



DIKLAT GURU PENGEMBANG MATEMATIKA SMK JENJANG DASAR TAHUN 2009

Aproksimasi



Oleh: **Drs. Markaban, M.Si.**



DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK
DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

2009



Quality
Endorsed
Company
ISO 9001:2000
Lic no: QEC 23961
SAI Global

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas karunia-Nya, bahan ajar ini dapat diselesaikan dengan baik. Bahan ajar ini digunakan pada Diklat Guru Pengembang Matematika SMK Jenjang Dasar Tahun 2009, pola 120 jam yang diselenggarakan oleh PPPPTK Matematika Yogyakarta.

Bahan ajar ini diharapkan dapat menjadi salah satu rujukan dalam usaha peningkatan mutu pengelolaan pembelajaran matematika di sekolah serta dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat di dalam maupun di luar kegiatan diklat.

Diharapkan dengan mempelajari bahan ajar ini, peserta diklat dapat menambah wawasan dan pengetahuan sehingga dapat mengadakan refleksi sejauh mana pemahaman terhadap mata diklat yang sedang/telah diikuti.

Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah berpartisipasi dalam proses penyusunan bahan ajar ini. Kepada para pemerhati dan pelaku pendidikan, kami berharap bahan ajar ini dapat dimanfaatkan dengan baik guna peningkatan mutu pembelajaran matematika di negeri ini.

Demi perbaikan bahan ajar ini, kami mengharapkan adanya saran untuk penyempurnaan bahan ajar ini di masa yang akan datang.

Saran dapat disampaikan kepada kami di PPPPTK Matematika dengan alamat: Jl. Kaliurang KM. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, DIY, Kotak Pos 31 YK-BS Yogyakarta 55281. Telepon (0274) 881717, 885725, Fax. (0274) 885752. email: p4tkmatematika@yahoo.com

Sleman, 11 Mei 2009
Kepala,

Kasman Sulyono
NIP. 130352806

DAFTAR ISI

	Halaman
Kata Pengantar	i
Daftar Isi	ii
Peta Kompetensi dan Bahan Ajar	iii
Skenario Pembelajaran.....	iii
Bab I Pendahuluan	
A Latar Belakang	1
B. Tujuan	1
C.. Ruang Lingkup.....	1
Bab II Aproksimasi	
A. Pengertian Aproksimasi	2
B. Pembulatan	2
1. Pembulatan ke Ukuran Satuan Terdekat.....	2
2. Pembulatan ke Banyaknya Angka-angka Desimal	2
3. Pembulatan ke Banyaknya Angka-angka yang Signifikan	3
Rangkuman	4
Latihan 1 :	4
Bab III Pengukuran	
A. Kesalahan Hasil Pengukuran.....	5
1. Salah Mutlak	5
2. Salah Relatif.....	6
3. Persentase Kesalahan	7
B. Toleransi.....	7
C. Operasi Hasil Pengukuran	7
1. Penjumlahan Hasil Pengukuran	8
2. Pengurangan Hasil Pengukuran	8
3. Perkalian Hasil-hasil Pengukuran	9
Rangkuman	9
Latihan 2 :	10
Bab IV Pecahan Berantai.....	11
Bab V Penutup.....	16
Daftar Pustaka.....	17

PETA KOMPETENSI DAN BAHAN AJAR

No	Kompetensi / Sub kompetensi	Indikator	Materi Pembelajaran
1.	<p><u>Kompetensi :</u> Mampu memfasilitasi siswa dalam memecahkan masalah berkaitan dengan konsep aproksimasi kesalahan</p> <p><u>Subkompetensi:-</u> Mengembangkan keterampilan siswa dalam:</p> <ul style="list-style-type: none"> • menerapkan konsep kesalahan pengukuran • menerapkan konsep operasi hasil pengukuran 	<ul style="list-style-type: none"> • Mampu mengembangkan dari kehidupan nyata sehari-hari, menjelaskan dan memberikan contoh mengenai pembulatan hasil pengukuran yang ditentukan berdasarkan konsep aproksimasi. • Mampu menjelaskan dan memberikan contoh mengenai satuan ukuran terkecil, salah mutlak, salah relatif, toleransi, dan persentase kesalahan • Mampu mengembangkan dari kehidupan nyata sehari-hari, menjelaskan dan memberikan contoh mengenai operasi hasil pengukuran. 	<ul style="list-style-type: none"> • Membilang dan mengukur. • Pembulatan hasil pengukuran • Satuan ukuran terkecil, Salah mutlak, salah relatif, persentase kesalahan, dan toleransi. • Operasi hasil pengukuran • Pecahan berantai

SKENARIO PEMBELAJARAN

1. Pada awal pertemuan di lakukan kegiatan identifikasi permasalahan pembelajaran pada materi aproksimasi kesalahan yang dihadapi oleh guru selama di kelas.
2. Dari identifikasi permasalahan pembelajaran tersebut dijelaskan dengan ceramah, tanya jawab dan curah pendapat sehingga permasalahan aproksimasi kesalahan dapat dipecahkan
3. Peserta bekerja dalam kelompok program keahlian yang terdiri dari 5-6 orang dan mendiskusikan dan menganalisis materi dan latihan pada modul serta memberikan contoh penerapan sesuai program keahliannya.

Bab I

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Dalam kegiatan sehari-hari, apabila seseorang akan melakukan pengukuran maka tidak terlepas ia akan melakukan penaksiran dari hasil yang diperoleh. Hal ini tidak lain hanya untuk memudahkan suatu perhitungan tetapi juga harus memperhatikan taksiran tersebut agar kesalahan yang dilakukan dalam pengukuran tersebut dapat diperkecil dengan kata lain harus memperhatikan ketelitiannya disamping barang apa yang diukur. Taksiran tersebut sebenarnya merupakan pendekatan sehingga bilangan yang diperoleh dari taksiran itu hanyalah suatu pembulatan atau dapat juga disebut aproksimasi

Aproksimasi merupakan bagian dari ruang lingkup mata pelajaran Matematika yang harus diajarkan kepada siswa SMK khususnya untuk kelompok Teknologi, Kesehatan dan Pertanian. Konsep-konsep dasar Aproksimasi ini harus dikuasai oleh siswa SMK karena materi ini sangat menunjang kelancaran dalam mempelajari materi maupun mata pelajaran lainnya, seperti pada waktu melaksanakan pelajaran praktik, siswa kadang kala melaksanakan pengukuran, maka hal tersebut ada keterkaitannya dengan aproksimasi. Oleh karena itu guru matematika SMK perlu mempunyai kompetensi dalam menjelaskan konsep-konsep dan metode pembelajaran aproksimasi di sekolahnya agar siswa menguasai materi aproksimasi.

B. Tujuan

Setelah mengikuti pendidikan dan pelatihan (diklat) peserta diharapkan mampu menjelaskan dan memberi contoh :

1. pembulatan hasil pengukuran ditentukan berdasar konsep aproksimasi.
2. menentukan satuan ukuran terkecil dari suatu pengukuran
3. menentukan kesalahan (salah mutlak dan salah relatif) suatu pengukuran
4. menghitung persentase kesalahan dan toleransi suatu pengukuran
5. menghitung jumlah , selisih dan hasil kali dari suatu pengukuran.
6. mencari pendekatan dari suatu pecahan

C. Ruang Lingkup

Bahan ajar Aproksimasi dimaksudkan untuk meningkatkan kompetensi guru matematika SMK dalam menjelaskan konsep-konsep dasar materi/pokok bahasan matematika yang akan diajarkan kepada siswa. Hal-hal yang akan dibahas meliputi: Pengertian Aproksimasi, Pembulatan, Salah mutlak, Salah relatif, Persentase Kesalahan, Toleransi, Operasi Hasil Pengukuran dan Pecahan Berantai.

Bab II

Aproksimasi

A. Pengertian Aproksimasi

Dalam percakapan sehari-hari, sering kita menyebut suatu bilangan, misalnya “ Keranjang ini isinya 12 butir telur ”, atau “ Model pakaian ini memerlukan kain 3 meter ” . Dua contoh kalimat tadi menyebut bilangan yang diperoleh secara berbeda, yaitu bilangan 12 diperoleh dari kegiatan “ membilang ” karena bilangan yang dimaksud adalah eksak yang hanya ada satu jawaban yang tepat untuk persoalan itu, sedangkan bilangan 3 diperoleh dari “ pengukuran ” karena bilangan yang didapat hasilnya tidak pasti (tidak eksak) mungkin 2,99... meter, sehingga dibulatkan saja menjadi 3 meter. Dari kegiatan pengukuran tersebut walaupun telitinya dalam mengadakan suatu pengukuran, tidak akan dapat menyatakan ukuran yang tepat, meskipun suatu ukuran yang demikian itu ada. Dengan demikian bilangan yang diperoleh dari mengukur itu hanyalah pendekatan atau pembulatan. Pembulatan seperti ini disebut aproksimasi.

B. Pembulatan

Semua pengukuran adalah “pendekatan“ oleh karena itu hasil-hasil pengukuran panjang, massa, waktu, luas dan sebagainya harus diberikan menurut ketelitian yang diperlukan.

Pembulatan dilakukan dengan aturan, jika angka berikutnya 5 atau lebih dari 5 maka nilai angka di depannya ditambah satu. Kalau angka berikutnya kurang dari 5 maka angka tersebut dihilangkan dan angka di depannya tetap.

Ada tiga macam cara pembulatan, yaitu :

- a. pembulatan ke satuan ukuran terdekat
- b. pembulatan ke banyaknya angka desimal, dan
- c. pembulatan ke banyaknya angka-angka yang signifikan

1. Pembulatan ke Satuan Ukuran Terdekat

Dalam hal pembulatan ke ukuran satuan yang terdekat, ditetapkan lebih dahulu satuan terkecil yang dikehendaki oleh yang mengukur

Contoh :

- a. 165,5 cm = 166 cm , dibulatkan ke cm terdekat
- b. 2,43 kg = 2 kg , dibulatkan ke kg terdekat
- c. 14,16 detik = 14,2 detik, dibulatkan ke persepuluh detik terdekat

2. Pembulatan ke Banyaknya Angka-angka Desimal

Untuk mempermudah pekerjaan, kadang-kadang perlu diadakan pembulatan suatu bilangan desimal sampai ke sekian banyak tempat desimal sesuai dengan maksud yang dikehendaki.

Contoh :

5,47035 = 5,4704 dibulatkan sampai empat tempat desimal

5,47035 = 5,470 dibulatkan sampai tiga tempat desimal

5,47035 = 5,47 dibulatkan sampai dua tempat desimal

5,47035 = 5,5 dibulatkan sampai satu tempat desimal

5,44735 = 5,4 dibulatkan sampai satu tempat desimal

3. Pembulatan ke Banyaknya Angka-angka yang Signifikan

Cara lain untuk menyatakan ketelitian pendekatan, yaitu dengan cara menetapkan banyaknya angka yang signifikan. Istilah signifikan berasal dari Bahasa Inggris "Significant" yang berarti "bermakna". Kita menyatakan bahwa 64,5 cm mempunyai 3 angka signifikan dan 65 cm mempunyai 2 angka signifikan.

Hasil pengukuran seperti: 0,34 cm dan 34 mm mempunyai makna ketelitian yang sama yaitu masing-masing satuan ukuran terkecilnya 1 mm, sehingga banyaknya angka signifikan adalah 2, sehingga nol pada bilangan 0,34 tidak signifikan.

Berikut ini adalah aturan-aturan untuk menentukan angka-angka yang signifikan:

a. Semua angka selain nol adalah signifikan

Contoh: Bilangan 472,513 mempunyai 6 angka signifikan.

b. Angka "0" itu signifikan jika letaknya diantara angka-angka yang signifikan.

Contoh: Bilangan 807003 mempunyai 6 angka signifikan

c. Angka "0" itu signifikan jika muncul setelah tanda tempat desimal dan angka-angka lain yang signifikan

Contoh:

Hasil pengukuran 20,080 km, mempunyai 5 angka yang signifikan

d. Angka "0" itu tidak pernah signifikan jika mendahului angka-angka yang bukan nol meskipun muncul setelah tanda tempat desimal.

Contoh:

1). Pada 043,00 m, dua angka nol (dibelakang koma) menunjukkan bahwa panjang telah diukur sampai ke perseratusan meter terdekat, sehingga signifikan. Bilangan 043,00 mempunyai empat angka signifikan

2). Pada 0,0720 km, dua angka nol yang pertama menunjukkan tempat koma, sehingga tidak signifikan. Nol yang ketiga menunjukkan bahwa panjang telah diukur sampai ke persepuluhan meter, sehingga signifikan. Jadi di sini ada 3 angka signifikan

e. Angka "0" pada suatu bilangan, khususnya yang ditandai "strip" atau "bar" adalah signifikan.

Contoh:

500 - Pada bilangan ini, apabila kita kembalikan ke bentuk bilangan baku yaitu ditulis: $a \times 10^n$ dengan $0 < a < 10$ dan n bilangan bulat, sehingga ditulis 5×10^2 maka mempunyai satu angka signifikan, tetapi dua angka nol bisa signifikan jika aslinya memang 500, atau tidak

signifikan jika aslinya tidak 500 misal: 496 atau 455 yang dibulatkan ke ratusan terdekat. Dengan demikian dua angka nol bisa signifikan atau bisa tidak signifikan (signifikan jika aslinya memang 500, tidak signifikan jika aslinya bukan 500). Sehingga untuk memperjelas digunakan tanda strip misal: $50\bar{0}$ dan $12\bar{0}000$ disini mempunyai 3 angka signifikan.

Rangkuman :

1. Aproximasi merupakan cara pendekatan atau pembulatan dari hasil suatu pengukuran yang dilakukan.
2. Aturan pembulatan adalah jika angka berikutnya 5 atau lebih dari 5 maka angka didepannya ditambah satu, tetapi jika angka berikutnya kurang dari 5 maka angka tersebut dihilangkan dan angka didepannya tetap.
3. Cara pembulatan dapat dilakukan dengan pembulatan ke ukuran satuan terdekat, pembulatan ke banyaknya angka desimal, dan pembulatan ke banyaknya angka-angka yang signifikan.

Latihan 1 :

1. Manakah dari pernyataan berikut ini yang eksak (ditemukan dengan membilang) dan mana yang merupakan pendekatan (ditemukan dengan pengukuran). Jelaskan !
 - a. Waktu yang digunakan untuk memasak makanan
 - b. Banyaknya kancing yang diperlukan untuk satu kemeja panjang
 - c. Harga 1 kg gula pasir
 - d. Volume minyak dalam botol ialah 1 liter
 - e. Jumlah uang yang dikumpulkan oleh suatu kelas untuk dana sosial
 - f. Kecepatan kendaraan yang menabrak pohon.
 - g. Banyaknya gula yang diperlukan untuk membuat kue tar
 - h. Beratnya suatu paket ialah 235 gram
 - i. Banyaknya rupiah untuk menukar uang kertas Rp. 1000,-
2. Jelaskan cara membulatkan 684573 ke :
 - a. puluhan b. ratusan c. ribuan d. puluh ribu yang terdekat
3. Bulatkan sampai satu tempat desimal : Jelaskan !
 - a. 4,89 b. 0,453 c. 308,04 d. 48,08 e. 13,2503
4. Bulatkan bilangan ini sampai banyaknya angka signifikan yang dinyatakan dalam kurung : Jelaskan !
 - a. 3,832 (1) d. 0,00529 (2)
 - b. 28,091 (4) e. 3,2416 (3)
 - c. 17,929 (3)
5. Jelaskan cara menyatakan $1\frac{2}{7}$ cm sebagai pecahan desimal dan bulatkan sampai :
 - a. seperpuluhan cm terdekat c. 3 tempat desimal
 - b. 2 angka signifikan d. 3 angka signifikan

Bab III Pengukuran

A. Kesalahan Hasil Pengukuran

Sering kali terjadi sebuah benda diukur dengan hasil yang berbeda-beda, dan secara logis hal ini jelas salah. Mengapa kejadian ini dapat terjadi?

Selisih antara ukuran sebenarnya dan ukuran yang di peroleh dari pengukuran itu disebut kesalahannya. Kesalahan dalam pengukuran tidak mungkin dapat dihilangkan, tetapi hanya dapat dikurangi (diperkecil) dengan menggunakan alat ukur yang lebih teliti.. Besarnya kesalahan ini dapat diperkecil dengan menggunakan alat pengukur yang lebih teliti dan cara pengukuran yang lebih teliti pula. Akan tetapi, hasil pengukuran tidak akan pernah eksak sekalipun tidak terjadi kesalahan cara mengukurnya. Oleh karena itu, kita perlu mengetahui pada setiap keadaan, sampai di mana kita dapat mempercayai pengukuran kita, yaitu kita harus mengetahui kesalahan maksimum yang dapat di tanggung. Maka kita menggunakan satuan ukuran terkecil, yaitu satu angka yang diperhitungkan sebagai tingkat ketelitian alat ukur, misalnya: sebuah benda diukur dengan tiga alat ukur yang masing-masing hasilnya adalah 5 satuan ukur; 5,2 satuan ukur dan 5,16 satuan ukur, sehingga satuan ukuran terkecil dari masing-masing alat ukur tersebut adalah 1 satuan, 0,1 satuan dan 0,01 satuan.

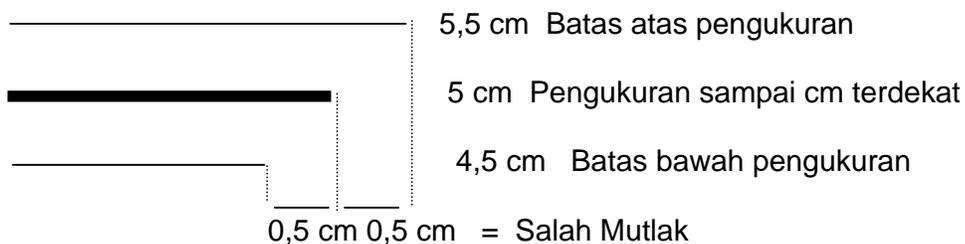
Berikut ini akan diuraikan beberapa macam kesalahan :

- a. Salah Mutlak
- b. Salah Relatif
- c. Persentase Kesalahan

1. Salah Mutlak

Misalnya, sebuah benda diukur dengan penggaris yang ditera dalam sentimeter dan hasilnya 5 cm. Ini tidak berarti panjangnya 5 cm tepat, tetapi pengukuran ini tepat sampai satu angka signifikan dengan satuan ukuran terkecil 1 cm. Jadi panjang sebenarnya lebih dekat ke 5 cm daripada 4 cm atau ke 6 cm. Dengan kata lain panjang sebenarnya terletak antara 4,5 cm dan 5,5 cm. Hal ini kesalahan yang masih diterima dari pengukuran ini adalah 0,5 cm atau salah mutlaknya ialah 0,5 cm.

Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut ini.



Jadi dapat disimpulkan bahwa :

$$\text{salah mutlak} = \frac{1}{2} \times \text{satuan ukuran terkecil}$$

Contoh :

Seorang siswa dari program keahlian Tata Boga akan membuat kue, bahan yang diperlukan 0,6 kg tepung dan 8 butir telur ayam.

Dari keadaan tersebut dapat diketahui aspek pengukuran:

Tepung :

Satuan ukuran terkecil = 0,1 kg

Jadi salah mutlak = $\frac{1}{2} \times 0,1 \text{ kg} = 0,05 \text{ kg}$

Batas atas pengukuran = 0,65 kg

Batas bawah pengukuran = 0,55 kg

Berarti ukuran yang sebenarnya dari bahan tepung adalah antara 0,55 kg sampai 0,65 kg

Telur :

Banyaknya telur ayam tepat 8 butir (eksak)

2. Salah Relatif

Besarnya kesalahan yang sama kadang mempunyai tingkat kepentingan berbeda. Hal ini menyebabkan ukuran yang satu dapat diterima sedangkan yang lain ditolak. Oleh karena itu memilih alat ukur yang digunakan harus disesuaikan dengan kebutuhannya. Kesalahan pengukuran yang dipengaruhi tingkat kepentingan tertentu disebut salah relatif

Misalkan seorang bekerja membuat garis pinggir lapangan sepakbola, kesalahan sebesar 1 cm sampai 5 cm adalah relatif tidak masalah. Akan tetapi, suatu kesalahan 1 cm saja yang di perbuat oleh seorang tukang kayu akan berakibat fatal. Demikian halnya jika kita membuat kue dengan tepung 2 kg, yang dibubuhi esens terlalu banyak $\frac{1}{2}$ cangkir, akibatnya kue itu tidak enak dimakan. Oleh karena itu , apabila kita memandang suatu kesalahan, tentu kita membandingkan dengan pengukuran yang sebenarnya. Karena itu kita menggunakan istilah salah relatif (nisbi).

Salah relatif dirumuskan sebagai berikut :

$$\text{Salah Relatif} = \frac{\text{salah mutlak}}{\text{hasil pengukuran}}$$

Contoh :

Seorang siswa membeli kain yang panjangnya 2,5 meter dengan satuan ukuran terkecil 0,1 meter, berapakah salah relatif dari pengukuran yang dilakukan ?

Jawab : Salah mutlak = $\frac{1}{2} \times 0,1 \text{ m} = 0,05 \text{ m}$

$$\text{Salah relatif} = \frac{0,05}{2,5} = \frac{5}{250} = \frac{1}{50}$$

3. Persentase Kesalahan

Untuk menghitung persentase kesalahan dari suatu pengukuran, terlebih dahulu dicari salah relatif dari pengukuran itu, kemudian mengalikannya dengan 100 % (yaitu dengan 1)

Jadi persentase kesalahan dirumuskan sebagai berikut :

$$\text{Persentase Kesalahan} = \text{Salah relatif} \times 100 \%$$

Contoh :

Sepucuk surat setelah ditimbang, ternyata beratnya 0,8 gram.

Carilah persentase kesalahan pengukuran itu ?

Jawab : satuan ukuran terkecil = 0,1 gram

$$\text{Salah mutlak} = \frac{1}{2} \times 0,1 \text{ gram} = 0,05 \text{ gram}$$

$$\text{Salah relatif} = \frac{0,05}{0,8} = \frac{5}{80}$$

$$\text{Persentase kesalahan} = \frac{5}{80} \times 100 \% = 6,25 \%$$

B. Toleransi

Pada industri modern yang menggunakan metode-metode produksi massal, bagian-bagian alat sering kali dibuat dalam pabrik-pabrik yang berbeda yang kemudian dikirim ke pabrik induk untuk dirakit. Karena itu penting sekali memastikan bahwa bagian-bagian alat itu dibuat cukup teliti, supaya cocok bila dirakit. Untuk itu biasanya kita menentukan kesalahan maksimum ukuran yang diperbolehkan dalam pembuatan bagian-bagiannya. Misalnya: Di sebuah pabrik kendaraan baut-bautnya dibuat dengan mesin dan diharuskan berdiameter 6 mm spesifikasinya mungkin memperbolehkan diameternya antara 5,8 mm dan 6,2 mm. Selisih antara batas-batas ini yaitu 0,4 mm, disebut toleransi dalam pengukuran dan dinyatakan dengan $(6 \pm 0,2)$ mm.

Jadi toleransi dalam pengukuran ialah selisih antara pengukuran terbesar yang dapat diterima dan pengukuran yang terkecil yang dapat diterima.

Contoh :

Toleransi yang diperkenankan untuk massa $(15 \pm 0,5)$ gram, berarti massa terbesar yang dapat diterima ialah $15 + 0,5 = 15,5$ gram dan massa terkecil yang dapat diterima ialah $15 - 0,5 = 14,5$ gram sehingga toleransinya adalah 1 gram.

C. Operasi Hasil Pengukuran

Sebelum kita mengoperasikan hasil pengukuran terlebih dahulu kita ingat kembali batas-batas pengukuran bahwa: Batas Atas (BA) pengukuran adalah hasil pengukuran ditambah salah mutlaknya, sedangkan Batas Bawah (BB) pengukuran adalah hasil pengukuran dikurangi salah mutlaknya.

1. Penjumlahan Hasil Pengukuran

Jika dua pengukuran atau lebih dijumlahkan, maka salah mutlaknyanya adalah jumlah salah mutlak dari pengukuran-pengukuran asal. Untuk mengetahui batas-batas jumlah dari dua pengukuran (jumlah maksimum dan jumlah minimum) dapat dirumuskan:

Jumlah maksimum = BA pengukuran I + BA pengukuran II

Jumlah minimum = BB pengukuran I + BB pengukuran II

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut ini :

Berapakah batas-batas jumlah dari hasil-hasil pengukuran 5,2 cm dan 3,6 cm, masing masing dibulatkan ke 0,1 cm terdekat ?

Jawab :

Pengukuran 5,2 cm terletak dalam jangkauan ($5,2 \pm 0,05$) cm, yaitu antara 5,15 cm dan 5,25 cm

Pengukuran 3,6 cm terletak dalam jangkauan ($3,6 \pm 0,05$) cm, yaitu antara 3,55 cm dan 3,65 cm

Jumlah maksimum diperoleh dari jumlah batas atas pengukuran yang pertama dengan batas atas pengukuran yang kedua, sedangkan jumlah minimum diperoleh dari jumlah batas bawah pengukuran yang pertama dengan batas bawah pengukuran yang kedua

Jadi jumlah maksimum adalah $5,25 \text{ cm} + 3,65 \text{ cm} = 8,90 \text{ cm}$ dan jumlah minimum adalah $5,15 \text{ cm} + 3,55 \text{ cm} = 8,70 \text{ cm}$

Perhatikan bahwa ternyata jumlah pengukuran 8,8 cm mempunyai salah mutlak 0,10 cm, yang sama dengan jumlah dari salah mutlak dalam pengukuran-pengukuran asal.

Jadi, pengukuran-pengukuran kalau dijumlahkan, maka salah mutlak dari jumlah pengukuran sama dengan jumlah salah mutlak dari tiap pengukuran asal.

2. Pengurangan Hasil Pengukuran

Jika dua pengukuran atau lebih dikurangkan, maka salah mutlak selisihnya adalah jumlah salah mutlak dari pengukuran-pengukuran asal. Untuk mengetahui batas-batas selisih dari dua pengukuran (selisih maksimum dan selisih minimum) dapat dirumuskan:

Selisih maksimum = BA pengukuran I - BB pengukuran II

Selisih minimum = BB pengukuran I - BA pengukuran II

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut ini :

Berapakah batas-batas selisih antara hasil-hasil pengukuran 5 cm dan 3 cm, masing masing dibulatkan ke sentimeter terdekat ?

Jawab :

Pengukuran 5 cm terletak dalam jangkauan ($5 \pm 0,5$) cm, yaitu antara 4,5 cm dan 5,5 cm

Pengukuran 3 cm terletak dalam jangkauan ($3 \pm 0,5$) cm, yaitu antara 2,5 cm dan 3,5 cm

Selisih maksimum didapat dari jika nilai terbesar dari pengukuran yang pertama dikurangi dengan nilai terkecil dari pengukuran yang kedua. Jadi, jumlah maksimum = $5,5 \text{ cm} - 2,5 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$

Selisih minimum didapat dari jika nilai terkecil dari pengukuran yang pertama dikurangi dengan nilai terbesar dari pengukuran yang kedua

Jadi, selisih minimum = $4,5 \text{ cm} - 3,5 \text{ cm} = 1 \text{ cm}$

Perhatikan bahwa ternyata selisih pengukuran 2 cm mempunyai salah mutlak 1 cm, yang sama dengan jumlah dari salah mutlak dalam pengukuran-pengukuran asal.

Jadi, jika hasil-hasil pengukuran dikurangkan, maka salah mutlak selisih pengukuran sama dengan jumlah salah mutlak dari tiap pengukuran asal.

3. Perkalian Hasil-hasil Pengukuran

Untuk mengetahui batas-batas maksimum dan minimum perkalian dari dua pengukuran (hasilkali maksimum dan hasilkali minimum) dapat dirumuskan:

Hasilkali maksimum = BA pengukuran I x BA pengukuran II

Hasilkali minimum = BB pengukuran I x BB pengukuran II

Contoh :

Berapakah batas-batas luas persegi panjang dengan panjang 4,5 m dan lebar 3,4 m, masing masing dibulatkan ke 0,1 m terdekat ?

Jawab :

Pengukuran 4,5 m terletak dalam jangkauan ($4,5 \pm 0,05$) m, yaitu antara 4,45 m dan 4,55 m

Pengukuran 3,4 m terletak dalam jangkauan ($3,4 \pm 0,05$) m, yaitu antara 3,35 m dan 3,45 m

Luas maksimum yang mungkin = $(4,55 \times 3,45) \text{ m}^2 = 15,6975 \text{ m}^2$

Luas minimum yang mungkin = $(4,45 \times 3,35) \text{ m}^2 = 14,9075 \text{ m}^2$

Jadi luas sebenarnya terletak antara $14,9075 \text{ m}^2$ dan $15,6975 \text{ m}^2$. Padahal luas yang dihitung atas dasar pengukuran panjang dan lebar adalah $(4,5 \times 3,4) \text{ m}^2 = 15,3 \text{ m}^2$

Sebagai contoh penerapan misalnya:

Sebuah biji besi ditimbang beratnya 9,90 gr. Agar pengukuran menjadi tepat, berat biji besi dikurangi sebesar 2,87 gr. Tentukan batas-batas hasil pengurangan dalam proses tersebut.

Penyelesaiannya:

Jangkauan selisih = (selisih yang diukur \pm salah mutlak selisih)

$$= \{(9,90 - 2,87) \pm (0,005 + 0,005)\} \text{ gr}$$

$$= (7,03 \pm 0,010) \text{ gr}$$

Sehingga selisih maksimum dalam proses adalah $(7,03+0,010) \text{ gr} = 7,040 \text{ gr}$ dan selisih minimum dalam proses adalah $(7,03 - 0,010) \text{ gr} = 7,020 \text{ gr}$

Jadi batas-batas hasil pengurangan tersebut adalah antara 7,020 gr sampai dengan 7,040 gr

Rangkuman :

1. Salah mutlak = $\frac{1}{2}$ x satuan ukuran terkecil.
2. Salah Relatif = $\frac{\text{salah mutlak}}{\text{hasil pengukuran}}$
3. Persentase Kesalahan = Salah relatif x 100 %
4. Toleransi dalam pengukuran ialah selisih antara pengukuran terbesar yang dapat diterima dan pengukuran yang terkecil yang dapat diterima.
5. jika hasil-hasil pengukuran dijumlahkan , maka salah mutlak jumlah pengukuran sama dengan jumlah salah mutlak dari tiap pengukuran asal.
6. jika hasil-hasil pengukuran dikurangkan, maka salah mutlak selisih pengukuran sama dengan jumlah salah mutlak dari tiap pengukuran asal.

Latihan 2 :

1. Jelaskan dan lengkapi daftar berikut ini :

Pengukuran	Satuan ukuran terkecil	Salah mutlak	Batas atas pengukuran	Batas bawah pengukuran
a. 8 cm b. 6,7 m c. 37,2 gram d. 8,63 m ²				

2. Tinggi seorang anak laki-laki ialah 153 cm, teliti sampai sentimeter terdekat. Antara batas-batas manakah letak tinggi yang sebenarnya dan jelaskan?
3. Carilah salah relatif dan persentase kesalahan dari hasil pengukuran berikut :
a. 11 cm b. 0,8 kg c. 4,15 m d. 0,000025 ton
4. Nyatakan ukuran–ukuran yang dapat diterima yang terbesar dan terkecil berikut ini dan jelaskan toleransinya :
a. (125 ± 4) detik c. (2,58 ± 0,007) mm
b. (1,02 ± 0,03) dm d. (1046 ± 2,5) km²
5. Carilah batas-batas atas dan bawah dari jumlah dan selisih yang sebenarnya dari pengukuran–pengukuran berikut ini:
a. 7,6 gram dan 2,9 gram c. 1276 km dan 291 km
b. 3,16 mm dan 0,85 mm d. 25,74 m dan 2,5 m
6. Berapakah panjang minimum kawat yang harus dibeli supaya cukup untuk membuat bingkai suatu segi lima beraturan dengan sisi 15 cm
7. Panjang dan lebar sampul diukur sampai sentimeter terdekat dan hasilnya masing-masing 12 cm dan 10 cm. Carilah jangkauan yang mungkin dari keliling sampul itu.

8. Panjang segulungan kawat ialah (250 ± 10) meter . Saya hendak memotong 10 potongan masing-masing sepanjang 15 meter dari gulungan itu, tetapi pengukuran setiap potong mempunyai salah mutlak sebesar 0,1 m. Dalam batas-batas mana sisa potongannya?
9. Dari 2,10 meter panjang kain, dipotong sebagian yang panjangnya 65,5 cm . Berapakah batas-batas dari sisanya? Jelaskan!
10. Jelaskan batas-batas dari luas suatu pekarangan yang berbentuk segitiga siku-siku dengan sisi-sisi tegak 9 m dan 6 m

Bab IV Pecahan Berantai

Penerapan aproksimasi, khususnya dalam bidang keahlian mesin produksi, masih memerlukan satu bahasan lain yang menunjang pemahaman siswa tentang teori aproksimasi yaitu pecahan berantai. Suatu pecahan dapat didekati nilainya dengan pecahan lain dengan teknik pecahan berantai. Pecahan berantai adalah pecahan yang mempunyai komponen hasil yang berurutan, dan jika hasil komponen yang diperhitungkan semakin banyak maka hasilnya akan mendekati harga pecahan asal.

Misalnya: $x = \frac{p}{q}$ dapat ditulis dengan pecahan berantai

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$$

Maka nilai-nilai yang merupakan pendekatan dari x adalah:

$$x_1 = a_1 = \frac{p_1}{q_1}$$

$$x_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2}$$

$$x_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = \frac{p_3}{q_3} \text{ dan seterusnya.}$$

Diperoleh hubungan sebagai berikut:

$$x_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1}{1} \longrightarrow x_1 = \frac{a_1 \cdot 1 + 0}{a_1 \cdot 0 + 1}$$

$$x_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 a_1 + 1}{a_2} \longrightarrow x_2 = \frac{a_2 p_1 + 1}{a_2 \cdot q_1 + 0}$$

$$x_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3(a_2 a_1 + 1) + a_1}{a_3 a_2 + 1} \longrightarrow x_3 = \frac{a_3 \cdot p_2 + p_1}{a_3 \cdot q_2 + q_1}$$

$$x_4 = \longrightarrow \frac{a_3 \cdot p_2 + p_1}{a_3 \cdot q_2 + q_1} \text{ dan seterusnya}$$

Sehingga untuk menentukan pendekatan dapat dengan tabel berikut:

		Hasil bagi pecahan berantai						
		a ₁	a ₂	a ₃	...	a _{n-2}	a _{n-1}	a _n
0	1					a _{n-2}	a _{n-1}	p _n
1	0					a _{n-2}	a _{n-1}	q _n

Dimana untuk pendekatan ke-n dapat kita tuliskan $x_n = \frac{p_n}{q_n}$

Contoh:

1). Tentukan pecahan yang mendekati: $\frac{224}{99}$

Penyelesaian: Kita buat pembagian bersusun sebagai berikut :

$$99 / 224 \setminus 2 = a_1$$

$$\begin{array}{r} \underline{198} \\ 26 / 99 \setminus 3 = a_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{78} \\ \underline{21} / 26 \setminus 1 = a_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{21} \\ 5 / 21 \setminus 4 = a_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{20} \\ 1 / 5 \setminus 5 = a_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{5} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{Atau pecahan } \frac{224}{99} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}$$

Berarti pendekatan pecahan $\frac{224}{99}$ adalah $2; \frac{7}{3}; \frac{9}{4}; \frac{43}{19}; \frac{224}{99}$

Jadi pecahan yang paling mendekati $\frac{224}{99}$ adalah $\frac{43}{19}$

2). Ubahlah pecahan $\frac{79}{213}$ ke dalam pecahan berantai!

Penyelesaian:

$$79 / 213 \setminus 2$$

$$\begin{array}{r} \underline{158} \\ 55 / 79 \setminus 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{55} \\ 24 / 55 \setminus 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{48} \\ 7 / 24 \setminus 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{21} \\ 3 / 7 \setminus 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{6} \\ 1 / 3 \setminus 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{3} \\ 0 \end{array}$$

Selanjutnya dalam praktek mesin bubut misalnya, sebelum membuat ulir lebih dahulu ditentukan perbandingan roda giginya. Roda gigi biasanya mempunyai 20 – 120 gigi dan merupakan kelipatan dari 5. Seandainya dalam perhitungan didapat perbandingan $\frac{99}{224}$, maka untuk memperoleh

hasil yang tepat harus digunakan jumlah gigi 99 dan 224. Hal itu sulit dipenuhi, karena roda gigi yang tersedia sangat terbatas. Oleh karena itu dicari roda gigi pengganti yang perbandingannya mendekati perbandingan asalnya dengan pecahan berantai. Dari contoh diatas seandainya perbandingan roda gigi yang menggerakkan dengan roda gigi yang digerakkan adalah $\frac{99}{224}$ maka didapatkan roda gigi pengganti yang

mendekati perbandingan asalnya adalah $\frac{4}{9}$ atau $\frac{20}{45}$ (merupakan kelipatan 5 dan berada antara 20 – 120). Berapa kesalahannya dan presentase kesalahan pada pengukuran tersebut. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut.

3). Tentukan besarnya persentase kesalahan dari $\frac{79}{213}$!

Penyelesaian:

Hasil bagi dari kedua pecahan berantai $\frac{79}{213}$ adalah 2,1,2,3,2,3.

selanjutnya hasil bagi tersebut dapat kita gunakan untuk menyusun tabel sebagai berikut:

		Hasil bagi pecahan berantai					
		2	1	2	3	2	3
1	0	a	b	c	d	e	f
0	1	g	h	i	j	k	l

Nilai a = $2 = 2 \times 0 + 1 = 1$
 $\swarrow (x)$
 $1 \leftarrow 0$
 (+)

Nilai d = $3 = 3 \times 3 + 1 = 10$
 $\swarrow (x)$
 $b = 1 \leftarrow c = 1$
 (+)

Nilai b = $1 = 1 \times 1 + 0 = 1$
 $\swarrow (x)$
 $0 \leftarrow a = 1$
 (+)

Nilai e = $2 = 2 \times 10 + 3 = 23$
 $\swarrow (x)$
 $c = 3 \leftarrow d = 10$
 (+)

Nilai c = $2 = 2 \times 1 + 1 = 3$
 $\swarrow (x)$
 $a = 1 \leftarrow b = 1$
 (+)

Nilai f = $3 = 3 \times 23 + 10 = 79$
 $\swarrow (x)$
 $d = 10 \leftarrow e = 23$
 (+)

$$\begin{aligned} \text{Nilai } g &= 2 = 2 \times 1 + 0 = 2 \\ &\swarrow (x) \\ 1 \leftarrow 0 \\ & (+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nilai } h &= 1 = 1 \times 2 + 1 = 3 \\ &\swarrow (x) \\ 1 \leftarrow g = 2 \\ & (+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nilai } i &= 2 = 2 \times 3 + 2 = 8 \\ &\swarrow (x) \\ g = 2 \leftarrow h = 3 \\ & (+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nilai } j &= 3 = 3 \times 8 + 3 = 27 \\ &\swarrow (x) \\ h = 3 \leftarrow i = 8 \\ & (+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nilai } k &= 3 = 3 \times 27 + 8 = 62 \\ &\swarrow (x) \\ i = 8 \leftarrow j = 27 \\ & (+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nilai } l &= 3 = 3 \times 62 + 27 = 213 \\ &\swarrow (x) \\ J = 27 \leftarrow k = 62 \\ & (+) \end{aligned}$$

Dari masing masing hasil perhitungan di atas diperoleh tabel.

		Hasil bagi pecahan berantai					
		2	1	2	3	2	3
1	0	1	1	3	10	23	79
0	1	2	3	8	27	62	213



Pecahan yang paling mendekati $\frac{79}{213}$ adalah $\frac{23}{62}$

Hasil desimal $\frac{23}{62} = 0,37096$; harga desimal $\frac{79}{213} = 0,37089$

Kesalahan = $0,37096 - 0,37089 = 0,00007$

Persentase kesalahan $\frac{0,00007}{0,37089} \times 100\% = 0,01887\%$

Contoh: Aplikasi

- 1). Pada mesin bubut yang mempunyai kisar transportir 5 mm akan dibuat ulir dengan kisar 2,06 mm. Persediaan roda gigi pengganti mempunyai gigi 20-120 dan merupakan kelipatan dari 5. Tentukan perbandingan roda gigi penggantinya sehingga menghasilkan ulir yang paling mendekati ukuran sebenarnya

Penyelesaian:

Jika roda gigi yang menggerakkan adalah DR dan roda gigi yang digerakkan DN, maka perbandingannya:

$$\frac{DR}{DN} = \frac{2,06mm}{5mm} = \frac{103}{250}$$

Karena 103 dan 250 tidak mempunyai faktor yang sama maka kita gunakan pecahan berantai untuk mencari harga yang mendekati harga asal sebagai berikut:

$$\begin{array}{r}
 103 / 250 \setminus 2 \\
 \underline{206} \\
 44 / 103 \setminus 2 \\
 \underline{88} \\
 15 / 44 \setminus 2 \\
 \underline{30} \\
 14 / 15 \setminus 1 \\
 \underline{14} \\
 1 / 14 \setminus 14 \\
 \underline{14} \\
 0
 \end{array}$$

Selanjutnya hasil bagi tersebut dapat kita gunakan untuk menyusun tabel sebagai berikut:

		Hasil bagi pecahan berantai				
		2	2	2	1	14
1	0	1	2	5	7	103
0	1	2	5	12	17	250

Dari tabel diatas maka perbandingan yang paling mendekati dengan perbandingan asal adalah $\frac{7}{17}$. Jadi roda penggantinya $\frac{7}{17}$ atau $\frac{35}{85}$

- 2). Hitung putaran engkol kepala pembagi untuk membuat alur seperti pada gambar di samping, yang memiliki sudut $12^{\circ}55'$. Perbandingan transmisi kepala pembagi 40, lubang pelat pembagi yang tersedia = 20, 23, 27, 29, 32, 3. Tentukan lubang pembagiannya!

Penyelesaian:

$$360^{\circ} = 360 \times 60' = 21.600 \text{ menit}$$

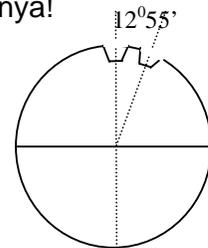
$$12^{\circ}55' = 12 \times 60' + 55 = 775 \text{ menit}$$

$$\text{Putaran engkol pembagi} = \frac{\text{kepala pembagi}}{n}$$

$$n = \frac{1 \text{ putaran}}{\alpha} = \frac{360}{12^{\circ}55'} = \frac{21.600}{775}$$

$$\text{Putaran engkol pembagi} = \frac{40}{\frac{21.600}{775}} = \frac{40 \times 775}{21.600} = \frac{31.000}{21.600} = \frac{155}{108} = 1 \frac{47}{108}$$

Karena lubang pembagian 108 tidak ada maka dicari pendekatannya dengan pecahan berantai sebagai berikut.



$$45 / 108 \setminus 2$$

$$\underline{94}$$

$$14 / 47 \setminus 3$$

$$\underline{42}$$

$$5 / 14 \setminus 2$$

$$\underline{10}$$

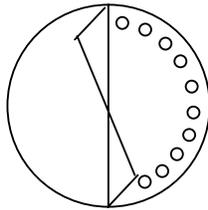
$$4 / 5 \setminus 1$$

$$\underline{4}$$

$$1 / 4 \setminus 4$$

$$\underline{4}$$

$$0$$



Berarti menggunakan lubang pembagi 23 dan guntingnya mencakup 10 lubang (10 bagian)

		Hasil bagi pecahan berantai				
		2	3	2	1	4
1	0	1	3	7	10	47
0	1	2	7	16	23	108

Bab V

Penutup

Bahan ajar ini membahas konsep aproksimasi dalam masalah pengukuran secara umum, belum memberikan contoh-contoh dari semua program keahlian yang ada di Sekolah Menengah Kejuruan. Pada akhir setiap pembahasan diberikan soal latihan dan apabila ada kesulitan dalam menjawab soal latihan dapat didiskusikan dengan peserta lain.

Agar peserta diklat dapat lebih memahami konsep aproksimasi dalam masalah pengukuran yang sesuai dengan program keahlian yang diajarkan di sekolah, disarankan peserta mendiskusikan dengan peserta lain untuk mengembangkan dan memberikan contoh-contohnya.

Daftar Pustaka

- Abdul kodir dkk, 1976, *Matematika untuk SMA*, Jakarta, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan
- E.T. Ruseffendi, 1989, *Dasar – dasar Matematika Modern dan Komputer untuk Guru*, Bandung, Tarsito
- Ewen, Dale-Topper, Michael A, 1983, *Mathematics for Technical Education*, New Jersey: Prentice_Hall, Inc., Englewood Cliffs.
- Gerard Polla dkk, 1982, *Matematika untuk SMTK*, Jakarta, Direktorat Pendidikan Menengah Kejuruan.
- Markaban dkk, 2007, *Matematika SMK/MAK Kelompok Teknologi, Kesehatan, dan Pertanian*, Klaten, Saka Mitra Kompetensi P.T Macanan Jaya cemerlang
- PAUL CALTER, 1979, *Theory and Problems of Technical Mathematics*, Schaum's outline, Mc-GRAW.HILL BOOK COMPANY
- ST. NEGORO – B. HARAHAHAP, 1985, *Ensiklopedia Matematika*, Jakarta, Ghalia Indonesia.

http : // www.mc.edu / courses /csc / 110 / module 4-1.html