(a, 0) dan B(0, b) adalah $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

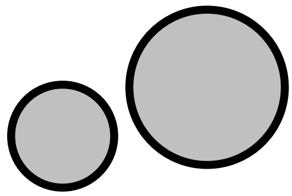
4. FUNGSI KUADRAT

Pengalaman Belajar/Masalah

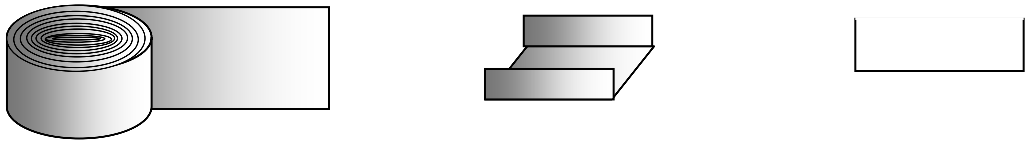
a. Pada permainan bola basket pemain berusaha memasukkan bola ke basket atau keranjang berjaring yang tersedia. Tentu saja pelemparannya tidak lurus ke arah sasaran. Biasanya bola dilemparkan ke atas melampaui tinggi tempat jaringnya, menuju ke jaring. Lintasan bolanya berbentuk (bagian dari) parabola.



b. Kedua benda berbentuk lingkaran. Yang kedua jari-jarinya 1,5 kali yang pertama. Jika bahan pertama memerlukan bahan seberat 4 kg dan bahan kedua ketebalannya sama dengan yang pertama, berapa berat bahan yang diperlukan untuk membuat barang yang kedua? Berapa pula jika benda serupa dibuat yang jari-jarinya 2 kali, tiga kali, 4 kali … k kali yang pertama?



c. Bagaimana menentukan ukuran lipatan talang terbuka dari gulungn seng yang tersedia agar talangnya dapat mengalirkan air sebanyak mungkin?



Ketiga masalah menyangkut penggunaan fungsi, khususnya **fungsi kuadrat**.

Fungsi kuadrat dirumuskan dengan $f(x) = a_1x^2 + a_1x + a_0$ atau lebih umum ditulis $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Untuk selanjutnya (jika tidak disebutkan lain) fungsi kuadrat f yang dibahas disini adalah fungsi $f : R \to R$ yang didefinisikan oleh $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan $a \neq 0$. Jika grafiknya digambar terjadi kurva berbentuk parabol yang persamaannya $y = ax^2 + bx + c$. Dalam beberapa hal dan dalam persoalan-persoalan tertentu, daerah asal maupun daerah kawannya mungkin himpunan bagian R, meskipun rumus umum pendefinisian fungsinya sama seperti disebutkan di atas.

a. Pembuat Nol Fungsi f

Pembuat nol fungsi $f : x \to f(x) = ax^2 + bx + c$ adalah nilai-nilai pengganti x sedemikian sehingga $f(x) = ax^2 + bx + c$ bernilai 0, sehingga sama dengan akar-akar persamaan $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, yaitu $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Ada tidaknya pembuat nol sama dengan ada tidaknya akar-akar persamaan kuadrat, tergantung nilai diskriminannya.

Pembuat nol f merupakan absis titik potong grafik fungsi f dengan sumbu X. Berarti :

$D > 0 \Leftrightarrow$ ada dua pembuat nol berbeda

$\Leftrightarrow$ grafik fungsi kuadrat memotong sumbu X pada dua titik berbeda

D = 0 ⇔ ada dua pembuat nol yang sama atau sebuah pembuat nol
⇔ grafik fungsi kuadrat menyinggung sumbu X
D < 0 ⇔ tidak ada dua pembuat nol
⇔ grafik fungsi kuadrat tidak mempunyai titik persekutuan dengan sumbu X
Titik potong grafik fungsi tersebut dengan sumbu Y adalah titik (0, c).

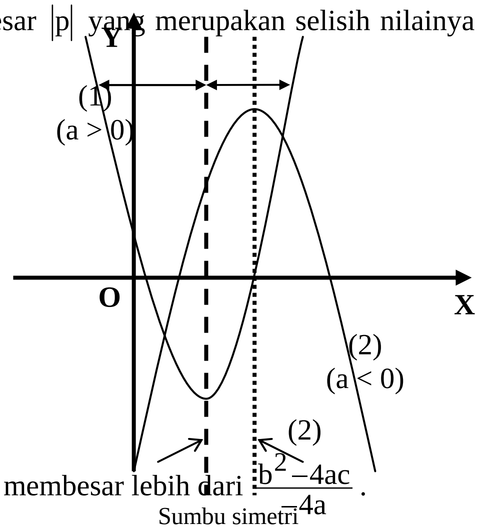
b. Sumbu simetri dan titik balik

Fungsi $f : x \to f(x) = ax^2 + bx + c$ dapat diubah dalam bentuk yang ekuivalen sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(a^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = a.\frac{c}{a} - a.\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2-4ac}{-4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{D}{-4a} \end{aligned}$$

Jika $x = -\frac{b}{2a} + p$ maka $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a \times 0 + \frac{b^2-4ac}{-4a}$.

Jika $x = -\frac{b}{2a} + p$ maka nilai fungsinya adalah $ap^2 = \frac{b^2-4ac}{-4a}$. Demikian juga jika $x = -\frac{b}{2a} - p$ nilai fungsinya juga $ap^2 = \frac{b^2-4ac}{-4a}$. Ini berarti untuk setiap nilai x + p dan x – p, nilai fungsinya sama. Dalam hal grafik fungsi, ordinat titik pada grafik sejauh p di sebelah kiri dan p di sebelah kanan garis yang persamaannya $x = -\frac{b}{2a}$ sama besar. Dikatakan bahwa **garis dengan persamaan** $x = -\frac{b}{2a}$ adalah **sumbu simetri** grafik fungsi itu. Semakin besar $|p|$ yang merupakan selisih nilainya dengan nilai pada $x = -\frac{b}{2a}$, maka p^2 semakin besar.



Jika a > 0, maka $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ bernilai positif atau 0.

Jika $\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$ atau $x = -\frac{b}{2a}$ maka $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ berniali 0, sehingga nilai fungsinya = $\frac{b^2-4ac}{-4a}$.

Nilai ini merupakan nilai terkecil f (x).
Jika ditinjau grafiknya, ditelusuri dari kiri ke kanan, nilainya mengecil, sampai terkecil $\frac{b^2-4ac}{-4a}$ kemudian balik membesar lebih dari $\frac{b^2-4ac}{-4a}$.

Titik itu dinamakan **titik balik minimum.** Nilai fungsinya dinamakan **nilai balik minimum.**

Jika a < 0, maka $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ bernilai negatif atau 0 (nol).

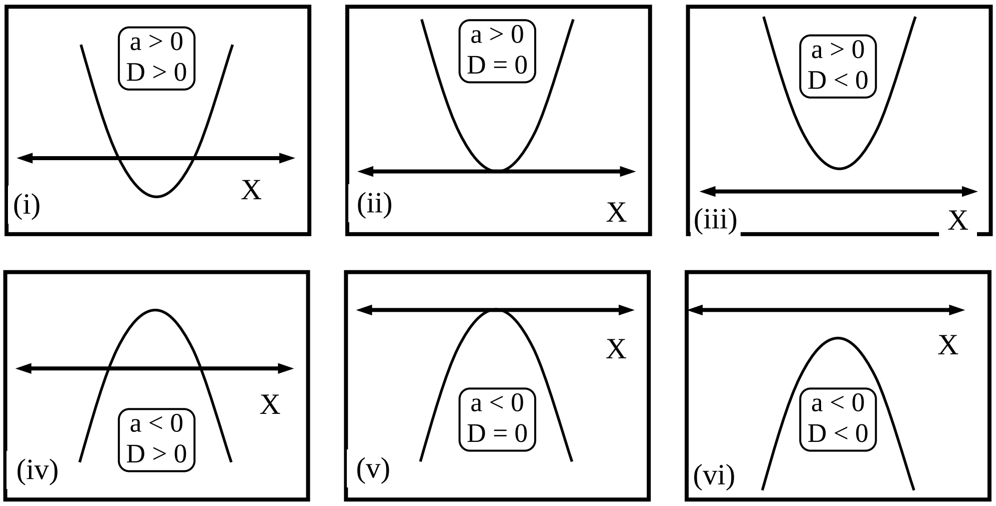
Jika $\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$ atau $x = -\frac{b}{2a}$ maka $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ bernilai 0, sehingga nilai fungsinya $\frac{b^2-4ac}{-4a}$. Dengan demikian maka nilai ini merupakan nilai f(x) terbesar. Jika ditinjau grafiknya, disebelah kiri dan kanan titik terjadi maksimum nilainya kurang dari $\frac{b^2-4ac}{-4a}$. Jika grafik fungsi f : $x \to f(x) = ax^2 + bx + c$ berupa parabol yang berpuncak di titik $P\left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2-4ac}{-4a}\right)$ atau $P\left(-\frac{b}{2a}, \frac{D}{-4a}\right)$.

Seperti penalaran pada butir 1, titik terjadinya pembalikan nilai tersebut dinamakan **titik balik maksimum.** Nilai fungsinya dinamakan nilai balik maksimum.
Nilai balik maksimum atau minimum itu dikenal sebagai **nilai ekstrem** f(x). Seperti disebutkan di atas grafik fungsi kuadrat itu berbentuk parabol. Titik baliknya dinamakan puncak parabol dan sumbu fungsi itu merupakan sumbu simetri parabol.
Secara sederhana,

1) Jika $f(x) = ax^2 + bx + c$ dapat diubah menjadi $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ maka grafik f(x) memotong sumbu X di $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$ dan persamaan sumbu simetri $x = \frac{x_1+x_2}{2}$
2) Jika $f(x) = ax^2 + bx + c$ diubah menjadi $f(x) = a(x - h)^2 + k$, nilai fungsi f mencapai nilai ekstrem = k dan terjadi pada x = h;
   $\Leftrightarrow$ koordinat titik balik grafik f(x) adalah (h, k).
   Nilai ekstrem itu merupakan nilai balik maksimum bila dan hanya bila a < 0, atau nilai balik minimum bila dan hanya bila a > 0.
   $\Leftrightarrow$ puncak parabol merupakan titik tertinggi bila dan hanya bila a < 0, atau merupakan titik terendah bila dan hanya bila a > 0.

c. Kedudukan Grafik Fungsi Kuadrat Terhadap Sumbu X

- Dari uraian di atas, sketsa grafik fungsi kuadrat dalam hal kedudukannya terhadap sumbu X dan titik-titik baliknya adalah sebagai berikut (lihat gambar di bawah ini):

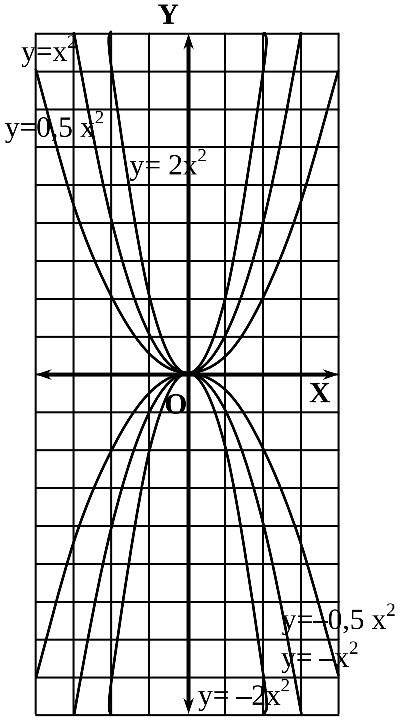


- Pada gambar (i) dan (iv) grafik memotong sumbu X di dua titik berbeda.
- Pada gambar (ii) dan (v) grafik memotong hanya di satu titik pada sumbu X

  Dikatakan bahwa grafik tersebut menyinggung sumbu X di puncak grafik
- Pada gambar (iii) semua titik pada grafik berada di sumbu-X atau setiap titik berordinat positif. Ini sama artinya dengan nilai fungsinya positif untuk setiap nilai $x \in R$. Dalam hal demikian dikatakan f(x) **definit positif.**
- Pada gambar (vi). Semua titik pada grafik berada dibawah sumbu-X atau setiap titiknya berordinat negatif. Ini sama artinya dengan nilai fungsinya negatif untuk setiap nilai $x \in R$. Dalam hal demikian dikatakan f(x) **definit negatif.**

Setiap kejadian di atas terjadi hanya pada nilai-nilai a dan D sesuai yang tampak pada gambar (iii) dan (vi) saja. Jadi pada $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ dan $D = b^2 - 4ac$:

f(x) definit positif ⇔ a > 0 dan D < 0   **f(x) definit negatif ⇔ a < 0 dan D < 0**



d. Hubungan Antara Nilai a dan Grafik Fungsi Kuadrat f: $x \to f(x) = ax^2 + bx + c$.

Perhatikan grafik fungsi f: $x \to ax^2$ atau yang persamaannya $y = ax^2$ dengan beberapa variasi nilai a. Semua grafik sumbu simetrinya sama yaitu sumbu Y dan puncak yang sama, yaitu titik O (0, 0).

Jika a > 0 maka parabol terbuka ke atas atau puncaknya merupakan titik balik terendah. Jika a < 0 maka parabol terbuka ke bawah dan puncaknya merupakan titik balik maksimum (tertinggi).

Untuk nilai $|a|$ yang makin besar maka "cabang" parabol makin mendekati sumbu simetri (makin "lurus").

e. Translasi

Translasi G = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, dalam hal ini translasi bidang, adalah transformasi yang memetakan setiap titik T (x, y) ke T′ (x′, y′) sedemikian hingga x′ = x + a dan y′ = y + b,

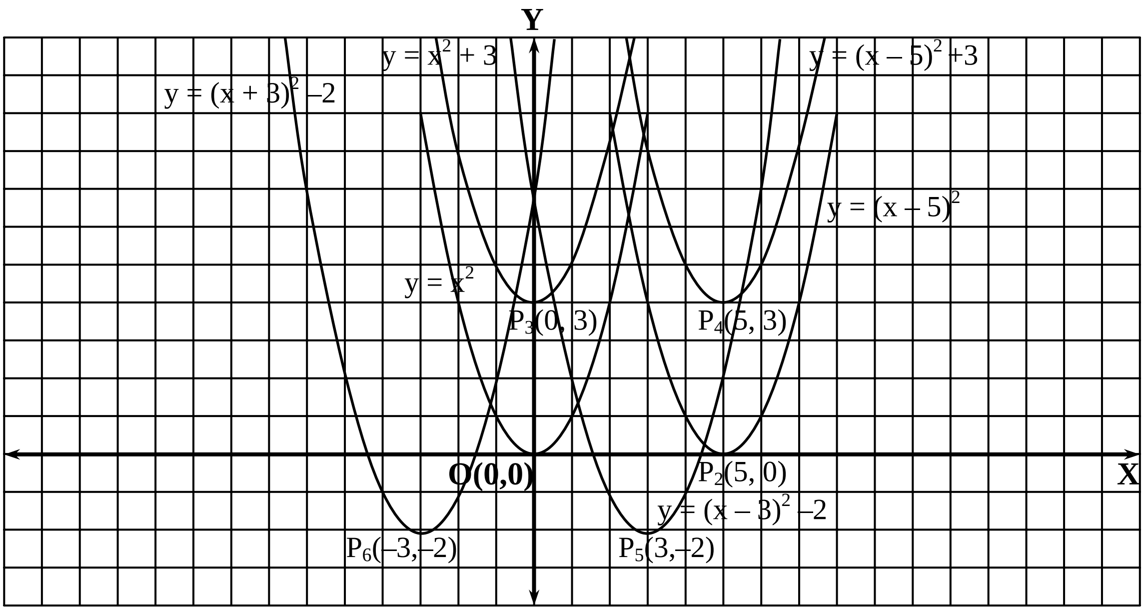
atau: G = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$: $(x, y) \to ((x + a), (y + b))$ sehingga x = x′ – a dan y = y′ – b.

Dengan beberapa translasi bidang, dari parabol yang persamaannya (i) $y = x^2$ dan translasi G = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, maka untuk berbagai variasi nilai a dan b diperoleh antara lain:

Dengan $G_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ didapat $(y – 0) = (x – 5)^2 \Leftrightarrow y = (x – 5)^2$. Puncak parabol P_2 (5, 0).

Dengan $G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ didapat $(y – 3) = (x – 0)^2 \Leftrightarrow y = x^2 + 3$. Puncak parabol P_3 (0, 3).

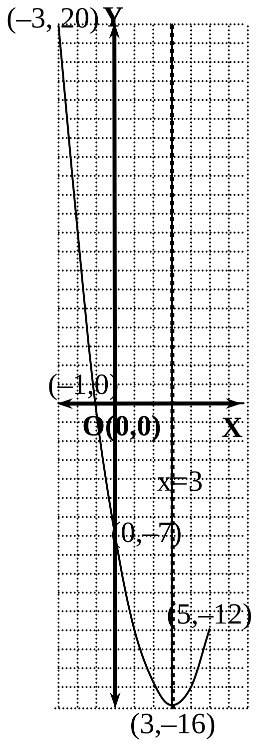
Dengan $G_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ didapat $(y – 3) = (x – 5)^2 \Leftrightarrow y = (x – 5)^2 + 3$. Puncak parabol P_4(5, 3).



Dengan $G_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ didapat $(y + 2) = (x – 3)^2 \Leftrightarrow y = (x – 3)^2 – 2$. Puncak parabol P_5 (3, –2).

Dengan $G_6 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ didapat $(y + 2) = (x + 3)^2 \Leftrightarrow y = (x + 3)^2 – 2$. Puncak parabol P_6 (–3, –2).

f. Fungsi Kuadrat dan Grafiknya Pada Interval Tertutup



Jika domainnya bukan himpunan semua bilangan real, tetapi suatu selang, maka maksimum dan minimum fungsi dapat terjadi (1) pada nilai baliknya atau (2) pada batas intervalnya (disebut **ekstrem batas**).

Contoh1:

Fungsi f: $\{x \mid –3 \leq x \leq 5, x \in R\} \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2 – 6x – 7$. Akan ditentukan daerah hasilnya dengan menggambar sketsa grafiknya.

Pembuat nol diperoleh $f(x) = x^2 – 6x – 7 = 0$. Ada dua pembuat nol yaitu –1 dan 7. Karena domainnya terbatas pada $\{x \mid –3 \leq x \leq 5, x \in R\}$ maka titik potong grafiknya terhadap sumbu X hanya di titik (–1, 0) saja.

Nilai balik minimum terjadi pada $x = \frac{-(-6)}{2}$ atau x = 3. Nilai balik minimumnya = f(3) = 9 –1 18 – 7 = –16.

Nilai fungsi pada batas interval:

f(–3) = 9 + 18 – 7 = 20.

f(5) = 25 – 30 – 7 = –12

Daerah hasilnya adalah $\{y \mid –16 \leq y \leq 20, y \in R\}$

Dapat dipahami yang dikemukakan pada awal pasal ini bahwa:

Jika domainnya bukan himpunan semua bilangan real, tetapi suatu selang, maka maksimum dan minimum fungsi pada interval tertutup dapat terjadi (1) pada nilai baliknya atau (2) pada batas intervalnya.

g. Penggunaan Fungsi Kaudrat

Penggunaan fungsi kuadrat dapat dikaitkan antara lain dengan (1) nilai-nilai fungsi (2) nilai ekstrem, dan (3) sifat-sifat fungsi kuadrat kaitannya dengan diskriminan. Beberapa di antaranya telah disampaikan pada “Pngalaman Belajar” di atas.

Contoh 1:

Sebuah peluru ditembakkan ke atas. Ketinggiannya yaitu h meter pada detik ke-t tertentu oleh rumus $h(t) = 150t – 5t^2$. Berapa detik ketinggian peluru itu sekurang-kurangnya 125 meter?

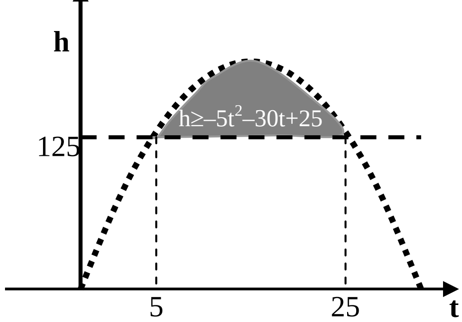
Jawab: $h(t) \geq 125$

$150t – 5t \geq 125$

$–5t^2 + 150t – 125 \geq 0$

$–t^2 + 30t – 25 \geq 0$

$(–t + 5)(–t + 25) \geq 0$



Dari grafik tampak bahwa peluru berketinggian sekurang-kurangnya 125 meter selama 20 detik yaitu dari ke-5 sampai dengan ke-25.

Contoh 2.

Dua bilangan jumlahnya p. Tentukan hasil kali maksimumnya.

Jawab:

Misalkan bilangan I = x, maka bilangan II = p – x

Misalkan hasil kalinya h, maka nilai h tergantung nilai x. Dapat ditulis:

$$h(x) = x(p - x) \Leftrightarrow h(x) = -x^2 + px$$

h(x) mencapai nilai maksimum (karena koefisien x^2 negatif) jika $x = -\frac{p}{2(-1)} = \frac{1}{2}p$.

Jadi h maksimum = $h\left(\frac{1}{2}p\right) = -\left(\frac{1}{2}p\right)^2 + p\left(\frac{1}{2}p\right) = \frac{1}{4}p^2$

Catatan: Nilai maksimum juga diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$h(x) = -x^2 + px$

$\quad = -(x^2 - px)$

$\quad = -(x^2 - px + \frac{1}{4}p^2) + \frac{1}{4}p^2$. Jadi h maksimum adalah $\frac{1}{4}p^2$.

Secara umum dapat dinyatakan bahwa:

Jika diketahui dua bilangan jumlahnya konstan, maka hasil kali maksimum tercapai jika kedua bilangan itu sama.

Tugas 7

1. Diketahui fungsi f: R $\rightarrow$ R yang didefinisikan oleh $f(x) = x^2 - 2x - 8$.
   a. Untuk x bilangan bulat dan $-5 \le x \le 5$, salin dan lengkapilah tabel berikut!

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
x^2	25										25
–2x		8						–4			
–8			–8								
f(x)											

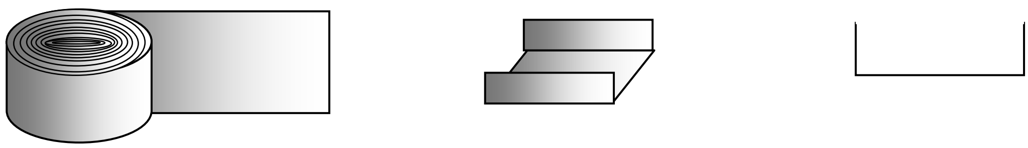
   b. Dari tabel itu sebutkan pembuat nol fungsi f!
   c. Berdasar pada jawaban pada b, nyatakan persamaan sumbu simetri grafik fungsi tersebut!
   d. Berdasar jawab pada c, tentukanlah ordinat titik balik grafik fungsi f, kemudian koordinat titik balik grafik fungsi tersebut!
2. Lakukanlah seperti pada no. 1 untuk $f(x) = -2x^2 - 6x + 8$, kemudian sketsalah grafik fungsi tersebut!

3. Diketahui fungsi f: R $\to$ R yang didefinisikan oleh $f(x) = x^2 - 2x - 8$. Tentukanlah pembuat nol fungsi f tanpa membuat tabel seperti no. 1.
4. Untuk setiap fungsi pada R yang didefinisikan pada setiap nomor berikut tentukannlah titik potong grafik dengan sumbu-sumbu koordinat (jika ada), persamaan sumbu simetri, dan koordinat titik baliknya, kemudian sketsalah grafiknya.

   a. $f(x) = x^2 - 4$ d. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ g. $f(x) = -x^2 - 4x + 5$

   b. $f(x) = x^2 - 16$ e. $f(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 4x - 8$ h. $f(x) = -1\frac{1}{2}x^2 - 5x + 16$

   c. $f(x) = 2x^2 - 8$ f. $f(x) = -2x^2 + 32$
5. Sebuah fungsi kuadrat dalam x bernilai 0 untuk x = 0 dan untuk x = 4. Fungsi itu bernilai 6 untuk x = 3. Tentukannlah rumus fungsi tersebut!
6. Dua bilangan positif hasil kalinya k. Tentukanlah jumlah minimum kedua bilangan tersebut!
7. Diketahui f: H $\to$ R dengan $H = \{x | -4 \leq x \leq 5, x \in R\}$ dan $f(x) = 2x^2 - 6x - 8$. Tentukanlah range f.
8. Keuntungan harian L(x) dalam ratusan ribu rupiah diperoleh dengan produksi x satuan barang per hari dinyatakan dengan $L(x) = -3x^2 + 30x - 36$. Tentukan banyak produksi setiap harinya agar produsen itu memperoleh keuntungan maksimum. Berapa keuntungan maksimum setiap harinya?
9. Kerjakan seperti No. 8 untuk $L(x) = -0{,}68x^2 + 176{,}8x - 6807$
10. Satu gulung bahan talang lebarnya 60 cm, akan dibuat talang terbuka seperti pada gambar di bawah ini. Tentukan ukuran talang agar dapat mengalirkan air sebanyak mungkin.



DAFTAR PUSTAKA

Abrahamson, B. and Gray, M.C. (1971). *The Art of Algebra.* Sydney: Rigby Limited

Allendoerfer, Carl B & Oakley, C.O. (1963). *Principles of Mathematics*. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc.

Angel, Allen R. & Porter, Stuart R. (1985). *A Survey of Mathematics with Applications, 2nd edition.* Reading: Addison Wesley Publishing Company.

Boyer, Carl B. (1968). *A History of Mathematics.* Brooklyn, New York: John Wiley & Sons.

Coughlin, R & Zitarelli, D. E. (1984). *The Ascent of Mathematics*. NewYork: McGraw-Hill, Inc.

Gellert,W. et al (eds). (1977). *The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics.* New York: Van Nostrand Reinhold Company.

Jacobs, Harold R. (1970). *Mathematics A Human Endeavor*. San Franscisco: W.H. Freeman and Company.

Krismanto, Al. (2001). *Aljabar.*(Bahan Penataran Standar). Yogyakarta: PPPG Matematika

Zuckerman, M.M. (1976). *Intermediate Algebra. A Straightforward Approach*. New York: John Wiley & Sons.