

ARITMETIKA

(Oleh: Al. Krismanto, M.Sc.)

I. BILANGAN DAN SISTEM BILANGAN

Sistem Bilangan

Aritmetika disebut juga ilmu hitung adalah bagian matematika yang membahas bilangan berikut operasinya. Secara sederhana dapat dinyatakan bahwa aritmetika adalah ilmu tentang bilangan. (Naga, 1980:1). Di pendidikan dasar dipelajari penjumlahan (lambang "+"), pengurangan (lambang "-"), perkalian (lambang "×" atau "·"), pembagian (lambang "÷"), perpangkatan (lambangnya berupa besarnya pangkat dengan diletakkan secara *uppercase*; pangkat 2 atau kuadrat misalnya \dots^2), penarikan akar (lambang " \sqrt{a} " untuk akar pangkat dua dari a , untuk akar pangkat n dari a) dan logaritma (lambang ${}^g\log a$ atau $\log_g a$ untuk logaritma a dengan pokok logaritma g). Di samping itu juga digunakan pasangan kurung "(...)" untuk mengelompokkan suatu jenis operasi. Jika demikian, maka bila ada bilangan langsung di depan atau di belakang kurung, maksudnya bilangan tersebut dikalikan dengan bilangan yang ada di dalam kurung. Misalnya $2(3 + 4)$ adalah 2 dikalikan dengan hasil penjumlahan 3 dan 4.

Sistem bilangan adalah himpunan bilangan beserta operasi yang didefinisikan pada himpunan tersebut. Operasinya dapat unar atau binar (biner). Operasi unar menyangkut bilangan itu sendiri (tunggal), misalnya perpangkatan. Operasi biner menyangkut dua bilangan dalam himpunan yang bersangkutan.

Dalam suatu operasi bilangan yang memuat berbagai macam operasi, telah disepakati bahwa:

- (i) untuk menandakan bahwa suatu operasi dua bilangan harus didahulukan maka digunakan tanda kurung buka dan tutup melingkupi kedua bilangan tersebut beserta operasinya. Jika diperlukan, maka mungkin diperlukan lebih dari satu pasang kurung buka dan tutup. Jika demikian, maka operasi di antara pasang kurung yang terdalam mendahului operasi di dalam pasangan di luarnya.
- (ii) perkalian dan pembagian mempunyai "kekuatan" yang sama, artinya dioperasikan sesuai urutannya.
- (iii) penjumlahan dan pengurangan mempunyai "kekuatan" yang sama, artinya dioperasikan sesuai urutannya.
- (iv) perkalian dan pembagian lebih kuat dari pada penjumlahan dan pengurangan.

Pada dasarnya perpangkatan dan penarikan akar merupakan operasi unar, yang operasinya terhadap sebuah bilangan tertentu, sehingga tidak selalu dapat dilakukan terhadap masing-masing bilangan yang dinyatakan dalam bentuk operasi. Jika kemudian ada yang dapat dilakukan, hal tersebut hanya terbatas untuk operasi tertentu saja. Misalnya $(3 + 4)^2 \neq 3^2 + 4^2$ tetapi $(3 \times 4)^2 = 3^2 \times 4^2$ $\sqrt{4+9} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$, tetapi $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{9}$, yang sifat berlakunya dibahas pada bagian lain.

Mengenal Berbagai Jenis Bilangan

Jenis atau macam bilangan berkembang bersamaan dengan perkembangan jaman, dan digunakan untuk mengungkapkan sesuatu. Awalnya mengungkapkan tentang banyaknya sesuatu. Oleh keperluan berikutnya, operasinya memerlukan ungkapan-ungkapan yang lebih lanjut namun perlu juga lebih sederhana. Demikianlah maka ungkapan yang kemudian diwujudkan dalam berbagai lambang juga berkembang. Dari semcam turus sampai terbentuknya lambang yang sekarang digunakan dalam aritmetika, khususnya angka "1", "2", "3", ... dan muncul pula kemudian "0", di samping lambang-lambang dengan angka Rumawi seperti "I", "V", "C", "M", "L", masing-masing dengan variasinya.

Dari perkembangan tersebut kini kita mengenal antara lain:

1. Bilangan Asli: 1, 2, 3, 4, 5, ...
2. Bilangan Cacah: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...
3. Bilangan Bulat: ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,
4. Bilangan Rasional: Bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, a dan b bilangan bulat dengan $b \neq 0$,

misalnya: $\frac{8}{17}$, $\frac{19}{45}$, $3 \left(= \frac{3}{1} = \frac{6}{2} \right)$

Di antara bilangan rasional ada yang merupakan bilangan bulat ada pula yang merupakan bilangan pecah.

Jika bilangan rasional bentuk desimal, maka bagian desimal memiliki perulangan. Perulangannya merupakan sejumlah angka tertentu atau pada 0 (nol).

- (1) Bilangan prima, yaitu bilangan asli yang memiliki tepat dua faktor berbeda, yaitu 1 dan bilangan itu sendiri. Sebaliknya, jika sebuah bilangan tepat mempunyai dua faktor berbeda, bilangan tersebut adalah bilangan prima. Atau: bilangan asli p adalah bilangan prima bila dan hanya bila faktor dari p adalah 1 dan p saja. Contoh: 2, 3, 5, 7, 11, 11111111111111111111, 101,

Beberapa bilangan prima palindrom (bilangan palindrom: bilangan yang jika lambangnya dibaca dari depan dan belakang sama) dan yang agak khusus di antaranya:

30203
133020331
1713302033171
12171330203317121
151217133020331712151
1815121713302033171215181
16181512171330203317121518161

Bilangan prima terbesar yang ditemukan/tercatat sampai 28 Mei 2004 yaitu: $2^{24036583}-1$. Jika dituliskan dengan basis sepuluh, bilangannya dilambangkan dengan 7235733 buah angka. Jika kertas dengan ukuran seperti naskah ini digunakan, tanpa spasi, setiap halaman memuat 3750 buah angka. Berarti untuk menuliskan **sebuah bilangan** itu diperlukan lebih dari 1900 halaman. Kemudian pada 2005 ditemukan yang lebih besar yaitu $2^{25964951}-1$, bilangannya dilambangkan dengan 7816230 buah angka, kemudian $2^{30402457}-1$ (9152052 angka). September 2006 ditemukan prima terbesar $2^{32582657}-1$ (9808358 angka yang belum ada perubahan sampai dengan pukul 04.20 tanggal GMT 29 Oktober 2007.

- (2) Bilangan komposit adalah bilangan asli bukan 1 dan bukan prima.
 (3) Bilangan sempurna adalah bilangan yang jumlah semua pembagiya kecuali dirinya sendiri sama dengan bilangan tersebut. Contoh: $6 = 1 + 2 + 3$ dan $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$
 (4) Bilangan berkekurangan adalah bilangan yang jumlah semua pembagi kecuali dirinya sendiri kurang dari bilangan tersebut. Contoh: 14, karena $1 + 2 + 7 < 14$
 (5) Bilangan berkelebihan adalah bilangan yang jumlah semua pembagi kecuali dirinya sendiri lebih dari bilangan tersebut. Contoh: 12, karena $1 + 2 + 3 + 4 + 6 > 12$
 (6) Bilangan kuadrat diartikan sebagai bilangan yang merupakan kuadrat sempurna dari sebuah bilangan asli. Contoh: $1 = 1^2, 4 = 2^2, 9 = 3^2$
 (7) Bilangan kubik diartikan sebagai bilangan yang merupakan pangkat tiga dari sebuah bilangan asli. Contoh: $1 = 1^3, 8 = 2^3, 27 = 3^3$
 (8) Bilangan aljabar (algebraic number), adalah bilangan yang merupakan akar dari suatu persamaan suku banyak: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$
 Contoh: 2 termasuk bilangan aljabar karena dapat diperoleh dari persamaan- $x - 2 = 0, x^2 - x - 2 = 0$ dan sebagainya
 (9) Bilangan transendental adalah bilangan real yang bukan bilangan aljabar.. Contoh: π

Sistem Bilangan Real

Jika R adalah himpunan bilangan real, maka untuk setiap $a + b = c$, sistem bilangan real berlaku sifat::

- Sifat Tertutup (Closure):* Untuk setiap $a, b \in R$, jika $a + b = c$ dan $a \times b = d$, maka (i) $c \in R$ dan (ii) $d \in R$
- Sifat Asosiatif (Pengelompokan).* Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku: (i) $a + (b + c) = (a + b) + c$ dan (ii) $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
- Ada elemen netral*, yaitu 0 (nol) pada penjumlahan dan 1 pada perkalian. Sesuai namanya maka sifat elemen netral tersebut adalah: Untuk setiap $a \in R$ maka: (i) $a + 0 = 0 + a = a$, dan (ii) $1 \times a = a = a \times 1$
- Elemen Invers.* Setiap bilangan real a mempunyai invers penjumlahan (aditif) yaitu $-a$ (baca: negatif a) dan untuk setiap $a \in R$ dan $a \neq 0$ mempunyai sebuah invers perkalian $\frac{1}{a}$ (kebalikan a). Dalam hal ini: (i) $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ dan $a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a$, asal $a \neq 0$ (*Sifat ini tidak ada dalam sistem bilangan asli*)
- Sifat Komutatif:* Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku: (i) $a + b = b + a$ dan (ii) $a \times b = b \times a$
- Distributif perkalian terhadap penjumlahan:* Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a \times (b + c) = ab + ac$

Latihan 1

- Apakah sistem pada himpunan bilangan bulat dengan operasi pengurangan memiliki sifat:
 - tertutup
 - asosiatif
 - memiliki elemen netral
 - setiap elemen memiliki invers
 - komutatif

- d. Hitunglah 1) 24×26 2) 43×47

Jawab: 1) $24 \times 26 = (20 + 4)(30 - 4)$
 $= 20 \times 30 - 20 \times 4 + 4 \times 30 - 4$
 $= 20 \times 30 + 4 \times (-20 + 30 - 4)$
 $= 20 \times 30 + 4 \times 6$
 $= 600 + 24$
 $= 624$

setiap bilangan diubah menjadi 2 suku

Jawab: 2) $43 \times 47 = (40 + 3)(50 - 3)$
 $= 40 \times 50 - 40 \times 3 + 3 \times 50 - 3$
 $= 40 \times 50 + 3 \times (-40 + 50 - 3)$
 $= 40 \times 50 + 3 \times 7$
 $= 2000 + 21$
 $= 2021$

setiap bilangan diubah menjadi 2 suku

sehingga dapat diduga dan dibuktikan benar bahwa
 $72 \times 78 = 70 \times 80 + 2 \times 8 = 5616$

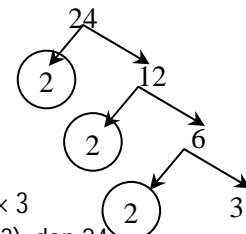
- e. Hitunglah 24×26

Jawab: $24 \times 26 = (25 - 1)(25 + 1)$
 $= 25 \times 25 - 1 \times 25 + 1 \times 25 - 1^2$
 $= 25 \times 25 - 1^2$
 $= 20 \times 30 + 25 - 1$
 $= 600 + 24$
 $= 624$

setiap bilangan diubah menjadi 2 suku

2. Faktor

- a. Sebuah bilangan asli a disebut faktor bilangan asli b , jika b habis dibagi oleh a
b. Salah satu cara menyatakan suatu bilangan dengan faktor primanya adalah dengan "pohon akar", misalnya :



Selanjutnya 24 dapat dinyatakan dalam bentuk faktor: $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

Adapun faktor dari 24 adalah 1, 2, 3, 4 ($= 2^2$), 6 ($= 2 \times 3$), 8 ($= 2^3$), 12 ($= 2^2 \times 3$), dan 24.

- c. Telah diketahui bahwa faktor bulat positif bilangan 24 adalah 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, dan 24. Mendaftar faktor bulat positif dapat dilakukan dengan cara yang memudahkan dalam penyusunannya, yaitu menentukan pembagi bulat dan hasilnya (yang sekaligus juga faktor) secara berdampingan:

1	24
2	12
3	8
4	6

- d. Jika $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ adalah bilangan-bilangan prima dan n bilangan asli, maka $p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times p_3^{k_3} \times \dots \times p_n^{k_n}$ mempunyai faktor sebanyak $(k_1 + 1) \times (k_2 + 1) \times (k_3 + 1) \times \dots \times (k_n + 1)$

Misalnya: $12 = 2^2 \times 3^1$; maka banyak faktornya $= (2 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 = 6$

$24 = 2^3 \times 3^1$; maka banyak faktornya $= (3 + 1) \times (1 + 1) = 4 \times 2 = 8$

- e. Faktor dari 12 adalah 1, 2, 3, 4, 6, dan 12; banyak faktornya 6.
Faktor dari 40 adalah 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 dan 40, banyak faktornya 8
Faktor dari 4 adalah 1, 2, dan 4; banyak faktornya 3
Faktor dari 225 adalah 1, 3, 5, 9, 15, 75, dan 225; banyak faktornya 7
(Banyak faktornya juga dapat dicari dengan cara seperti yang dipaparkan pada d).
Apa yang dapat diduga dari keempat kejadian khusus di atas
Genap atau ganjilkah banyaknya faktor dari 23423445?
Genap atau ganjilkah banyaknya faktor dari 1000000?

3. KPK dan FPB

KPK (Kelipatan Persekutuan Terkecil) dan FPB (Faktor Persekutuan Terbesar) telah dipelajari di SD. Beberapa hal akan diulang dan ditambahkan pada makalah ini.

Pengertian:

KPK dari dua atau lebih bilangan-asli adalah bilangan asli terkecil yang habis dibagi oleh bilangan-bilangan tersebut.

KPK (3, 5) kelipatan 3 → 3, 6, 9, 12, **15**, 18, 21, 24, 30, 33, ...

kelipatan 5 → 5, 10, **15**, 20, 25, 30, .

KPK (3, 5) adalah 15

KPK (6, 12, 18) kelipatan 6 → 6, 12, 18, 24, 30, **36**, 42, 48, 54 ...

kelipatan 12 → 12, 24, **36**, 48, ...

kelipatan 18 → 18, **36**, 54,

Cara lain:

KPK (6, 12, 18) $6 = 2 \times 3$

$12 = 2^2 \times 3$

$18 = 2 \times 3^2$

KPK $= 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

KPK (12, 15, 30) $12 = 2^2 \times 3$

$15 = 3 \times 5$

$30 = 2 \times 3 \times 5$

KPK (12, 15, 30) $= 2^2 \times 3 \times 5 = 60$

Pengertian: **FPB dari dua atau lebih bilangan-asli adalah bilangan asli terbesare yang dapat membagi habis bilangan-bilangan tersebut.**

FPB (3, 8) faktor dari 3 → 1 dan 3 ...

faktor dari 8 → 1, 2, 4, dan 8

FPB (3, 8) adalah 1

Karena pasangan bilangan yang mempunyai hanya sebuah faktor yaitu 1 dinamakan prima relatif, maka dapat pula dinyatakan pasangan bilangan yang FPB-nya 1 adalah **pasangan prima relatif**.

FPB (24, 36) faktor dari 24 → 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

faktor dari 36 → 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, dan 36

FPB (24, 36) adalah 12.

Cara lain

FPB (24, 36) $24 = 2^3 \times 3$

$36 = 2^2 \times 3^2$

FPB (24, 36) $= 2^2 \times 3 = 12$

Hubungan antara KPK dan FPB

Contoh: KPK (12, 18) = 36

FPB (12, 18) = 6

Apa hubungan antara 12 × 18, 36 dan 6?

Misalkan ada dua bilangan asli a dan b , FPB = f dan KPK = k , maka:

$a = f \times m$ dan

$b = f \times n$ dengan m dan n prima relatif

FPB (f_m, f_n) adalah f

KPK (f_m, f_n) = $k = f \times m \times n = fmn$

Karena $a \times b = f^2 mn = f \times fmn$ maka $a \times b = f \times k$

Dengan kata lain: $a \times b = \text{FPB}(a, b) \times \text{KPK}(a, b)$

Dari pertanyaan di atas tampak kesesuaiannya dengan rumus yaitu

$12 \times 18 = 216 = 36 \times 6$

Menentukan KPK dan FPB dengan cara lain lagi:

1) Berapakah KPK dan FPB 48 dan 54?

$$\begin{array}{r} 48 \quad 54 \\ \hline 24 \quad 27 \\ \hline 8 \quad 9 \end{array}$$

FPB = $2 \times 3 = 6$

dan KPK = $2 \times 3 \times 8 \times 9 = 432$

2) Berapakah KPK dan FPB 48 dan 54?

$$\begin{aligned} 54 &= 1 \times 48 + 6 \\ 48 &= 6 \times 8 + 0 \\ \downarrow &\rightarrow \text{FPB} = 6 \\ \text{KPK} &= 48 \times 54 : 6 = 48 \times 9 = 432 \end{aligned}$$

3) Berapakah KPK dan FPB 776 dan 582?

$$\begin{aligned} 776 &= 1 \times 582 + 194 \\ 582 &= 3 \times 194 + 0 \\ \downarrow &\rightarrow \text{FPB} = 194, \text{KPK} = 776 \times 582 : 194 = 776 \times 3 \times 194 : 194 \\ &= 776 \times 3 = 2328 \end{aligned}$$

4. Pelatihan Keterampilan Dasar Melalui Permainan dan Teka-teki

Berbagai macam permainan dapat dikembangkan untuk melatih berbagai operasi dasar dalam bilangan asli. Beberapa contoh disajikan berikut ini:

a. Teka-teki

Contoh 1

- Pilih bilangan.
- Kalikan dua.
- Tambah empat.
- Bagi dengan dua.
- Kurangi dengan bilangan semula.

Contoh 2

- Pilih sebuah bilangan.
- Kalikan dua.
- Tambah sembilan.
- Tambah dengan bilangan semula.
- Bagi dengan tiga.
- Tambah empat.
- Kurangi dengan bilangan semula.

Siswa yang jika diminta menyebutkan hasil akhirnya bukan 2 pada soal pertama atau 7 pada soal kedua, berarti masih belum terampil dalam melakukan operasi dasar bilangan. Hasil yang khas itu pun merupakan sesuatu yang dirasakan keunikannya oleh siswa sehingga ingin mengetahui, kok dapat seperti itu?

b. Permainan

Permainan bukanlah tujuan, melainkan salah satu sarana untuk memberikan kesenangan dalam mempelajari matematika. Permainan kadang-kadang bersifat investigatif, juga kadang-kadang pemecahan masalah.

Misalnya persegi ajaib. Persegi ajaib sendiri bukan tujuan. Kompetensi yang didukungnya cukup beragam, baik menyangkut kemahiran matematika, maupun kompetensi investigasi. Perhatikanlah persegi ajaib dasar di samping. Selain sifat yang dimiliki bahwa jumlah bilangan yang sekolom, sebaris dan sedagonal adalah sama, adakah sifat lainnya? Jika setiap bilangan ditambah 2, masihkah sifat semula dipenuhi?

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Perhatikan lagi persegi pertama. Jumlahkan kuadrat dari bilangan-bilangan pada baris pertama. Jumlahkan pula kkuadrat dari baris yang ketiga. Apa yang Anda peroleh?

6	11	4
5	7	9
10	3	8

Apakah sifat itu dimiliki juga oleh bilangan-bilangan pada kolom pertama dan ketiga? Apakah dimiliki pula oleh persegi ajaib "baru" (yang kedua?). Apakah berlaku untuk setiap persegi ajaib? bagaimana menunjukkannya?

Jelas di sini bahwa keterampilan mengkuadratkan dan menjumlahkan akan terlatih, di samping terbinanya kemampuan mengeksplorasi atau menginvestigasi situasi yang beraneka ragam namun memiliki sifat yang unik.

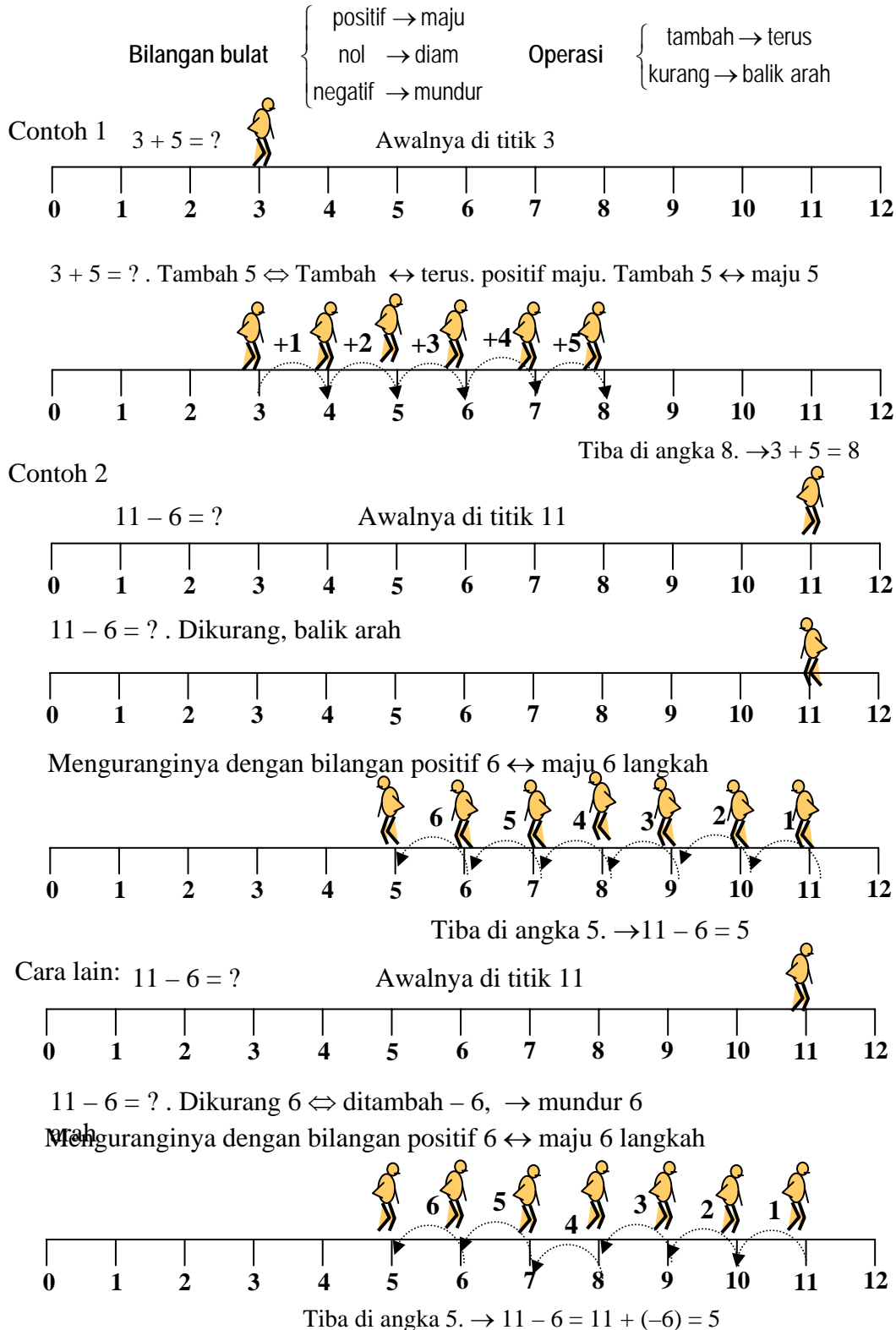
B. BILANGAN BULAT

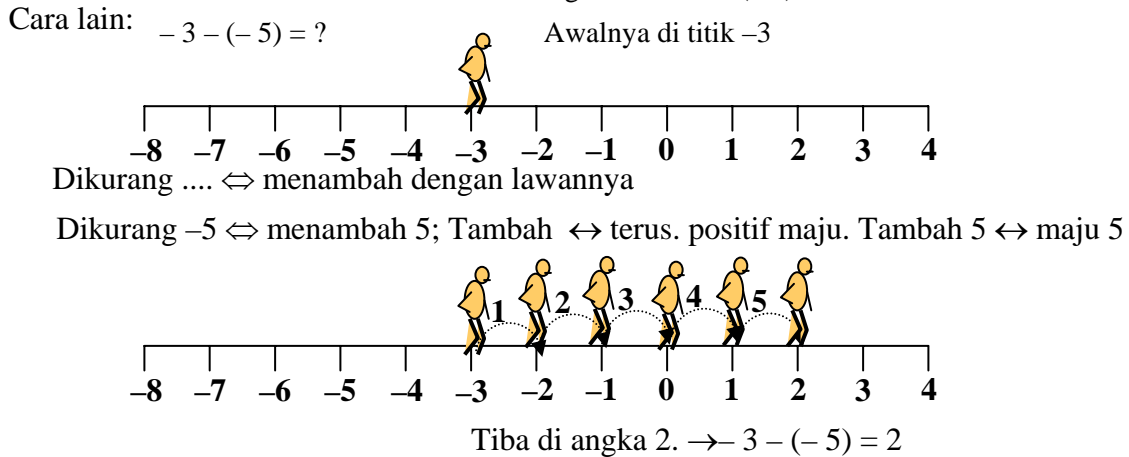
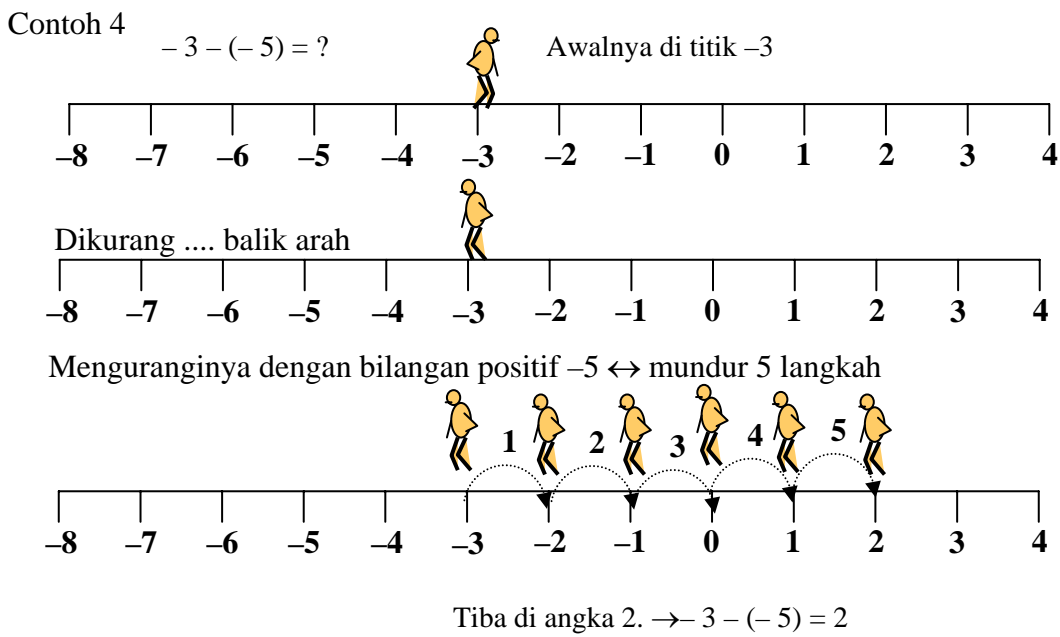
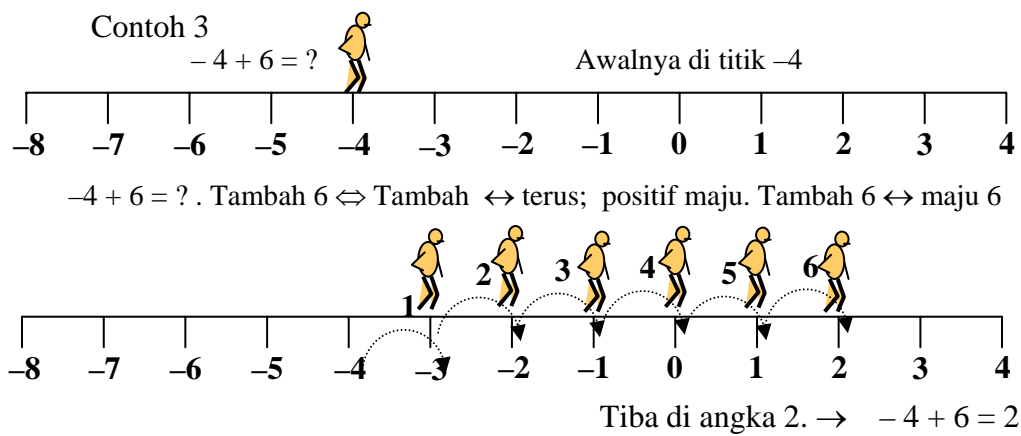
Pada tulisan ini hanya akan disampaikan khususnya yang menyangkut operasi bilangan, lebih khususnya yang memuat bilangan bulat negatif.

1. Penjumlahan dan Pengurangan pada Bilangan Bulat

Penjumlahan bilangan bulat dapat diperagakan dengan alat atau peragaan gerak sepanjang lintasan yang merepresentasikan garis bilangan. Pertama pada bilangan bulat positif dan nol, kemudian dikembangkan ke bilangan bulat seluruhnya.

Salah satu model pembelajaran menggunakan langkah-langkah dalam garis bilangan adalah dengan membuat kesepakatan, misalnya:





Catatan

Dalam pembelajaran, model seperti di atas dilakukan hanya untuk memberikan pengalaman, dan dari situ siswa memiliki "kiat"-nya masing-masing untuk menrerampilkannya. Setelah itu, peragaan tidak diperlukan.

2. Perkalian Bilangan Bulat

Perkalian dan pembagian bilangan bulat merupakan pengembangan dari perkalian dan pembagian bilangan asli. Yang masih sering merupakan masalah adalah pada masalah tanda hasil operasinya.

Meskipun secara formal pembelajaran tentang pola dilakukan sesudah pembelajaran tentang bilangan bulat, namun secara intuitif, pembentukan pola tidak sangat tergantung dari keberadaan materi pola. Perhatikan tabel perkalian berikut:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
5	-5	0	5	10	15	20	25
4	0	4	8	12	16	20
3	0	3	6	9	12	15
2	0	2	4	6	8	10
1	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
-1	0
-2	0
-3	0
-4	0
-5	0

Dengan cara mengisi kotak [...] berdasar pola maka akan diperoleh bahwa:

Hasil kali bilangan bertanda sama hasilnya positif dan jika tandanya berbeda hasilnya negatif, serta setiap bilangan (bulat) dikalikan 0 hasilnya 0 (nol).

Bukti formal hal di atas adalah berdasar beberapa teorema yang mendahului berdasar kesebelas sifat operasi penjumlahan dan perkalian..

Teorema 1 Untuk setiap $a \in R$, berlaku $a \cdot 0 = 0$

Bukti:

Untuk setiap $a \in R$ berlaku $a + 0 = a$

$$a \times (a + 0) = a \times a$$

$$a \times a + a \times 0 = a \times a$$

$$-(a \times a) + (a \times a) + a \times 0 = -(a \times a) + a \times a$$

$$0 + a \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot 0 = 0$$

sifat bilangan 0 (elemen identitas)

mengalikan kedua ruas dengan a

sifat distributif

kedua ruas ditambah $-(a \times a)$

sifat invers, $-(a \times a) + a \times a = 0$

sifat penjumlahan dengan 0

Teorema 2: Misalkan a dan b bilangan real dan $a \cdot b = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$ (maksudnya: salah satu: $a = 0$ atau $b = 0$, atau kedua-duanya a dan b masing-masing 0)

Bukti: Dari Teorema 1: $a \times 0 = 0$ berlaku untuk setiap $a \in R$.

Jika $a = 0$, maka $a \times b$ dapat dinyatakan dengan $0 \times b$, yang menurut Teorema 1 bernilai 0.

Jadi $a \times b = 0$ dapat terjadi untuk a (saja) = 0

Jika $a \neq 0$, maka $\frac{1}{a}$ ada. Karena yang diketahui $a \times b = 0$, maka

$$\frac{1}{a} \times (a \times b) = \frac{1}{a} \times 0 \quad \text{mengalikan kedua ruas dengan } \frac{1}{a}$$

$$\left(\frac{1}{a} \times a\right) \times b = \frac{1}{a} \times 0 \quad \text{sifat asosiatif perkalian}$$

$$= 0$$

sifat perkalian bilangan dengan 0

$$1 \times b = 0$$

perkalian bilangan dengan kebalikannya

$$b = 0$$

definisi elemen identitas

Jadi, jika $a \times b = 0$ dan $a \neq 0$, maka $b = 0$

Analog dapat dibuktikan: jika $a \times b = 0$ dan $b \neq 0$, maka $a = 0$.

Jika $a = 0$ dan $b = 0$, maka $a \times b = 0$ (sifat perkalian dengan 0). Jadi $a \times b = 0$ dapat terjadi jika a dan b keduanya 0.

Buktikan sendiri kebenaran teorema berikut:

Teorema 3 Untuk setiap $a, b, c, d \in R$ berlaku $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

Teorema 4 Untuk setiap $a, b \in R$, berlaku

(i) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

(ii) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

(iii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

3. Pembagian Bilangan Bulat

Pembagian dua bilangan bulat tidak selalu menghasilkan bilangan tertentu. Dan jika menghasilkan bilangan tertentu pun hasil baginya tidak selalu bilangan bulat. dengan demikian dapat dikatakan bahwa operasi bilangan bulat bersifat tidak tertutup.

Pembagian a dengan b dinyatakan dengan $a : b$ atau $\frac{a}{b}$.

$\frac{a}{b} = c$ bila dan hanya bila $a = b \times c$. Secara singkat: $\frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = b \times c$

Implikasinya antara lain:

- 1) Untuk setiap $b \neq 0$, $\frac{0}{b} = 0$, karena $\frac{0}{b} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \times b$ benar
- 2) $\frac{0}{0} = c \Leftrightarrow 0 = 0 \times c$. Karena $0 \times c = 0$ untuk setiap c , maka c dapat bernilai $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ atau $1\frac{1}{2}, 12\frac{1}{3}$ dan sebagainya. Karena nilainya boleh berapa pun, termasuk bilangan negatif, maka hasil dari $\frac{0}{0}$ dikatakan tidak tertentu.
- 3) Untuk $a \neq 0$, $\frac{a}{0} = c$ tidak mungkin terjadi, sebab jika ada yang memenuhi, $\frac{a}{0} = c \Leftrightarrow a = c \times 0$. Karena $a \neq 0$ tetapi $c \times 0 = 0$, maka hal itu bertentangan. Jadi tidak ada nilai yang memenuhi, atau sering dinyatakan hasilnya tidak terdefinisi.

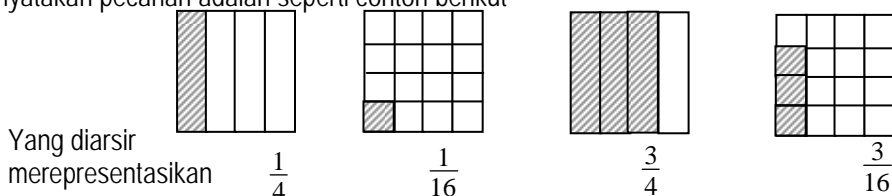
Adapun tanda hasil pembagian dua bilangan, jika ada hasilnya, tandanya dapat positif, negatif atau nilainya 0 (kejadian pertama dari ketiga kejadian di atas)

D. BILANGAN PECAH (PECAHAN sebagai bilangan)

Seperti bilangan bulat, pecahan telah banyak dipelajari di SD. Di sini hanya dibahas bilangan pecah dalam bentuk pecahan biasa, yaitu $\frac{a}{b}$ maupun bilangan pecah dalam bentuk pecahan campuran (bulat dan pecah).

1. Penjumlahan dan Pengurangan

Salah satu kendala yang banyak dijumpai adalah penjumlahan dan pengurangan bilangan, yang umumnya lebih besar dari pada kendala pada perkalian pecahan. Seperti telah dipelajari di SD, maka salah satu cara menyatakan pecahan adalah seperti contoh berikut

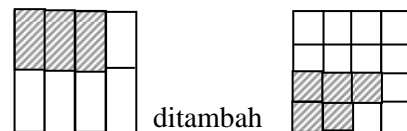


Pecahan-pecahan $\frac{1}{4}$ dan $\frac{1}{16}$ adalah contoh pecahan satuan, yaitu pecahan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan $a = 1$, b

bilangan asli > 1 . Untuk menyatakan satuannya, maka disebut dengan bagian bawah dari bentuk pecahan itu. Selanjutnya bagian bawah yang menyatakan per "berapa" dikatakan sebagai penyebut, yaitu untuk menyebutkan satuannya.

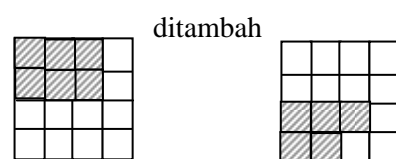
Misalkan berapakah $\frac{3}{8} + \frac{5}{16}$?

Jika digambarkan, maka didapat:



Bentuk representasinya dapat diubah menjadi: yaitu penjumlahan pecahan 6 buah seperenambelasan ditambah dengan 5 buah seperenambelasan = 11 buah seperenambelasan.

$$\text{Jadi } \frac{3}{8} + \frac{5}{16} = \frac{6}{16} + \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$



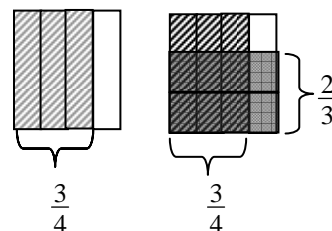
Demikianlah maka "satuan pecahan"-nya sama atau "penyebut sama" merupakan syarat kemudahan penjumlahan (dan juga pengurangan) bilangan pecah, karena selanjutnya tinggal menjumlahkan (atau mengurangkan) banyaknya bagian bulatnya (kemudian dibagi penyebut).

2. Perkalian dan Pembagian

Perkalian

Diagram di samping yang diarsir double (dua macam) menggambarkan dua pertiganya tiga perempat, yaitu $\frac{6}{12}$. Bilangan 6 dapat diperoleh dari hasil kali 2×3 (pembilang), 12 dari 3×4 (penyebut). dengan kata lain,

Jika $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ pecahan-pecahan yang terdefinisi, maka $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$



Pembagian

Berapakah hasil $\frac{3}{16} : \frac{5}{8}$?

Jawab $\frac{3}{16} : \frac{5}{8}$ dapat dituliskan sebagai $\frac{3}{16} \times \frac{8}{5}$. Hasil ini tidak berubah jika dikalikan 1. Sedangkan 1 dapat

dinyatakan dalam bentuk lain berupa pecahan, asal pembilang dan penyebutnya sama.

$$\frac{3}{16} : \frac{5}{8} = \frac{3}{16} \times \frac{8}{5} = \frac{3 \times 8}{16 \times 5} = \frac{3 \times 8}{16 \times 5} = \frac{3}{5}$$

Cara kerja tersebut menuntun pada bentuk umum: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ?$

$$\text{Jawab: } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Secara singkat $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Latihan 2

- Hitunglah tanpa melakukan perkalian biasa dengan alat tulis:
 - 91×89
 - 98^2
 - 205^2
- Tanpa melakukan perkalian biasa dengan alat tulis hitunglah: a. 97×99 b. 98×103
- Berikan masing-masing 2 contoh bilangan asli yang memiliki:
 - tepat 3 faktor berbeda bilangan asli
 - tepat 4 faktor berbeda bilangan asli
 - tepat 5 faktor berbeda bilangan asli
 - tepat 6 faktor berbeda bilangan asli
- Tanpa mencari faktor-faktornya, carilah berapa banyak faktor bilangan 2400?
- Banyaknya semua faktor berbeda dari semua bilangan asli 1 sampai dengan 2007 dijumlahkan, hasilnya p. Apakah p genap, atautkah ganjil? Beri alasan!
- Carilah FPB dan KPK a. 720 dan 640 b. 2701 dan 21243
- Carilah bilangan asli, yang jika dibagi 2 bersisa 1, dibagi 3 bersisa 2, dibagi 4 bersisa 3, dibagi 5 bersisa 4, dibagi 6, bersisa 5, dan dibagi 7 bersisa 6.
- Segulung kain bahan baju seluruhnya sepanjang 62 m, dipotong-potong sama sebanyak mungkin, masing-masing sepanjang $1 \frac{3}{4}$ m. Berapa meter sisanya?
- Pada Kalender Jawa, selain urutan hari: Senin, Selasa, ...Minggu dikenal pula "pasaran": Pon, Wage, Kliwon, Legi, Paing. Jika tanggal 25 November 2007 adalah hari Minggu Legi,
 - Pada tanggal berapakah hari Minggu Legi berikutnya?
 - Pada tanggal berapakah hari Rabu Wage pertama kali setelah 25 November 2007?
 - Apa hari dan pasaran tanggal 20 Desember 2007?
- Ada 50 buah dadu di dalam 5 buah kotak (tak ada kotak kosong). Jumlah dadu pada kotak I dan II adalah 27, Jumlah dadu pada kotak II dan III adalah 23, Jumlah dadu pada kotak III dan IV adalah 18, dan Jumlah dadu pada kotak IV dan V adalah 13. Berapa banyak dadu pada masing-masing kotak?

III. WAKTU, JARAK DAN KECEPATAN

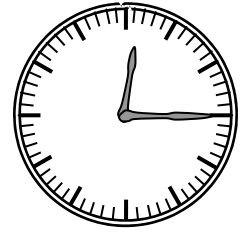
A. WAKTU

Sampai saat ini, sistem waktu yang digunakan adalah sistem seksagesimal.

Telah diketahui bahwa 1 hari terdiri dari 24 jam, dan:

$$1 \text{ jam} = 60 \text{ meni}; \quad 1 \text{ menit} = 60 \text{ detik}$$

$$\text{Jadi } 1 \text{ jam} = 60 \times 60 \text{ detik} = 3600 \text{ detik}$$



Contoh: Berapakah selisih waktu antara pukul 19.35 dan pukul 11.55?

Jawab: Karena bagian menit waktu yang lebih akhir (“besar”; yang dikurangi) kurang dari menit waktu pengurangnya, maka terlebih dahulu dilakukan perubahan: pukul 19 lewat 35 menit sama dengan pukul 18 lebih 1 jam 35 menit atau pukul 18 lebih 95 menit

$$\begin{array}{r} 19.35 \rightarrow 18. \quad 95 \\ \quad \quad \quad 10. \quad 55 \\ \hline \end{array} \quad (-)$$

8 jam dan 40 menit

Jadi selisih waktunya 8 jam 40 menit

B. HUBUNGAN WAKTU, JARAK DAN KECEPATAN

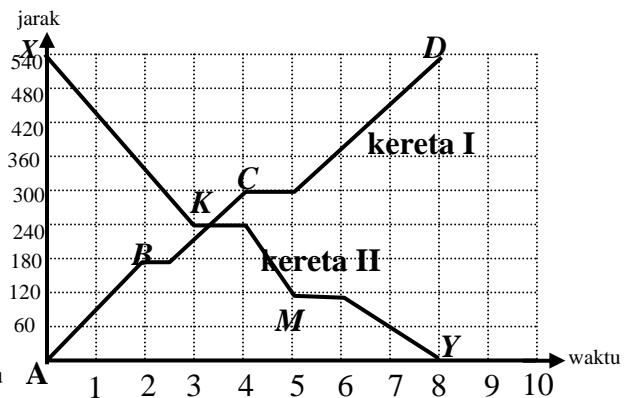
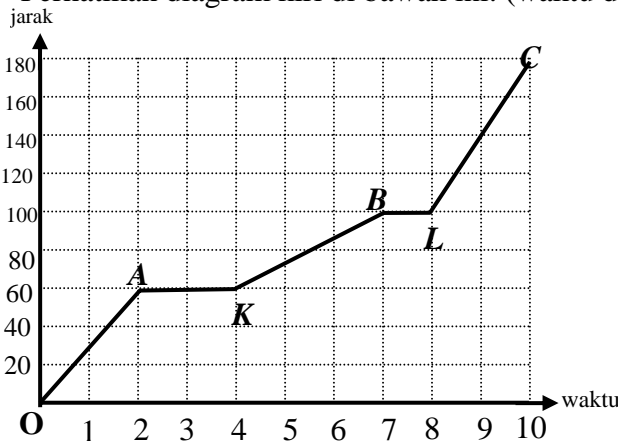
Kecepatan adalah panjang lintasan atau jarak yang ditempuh selama satuan waktu tertentu. Jika tidak ada ketentuan lain, maka kecepatan yang dimaksud adalah kecepatan yang tidak berubah dengan perubahan waktu. Atau kecepatan perjalanannya merupakan kecepatan rata-rata.

Jarak yang ditempuh berbanding lurus dengan kecepatan dan waktu tempuhnya. Jika jarak tempuhnya s satuan jarak, kecepatannya v satuan jarak/waktu dan waktu tempuhnya t satuan waktu maka ada hubungan:

$$s = v \times t \Leftrightarrow v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$$

1. Gafik perjalanan

Perhatikan diagram kiri di bawah ini. (waktu dalam jam)



- 1) Berapa selang waktu yang diperlukan untuk menempuh jarak 60 km pertama? Jadi pada selang 2 jam pertama berapa kecepatan perjalanan yang digambarkan itu
- 2) Antara jam yang ke-4 sampai dengan ke-7, berapa kecepatannya?
- 3) Berapa yang ditempuh selama 7 jam pertama? Jadi berapa kecepatan rata-rata perjalanan selama 7 jam pertama? Samakah dengan rata-rata kecepatan dari hasil soal 1 dan 2?
- 4) Berapa waktu yang diperlukan untuk menempuh perjalanan 180 km sejak awal? Jadi berapa kecepatan rata-ratanya?

Kedua grafik perjalanan menunjukkan grafik perjalanan kereta api yang keduanya melintasi rute yang sama dan masing-masing berhenti dua kali pada stasiun-stasiun tertentu. $A, B, C, D, K,$ dan M adalah nama-nama stasiun.

- 1) Stasiun manakah X dan Y masing-masing?
- 2) Di kota manakah kedua kereta api berpapasan? Berapa jarak yang telah mereka tempuh masing-masing? Apakah keduanya berhenti bersamaan? Beri penjelasan.

2. Perjalanan yang berlawanan arah

Misalkan Ali di kota A dan Budi di kota B . Keduanya ingin bertemu.

Jika Ali tetap di A dan Budi ke A , maka kapan mereka akan bertemu tergantung kecepatan perjalanan Budi. Jika Ali juga melakukan perjalanan, maka mereka makin cepat bertemu. Semakin cepat perjalanan Budi, semakin cepat mereka bertemu. Dengan kata lain, jarak antara A dan B dapat ditempuh sesuai dengan jumlah kecepatan Ali dan Budi.

Contoh: Kota A dan B berjarak 160 km. Ali di A menuju B dan Budi di B menuju A . Jika Ali menggunakan sepeda dengan kecepatan rata-rata 20 km/jam dan Budi menggunakan sepeda motor dengan kecepatan rata-rata 60 km/jam, dimanakah mereka berpapasan?

Jawab: Cara I

Ali dan Budi berpapasan setelah mereka menempuh perjalanan dalam waktu yang sama. Kecepatan mereka berdua menjadi $(60 + 20)$ km/jam = 80 km/jam, untuk menempuh perjalanan

160 km. Jadi waktu yang diperlukan = $\frac{160}{80}$ jam = 2 jam

Ali bersepeda 2 jam menempuh 2×20 km = 40 km

Budi bersepeda motor selama 2 jam menempuh 2×60 km = 120 km.

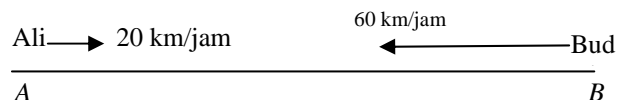
Jadi mereka bertemu di kilometere 20 dari A atau 120 km dari B .

Cara II

Misalkan

kecepatan Ali = v_A km/jam maka $v_A = 20$

kecepatan Budi = v_B km/jam maka $v_B = 60$



Misalkan mereka berpapasan setelah t jam dari saat berangkat, maka

Ali telah menempuh $20t$ km dan Budi menempuh jarak $60t$ km.

Jumlah jarak yang mereka tempuh 160 km

Berarti: $20t + 60t = 160 \Leftrightarrow 80t = 160 \Leftrightarrow t = 2$

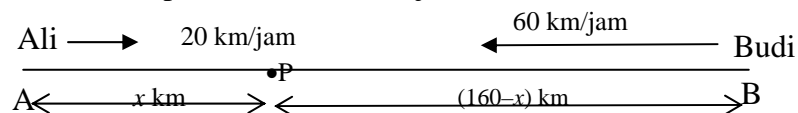
Jadi mereka berpapasan setelah 2 jam. Ali menempuh $20t = 20 \times 2$ km = 40 km

Budi menempuh $60t = 60 \times 2$ km = 120 km

Mereka berpapasan di tempat yang berada 40 km dari A atau 120 km dari B .

Cara III Misalkan kecepatan Ali = v_A km/jam maka $v_A = 20$

kecepatan Budi = v_B km/jam maka $v_B = 60$



Misalkan mereka berpapasan di P , x km dari A , maka $AP = x$ km dan $PB = (160-x)$ km.

Waktu yang diperlukan Ali = $\frac{x}{20}$ jam dan yang diperlukan Budi = $\frac{160-x}{60}$

Mereka berpapasan setelah menempuh perjalanan dalam kurun waktu sama.

$$\frac{x}{20} = \frac{160-x}{60} \Leftrightarrow 60x = 3200 - 20x \Leftrightarrow 80x = 3200 \Leftrightarrow x = 40$$

Jadi mereka berpapasan di P , 40 km dari A .

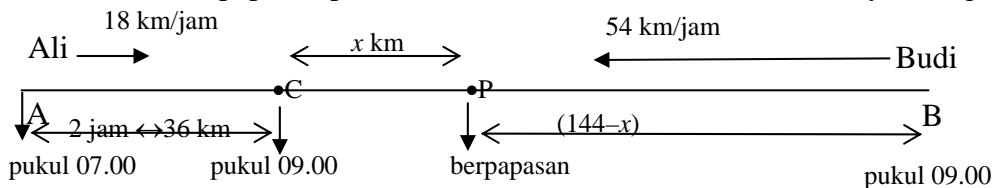
Jika salah seorang berangkat terlebih dahulu, maka selisih waktu antara dua keberangkatan merupakan pengurangan jarak perhitungan yang mereka tempuh bersama.

Contoh:

Misalkan A dan B berjarak 180 km. Ali berangkat dari A pukul 07.00 bersepeda dengan kecepatan rata-rata 18 km/jam. Dua jam kemudian Budi berangkat dengan sepeda motor dari B ke A dengan kecepatan 54 km/jam. Kapan mereka berpapasan?

Misalkan mereka berpapasan di P , dan Ali setelah 2 jam pertama tiba di C . Maka jarak AC adalah 2×18 km dari $A = 36$ km. Dengan demikian maka jarak BC adalah 180 km $- 36$ km = 144 km.

Misalkan mereka berpapasan pada kilometer ke x dari C , maka situasinya sebagai berikut:



Waktu yang diperlukan Ali = $\frac{x}{18}$ jam dan yang diperlukan Budi = $\frac{144-x}{54}$

Mereka berpapasan setelah menempuh perjalanan dalam kurun waktu sama. Berarti:

$$\frac{x}{18} = \frac{144-x}{54} \Leftrightarrow x = \frac{144-x}{3} \Leftrightarrow 3x = 144 - x \Leftrightarrow 4x = 144 \Leftrightarrow x = 36$$

Maka $CP = 36$ km, yang dapat ditempuh oleh Ali selama $\frac{36}{18}$ jam = 2 jam

Jadi mereka berpapasan 2 jam setelah pukul 09.00, yaitu pukul 11.00

Masalah di atas (perjalanan sepanjang \overline{CP}) dapat diselesaikan dengan cara sebagai berikut:

Jarak $CP = 144$ km. Kecepatan Ali 18 km/jam dan Budi 54 km/jam. Karena mereka dari arah yang berlawanan, berarti kecepatan bersama untuk bertemu adalah $(18 + 54)$ km/jam = 72 km jam.

Sisa jarak 144 km dapat dijalani bersama selama $\frac{144}{72}$ jam = 2 jam.

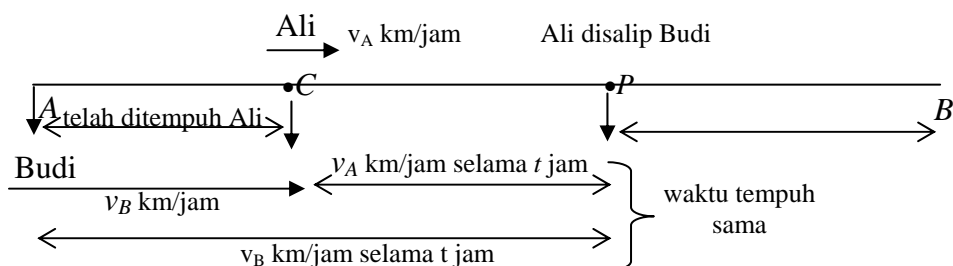
Jadi mereka berpapasan 2 jam setelah pukul 09.00, yaitu pukul 11.00

3. Perjalanan arah dengan arah sama

Misalkan Ali dan Budi yang berada di kota A akan melakukan perjalanan melalui rute perjalanan dari kota A ke B . Ali naik sepeda dengan kecepatan rata-rata 20 km/jam dan beberapa waktu kemudian Budi berangkat ke B dengan rute yang sama dengan rute perjalanan A . Pada kilometer ke berapa dari A Budi menyalip Ali?

Misalkan selisih waktu keberangkatan mereka diketahui, maka dapat dihitung jarak tempuh Ali ketika Budi berangkat.

Jika Ali disalip Budi di P , maka sketsa situasinya adalah sebagai berikut:

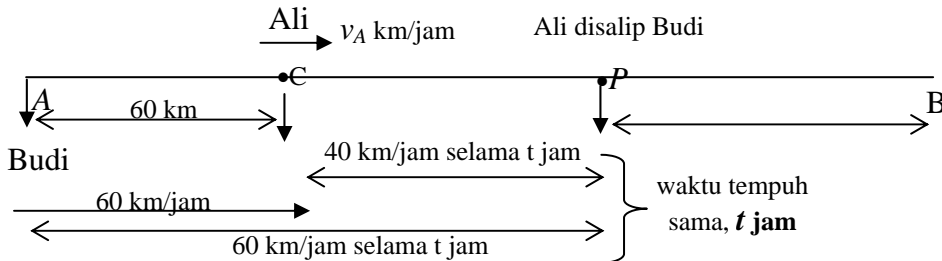


Contoh:

Misalkan Ali dan Budi yang berada di kota A akan melakukan perjalanan melalui rute perjalanan dari kota A ke B. Ali berangkat pukul 07.00 naik sepeda motor dengan kecepatan rata-rata 40 km/jam dan pada pukul 08.30 Budi berangkat ke B dengan rute yang sama dengan rute perjalanan A dengan sepeda motor berkecepatan rata-rata 60 km/jam. Pada kilometer ke berapa dari A Budi menyalip Ali?

Jawab:

Selisih waktu keberangkatan mereka dari pukul 07.00 sampai pukul 08.30 adalah 1,5 jam. Selama itu Ali telah menempuh perjalanan sepanjang $1,5 \times 40 \text{ km} = 60 \text{ km}$. Misal saat itu Ali tiba di C, dan pada saat itu juga Budi berangkat dari A.



Cara I

Misalkan Budi menyalip Ali setelah Budi berjalan t jam dari A, maka $t = \frac{x}{60}$ jam

Dalam kurun waktu t jam tersebut Ali menempuh jarak $(x - 60)$ km dengan kecepatan 40 km/jam. Jadi $t = \frac{x-60}{40} \rightarrow \frac{x}{60} = \frac{x-60}{40} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{x-60}{2} \Leftrightarrow 2x = 3x - 180 \Leftrightarrow x = 180$

Berarti Budi menyalip Ali pada kilometer 180 dari A.

Jarak itu oleh Budi ditempuh selama $\frac{180}{60}$ jam = 3 jam terhitung dari pukul 08.30.

Jadi Budi menyalip Ali pada pukul 11.30.

Cara II

Jika Budi menyalip Ali di P setelah Budi melakukan perjalanan t jam dari A dengan kecepatan 60 km/jam, maka Ali telah melakukan perjalanan selama $(1,5 + t)$ jam dengan kecepatan 40 km/jam. Pada saat Budi menyalip Ali, yang sama adalah jarak yang telah mereka tempuh. Berarti:

$$(1,5 + t) \times 40 = 60 \times t \Leftrightarrow 60 + 40t = 60t \Leftrightarrow 20t = 60 \Leftrightarrow t = 3$$

Budi menyalip Ali 3 jam setelah pukul 08.30, yaitu pukul 11.30

Latihan 3

- Jarak antara Sleman dan Solo 80 km.. Pimpo melakukan perjalanan dari Sleman ke Solo bersepeda dengan kecepatan rata-rata 20 km/jam. Qurdi dari Solo ke Sleman dengan jalur yang sama dengan yang ditempuh Pimpo.bersepeda motor dengan kecepatan rata-rata 40 km/jam. Jika mereka berangkat bersamaan pada pukul 07.00, pukul berapa mereka berpapasan?
- Andi berangkat dari kota A pada pukul 08.15 menuju kota B yang berjarak 245 km, bersepeda motor dengan kecepatan rata-rata 60 km/jam. Pada saat yang sama Benny berangkat dari kota B ke A dengan jalur perjalanan yang sama dengan jalur perjalanan Andi, mengendarai mobil dengan kecepatan rata-rata 80 km/jam. Kapan dan pada kilometer berapa dari A mereka berpapasan?
- Eka dan Denny menempuh jalur perjalanan yang sama dengan arah berlawanan, Eka dari kota P, Denny dari B. Mereka berangkat pada pukul 09.00. Eka mengendarai Vespa dengan kecepatan rata-rata 44 km/jam, Denny mengendarai Honda Tiger dengan kecepatan rata-rata 66 km/jam. Jika jarak kedua kota 275 km,
 - Kapan mereka berpapasan?

- b. Pada kilometer berapa dari A mereka berpapasan?
4. Perhatikan soal 3. Jika Eka berangkat pukul 09.00 dan Denny berangkat pukul 10.15,
- Kapan mereka berpapasan?
 - Pada kilometer berapa dari A mereka berpapasan?
5. Pada pukul 07.00 dari Yogya Chandra menuju Cirebon mengendarai sepeda motor berkecepatan rata-rata 50 km/jam. Setengah jam kemudian Hardy juga dari Yogya ke Cirebon dengan rute sama dengan yang ditempuh Chandra, mengendarai sepeda motor juga tetapi dengan kecepatan 75 km/jam.
- Kapan Hardy menyalip Chandra?
 - Jika jarak Yogya Semarang 120 km, pada kilometer arah kemana dari Semarang Hardy menyalip Chandra?
6. Sebuah perusahaan bus antar propinsi mengoperasikan beberapa bus dari kota A ke B dan sebaliknya.. Bus pertama berangkat dari A pukul 15,00 dengan kecepatan rata-rata 60 km/jam. Bus kedua berangkat dari A pukul 17.30 tanpa banyak berhenti di perjalanan sehingga kecepatan rata-ratanya 75 km/jam.
- Kapan bus kedua menyusul bus pertama?
 - Jika bus kedua tiba di kota B pukul 05.00 hari berikutnya, pukul berapa bus pertama tiba di B ?

IV. PERBANDINGAN SENILAI DAN BERBALIK NILAI

A. PERBANDINGAN SENILAI

Pak Bonar memiliki sebuah mobil. Untuk perjalanan sejauh 10 km, mobil itu memerlukan 1 liter bensin.

Dengan kata lain, 1 liter pertama bensin digunakan untuk menempuh jarak 10 km,
1 liter kedua digunakan untuk menempuh jarak 10 km

2 liter digunakan untuk menempuh jarak 20 km
1 liter ketiga digunakan untuk menempuh jarak 10 km lagi

3 liter digunakan untuk menempuh jarak 30 km, demikian seterusnya,
4 liter digunakan untuk menempuh jarak 40 km
5 liter digunakan untuk menempuh jarak 50 km
⋮

Data di atas dapat disajikan dalam tabel berikut :

	Banyak Bensin (liter)	Jarak Tempuh (km)	
10 km ke-1	1 ←————→	10	Baris ke-1
10 km ke-2	2 ←————→	20	Baris ke-2
10 km ke-3	3 ←————→	30	Baris ke-3
10 km ke-4	4 ←————→	40	Baris ke-4
10 km ke-5	5 ←————→	50	Baris ke-5
⋮	⋮	⋮	⋮
x	x ←————→		Baris ke-x

Tampak adanya korespondensi satu-satu di antara banyaknya bensin (dalam liter) dengan jarak tempuh mobil (dalam km). Hubungan seperti itu disebut perbandingan senilai. Ciri dari perbandingan senilai di antaranya adalah sebagai berikut :

a. Semakin jauh jarak yang ditempuh akan memerlukan semakin banyak bensin. Begitu juga sebaliknya, semakin sedikit bensin yang disediakan akan semakin dekat jarak yang dapat ditempuh.

Dua besaran dikatakan berbanding senilai yaitu jika besaran yang satu dikalikan k kali, maka demikian juga bilangan yang kedua. Demikian juga jika besaran pertama dibagi dengan k, maka yang kedua juga dibagi k. Secara ringkas:

jika yang pertama dikali atau dibagi k, maka yang kedua juga dikali atau dibagi dengan k.

Secara umum, **besaran a dan b dikatakan berbanding senilai, yaitu jika a diperbesar k kali, maka b juga diperbesar menjadi k kali.**

$$a \leftrightarrow b \Rightarrow ka \leftrightarrow kb$$

$$\Rightarrow a : k \leftrightarrow b : k$$

Contoh: baris ke-2: $2 \leftrightarrow 20, \Rightarrow$ Baris ke-4 : $2 \times 2 \leftrightarrow 2 \times 20$

b. Pada dua baris yang sama, perbandingan dua besaran di kolom kiri akan senilai dengan perbandingan dua besaran di kolom kanan. Perhatikan baris ke-2 dan baris ke-4 berikut :

Baris ke-2	2 ←————→ 20
Baris ke-4	4 ←————→ 40

Sebagai mana dinyatakan tadi, perbandingan pada kolom kiri adalah $4 : 2 = 2 : 1$ akan sama dengan perbandingan pada kolom kanan yaitu $20 : 10 = 2 : 1$.

Demikianlah seterusnya bila diselidiki lebih lanjut. Perbandingan dengan ciri seperti itu disebut dengan **perbandingan senilai**. Pada perbandingan senilai, nilai perbandingan dua besaran pada ruas kiri sama atau senilai dengan nilai perbandingan dua besaran, asal kedua perbandingan itu terletak pada dua baris atau keadaan yang bersesuaian

Dua hal penting di atas dapat digunakan untuk menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan perbandingan senilai ini. Paling tidak dikenal tiga cara untuk menyelesaikan soal-soal itu yaitu dengan perhitungan berdasar :

- hasil kali
- satuan
- perbandingan

1. Perhitungan berdasar hasil kali

Sebagaimana dinyatakan di atas tadi, jika suatu besaran di kolom kiri diperbesar atau diperkecil n kali maka besaran yang bersesuaian di kolom kanan akan diperbesar atau diperkecil n kali juga.

$$a \leftrightarrow b \Rightarrow ka \leftrightarrow kb$$

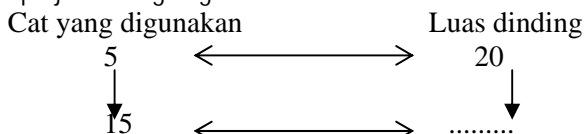
$$\Rightarrow a : k \leftrightarrow b : k$$

Jadi, pada perbandingan senilai, suatu baris bisa didapat dari baris lainnya dengan jalan mengalikan atau membagi dengan bilangan yang sama. Sifat inilah yang menjadi dasar penyelesaian soal berdasar hasil kali berikut.

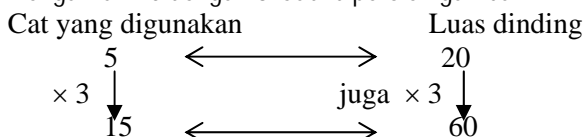
Contoh:

Buce adalah seorang tukang cat, yang iminta mengecat di rumah seorang yang membangun rumah baru. Biasanya, dengan 5 liter cat merk tertentu ia dapat mengecat dinding seluas 20 m². Luas dinding yang diminta kepadanya untuk dicat adalah 80 m². Yang memiliki rumah menyediakan 15 liter dengan merk yang sama yang biasa digunakan Buce. Berlebih atau kurangkah persediaan catnya?

Jawab: Soal di atas dapat diperjelas dengan gambar berikut :



Karena 15 diperoleh dari mengalikan 5 dengan 3, maka luas dinding yang dapat dicat dengan 15 liter tersebut diperoleh dengan mengalikan 20 dengan 3. Jadi diperoleh gambar:



Jadi dengan 15 liter hanya dapat dicat seluas 60 m². Cat yang disediakan kurang.

2. Perhitungan berdasar satuan.

Perhitungan berdasar satuan ini banyak didasarkan pada perhitungan berdasar hasil kali. Untuk menyelesaikan soal berdasar satuan, maka dari yang diketahui, lebih dahulu dicari nilai besaran untuk 1 satuan. Setelah itu baru dikalikan dengan besaran yang ditanyakan.

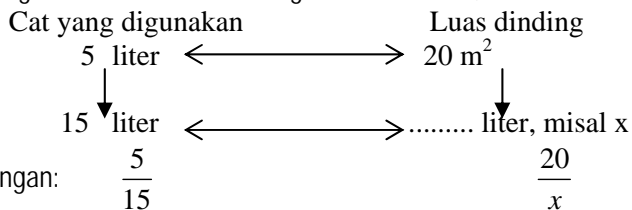
Soal di atas dapat diselesaikan dengan perhitungan berdasar satuan sebagai berikut:

Yang digunakan	Luas hasil pengecatan
5 liter	20 m ²
↓ dibagi 5 → dibagi 5 ↓	
1 liter	4 m ²
↓ kali 15 → dikali 15 ↓	
15 liter	60 m ²

Jadi dengan 15 liter akan dapat dicat 60 m². Berarti persediaan catnya kurang

3. Perhitungan berdasar perbandingan.

Perhitungan berdasar perbandingan ini menggunakan sifat perbandingan senilai yaitu perbandingan dua elemen. Karena yang dapat dibandingkan adalah besaran dengan satuan sama, maka situasi:



Karena keduanya senilai, berarti $\frac{5}{15} = \frac{20}{x} \Leftrightarrow 5x = 15 \times 20 \Leftrightarrow x = 60$

Jadi dengan 15 liter akan dapat dicat 60 m². Berarti persediaan catnya kurang

Latihan 4

1. Apakah yang berikut ini merupakan kejadian perbandingan senilai? Berikan penjelasan!
 - a. banyaknya tenaga kerja harian dengan upah yang mereka terima
 - b. banyaknya buku tulis jenis tertentu dengan harga yang harus dibayar
 - c. banyaknya baju sejenis dengan ongkos pembuatannya
 - d. banyaknya baju sejenis yang dijemur dengan kurun waktu yang diperlukan untuk mengeringkannya
 - e. tinggi tumpukan gelas dengan banyak gelas

- f. lamanya waktu benda jatuh bebas dari berbagai ketinggian
 - g. besarnya ukuran cc silinder sepeda motor dengan nilai jual sepeda motor
 - h. banyaknya pekerja yang diperlukan dengan waktu penyelesaian suatu pekerjaan
 - i. Banyaknya cairan di suatu bejana dengan suhu cairan tersebut.
2. Jika k adalah konstanta, dalam bentuk persamaan $V = kxyz^2$, apakah
 - a. V berbanding senilai dengan k?
 - b. V berbanding senilai dengan x?
 - c. V berbanding senilai dengan y?
 - d. V berbanding senilai dengan z?
 - e. x berbanding senilai dengan y?
 Berilah penjelasan.

Kerjakan soal No. 3 dan 4 masing-masing dengan 3 cara.

3. Delapan orang di suatu kelas sudah membeli buku pelajaran Fisika dengan jumlah harga Rp. 32.000,00. Berapakah yang harus dibayar jika 40 orang siswa seluruhnya membeli buku semacam itu? Kerjakan dengan tiga cara!
4. Dengan kecepatan rata-rata tertentu, sebuah mobil menempuh jarak 108 km dalam dua jam. Berapakah yang dapat ditempuh mobil itu selama 3 jam?
5. Dalam waktu 5 menit, air yang dapat ditampung melalui suatu pipa adalah 18 liter. Bejana penampung air volumenya 640 dm³. Jika airnya dialirkan selama 3 jam apakah bak itu sudah penuh, belum penuh atau airnya telah melimpah?

B. PERBANDINGAN BERBALIK NILAI

Pak Bonar memiliki sebuah mobil. Suatu saat ia menjalankan mobilnya yang berkecepatan 60 km/jam. Artinya, dalam waktu 1 jam, jarak yang ditempuh mobil tersebut adalah 60 km. Di daerah yang cukup padat lalu lintasnya, kendaraan hanya diperbolehkan melaju dengan 30 km/jam? Jika jarak yang ditumpuh 60 km, berapa lama perjalanan dengan berkecepatan 60 km/jam? Berapa pula jika berkecepatan 30 km/jam? Di jalan yang rusak cukup parah mobil itu harus dikurangi kecepatannya. Berapa lama perjalanannya untuk menempuh jarak 60 km bila kecepatannya dikurangi lagi menjadi hanya 20 km/jam, 15 km/jam maupun 10 km/jam saja ?

Jika kecepatannya dikurangi, waktu yang diperlukan untuk menempuh jarak tertentu itu akan semakin besar. Berikut ini akan disajikan tabel yang memuat hubungan antara kecepatan dengan waktu untuk jarak tertentu.

	Kecepatan (km / jam)	Waktu Tempuh (jam)
keadaan ke-1	60	1
keadaan ke-2	30	2
keadaan ke-3	20	3
keadaan ke-4	15	4
keadaan ke-5	10	6
⋮	⋮	⋮
keadaan ke-n	x	y

Tabel di atas menunjukkan adanya korespondensi satu-satu antara kecepatan (dalam km/jam) dengan waktu tempuh (dalam jam). Jika kecepatannya turun, waktu yang diperlukan naik. Jika kecepatannya naik, waktu yang diperlukan berkurang secara beraturan. Hubungan seperti di atas disebut perbandingan berbalik nilai.

Secara umum, ciri dari perbandingan berbalik nilai di antaranya adalah sebagai berikut :

Semakin rendah kecepatan mobil akan diikuti dengan semakin banyaknya waktu tempuh. Sebaliknya, semakin cepat mobil melaju akan diikuti dengan semakin pendek lama waktu tempuhnya.

Secara umum, jika besaran di kolom kiri dikali n akan berakibat pada besaran yang bersesuaian di kolom kanan harus dibagi n kalinya. Namun jika besaran di kolom kiri dibagi n akan berakibat pada besaran yang bersesuaian di kolom kanan harus dikali n kalinya.

Dengan demikian, suatu keadaan bisa didapat dari keadaan lainnya dengan jalan mengalikan n pada kolom kirinya namun harus membagi dengan n pada kolom kanannya. Sebagai contoh, perhatikan keadaan ke-2 dan ke-5 berikut :

keadaan ke-2	30	2
	↓ : 3	↓ × 3
keadaan ke-5	10	6

Tabel di atas menunjukkan bahwa keadaan ke-5 dapat diperoleh dari keadaan ke-2 dengan membagi 3 pada 30 di kolom kiri dan mengalikan 3 pada 2 di kolom kanan. Sedangkan Tabel di bawah ini menunjukkan sebaliknya, keadaan ke-2 bisa didapat dari keadaan ke-4 dengan mengalikan 3 pada 10 di kolom kiri dan membagi 3 pada 6 di kolom kanan.

keadaan ke-2	$30 \leftarrow \quad \rightarrow 2$ $\uparrow \times 3 \quad \quad \quad \uparrow : 3$
keadaan ke-5	$10 \leftarrow \quad \rightarrow 6$

Pada dua keadaan yang sama, perbandingan dua besaran di kolom kiri akan berbalik nilai dengan perbandingan dua besaran di kolom kanan. Bandingkan keadaan ke-2 dan keadaan ke-5 berikut :

keadaan ke-2	$30 \leftarrow \quad \rightarrow 2$ $\uparrow 10 : 30 \quad \quad \quad \uparrow 6 : 2$
keadaan ke-5	$10 \leftarrow \quad \rightarrow 6$

Jika besaran pada keadaan ke-5 dibandingkan dengan besaran yang ada pada keadaan ke-2 akan didapat :
Perbandingan pada kolom kiri $10 : 30 = 1 : 3$ akan berbalik nilai dengan perbandingan pada kolom kanannya yaitu $6 : 2 = 3 : 1$ karena pada kolom kiri didapat $1 : 3$ namun pada kolom kanan didapat $3 : 1$.

Demikianlah seterusnya bila diselidiki lebih lanjut. Perbandingan dengan ciri seperti itu disebut dengan perbandingan berbalik nilai. Pada perbandingan berbalik nilai, nilai perbandingan dua besaran pada kolom kiri akan merupakan kebalikan dari perbandingan dua besaran pada kolom kanan asal kedua perbandingan itu terletak pada dua keadaan yang bersesuaian

Keadaan ke-2	$30 \leftarrow \quad \rightarrow 2$ $\uparrow \times 3 \quad \quad \quad \uparrow : 3$
Keadaan ke-4	$10 \leftarrow \quad \rightarrow 6$

Secara sederhana:

$$a \leftrightarrow b \Rightarrow ka \leftrightarrow b/k$$

$$\Rightarrow a : k \leftrightarrow b \times k$$

Dengan kata lain: hasil kali antara kedua ruas merupakan suatu konstanta atau nilainya tertentu, yaitu ab .

Dengan demikian, seperti halnya pada perbandingan senilai, maka untuk menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan perbandingan berbalik nilai ini dikenal perhitungan berdasar :

- hasil kali
- satuan
- perbandingan

Contoh

Dari kota A ke kota B, sebuah kendaraan dapat menempuhnya selama 6 jam dengan kecepatan rata-rata 60 km/jam. Jika jarak itu akan ditemuhnya selama 5 jam saja, berapa rata-rata kecepatan mobilnya?

1. Perhitungan berdasar hasil kali.

Jawab:

Untuk menempuh jarak tertentu, jika ingin menempuh dalam waktu yang lebih pendek, tentu saja diperlukan kecepatan yang lebih. Dengan demikian maka hubungan antara kecepatan dan waktu tempuh merupakan perbandingan berbalik nilai. Dengan demikian kerangka penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

Kecepatan (km/jam)	Waktu tempuh (jam)
60	6
x	5

Jarak yang ditempuh sama, dan jarak itu merupakan hasil kali kecepatan dan waktunya. dengan demikian maka:
 $60 \times 6 = x \times 5 \Leftrightarrow x = 72$

Jadi kecepatan yang diperlukan agar dapat ditempuh hanya dalam 5 jam adalah 72 km/jam.

2. Perhitungan berdasar satuan

Soal yang sama pada cara 1 akan diselesaikan dengan cara 2.

Untuk menempuh 1 perjalanan diperlukan kecepatan 60 km/jam dengan waktu 6 jam

Berarti dengan kecepatan 1 km/jam dan waktu 6 jam ditempuh $\frac{1}{60}$ perjalanan.

dengan kecepatan 1 km/jam dan waktu 1 jam ditempuh $\frac{1}{6} \times \frac{1}{60} = \frac{1}{360}$ perjalanan.

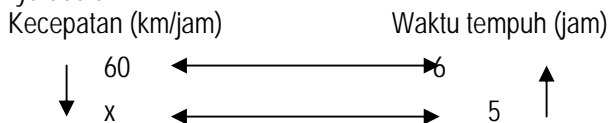
Jika waktunya 5 jam akan diperoleh $5 \times \frac{1}{360}$ perjalanan. = $\frac{1}{72}$ perjalanan.

Jadi dengan waktu 5 jam 1 jarak perjalanan tersebut harus ditempuh dengan kecepatan 72 km/jam.

3. Perhitungan berdasar perbandingan

Soal pada cara 1 dikerjakan dengan cara 3 sebagai berikut.

Masalahnya adalah:



Dengan alasan sama, masalahnya menyangkut perbandingannya berbalik nilai, sehingga "arah perbandingannya" berbalik seperti digambarkan di atas. Diperoleh:

$$\frac{60}{x} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 5x = 360 \Leftrightarrow x = 72$$

Jadi kecepatan rata-ratanya 72 km/jam.

Latihan 5

- Manakah di antara yang dibawah ini merupakan kejadian perbandingan berbalik nilai?
 - banyaknya tenaga kerja harian dengan kecepatan menyelesaikan pekerjaan
 - banyaknya buku tulis jenis tertentu dengan harga yang harus dibayar
 - tinggi tumpukan gelas dengan banyak gelasnya
 - banyaknya baju sejenis yang dijemur dengan kurun waktu yang diperlukan untuk mengeringkannya
 - banyaknya anggota keluarga dengan banyaknya beras yang perlu ditanak
 - lamanya waktu benda yang dilemparkan ke atas dengan ketinggiannya
 - besarnya ukuran cc silinder sepeda motor dengan nilai jual sepeda motor
 - banyaknya pekerja yang diperlukan dengan waktu penyelesaian suatu pekerjaan
 - Banyaknya cairan di suatu bejana dengan suhu cairan tersebut.
- Suatu pekerjaan dapat diselesaikan oleh 20 orang dalam 15 hari. Berapa lama pekerjaan itu selesai dikerjakan oleh 25 orang dengan kemampuan sama dengan pekerja sebelumnya?
- Suatu pekerjaan dapat diselesaikan oleh 30 orang dalam 15 hari. Berapa pekerja dengan kemampuan sama harus ditambahkan agar pekerjaan itu dapat dipercepat 5 hari?
- Suatu pekerjaan jika dikerjakan oleh 5 orang tenaga profesional dapat selesai dalam 48 hari, sedangkan jika dikerjakan oleh 9 orang non profesional selesai dalam 32 hari. Berapa lama pekerjaan itu dapat diselesaikan oleh 3 orang profesional dan 6 orang non profesional?
- Suatu pekerjaan jika dikerjakan oleh 6 orang tenaga profesional dapat selesai dalam 30 hari, sedangkan jika dikerjakan oleh 5 orang non profesional selesai dalam 48 hari. Jika hanya tersedia 3 orang profesional sedangkan pekerjaan itu harus selesai dalam 30 hari, berapa orang non profesional harus dipekerjakan?

V. BILANGAN BERPANGKAT DAN BENTUK AKAR

A. ARTI PANGKAT DAN SIFAT OPERASI BILANGAN BERPANGKAT

Masalah 1

Amuba adalah makhluk hidup yang istimewa. Misalkan ada seekor amuba. Dalam lingkungan tertentu, ia membesar, kemudian kira-kira dalam sehari membelah dirinya menjadi 2 ekor. Dalam periode relatif sama setiap masing-masing membelah menjadi 2 ekor sehingga menjadi 4 ekor. Satu periode yang sama berikutnya setiap belahan membelah menjadi 2 ekor sehingga menjadi 8 ekor. Demikian seterusnya. Jika satu periode berselang selama sehari dan tak ada amuba yang mati, maka sebulan kemudian, setiap ekor amuba berkembang menjadi 1073741824 ekor, lebih dari 1 milyar. Dalam setahun, berapa amuba yang terjadi?

Masalah 2

Seorang menabung di bank yang memberi bunga berganda bulanan misalnya Rp 1.000.000,00 dengan bunga 1% per bulan. Bagaimana cara menghitung dan menyatakan nilai akhirnya setelah 3 tahun? Mana yang lebih menguntungkan dibandingkan dengan menabung di bank yang memberikan bunga berganda 12% per tahun?

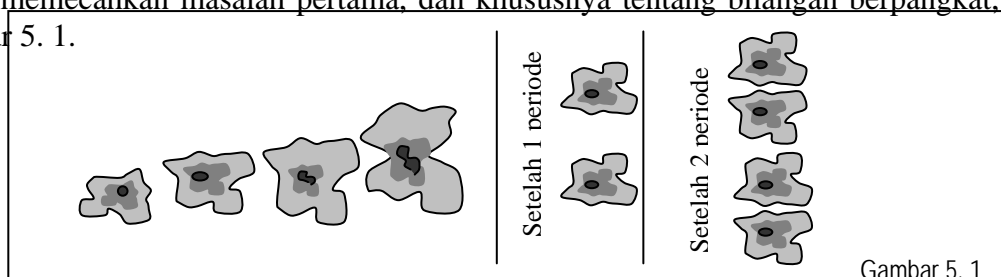
Kedua persoalan di atas adalah sebagian kecil masalah yang terkait dengan bilangan berpangkat.

1. Pengalaman Belajar

Tugas 1
Pelajarilah:

Bilangan Berpangkat

Untuk memecahkan masalah pertama, dan khususnya tentang bilangan berpangkat, perhatikanlah Gambar 5. 1.



Lengkapilah Tabel 1 berdasar perkembangan banyaknya amuba sesuai uraian masalah di atas:

Tabel 1. Tabel perkembangan amuba

setelah ... hari	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	1	1	1	1	1	1	20
banyak amuba	1	2	4	8	16
	2^2	2^3

Perhatikan Tabel 1 terutama baris kedua dan ketiga:

2. Perpangkatan Bilangan Rasional dan Sifat-sifatnya

a. Pangkat Bulat Positif

Tugas 2

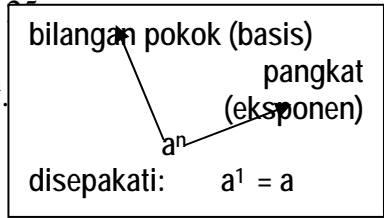
Nyatakan hasilnya dalam bentuk perkalian berulang.

- 1) Kolam air berbentuk balok dengan permukaan berupa persegi yang panjang sisinya 25 m. Berapa luas permukaan airnya?
- 2) Sebuah bak berbentuk kubus mempunyai kedalaman 6 dm. Berapa liter air yang dapat ditampungnya?

Perkalian berulang sebuah bilangan dapat dinyatakan dengan perpangkatan bilangan tersebut.

25×25 dinyatakan dengan 25^2 atau 25^2 berarti 25×25
 6^3 berarti $6 \times 6 \times 6$

- 3) Dari butir 1) dan 2), cobalah deskripsikan makna dari a^n .
 Adakah syarat-syarat nilai n pada bentuk di atas?



b. Sifat Operasi Bilangan Berpangkat Bulat Positif

Tugas 3

Lengkapilah dan jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut untuk memahami sifat operasi bilangan berpangkat.

1) Perkalian Bilangan Berpangkat

a) Lengkapilah: (i) $5^2 \times 5^7 = (\dots \times \dots) \times (\dots)$
 \dots
 $= (\underbrace{\dots \times \dots}_{\dots \text{ faktor } 5}) \times (\underbrace{\dots \times \dots \times \dots \times \dots}_{\dots \text{ faktor } 5})$
 $= \underbrace{\dots \times \dots \times \dots \times \dots}_{(\dots + \dots) \text{ faktor } 5} \times \dots = 5^{\dots + \dots}$

- (ii) Kerjakan seperti (i) untuk $5^7 \times 5^2$
 (iii) Kalikanlah 8 dengan 64. Bandingkan dengan hasil pengisian pada Tabel 1, dan hasil kali $8 (= 2^3)$ dengan $64 (= 2^6)$. Apakah hasilnya bersesuaian/sama?
 (iv) Kerjakan seperti (iii) untuk $2^6 \times 2^3$ dan $2^5 \times 2^6$.

- b) Berdasar butir 1a) di atas, menurut Anda apakah hasil dari $a^p \times a^q$?
 Lengkapi yang berikut ini untuk meyakinkan kebenaran dugaan Anda:

$$\left. \begin{array}{l} a^p = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{\dots \text{ buah faktor } a} \\ a^q = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{\dots \text{ buah faktor } a} \end{array} \right\} a^p \times a^q = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{\dots \text{ buah faktor } a} \times \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{\dots \text{ buah faktor } a} = a^{\dots}$$

sebanyak \dots buah faktor a

Jadi $a^p \times a^q = \dots$

- c) Berdasar butir 1b) di atas, nyatakan hasilnya dalam bentuk perpangkatan:
 (i) $3^7 \times 3^{11}$ (ii) $7^{17} \times 7^{23}$ (iii) $x^{23} \times x^{12}$

2) Pembagian Bilangan Berpangkat

a) Salin dan lengkapilah:

$$\frac{5^8}{5^6} = \frac{\overbrace{5 \times 5 \times 5 \times \dots \times 5}^{\dots \text{ faktor dari } 5}}{\underbrace{5 \times 5 \times 5 \times \dots \times 5}_{\dots \text{ faktor dari } 5}} = \frac{\overbrace{5 \times 5 \times 5 \dots \times 5}^{6 \text{ faktor dari } 5}}{\underbrace{5 \times 5 \times 5 \dots \times 5}_{6 \text{ faktor dari } 5}} \times \overbrace{5 \dots}^{\dots \text{ faktor dari } 5} = \overbrace{5 \times \dots}^{(\dots - \dots) \text{ faktor dari } 5} = 5^{\dots}$$

- b) Kerjakan seperti butir 2a) untuk: (i) $3^7 : 3^6$ dan (ii) $2^{36} : 2^4$
 c) Dugaan apakah yang Anda peroleh untuk $a^p : a^q$?
 Buktikan bahwa $a^p : a^q = a^{p-q}$ untuk setiap $p > q$, p dan q bilangan asli, untuk meyakinkan kebenaran dugaan tersebut.
 d) Berdasar perolehan di atas, nyatakan hasil operasi berikut dalam bentuk bilangan berpangkat. (i) $5^{18} : 5^7$ (ii) $3^{21} : 3^{12}$ (iii) $2^{32} : 2^8$ (iv) $3^{24} : 3^{12} \times 3^7$

3) Perpangkatan Bilangan Berpangkat

Dari $a^5 = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{5 \text{ faktor dari } a}$, maka $(a^5)^4$ merupakan berapa kelompok (faktor) perkalian masing-masing a^5 ?

- a) Nyatakan $(a^5)^4$ tersebut dalam perkalian faktor yang sama.
Ada berapa faktor? Darimana diperolehnya?
- b) Dari $a^p = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_p$, nyatakan $(a^p)^q$ dalam bentuk sejumlah faktor sama yaitu a. Ada berapa faktor? Dari mana?
- c) Jadi $(a^p)^q = \dots$
- d) Berdasar rumus tersebut, nyatakan dalam bilangan berpangkat bentuk paling sederhana dari: (i) $(5^2)^7$ (ii) $(2^3)^6$ (iii) $(2^6)^3$ (iv) 8^7 (bilangan pokok 2)

4) Perpangkatan dari Perkalian Bilangan

- a) Lengkapilah: $(2 \times 3)^7 = \underbrace{(2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times \dots \times (2 \times 3)}_{\dots \text{ faktor masing-masing } (2 \times 3)} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{\dots \text{ faktor dari } \dots} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times \dots \times 3}_{\dots \text{ faktor dari } \dots} = \dots \times \dots$
- b) Kerjakan seperti di atas untuk $(3 \times 7)^8$.
- c) Buktikanlah bahwa $(ab)^p = a^p \times b^p$.
- d) Berdasar yang Anda peroleh pada butir a dan b di atas, nyatakan dalam bentuk perpangkatan dengan pokok bilangan prima: (i) 6^7 (ii) 15^{12} (iii) 30^8

5) Perpangkatan Pecahan

- a) Salin dan lengkapilah: $\left(\frac{2}{3}\right)^7 = \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \dots \times \left(\frac{2}{3}\right)}_{\dots \text{ faktor dari } \dots} = \frac{\overbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}^{\dots \text{ faktor dari } \dots}}{\underbrace{\dots \times \dots \times \dots \times \dots}_{\dots \text{ faktor dari } \dots}} = \frac{\dots \dots}{\dots \dots}$
- b) Buktikanlah bahwa $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$. Syarat apa yang harus dipenuhi oleh b? Alasannya?
- c) Berdasar yang Anda peroleh pada butir b di atas, nyatakan dalam bentuk pecahan dari bilangan berpangkat dengan pokok bilangan prima: (i) $\left(\frac{8}{9}\right)^5$ (ii) $\left(\frac{4}{27}\right)^7$ (iii) $\left(\frac{27}{12}\right)^4$

c. Pangkat Bulat

- Tuliskan barisan berikut dalam bilangan berpangkat:
 - 100.000, 10.000, 1.000, 100, ...
 - 32, 16, 8, 4, 2, ...
- Berdasar pola pangkatnya, tuliskan kembali barisan di atas dan lanjutkan masing-masing dengan lima suku berikutnya.
- Berapa nilai 10^0 ? Berapa nilai 2^0 ? Apa yang Anda perkirakan tentang nilai a^0 ? Adakah syarat untuk nilai a tersebut?
- Dari dua pola di atas, bentuk lain manakah yang dapat Anda gunakan untuk menuliskan a^{-n} ? Adakah syarat nilai a? Mengapa demikian?
- Cobalah untuk setiap anggota kelompok Anda mencoba beberapa operasi antar bilangan berpangkat dengan pangkat negatif, setiap anggota berbeda dari yang lain. Kemudian diskusikan, apakah sifat-sifat dari yang dikerjakan pada butir 1 sampai dengan butir 5 berlaku juga untuk bilangan bulat negatif dan 0 (nol). Tuliskan sifat-sifat itu beserta syaratnya.

Catatan:

kata depan	10 pangkat	kata depan	10 pangkat
tera	12	centi	-2
giga	9	milli	-3
mega	6	micro	-6
kilo	3	nano	-9
hecto	2	pico	-12
deka	1	femto	-15
deci	-1	atto	-18

Latihan 1

- Sederhanakanlah, dan nyatakan pangkatnya dengan pangkat positif.

a. (i) $\frac{1}{2^{-3}}$ (ii) $\left(\frac{1}{5^{-6}}\right)^2$ (iii) $\left(\frac{1}{5^{-6}}\right)^{-3}$ (iv) $\left(\frac{2^{-3}}{3^{-6}}\right)^{-2}$ (v) $\left(\frac{a^{-p}}{b^{-q}}\right)^{-1}$

b. (i) $\left(\frac{9^4 2^{-5}}{12^3}\right)^{-2}$ (ii) $\frac{7a^{-5}b^2}{(-2a^3b)^3} : \frac{21a^{-3}b^2}{4a^{-1}b}$

2. Hitung: (i) $\frac{2^3 + 2^2 + 2^1}{2^{-3} + 2^{-2} + 2^{-1}}$ (ii) $\frac{2^n + 2^{n-1}}{2^{n+1} - 2^n}$

3. Uang sebesar Rp 1.000.000,00 disimpan di sebuah bank yang memberikan bunga 10% per tahun. Jika selama 6 tahun tidak pernah diambil, dan bunganya disertakan sebagai tabungan tambahan (bunga majemuk), nyatakan dalam bilangan berpangkat berapa rupiah nilai akhir tabungan itu pada akhir tahun ke-6.

B. AKAR SUATU BILANGAN

1. Pengertian Akar Kuadrat

Pelajarilah uraian berikut, kemudian jawablah pertanyaan-pertanyaannya atau kerjakan tugasnya.

Sebuah taman luasnya 100 m^2 . Jika taman itu berbentuk persegi, berapa ukuran panjang taman itu?

Karena persegi yang panjang sisinya p satuan panjang luasnya p^2 satuan luas, maka pertanyaan di atas adalah mencari suatu bilangan positif yang jika dikuadratkan hasilnya 100. Bilangan itu adalah 10. Sebuah bilangan positif yang kuadratnya adalah 100 ditulis dengan $\sqrt{100}$ dan biasa ditulis singkat dengan $\sqrt{100}$, dibaca “akar pangkat dua dari seratus” atau secara singkat “akar seratus”. Jadi $\sqrt{100} = 10$ karena $10^2 = 100$. Jika pada persoalan di atas luas tanahnya 225 m^2 maka ukuran panjang persegi adalah 15 m, dari $\sqrt{225} = 15$ karena $15^2 = 225$. Proses memperoleh nilai $\sqrt{100}$ atau $\sqrt{225}$ di atas dinamakan *penarikan akar*.

Untuk setiap $a \geq 0$ dan $b \geq 0$, $\sqrt{b} = a$ jika dan hanya jika $a^2 = b$

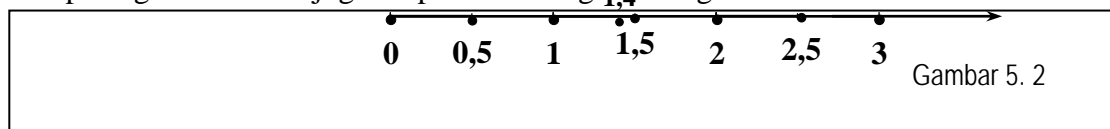
Contoh: $\sqrt{25} = 5$ karena $5^2 = 25$ dan $\sqrt{1,44} = 1,2$ karena $(1,2)^2 = 1,44$.

2. Bilangan Irasional

Jika pada masalah di atas luas taman berbentuk persegi itu 200 m^2 , berapakah ukuran panjang taman itu? Adakah bilangan rasional yang jika dikuadratkan hasilnya 200?

Jika kita mengukur panjang sesuatu, misalnya panjang ruas garis, maka panjang itu senantiasa dibandingkan dengan satuan panjang yang telah ditentukan, atau dalam banyak hal dibandingkan dengan satuan ukuran panjang yang telah dibakukan.

Dengan dasar tersebut maka setiap bilangan rasional dapat digambarkan pada sebuah garis lurus. Setiap bilangan rasional berpadanan dengan panjang ruas garis terhitung dari titik awal atau titik nolnya. Ujung ruas garis itu ditandai oleh sebuah titik yang menandakan batas panjang ruas garis tersebut (Lihat Gambar 5. 2). Yang menjadi permasalahan adalah sebaliknya: apakah setiap titik pada garis tersebut juga berpadanan dengan bilangan rasional.

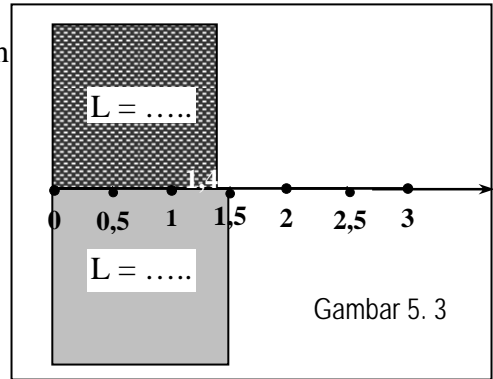


Untuk menjawab pertanyaan itu jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut

Berapakah luas persegi-persegi pada Gambar 5. 3 berikut?

- Dengan memperhatikan hasil pada butir 1 di atas, di antara dua ukuran (bilangan) manakah panjang sisi persegi yang luasnya 2 satuan luas?

- Lengkapilah yang di bawah ini, dan bila perlu lanjutkan, kemudian nyatakan di antara bilangan-bilangan manakah ukuran panjang sisi persegi yang luasnya 2 satuan luas. Misalnya panjang persegi adalah p , maka dapat dituliskan dalam Tabel 2 sebagai berikut



Tabel 2

panjang persegi	luas persegi	
$1,4 < p < 1,5$	$(1,4)^2 < 2 < (1,5)^2$	$1,96 < 2 < 2,25$
$1,41 < p < 1,42$	$(1,41)^2 < 2 < (1,42)^2$	$\dots < 2 < \dots$
$1,414 < p < 1, \dots$	$\dots^2 < 2 < \dots^2$	$\dots < 2 < \dots$
	$\dots < 2 < \dots$	

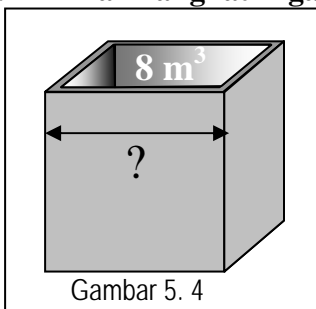
- Perkirakan, berapa panjang sisi persegi (4 tempat desimal atau lebih) yang luasnya 2 satuan? Kemudian kuadratkan bilangan perkiraan Anda. Apakah hasilnya 2?
- Uraian di atas dan perkiraan tersebut mengindikasikan bahwa tidak ditemukan bilangan rasional positif yang jika dikuadratkan hasilnya adalah 2. Bilangan tersebut seperti pada uraian di atas dilambangkan dengan $\sqrt[2]{2}$ (dibaca: akar kuadrat dari 2 atau akar pangkat dua dari 2; selanjutnya hanya ditulis $\sqrt{2}$), yaitu bilangan positif yang jika dikuadratkan hasilnya adalah 2. Jika luas persegi adalah 1,96 satuan luas, maka panjang sisinya adalah 1,4 satuan panjang dan dapat dinyatakan dengan $\sqrt{1,96}$ satuan panjang. Dengan kata lain $\sqrt{1,96} = 1,4$. Ini menunjukkan bahwa tidak semua penarikan akar bilangan rasional menghasilkan bilangan irasional.

Bilamanakah akar kuadrat sebuah bilangan merupakan bilangan rasional?

Tugas 4

Pelajarilah uraian berikut, kemudian jawablah pertanyaan-pertanyaannya atau kerjakan tugasnya.

3. Akar Pangkat Tiga



Tangki air yang bagian dalamnya berbentuk kubus dapat menampung sebanyak 8 m^3 air. Berapa ukuran bak air itu?

Jika panjang sisi bagian dalamnya p meter, maka $p \times p \times p = 8$

Bentuk itu dapat dituliskan dengan $p^3 = 8$. Bilangan yang jika dipangkatkan 3 hasilnya 8 dilambangkan dengan $\sqrt[3]{8}$ (dibaca: akar pangkat tiga dari delapan). Dari uraian di atas $\sqrt[3]{8} = 2$. Dengan kata lain $\sqrt[3]{8} = 2$ bila dan hanya bila $2^3 = 8$. Secara umum:

$$\sqrt[3]{a} = b \text{ bila dan hanya bila } b^3 = a$$

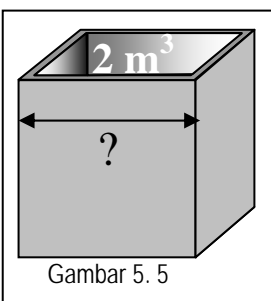
Contoh:

(i) $\sqrt[3]{64} = 4$ karena $4^3 = 64$

(ii) $\sqrt[3]{0,125} = 0,5$ karena $0,5^3 = 0,125$

Jika volum bak air berbentuk kubus adalah 2 m^3 , berapa ukuran bak air tersebut?

Dengan cara seperti di atas, panjang setiap rusuknya adalah $\sqrt[3]{2}$ (akar pangkat tiga dari 2). Karena $1 < 2 < 8 (= 2^3)$, maka pastilah $1 < \sqrt[3]{2} < 2$.



1. Lengkapilah Tabel 3:

Tabel 3

panjang rusuk kubus	volum kubus	
$1 < 2 < 8$	$1^3 < 2 < 2^3$	$1 < 2 < 8$
$1,2 < p < 1,3$	$(1,2)^3 < 2 < (1,3)^3$	$1,728 < 2 < \dots$
$1,25 < p < 1,26$	$\dots^3 < 2 < \dots^3$	$\dots < 2 < \dots$
$1,256 < p < 1, \dots$	$\dots^3 < 2 < \dots^3$	$\dots < 2 < \dots$

2. Perkirakan, berapa panjang sisi kubus (4 tempat desimal atau lebih) yang volumenya 2 satuan? Kemudian pangkatkan tiga bilangan perkiraan Anda. Apakah hasilnya 2?

Hasil di atas dan hasil pemangkatan tiga perkiraan Anda mengindikasikan bahwa tidak ditemukan bilangan rasional positif yang jika dipangkatkan tiga hasilnya adalah 2. Bilangan yang dilambangkan dengan $\sqrt[3]{2}$ (dibaca: akar pangkat 3 dari 2) dan bukan bilangan rasional. Tetapi tidak semua akar pangkat tiga suatu bilangan rasional hasilnya bukan bilangan rasional. Misalnya: $\sqrt[3]{64} = 4$ (karena $4^3 = 64$) dan $\sqrt[3]{15,625} = 2,5$ (karena $(2,5)^3 = 15,625$).

Bilamanakah akar pangkat tiga sebuah bilangan merupakan bilangan rasional?

Dari banyak percobaan yang terkait dengan lingkaran, ternyata ada bilangan bukan rasional bukan bentuk akar, yaitu π , yang merupakan nilai perbandingan keliling dan diameter sebuah bilangan. Nilai π sampai 20 tempat desimal adalah 3,14159265358979323846, yang jika dilanjutkan sampai ribuan tempat desimal tidak pernah terjadi perulangan desimal. Hal ini menunjukkan π bukan bilangan rasional

Bilangan yang bukan rasional seperti $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, dan π di atas dinamakan **bilangan irasional**. Untuk $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$ dan sebagainya yang diperoleh dengan penarikan akar dinamakan **bilangan irasional bentuk akar** atau secara singkat **bentuk akar**. Himpunan bilangan rasional dan irasional bersama-sama membentuk sebuah himpunan **bilangan real** dan biasa dilambangkan dengan R.

Buatlah diagram atau skema hubungan antara bilangan real, rasional, asli, cacah, nol, dan bulat.

Latihan 2

- Manakah di antara yang di bawah ini merupakan bilangan irasional?
 - $\sqrt{16}$
 - $\sqrt{0,04}$
 - $\sqrt{625}$
 - $\sqrt{0,64}$
 - $\sqrt{0,4}$
 - $\sqrt{25,25}$
 - $\sqrt{0,025}$
 - $\sqrt[3]{0,08}$
 - $\sqrt[3]{216}$
 - $\sqrt[5]{125}$
- Suatu papan berbentuk persegi panjang. Kedua pojoknya yang berhadapan dihubungkan dengan tali lurus. Manakah di antara ukuran tali penghubung yang panjangnya dapat diukur tepat (dengan meteran yang skalanya sampai mm), jika ukuran papan tersebut masing-masing (a) 2,0 m \times 2,1 m dan (b) 4 m \times 6 m.
- Ke dalam sebuah bejana dimasukkan batang kawat lurus yang panjangnya sepanjang mungkin yang dapat masuk ke dalamnya. Manakah di antara panjang kawat yang ukuran kawatnya dapat diukur tepat dengan penggaris/pengukur panjang dan mana yang tidak, jika bejana itu bentuknya:
 - kubus dengan panjang rusuk 2 satuan.
 - kubus dengan panjang rusuk $\sqrt{3}$ satuan.
 - balok dengan ukuran 9 cm \times 12 cm \times 8 cm.
 - balok dengan ukuran 14 cm \times 48 cm \times 12 cm.

$$(2 \times 40 + \dots) \times \dots = \begin{array}{r} 516 \\ 0 \end{array} \quad (86 \times 6 = 516)$$

(ii) Karena $400 < 640,09 < 900$, maka $20 < \sqrt{640,09} < 30$, sehingga:

$$\begin{array}{r} \sqrt{640,09} = 20 + \overset{\circlearrowleft}{5} + \overset{\circlearrowleft}{0,3} \\ 20^2 = \frac{400}{240,09} \quad (-) \\ (2 \times 20 + \overset{\circlearrowleft}{5}) \times \overset{\circlearrowleft}{5} = \frac{225}{15,09} \quad (-) \quad (45 \times 5 = 225 < 240,49) \\ (2 \times 25 + \overset{\circlearrowleft}{0,3}) \times \overset{\circlearrowleft}{0,3} = \frac{15,09}{0} \quad (-) \quad (25,3 \times 0,3 = 15,09) \end{array}$$

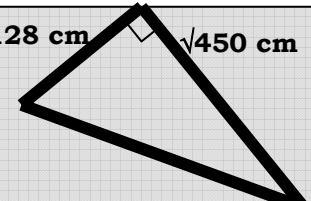
Pertanyaan: Apa yang Anda pikirkan seandainya yang ditarik akarnya bukan bilangan kuadrat sempurna?

Latihan 3

1. Apa dasar yang digunakan dalam teknik penarikan akar? Dapatkah Anda sarankan teknik lainnya tanpa alat bantu hitung?
2. Tentukanlah panjang sisi persegi yang luasnya dinyatakan berikut ini. Jika hasilnya menunjukkan bukan bilangan rasional, carilah nilai pendekatannya sampai 2 tempat desimal.

a. 1521	c. 74529	e. 18,1476	g. 1243,5045
b. 5184	d. 73,96	f. 64,412	h. 463,8244
3. Alas sebuah kolam berukuran $18 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ akan dipasang satu macam ubin berbentuk persegi sebanyak 625 buah. Berapa ukuran setiap ubinnya?
4. Lantai sebuah ruang tamu berukuran $5 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ akan dipasang 100 buah ubin persegi berukuran sama. Berapa ukuran setiap ubin?

C. OPERASI YANG MELIBATKAN AKAR BILANGAN



Berapa meter batang besi yang diperlukan untuk membuat kerangka berbentuk segitiga seperti pada gambar di samping?

Menjumlahkan bentuk akar yang diperlukan seperti masalah di atas memerlukan beberapa pengertian dasar.

Pelajarilah uraian berikut, kemudian kerjakan Latihan 4.

Tugas 6

1. Dasar Operasi

Untuk melakukan operasi yang melibatkan akar bilangan digunakan aturan dasar:

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}, \quad \text{untuk } a \geq 0 \text{ dan } b \geq 0$$

dan selanjutnya: $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}, \quad n \in \mathbb{A}, n \geq 2, \text{ dengan } \sqrt[n]{a^n} = a, \text{ asal } \sqrt[n]{a} \text{ real.}$

Contoh:

(i) $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

(ii) $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

(iii) $\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{2^3 \times 4} + \sqrt[3]{5^3 \times 4} = 2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{4} = 7\sqrt[3]{4}.$

Pada contoh di atas 2 disebut **faktor rasional** pada $2\sqrt{7}$ dan juga pada $2\sqrt[3]{4}$ dan 5 adalah faktor rasional pada $5\sqrt{3}$ dan juga pada $5\sqrt[3]{4}$. Penyederhanaan seperti itu perlu dilanjutkan jika ternyata di bawah tanda akar masih terdapat bilangan kuadrat sempurna atau bilangan kubik. Perhatikan contoh berikut:

$$(iv) \sqrt{48} = \sqrt{4 \times 12} = \sqrt{4} \times \sqrt{12} = 2\sqrt{12}$$

Karena 12 mempunyai faktor kuadrat sempurna yaitu 4, maka masih perlu disederhanakan lagi $\rightarrow 2\sqrt{12} = 2 \times \sqrt{4 \times 3} = 2 \times \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times 2 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

Penyederhanaan juga dapat dilakukan sekaligus sebagai berikut:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

2. Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Irasional Bentuk Akar

Bilangan $k\sqrt{2}$ dengan berbagai nilai k disebut bentuk-bentuk **akar senama**. Misalnya $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ dan $5\sqrt{2}$ adalah bentuk-bentuk akar senama. Demikian pula $5\sqrt{3}$, $7\sqrt{3}$ dan $2\sqrt{3}$ adalah bentuk-bentuk akar senama juga, yang berbeda dengan nama bentuk akar $3\sqrt{2}$.

Penjumlahan dan pengurangan bentuk-bentuk akar dapat dilakukan dengan penyederhanaan hanya jika operasi tersebut dilakukan terhadap bentuk-bentuk akar senama.

Penyederhanaan di atas dilakukan dengan mengoperasikan faktor rasionalnya, kemudian mengalikannya dengan bentuk akar senamanya.

Contoh: Sederhanakan:

$$(i) 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} \qquad (iii) 5\sqrt{3} - \sqrt{12}$$

$$(ii) 6\sqrt{5} - \sqrt{5} + 2\sqrt{5} \qquad (iv) 3\sqrt{98} - 2\sqrt{50}$$

Jawab:

$$(i) \underbrace{2\sqrt{7} + 3\sqrt{7}}_{(2+3)\sqrt{7}} = 5\sqrt{7}$$

$$(ii) \underbrace{6\sqrt{5} - \sqrt{5} + 2\sqrt{5}}_{(6-1+2)\sqrt{5}} = 7\sqrt{5}; \quad (\sqrt{5} = 1\sqrt{5})$$

$$(iii) 5\sqrt{3} - \sqrt{12}$$

Bentuk akarnya belum senama, sehingga $\sqrt{12}$ perlu diubah dulu.

$$5\sqrt{3} - \sqrt{12} = 5\sqrt{3} - \sqrt{4 \times 3} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = (5 - 2)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$(iv) 3\sqrt{98} - 2\sqrt{50} = 3 \times \sqrt{49 \times 2} - 2 \times \sqrt{25 \times 2} \\ = 3 \times 7 \times \sqrt{2} - 2 \times 5 \times \sqrt{2} = 21\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$$

3. Perkalian Bilangan Irasional Bentuk Akar

Perkalian bilangan irasional bentuk akar didasarkan pada aturan dasar:

$$\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}, a \geq 0 \text{ dan } b \geq 0.}$$

Perkalian a dan b dapat dilakukan langsung atau jika \sqrt{a} atau \sqrt{b} dapat disederhanakan, perkalian dapat dilakukan setelah disederhanakan dulu.

Contoh: Sederhanakan:

$$(i) \sqrt{8} \times \sqrt{2} \qquad (ii) \sqrt{3} \times \sqrt{5} \qquad (iii) \sqrt{8} \times \sqrt{54}$$

Jawab:

$$(i) \sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4, \text{ atau} \\ \sqrt{8} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{4} = 2 \times 2 = 4$$

$$(ii) \sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$$

Karena tidak ada faktor 15 (kecuali 1) yang merupakan kuadrat sempurna, maka hasil di atas adalah hasil dalam bentuk yang paling sederhana.

$$(iii) \sqrt{8} \times \sqrt{54} = \sqrt{432} = \sqrt{16 \times 27} = 4 \times \sqrt{9 \times 3} = 4 \times 3 \times \sqrt{3} = 12\sqrt{3}, \text{ atau}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{8} \times \sqrt{54} &= (\sqrt{4} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{9} \times \sqrt{6}) = (2 \times \sqrt{2}) \times (3 \times \sqrt{6}) \\ &= 6 \sqrt{12} = 6 \times \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 6 \times 2 \times \sqrt{3} = 12\sqrt{3}\end{aligned}$$

4. Pembagian Bilangan Irasional Bentuk Akar

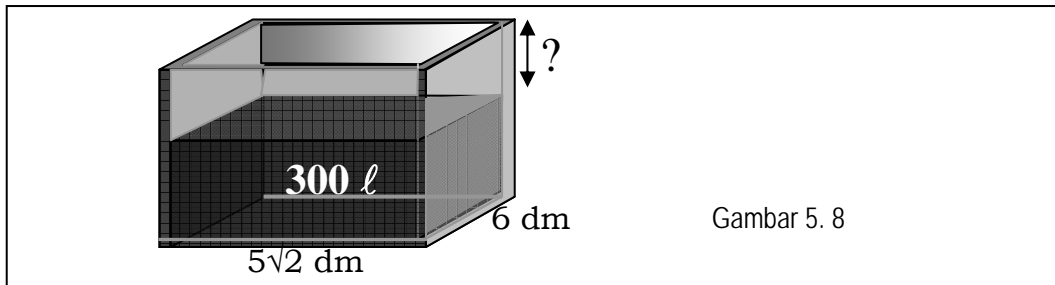
Pembagian dua bilangan irasional bentuk akar menggunakan dasar pembagian sebagai

berikut: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, untuk $a \geq 0$ dan $b > 0$

Contoh: Tentukan hasil pembagian berikut: (i) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{2}}$

Jawab: (i) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$ (ii) $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{96}{2}} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$

5. Merasionalkan Penyebut



Gambar 5.8

Sebuah bejana air berukuran panjang $5\sqrt{2}$ dm, lebar 6 dm dan tinggi 1 m. Bak itu diisi air sebanyak 300 liter. Berapa tinggi permukaan air dari permukaan dalam bak tersebut?

Tinggi permukaan air dari alas bejana adalah $\frac{300}{5\sqrt{2} \times 6}$ dm = $\frac{10}{\sqrt{2}}$ dm. Salah satu masalah adalah menghitung $\frac{10}{\sqrt{2}}$. Hasilnya dapat diperoleh dari $\frac{10}{1,4142\dots}$. Tanpa alat bantu hitung misalnya

kalkulator, pembagian panjang akan memerlukan waktu yang cukup panjang. Tetapi jika pembilang dan penyebutnya dikalikan $\sqrt{2}$, maka hasilnya tidak berubah karena dikalikan 1. Akan diperoleh $\frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = \frac{10 \times 1,4142\dots}{2} = 7,071\dots$

Tampak bahwa cara kedua memudahkan perhitungan. Kegiatan tersebut dikenal dengan **merasionalkan penyebut** pecahan, untuk menghasilkan bentuk lebih sederhana, yaitu bentuk yang tidak memuat penyebut bentuk akar. Langkah dasarnya adalah mengalikan bilangan itu dengan 1 yang dinyatakan dalam bentuk pecahan dengan pembilang dan penyebut sama. Pembilang dan penyebut itu masing-masing adalah bilangan bentuk akar yang jika dikalikan dengan penyebut semula menghasilkan bilangan rasional, dan biasanya dipilih yang paling sederhana.

a. Merasionalkan penyebut pecahan berbentuk $\frac{a}{\sqrt{b}}$ atau $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Contoh:

Sederhanakan dengan merasionalkan penyebut. (i) $\frac{6}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{30}}$

Jawab:

$$(i) \quad \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$(ii) \quad \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{30}} \times \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{30}} = \frac{(\sqrt{9 \times 2}) \times (\sqrt{2 \times 3 \times 5})}{30} = \frac{3 \times 2 \times \sqrt{3 \times 5}}{30} = \frac{\sqrt{15}}{5}, \text{ atau:}$$

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{9 \times 2}}{\sqrt{2 \times 15}} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{3}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

b. Merasionalkan penyebut pecahan dengan penyebut berbentuk $(a\sqrt{b} + c\sqrt{d})$, a , b , c , dan d rasional, serta paling sedikit satu di antara \sqrt{b} dan \sqrt{d} irasional

Dalam aljabar dikenal $(p + q)(p - q) = p^2 - q^2$. Untuk p dan q bilangan-bilangan rasional maupun bilangan irasional bentuk akar (khusus akar kuadrat), maka nilai p^2 dan q^2 pastilah rasional, sehingga $p^2 - q^2$ pasti rasional. Jadi pecahan yang penyebutnya berbentuk $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ (paling sedikit satu di antara \sqrt{b} dan \sqrt{d} irasional) dapat diubah dengan mengalikan pembilang dan penyebut dengan $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$, sehingga penyebut pecahannya adalah

$$(a\sqrt{b} + c\sqrt{d})(a\sqrt{b} - c\sqrt{d}) = a^2b - c^2d, \text{ yang merupakan bilangan rasional.}$$

Contoh: Sederhanakanlah sehingga tidak memuat penyebut dengan bentuk akar.

(i) $\frac{20}{4 + 2\sqrt{3}}$

(ii) $\frac{12\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{20}{4 + 2\sqrt{3}} &= \frac{20}{4 + 2\sqrt{3}} \times \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{20(4 - 2\sqrt{3})}{16 - 12} \\ &= \frac{40(2 - \sqrt{3})}{4} \\ &= 10(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \frac{12\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} &= \frac{12\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{36\sqrt{6} + 24 \times 3}{18 - 12} \\ &= \frac{36(\sqrt{6} + 2)}{6} \\ &= 6(\sqrt{6} + 2) \end{aligned}$$

Latihan 4

1. Sederhanakanlah:

a. $\sqrt{24}$

c. $6\sqrt{75}$

e. $5\sqrt{135}$

g. $6\sqrt{3,125}$

b. $\sqrt{32}$

d. $3\sqrt{56}$

f. $\sqrt{40,5}$

h. $8\sqrt{15,625}$

2. Sederhanakanlah a. $\sqrt[3]{54}$ b. $\sqrt[3]{128}$ c. $3\sqrt[4]{64}$ fd $7\sqrt[5]{64}$ e. $\sqrt[3]{\frac{81}{125}}$

3. Sederhanakanlah:

a. $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2}$

c. $2\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 3\sqrt{5}$

e. $6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

b. $4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

d. $4\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$

f. $2\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$

5. Sederhanakan:

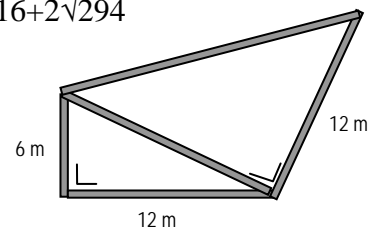
a. $\sqrt{8} + \sqrt{50}$ c. $\sqrt{320} - \sqrt{80}$ e. $3\sqrt{18} + 2\sqrt{8}$ g. $\sqrt{63} + \sqrt{343} - \sqrt{175}$

b. $\sqrt{128} + \sqrt{98}$ d. $\sqrt{320} - \sqrt{20}$ f. $2\sqrt{405} - 3\sqrt{125}$ h. $5\sqrt{54} - 3\sqrt{216} + 2\sqrt{294}$

6. Sederhanakan ($a > 0, b > 0$)

a. $\sqrt{a^3b^6} + ab\sqrt{b^4}$ c. $\sqrt{36a^5b^9} - 2ab^3\sqrt{a^3b^3}$

b. $2a\sqrt{a^4b^7} + 3ab\sqrt{a^4b^5}$ d. $2a^2\sqrt{32a^5b^{10}} + 4ab\sqrt{18a^7b^8}$



7. Berapa meter batang besi diperlukan untuk membuat kerangka besi di samping?

8. Sederhanakan

a. $2\sqrt{7}(3\sqrt{21} - 2\sqrt{14})$

c. $(5\sqrt{3} - 2\sqrt{2})^2$

e. $(3\sqrt{6} - 2\sqrt{5})(3\sqrt{6} + 2\sqrt{5})$

b. $2\sqrt{10}(2\sqrt{35} + 2\sqrt{6})$

d. $(3 - 2\sqrt{2})^2$

f. $(3\sqrt{6} + 2\sqrt{3})^2$

9. Hitunglah luas bangun datar dan bangun ruang yang ketentuannya diketahui berikut ini:

a. Persegi dengan panjang sisi $(6 + 2\sqrt{3})$ cm.

b. Persegipanjang dengan panjang sisi $(4\sqrt{6} + 2\sqrt{3})$ cm dan $(3\sqrt{6} - \sqrt{2})$ cm.

- c. Trapesium ABCD, $AD \perp AB$, $AB \parallel DC$, $AB = (6\sqrt{3} + 4\sqrt{2})$ cm, $DC = (6\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$ cm, $AD = (12\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$ cm.
- d. Kubus, panjang rusuk $(4\sqrt{6} + 3\sqrt{2})$ cm.
- e. Balok, panjang rusuk $(3\sqrt{6} + 2\sqrt{3})$ cm, $(3\sqrt{6} - \sqrt{3})$ cm, dan $(4\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$ cm.
10. Hitunglah panjang sisi persegipanjang yang diketahui luas dan panjang salah satu sisinya. Sederhanakan hasilnya sehingga tidak memuat penyebut bentuk akar!
- a. 20 cm^2 , $\sqrt{48}$ cm e. $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $(5+3\sqrt{3})$ cm i. $18\sqrt{6} \text{ cm}^2$, $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ cm
- b. $\sqrt{32} \text{ cm}^2$, $\sqrt{108}$ cm f. $4\sqrt{5} \text{ cm}^2$, $(2\sqrt{5}-4)$ cm j. $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}) \text{ cm}^2$, $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ cm
- c. 2 cm^2 , $(3+\sqrt{10})$ cm g. 10 cm^2 , $(3\sqrt{2}-\sqrt{7})$ cm
- d. 8 cm^2 , $(7+3\sqrt{5})$ cm h. 12 cm^2 , $(2\sqrt{6}-3\sqrt{2})$ cm
11. Ukuran alas sebuah bejana berbentuk balok adalah $5 \text{ m} \times (6 - 2\sqrt{3})$ m. Volum bejana itu 240 m^3 . Berapakah tinggi bejana?

D. BILANGAN BERPANGKAT DAN BENTUK AKAR

Untuk memahami hubungan antara pangkat dan akar, kerjakan soal yang berikut ini:

1. Misalkan $\sqrt{a} = x$.
- a. Berapakah $(\sqrt{a})^2$?
- b. Jika $a^{\frac{1}{2}} = p$ dan p dikuadratkan, berapa nilai p^2 ? Jadi berapa nilai $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$?
- c. Apa hubungan yang Anda peroleh?
2. Misalkan $\sqrt[3]{a} = x$.
- a. Berapakah $(\sqrt[3]{a})^3$?
- b. Jika $a^{\frac{1}{3}} = p$ dan p dipangkatkan tiga, berapa nilai p^3 ? Jadi berapa nilai $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3$?
- c. Apa hubungan yang Anda peroleh?
3. Misalkan $\sqrt[n]{a} = x$.
- a. Berapakah $(\sqrt[n]{a})^n$? (n bilangan asli minimum 2)
- b. Jika $a^{\frac{1}{n}} = p$ dan p dipangkatkan n , berapa nilai p^n ? Jadi berapa nilai $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$?
- c. Apa hubungan yang Anda peroleh?
4. Gunakan langkah-langkah yang jelas tunjukkan bahwa:
- $$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$
- ! Apa syarat m dan n ? Adakah syarat lainnya?
5. Dari jawaban atas pertanyaan-pertanyaan di atas, dan berdasar pada hubungan pada bilangan berpangkat bulat di atas, nyatakan rumus-rumus yang berlaku bagi operasi bilangan berpangkat dengan pangkat pecahan lengkap dengan syarat variabelnya.

Latihan 5

1. Nyatakan sebagai bilangan berpangkat.
- a. $\sqrt{7}$ b. $\sqrt[3]{15}$ c. $\sqrt[3]{4}$ d. $\sqrt[3]{81}$
2. Nyatakan sebagai bilangan bentuk akar.

a. $2^{\frac{3}{4}}$ b. $7^{\frac{2}{3}}$ c. $7^{\frac{4}{3}}$ d. $9^{\frac{5}{3}}$

3. Hitunglah:

a. $81^{\frac{3}{4}}$ b. $27^{\frac{2}{3}}$ c. $8^{\frac{4}{3}}$ d. $64^{\frac{5}{3}}$

e. $\frac{1}{16^{-\frac{3}{4}}}$ f. $\frac{256^{-\frac{1}{6}}}{16^{-\frac{1}{3}}}$ g. $\frac{243^{-1\frac{1}{5}}}{27^{-2\frac{1}{3}}}$

4. Sederhanakanlah dan nyatakan hasilnya dengan pangkat positif.

a. $a^{1\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-2\frac{1}{2}} \right)$ c. $\left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \right) \left(x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \right)$ e. $\frac{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2}{x\sqrt{x}}$

b. $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \right) \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \right)$ d. $\left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right) \left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right)$

5. Sebuah bank memberikan bunga berganda 21% per tahun untuk setiap tabungan. Jika pada 1 Juli 2004 seseorang menabung di bank itu sebesar Rp 2.000.000,00, berapakah nilai tabungannya pada akhir tahun 2006?

5. Logaritma (Tambahan)

Bentuk $a^n = b$ dapat dipandang dari beberapa segi, yaitu menentukan x dalam bentuk:

- a. $a^n = x$, mencari nilai perpangkatan suatu bilangan, misal $5^7 = x$
- b. $x^n = b$, mencari akar pangkat n dari b $\Rightarrow \sqrt[n]{b} = x$, misal $\sqrt[5]{1024} = x$
- c. $a^x = b$, yaitu mencari pangkat dari suatu bilangan berpangkat yang diketahui hasil perpangkatannya. Untuk menentukan (eksponen) (nilai x) pada persamaan tersebut disebut menentukan logaritma b dengan bilangan pokok a, dilambangkan dengan ${}^a\log b = x$ atau $\log_a b = x$.

Misal $2^x = 8$ ekuivalen dengan $x = {}^2\log 8 = 3$, karena $2^3 = 8$.
 Dikatakan 3 adalah logaritma dari 8 dengan pokok logaritma 2.
 ditulis ${}^2\log 8 = 3$ atau $\log_2 8 = 3$.

Definisi: Untuk setiap $a > 0$ dan $b > 0$ dengan $a \neq 1$

$a^n = b \Leftrightarrow {}^a\log b = n$ atau $\log_a \cdot b = n$

a disebut bilangan pokok (basis)
 untuk a = 10 cukup ditulis $\log b = n$

Karena $a^n = b$ dan $n = {}^a\log b$, maka **$a^{{}^a\log b} = b$**

Contoh 6

Mengubah kebentuk bilangan berpangkat.

- 1. ${}^5\log 125 = 3 \Leftrightarrow 5^3 = 125$
- 2. $\log_4 0,25 = -1 \Leftrightarrow 4^{-1} = 0,25$
- 3. $\frac{1}{2}\log 4 = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

Contoh 7

Mengubah ke bentuk logaritma

- (i) $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow {}^9\log \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$ atau $\log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$
- (ii) $\frac{1^4}{2} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log \frac{1}{16} = 4$ atau $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$

Contoh 8

$$(i) 3^{3 \log 7} = 7 \quad (ii) 8^{2 \log 5} = (2^3)^{2 \log 5} = (2^{2 \log 5})^3 = 5^3 = 125$$

Latihan 6

1. Nyatakan dalam bentuk pangkat yang ekuivalen:

$$\begin{array}{llll} a. {}^3 \log 9 = 2 & d. {}^4 \log 16 = 2 & g. {}^9 \log \frac{1}{27} = -1 \frac{1}{2} & j. {}^{0,001} \log 0,10 = \frac{1}{3} \\ b. {}^5 \log 125 = 3 & e. {}^4 \log 0,25 = -1 & h. {}^{10} \log 1 = 0 & \\ c. {}^2 \log 16 = 4 & f. {}^9 \log 3 = \frac{1}{2} & i. {}^{10} \log 0,01 = -2 & \end{array}$$

2. Nyatakan dalam bentuk logaritma yang ekuivalen

$$\begin{array}{lll} a. 2^5 = 32 & c. 4^2 = 16 & e. 10^3 = 1000 \quad g. 16^{1/2} = 4 \\ b. 3^4 = 81 & d. 2^4 = 16 & f. 10^{-3} = 0,001 \quad h. 16^{1/4} = 2 \end{array}$$

3. Lengkapilah untuk menentukan nilainya

$$\begin{array}{lll} a. 2^{2 \log 9} & c. 7^{7 \log 12} & e. 2^{8 \log 27} \\ b. 3^{3 \log 6} & d. 8^{2 \log 5} & \end{array}$$

(ii) Sifat-sifat Logaritma

Guru dapat membuktikan sifat-sifat logaritma dengan tanya jawab salah satu sifatnya. Rumus-rumus logaritma yang dimaksud adalah sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll} 1. {}^s \log a + {}^s \log b = {}^s \log bc & 5. {}^s \log g^n = n \\ 2. {}^s \log a - {}^s \log b = {}^s \log \frac{a}{b} & 6. {}^a \log b = \frac{{}^g \log b}{{}^g \log a} \\ 3. {}^s \log a^n = n \cdot {}^s \log a & 7. {}^a \log b \times {}^b \log c = {}^a \log c \\ 4. {}^s \log s = 1 \quad {}^a \log 1 = 0 & 8. {}^a \log b^m = \frac{m}{n} {}^a \log b \end{array}$$

Berikut ini ditunjukkan operasi logaritma yang terkait dengan operasi bilangan berpangkat
Bukti sifat (i)

Misalkan $a \log b = x \rightarrow a^x = b$

$${}^a \log c = y \rightarrow a^y = c$$

$$\text{maka } b \cdot c = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$${}^a \log b \cdot c = {}^a \log a^{x+y} = x + y = {}^a \log b + {}^a \log c$$

Jadi ${}^a \log b \cdot c = {}^a \log b + {}^a \log c$

Pembuktian sifat-sifat logaritma lainnya dapat dibuat dalam lembar kerja siswa yang dibuat guru sesuai kondisi peserta didik dalam penugasan atau kegiatan lain.

Contoh 13

$$2 \log 6 + 2 \log 9 + 2 \log \frac{64}{27} = 2 \log 6 \cdot 9 \cdot \frac{64}{27} = 2 \log \frac{2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 64}{27} = 2 \log 2 \cdot 2^6 = 2 \log 2^7 = 7$$

Contoh 14

$$(i). {}^3 \log 12 - {}^3 \log 4 = {}^3 \log \frac{12}{4} = {}^3 \log 3 = 1$$

$$(ii). {}^5 \log 64 = {}^5 \log 2^6 = 6 \cdot {}^5 \log 2$$

$$(iii). \frac{1}{2} \log 0,125 = \frac{1}{2} \log \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3$$

(iv). Jika $\log 2 = a$ dan $\log 3 = b$, maka nyatakan ${}^2 \log 9$ dalam a dan b

$$\text{Jawab: } {}^2 \log 9 = {}^2 \log 3^2 = 2 \cdot {}^2 \log 3 = 2 \cdot \frac{\log 3}{\log 2} = 2 \left(\frac{b}{a}\right) = \frac{2b}{a}$$

Latihan 7

- Gunakan sifat-sifat logaritma, kemudian hitunglah:
 - ${}^2\log 20 + {}^2\log 0,8$
 - ${}^3\log 6 + {}^3\log 4,5$
 - ${}^3\log 12 - {}^3\log 108$
 - ${}^3\log 18 + {}^3\log 45 - {}^3\log 10$
 - ${}^2\log 7 \times {}^7\log 9 \times {}^3\log 8$
 - ${}^2\log 5 \times {}^7\log 8 \times {}^{25}\log 49$
- Jika $\log 2 = 0,3010$ dan $\log 3 = 0,4771$, hitunglah: a. $\log 12$ b. $\log 25$ c. $\log 15$
- Diketahui ${}^2\log 3 = a$. Nyatakan ${}^{27}\log 16$ dalam a
- Diketahui ${}^2\log 7 = a$. dan ${}^{49}\log 5 = b$ Nyatakan ${}^{27}\log 25$ dalam a dan b
- Jika $\log(x+1) + \log(x-2) = \log(x+6)$, apakah $x+1 = x-2 = x+6$? Mengapa Carilah x dari hubungan di atas.
- Apakah $\log(x+2)^2 = 2 \times \log(x+2)$ berlaku untuk setiap nilai x? Mengapa?
- Jika ${}^2\log(x+3) < 1$, apakah selalu benar $x+3 < 2$ sehingga yang memenuhi adalah setiap x yang kurang dari 1? Beri penjelasan.

VI. POLA BILANGAN, BARISAN, DAN DERET

PENDAHULUAN

Sejak berabad-abad, orang banyak tertarik pola matematis. Orang-orang Mesir dan Yunani kuno banyak membuat pola-pola tertentu dalam arsitektur mereka. Orang-orang Arab, Hindu, dan Yunani kuno banyak berkarya berdasar pola bilangan. Dengan mempelajari relasi numerik yang menunjukkan adanya pola tertentu, dan juga pola yang tak lazim, orang dapat memperoleh pengetahuan-pengatahuan baru yang cukup menarik dan sering bermanfaat.

A. POLA OPERASI HITUNG DAN HASILNYA

Yang dimaksud pola operasi hitung dan hasilnya ialah, kenyataan adanya pola yang dihasilkan pada operasi (penjumlahan, pengurangan, perkalian dan penjumlahan) bilangan-bilangan dan hasil dari operasi-operasi tersebut.

Contoh 1:

Perhatikan pola berikut ini:

$$\begin{array}{rclcl} 1 & \times 9 + & 2 & = & 11 \\ 12 & \times 9 + & 3 & = & 111 \\ 123 & \times 9 + & 4 & = & 1111 \\ 1234 & \times 9 + & 5 & = & 11111 \end{array}$$

Pola tersebut dapat digunakan untuk memberikan sajian operasi-operasi serupa sampai dengan $123456789 \times 9 + 10$ yang menghasilkan 1111111111.

Contoh 2

Perhatikanlah pula pola-pola berikut. Pola operasi dan hasilnya tersebut dapat dilanjutkan sampai tak terbatas.

<p>a.</p> $\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ 10 + 1 & = & 11 \\ 100 + 10 + 1 & = & 111 \\ 1000 + 100 + 10 + 1 & = & 1111 \end{array}$	<p>b.</p> $\begin{array}{rcl} 10 - 1 & = & 9 \\ 100 - 1 & = & 99 \\ 1000 - 1 & = & 999 \\ 10000 - 1 & = & 9999 \end{array}$
---	---

B. PANGKAT DUA DAN TIGA BILANGAN ASLI

Pola bilangan berikut ini menarik karena hanya dengan menuliskan lambangnya (angka) dapat disajikan bilangan yang sama dengan cara atau pernyataan yang berbeda. Perhatikan cara yang tidak lazim dalam mengkuadratkan bilangan 4 berikut ini:

Contoh 1

$\begin{array}{r} (1 + 1 + 1 + 1) \\ (1 + 1 + 1 + 1) \\ \hline \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \hline 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 \end{array}$	(\times)	\longrightarrow	4
		\longrightarrow	4
			\downarrow
\longrightarrow	$=$	\longrightarrow	16

Pola operasi di atas dapat digunakan untuk memberi gambaran dari pola kuadrat bilangan berikut ini:

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 2^2 &= 1 + 2 + 1 \\ 3^2 &= 1 + 2 + 3 + 2 + 1 \\ 4^2 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 \end{aligned}$$

Ruas kanan merupakan penjumlahan berurutan dan simetris terhadap bilangan yang dikuadratkan dari semua bilangan asli yang kurang dari bilangan tersebut. Dengan beberapa kali menerapkan sifat komutatif, polanya dapat disusun sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 2^2 &= (1 + 2) + 1 \\ 3^2 &= (1 + 2 + 3) + (1 + 2) \\ 4^2 &= (1 + 2 + 3 + 4) + (1 + 2 + 3) \end{aligned}$$

Sedangkan pangkat tiga bilangan-bilangan asli keterkaitannya dengan penjumlahan berurutan dari bilangan-bilangan asli adalah sebagai berikut:

<p><i>Contoh 2</i></p> $1^3 = 1$ $2^3 = (1 + 2)^2 - 1^2$ $3^3 = (1 + 2 + 3)^2 - (1 + 2)^2$ $4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2 - (1 + 2 + 3)^2$ \vdots	<p>Bentuk lainnya adalah sebagai berikut:</p> $1^3 = 1$ $2^3 = 3 + 5$ $3^3 = 7 + 9 + 11$ $4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$ \vdots
---	---

Perhatikanlah keterkaitan antara suku terakhir pada suatu baris dengan suku pertama baris berikutnya di ruas kanan penjumlahan bilangan asli berurutan tersebut.

C. EKUIVALENSI PENGGANTIAN OPERASI

Ada beberapa pola pasangan bilangan yang hasil operasinya sama terhadap dua macam operasi hitung. Contoh:

1. Perkalian dan Penjumlahan

$$3 \times 1 \frac{1}{2} = 3 + 1 \frac{1}{2}$$

$$4 \times 1 \frac{1}{3} = 4 + 1 \frac{1}{3}$$

$$5 \times 1 \frac{1}{4} = 5 + 1 \frac{1}{4}$$

$$6 \times 1 \frac{1}{5} = 6 + 1 \frac{1}{5}$$

$$\vdots$$

$$n \times \frac{n}{n-1} = \frac{n^2}{n-1} = \frac{n^2 - n + n}{n-1} = \frac{n^2 - n}{n-1} + \frac{n}{n-1}$$

$$= \frac{n(n-1)}{n-1} + \frac{n}{n-1} = n + \frac{n}{n-1}, \text{ asal } n \neq 1$$

Jadi Bentuk Umum: $n \times \frac{n}{n-1} = n + \frac{n}{n-1}$, asal $n \neq 1$ (2.1)

2. Perkalian dan Pengurangan

$$1 \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$2 \times \frac{2}{3} = 2 - \frac{2}{3}$$

$$3 \times \frac{3}{4} = 3 - \frac{3}{4}$$

$$\vdots$$

Buktikan sendiri)

Bentuk Umum: $n \times \frac{n}{n+1} = n - \frac{n}{n+1}$.. asal $n \neq -1$ (2.2)

3. Pembagian dan Penjumlahan

$$1 \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 1 \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

$$2 \frac{1}{4} : \frac{3}{4} = 2 \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$3 \frac{1}{5} : \frac{4}{5} = 3 \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$$

$$\vdots$$

Buktikan sendiri)

Bentuk Umum: $\frac{n^2}{n+1} : \frac{n}{n+1} = \frac{n^2}{n+1} + \frac{n}{n+1}$, asal $n \neq -1$. (2.3a)

atau: $(n-1 + \frac{1}{n+1}) : (1 - \frac{1}{n+1}) = (n-1 + \frac{1}{n+1}) + (1 - \frac{1}{n+1})$, $n \neq -1$... (2.3b)

4. Pembagian dan Pengurangan

$$4 \frac{1}{2} : 3 = 4 \frac{1}{2} - 3$$

$$5 \frac{1}{3} : 4 = 5 \frac{1}{3} - 4$$

$$6 \frac{1}{4} : 5 = 6 \frac{1}{4} - 5$$

$$\vdots$$

Buktikan sendiri)

Bentuk Umum: $\frac{n^2}{n-1} : n = \frac{n^2}{n-1} - n$, asal $n \neq 1$ (2.4a)

atau: $(n+1 + \frac{1}{n-1}) : n = (n+1 + \frac{1}{n-1}) - n$ (2.4b)

LATIHAN 1

1. Dari operasi dan hasilnya yang disajikan berikut ini, ikuti polanya kemudian tuliskan paling sedikit 4 langkah berikutnya dari yang telah tersedia. Apakah polanya terbatas, atau tidak terbatas?

a. $(1 \times 8) + 1 = 9$
 $(12 \times 8) + 2 = 98$
 $(123 \times 8) + 3 = 987$
 $(1234 \times 8) + 4 = 9876$
 \vdots

b. $9 \times 6 = 54$
 $99 \times 66 = 6534$
 $999 \times 666 = 665334$
 $9999 \times 6666 = 66653334$
 \vdots

c. $333\ 667 \times 1113 = 371\ 371\ 371$
 $3333\ 6667 \times 11133 = 3711\ 3711\ 3711$
 $33333\ 66667 \times 111333 = 37111\ 37111\ 37111$
 \vdots

2. Dari operasi dan hasilnya yang disajikan berikut ini, ikuti polanya kemudian tuliskan paling sedikit 5 langkah berikutnya dari yang telah tersedia, serta carilah bentuk umumnya.
- a. $2 \times 1 = 1 \times 1 + 1$
 $3 \times 2 = 2 \times 2 + 2$
 $4 \times 3 = 3 \times 3 + 3$
- b. $1 \times 1 - 1 = 2 \times 0$
 $2 \times 2 - 2 = 3 \times 1$
 $3 \times 3 - 3 = 4 \times 2$
3. Periksalah kebenaran nilai kedua ruas pada setiap kesamaan berikut. Berdasar polanya, lanjutkanlah dengan tiga baris berikutnya.
- a. $(1 + 1)^2 = 1^2 + 1 + 1 + 1$
 $(2 + 1)^2 = 2^2 + 2 + 2 + 1$
 $(3 + 1)^2 = 3^2 + 3 + 3 + 1$
 \vdots
- b. $1^2 + 1 = 2^2 - 2$
 $2^2 + 1 = 3^2 - 3$
 $3^2 + 1 = 4^2 - 4$
 \vdots
4. Berdasar fakta berikut, lengkapilah yang berikut ini masing-masing sampai 9 baris.
- a. $143 \times 1 = 143 \rightarrow 143 \times 7 = 1001$
 $143 \times 2 = 286 \rightarrow 286 \times 7 = 2002$
 $143 \times 3 = 429 \rightarrow 429 \times 7 = 3003$
- b. $15873 \times 1 = 15873 \rightarrow 15873 \times 7 = 111\ 111$
 $15873 \times 2 = 31746 \rightarrow 31746 \times 7 = 222\ 222$
 $15873 \times 3 = 47619 \rightarrow 47619 \times 7 = 333\ 333$
5. Lengkapilah hasilnya, carilah polanya, kemudian lanjutkanlah. Sampai batas manakah operasi dan hasilnya memiliki pola tertentu?
- a. $8 \times 1 + 1 =$
 $8 \times 12 + 2 =$
 $8 \times 123 + 3 =$
 $8 \times 1234 + 4 =$
- b. $123456789 \times 9 =$
 $123456789 \times 18 =$
 $123456789 \times 27 =$
 $123456789 \times 36 =$
6. a. Perhatikan pola pengkuadratan berikut:
- $5 \times 5 = 25$ $15 \times 15 = 225$ $25 \times 25 = 625$ $35 \times 35 = 1225$
-
- Susunlah bentuk di atas dalam bentuk baris, kemudian lengkapi sampai dengan 10 baris
- b. Berdasar pola di atas, berapakah nilai: 1) 995×995 2) 9995×9995 3) 19995×19995
6. Perhatikan perkalian berikut:
- $99^2 = 99 \times 99 = 99 \times (100 - 1)$
 $= 99 \times 100 - 99 \times 1$
 $= 99 \times 100 - 100 \times 1 + 1 \times 1$
 $= (99 - 1) \times 100 + 1^2 \rightarrow 99^2 = 98 \times 100 + 1 = 9801$
- $98^2 = 98 \times 98 = 98 \times (100 - 2)$
 $= 98 \times 100 - 98 \times 2$
 $= 98 \times 100 - 100 \times 2 + 2 \times 2$
 $= (98 - 2) \times 100 + 2^2 \rightarrow 98^2 = 96 \times 100 + 4 = 9604$
- Hitunglah: a. 89^2 b. 87^2 c. 84^2 d. 76^2
- Catatan: Hasil pengkuadratan bilangan asli antara 75 dan 100 dengan mudah dapat dihitung jika kuadrat bilangan asli kurang dari 25 dengan cepat diingat.*

C. POLA BILANGAN DAN BARISAN

Dari beberapa himpunan:

- a. Himpunan Bilangan Asli : $\{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$
b. Himpunan Bilangan Cacah : $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
c. Himpunan Bilangan (Asli) Ganjil : $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
d. Himpunan Bilangan (Asli) Genap : $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

Himpunan di atas memiliki anggota yang dapat diurutkan dengan cara tertentu karena memiliki sifat urutan yang berpola untuk mendaftar anggotanya. Untuk menyatakan masih banyak anggota lain sesuai pola urutannya, maka penyajian himpunan dengan cara mendaftar harus diurutkan beberapa anggotanya agar polanya jelas diikuti seperti contoh-contoh di atas. Cara penulisan dengan urutan berpola inilah yang digunakan dalam paket ini.

Dengan hanya memperhatikan anggotanya yang telah berurutan dari keempat himpunan di atas diperoleh:

- a. $1, 2, 3, 4, 5 \dots$ b. $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ c. $1, 3, 5, 7, 9, \dots$

Ketiganya merupakan contoh barisan. Bilangan-bilangan pembentuknya dinamakan suku barisan tersebut, yang merupakan nilai-nilai suatu fungsi tertentu dengan domain bilangan asli. Misalnya barisan pertama adalah barisan dengan rumus fungsinya $u(n) = n$ atau $u_n = n$.

Pada dua himpunan pertama aturannya sama yaitu setiap suku diperoleh dari suku sebelumnya ditambah 1. Perbedaannya di antaranya ialah "suku awal"-nya yang berbeda-beda. Pola seperti pada kelima contoh di atas adalah **pola penambahan tetap**.

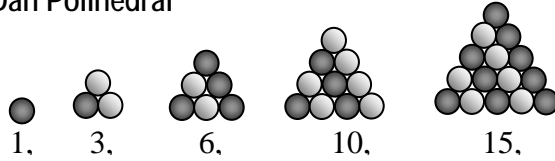
Contoh di atas adalah satu di antara banyak cara pembentukan pola. Dalam pembentukan pola tercakup suatu aturan dari suatu suku ke suku lainnya, baik aturan itu tertulis maupun tidak. Dengan demikian barisan merupakan fungsi dengan domain bilangan asli (yang menunjuk nomor urutan pola).

Dalam kaitannya dengan pola dan barisan dikenal deret. Jika $u_1, u_2, u_3, u_4, \dots$ adalah suatu barisan, maka $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$ adalah deret, yang namanya sesuai nama barisan tersebut. Misalnya dari barisan bilangan asli 1, 2, 3, 4, 5... dapat dibentuk deret $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$ yang dinamakan deret bilangan asli.

D. POLA BANGUN DAN BARISAN:
Pola Bilangan Poligonal Dan Polihedral

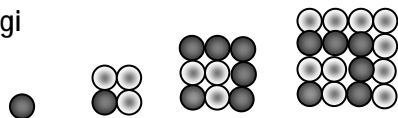
1. **Bilangan Poligonal**

a. **Bilangan Segitiga**



Gambar 6.1

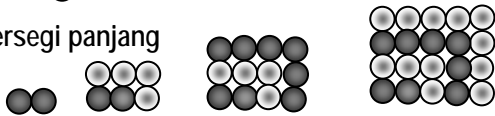
b. **Bilangan Persegi**



Gambar 6.2

Barisan bilangan persegi adalah 1, 4, 9, 16, ...

c. **Bilangan Persegi panjang**

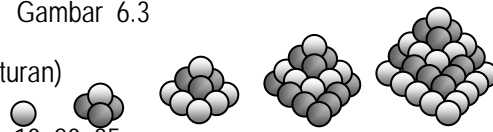


Barisan bilangan persegi panjang adalah 2, 6, 12, 20,

Gambar 6.3

2. **Bilangan Polihedral**

a. **Bilangan Tetraeder (Bidang empat beraturan)**

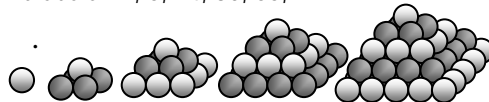


Barisan bilangan tetraeder adalah 1, 4, 10, 20, 35, ...

Gambar 6.4

b. **Bilangan Piramid**

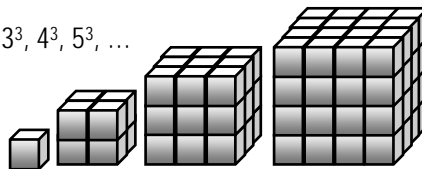
Barisan bilangan piramid adalah 1, 5, 14, 30, 55, ...



Gambar 6.5

c. **Bilangan Kubik**

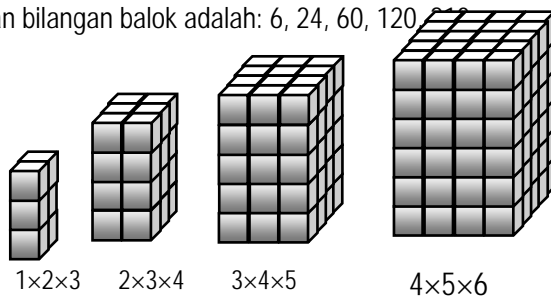
Barisan bilangan kubik adalah $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, \dots$



Gambar 6.6

d. **Bilangan Balok**

Jadi barisan bilangan balok adalah: 6, 24, 60, 120, ...

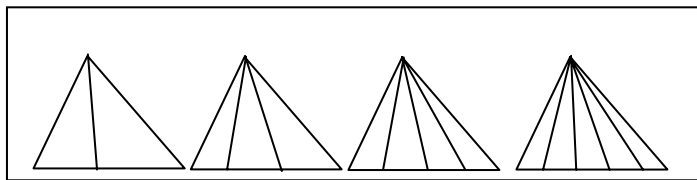


Gambar 6.7

LATIHAN 2

1. Jika T_n adalah suku ke- n barisan bilangan segitiga, nyatakan suku ke- n -nya dalam n .
2. Jika P_n adalah suku ke- n barisan bilangan persegipanjang, Nyatakan suku ke- n -nya dalam n .
3. Tentukanlah rumus suku ke- n barisan:
 - a. bilangan tetraeder
 - b. bilangan piramid
 - c. bilangan balok

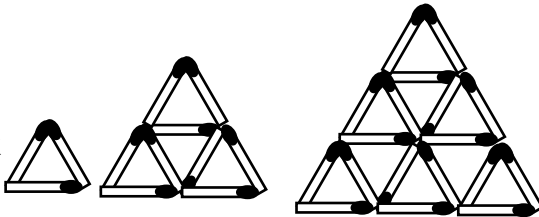
4. Carilah banyak segitiga untuk setiap gambar berikut. Berdasar pola bilangan yang menyatakan banyak segitiga tersebut, carilah banyak segitiga pada urutan ke-5, ke-6, dan ke-10.



5. Pada gambar di samping, jika model gambarnya dilanjutkan,
 a. berapa banyak segitiga yang terbentuk pada urutan ke-10?
 b. berapa banyak batang korek api pada urutan ke-10?



6. Pada gambar di samping, jika model gambarnya dilanjutkan,
 a. berapa banyak segitiga bersisi satu batang korek api yang terbentuk pada urutan ke-10?
 b. berapa banyak segitiga semua ukuran yang terbentuk pada urutan ke-10?
 c. berapa banyak batang korek api pada urutan ke-10?



E. POLA PENAMBAHAN DAN BARISAN ARITMETIKA

1. Pola Penambahan Tetap

Seperti dikemukakan di atas pola bilangan 1, 2, 3, 4, 5 ... dapat dibentuk dengan menggunakan sifat pola penambahan tetap. Artinya, dengan menentukan bilangan pertama, bilangan selanjutnya setiap kali diperoleh dengan menambah bilangan tepat sebelumnya dengan bilangan tertentu (konstan). Baik bilangan pertama maupun bilangan penambah tetapnya dibatasi pada bilangan real. Barisan yang terbentuk dinamakan barisan aritmetika.

Contoh 1: a. 4, 5, 6, 7, 8, ... b. $5, 7\frac{1}{2}, 10, 12\frac{1}{2}, 15, \dots$ c. $10, 6\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{2}, \dots$

2. Barisan Aritmetika

Contoh 1 pada butir 1 di atas adalah contoh-contoh barisan aritmetika.

Suatu barisan dengan suku umum u_n dinamakan barisan aritmetika jika dan hanya jika untuk setiap bilangan asli $n > 1$ berlaku $u_n - u_{n-1} = b$, dengan b sebuah konstan.

Misalnya: pada barisan aritmetika: $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \dots u_{n-2}, u_{n-1}, u_n$ berlaku

$$u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = u_5 - u_4 = \dots = u_n - u_{n-1} = b$$

Secara umum u_n dinamakan **suku ke-n** dan b dinamakan **beda** barisan tersebut.

Contoh: (i) 1, 4, 7, 10, 13, ... $b = 4 - 1 = 7 - 4 = 10 - 7 = 3$

(ii) 12, 7, 2, -3, -8, ... $b = 7 - 12 = 2 - 7 = -3 - 2 = -5$

Jika suku pertama barisan yaitu u_1 dinamakan a , maka:

$$\begin{aligned} u_1 &= a &= a + 0b &= a + (1 - 1)b \\ u_2 - u_1 = b &\Leftrightarrow u_2 = u_1 + b &\Leftrightarrow u_2 = a + 1b &= a + (2 - 1)b \\ u_3 - u_2 = b &\Leftrightarrow u_3 = u_2 + b &\Leftrightarrow u_3 = a + b + b &= a + 2b = a + (3 - 1)b \\ u_4 - u_3 = b &\Leftrightarrow u_4 = u_3 + b &\Leftrightarrow u_4 = a + 2b + b &= a + 3b = a + (4 - 1)b \\ &\vdots && \end{aligned}$$

sehingga dapat diperoleh $u_n = a + (n - 1)b$

Contoh 1:

Carilah suku ke 200 dari barisan aritmetika 2, 5, 8, 11, 14, ...

Jawab: Pada barisan tersebut $n = 200$, $a = 2$ dan $b = 5 - 2 = 3$

$$u_n = a + (n - 1)b \Rightarrow u_{200} = 2 + (200 - 1) \times 3 = 2 + 199 \times 3 = 599$$

Contoh 2

Pada barisan: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53 ...

Perhatikanlah pola yang terbentuk dari suku barisan tersebut, misalnya:

a. $2 \times 23 = 20 + 26 = 17 + 29 = 14 + 32 = \dots$ B. $2 \times 26 = 23 + 29 = 20 + 32 = 17 + 35 = \dots$

Generalisasinya adalah suatu sifat yaitu bahwa: Pada setiap barisan aritmetika, untuk setiap bilangan asli t dan k dengan $t - k > 0$ berlaku: $2 \times u_t = u_{t-k} + u_{t+k}$. (BUKTIKAN!)

3. Pola Penambahan Berkelanjutan

a. Menyusun Pola

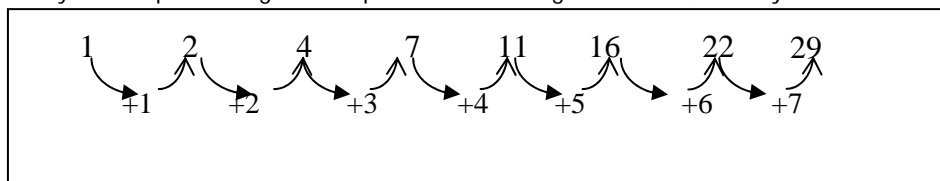
Perhatikanlah tabel berikut ini:

Urutan ke-	1	2	3	4	5	6	7	8
Besar suku	1	2	4	7	11	16	22	...
Penambahan	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	...
	2	4	7	11	16	22	29	...

Urutan bilangan yang terbentuk adalah 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, ... (1)

Dari proses yang digambarkan pada Tabel 1 tampak penambahan terhadap suatu unsur urutan bilangan tersebut menggunakan ialah **pola penambahan yang berkelanjutan**.

Penyusunan pola bilangan ini dapat dilakukan dengan cara lain, misalnya:

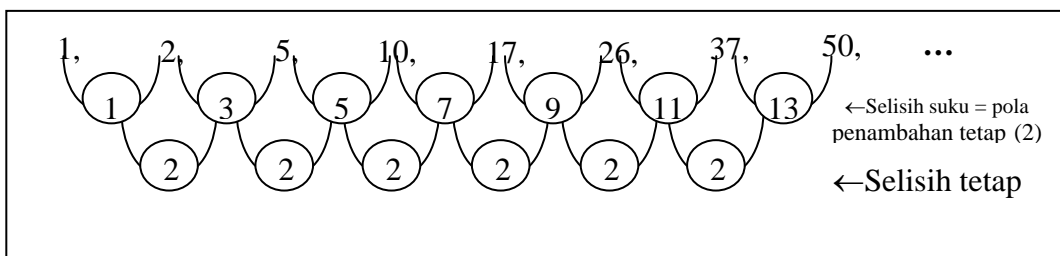


Dengan cara sama bilangan dan bilangan pertama berbeda diperoleh:

- 8, 9, 11, 14, 18, 23, 29, 36, ... (3)
- 5, -4, -2, 1, 5, 10, 16, 23, ... (4)
- 1, 3, 7, 13, 21, 31, 43, 58, ... (5)
- 4, 9, 19, 34, 54, 79, 109, 144, ... (6)

b. Mencari Pola

Pola bilangan 1, 2, 5, 10, ... dapat dilihat selisih dua suku yang berurutan sebagai berikut:



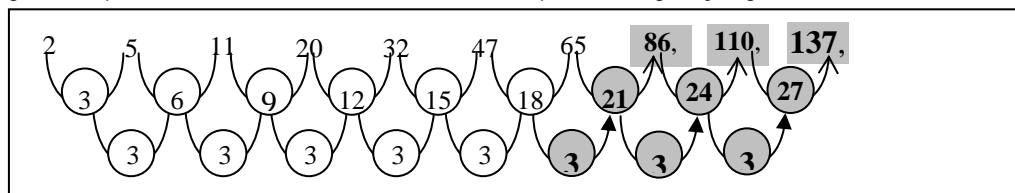
Dari diagram itu tampak bahwa kita dapat menentukan bilangan pada urutan berikutnya dengan memperhatikan selisih setiap dua sukunya yang berurutan.

Contoh 1.

Tentukan tiga suku berikutnya dari barisan bilangan berikut:

2, 5, 11, 20, 32, 47, 65, ...

Jawab: Dengan setiap kali mencari selisih 2 suku berurutan diperoleh bagian yang tidak tersisir.



Dari pola perolehannya (dari bawah, selisih tetap 3), akan diperoleh bilangan-bilangan 21 (dari 18 + 3), 24 (dari 21 + 3), dan 27 (dari 24 + 3) pada pola selisih yang pertama kalinya (baris kedua). Bilangan-bilangan ini secara berurutan digunakan untuk menambah bilangan terakhir dan perolehan penambahannya pada baris pertama. Demikianlah maka diperoleh 86 (dari 65 + 21), 110, dan 137

4. Pola Barisan Aritmetika Tingkat n

Barisan aritmetika pada yang diuraikan pada butir 2 yang polanya dikemukakan pada butir 1 bab ini kadang-kadang disebut juga sebagai barisan aritmetika tingkat 1. Suku umum atau fungsi pembentuknya merupakan fungsi linear. Pola barisan yang diuraikan pada butir 3 merupakan pola pertambahan

bertingkat. Bentuk umum dari setiap pola atau barisannya merupakan fungsi n ($n \in A$) berderajat dua atau lebih sehingga barisan yang terbentuk juga fungsi n berderajat (tingkat) n dan barisan yang bersangkutan dinamakan barisan aritmetika berderajat (tingkat) n . Suku umum barisan aritmetika berderajat t merupakan fungsi polinom (dengan variabel n) berderajat t . Jadi rumus bentuk umum barisan aritmetika berderajat t adalah:

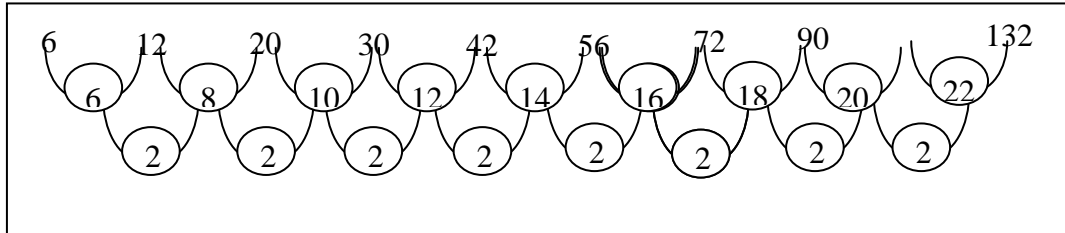
$$u_n = a_t n^t + a_{t-1} n^{t-1} + a_{t-2} n^{t-2} + a_{t-3} n^{t-3} + \dots + a_1 n + a_0, \text{ dengan } a_t \neq 0, t \in A$$

Contoh 1:

Untuk $u_n = n^2 + 3n + 2$, maka barisannya adalah:

$$6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, \dots$$

Jika dilakukan pencarian beda dari dua sukunya yang berurutan dengan pencarian “dua tingkat” maka diperoleh hasil seperti yang diuraikan pada B.3 di atas sebagai berikut:



Gambar 8 menunjukkan tingkat barisan yang keterkaitannya dengan pencarian selisih suku berturutan barisannya dilakukan dua tahap.

Contoh 2:

Tentukanlah suku umum dari barisan 3, 5, 11, 23, 43, 73, 115, ... (Gambar 7)

Jawab: Dari Gambar 7 dapat dilihat bahwa barisan tersebut adalah barisan aritmetika berderajat 3.

Misalkan rumus umum suku-suku barisannya $u_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$

$$\text{untuk } n = 1 \Rightarrow A(1)^3 + B(1)^2 + C(1) + D = 3 \Leftrightarrow A + B + C + D = 3 \quad (1)$$

$$\text{untuk } n = 2 \Rightarrow A(2)^3 + B(2)^2 + C(2) + D = 5 \Leftrightarrow 8A + 4B + 2C + D = 5 \quad (2)$$

$$\text{untuk } n = 3 \Rightarrow A(3)^3 + B(3)^2 + C(3) + D = 11 \Leftrightarrow 27A + 9B + 3C + D = 11 \quad (3)$$

$$\text{untuk } n = 4 \Rightarrow A(4)^3 + B(4)^2 + C(4) + D = 23 \Leftrightarrow 64A + 16B + 4C + D = 23 \quad (4)$$

$$(4) - (3) \Rightarrow 37A + 7B + C = 12 \dots (5) \quad (5) - (6) \Rightarrow 18A + 2B = 6 \dots (8)$$

$$(3) - (2) \Rightarrow 19A + 5B + C = 6 \dots (6) \quad (6) - (7) \Rightarrow 12A + 2B = 4 \dots (9)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow 7A + 3B + C = 2 \dots (7)$$

$$(8) - (9) \Rightarrow 6A = 2 \Leftrightarrow A = \frac{1}{3}$$

Nilai A disubstitusikan ke (9) diperoleh $4 + 2B = 4 \Leftrightarrow B = 0$

Nilai A dan B disubstitusikan ke (7) diperoleh $\frac{7}{3} + 0 + C = 2 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{3}$

Nilai A, B, dan C disubstitusikan ke (1) diperoleh $\frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{3} + D = 3 \Leftrightarrow D = 3$

$$\text{Jadi } u_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + 3 \text{ atau } u_n = \frac{1}{3}(n^3 - n + 9)$$

5. Pola Penjumlahan Suku

Pada kedua pola bilangan di atas, penambahannya dapat dipilih sekehendak dalam arti tambahannya tidak tergantung dari suku awalnya. Pada penjumlahan suku ini tidak demikian. Setiap suku pada pola yang terjadi tergantung dari pemilihan suku atau suku awalnya, dan penambahan atau penjumlahannya adalah antar suku-sukunya dengan aturan masing-masing. Perhatikanlah contoh-contoh berikut:

Contoh 1

$$(1) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

$$(2) 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \dots$$

$$(3) 3, 1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, 50, 87, \dots$$

Ketiga contoh di atas memiliki pola bahwa dengan memilih dua bilangan tertentu sebagai suku pertama dan kedua, maka mulai suku ketiga, setiap sukunya diperoleh dari menjumlahkan dua suku tepat di depannya. Barisannya dikenal sebagai barisan dua langkah (two steps sequence). Barisan dua langkah yang paling dikenal adalah barisan Fibonacci (pada (1)).

Contoh 2

- (1) 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, ...
- (2) 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 145, ...
- (3) 1, 2, 2, 5, 9, 16, 30, 55, 101, 186, ...

Ketiga contoh di atas memiliki pola bahwa dengan memilih tiga bilangan tertentu sebagai tiga suku pertama, maka mulai suku keempat, setiap sukunya diperoleh dari menjumlahkan tiga suku tepat di depannya. Barisannya dikenal sebagai barisan tiga langkah (three steps sequence).

6. Pola Segmentasi dengan Penambahan dan Pengurangan Periodik

Contoh:

- (1) 3, 5, 4, 6, 5, 7, 6, 8, 7, 9, 8, 10, 9, 11, ...
- (2) 3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 18, 19, 20, ...
- (3) 23, 24, 25, 18, 19, 20, 13, 14, 15, 8, 9, 10, ...
- (4) 3, 4, 5, -3, -2, -1, 6, 7, 8, -6, -5, -4, ...

Pada (1), aturannya dapat dinyatakan dengan “*tambah 2 kurang satu*”, mulai dari 3, sehingga didapat:

3	↗	5	↘	4	↗	6	↘	5	↗	7	↘	6	↗	8	↘	7	↗	9	↘	...
+2		-1		+2		-1		+2		-1		+2		-1		+2		-1		
5		4		6		5		7		6		8		7		9		8		...

Jika urutan bernomor ganjil dipandang dipisah dari urutan bernomor genap diperoleh:

Urutan bernomor ganjil: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ...

Urutan bernomor genap: 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ...

yang juga dapat digunakan sebagai dasar polanya.

Barisan (2) dapat diperoleh dari barisan bilangan asli mulai dari 3 yang secara periodik, sesudah setiap tiga suku, dua suku berikutnya dihilangkan, sebagai berikut:

Barisan bilangan asli dimulai dari 3:

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, ...

dihilangkan →

menjadi: 3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 18, 19, 20, ...

atau: 3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 18, 19, 20, ...

Pola pembentukan barisan tersebut dapat digunakan pula pola lain, yaitu “penulisan tiga bilangan asli berurutan dilanjutkan dengan tiga bilangan asli berikutnya dimulai dari bilangan asli yang besarnya 3 lebih dari yang terakhir secara berkelanjutan”. dengan suku pertamanya 3.

Cara kedua memperoleh pola terakhir di atas dapat digunakan untuk pembentukan pola barisan (3), yaitu: “penulisan tiga bilangan **bulat** berurutan dilanjutkan dengan tiga bilangan asli berikutnya dimulai dari bilangan asli yang besarnya 7 kurang dari yang terakhir secara berkelanjutan”, dengan suku pertamanya 23.

Pola pada (4) dapat dibentuk dari dua barisan:

3, 4, 5, ↘
 ↗ -3, -2, -1, ↘
 ↗ 6, 7, 8, ↘
 ↗ -6, -5, -4, ↘ ...

Beberapa bilangan yang mengawali suatu barisan (1) – (3) tidak harus bilangan asli. Demikian pula penambah atau pengurangannya. Demikian pula pola (4) dapat dimodifikasi. Perhatikanlah contoh berikut:

(1) 5, 8, 7, 10, 9, 12, 11, 14, 13, 16, 15, ... (“tambah 3 kurang 1”)

(2) 5, 7½, 6½, 9, 8, 10½, 9½, 12, 11, ... (“tambah 2½ kurang 1”)

(3) 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 20, 21, ... (“tambah 3 tambah 1”)

d. POLA PERKALIAN

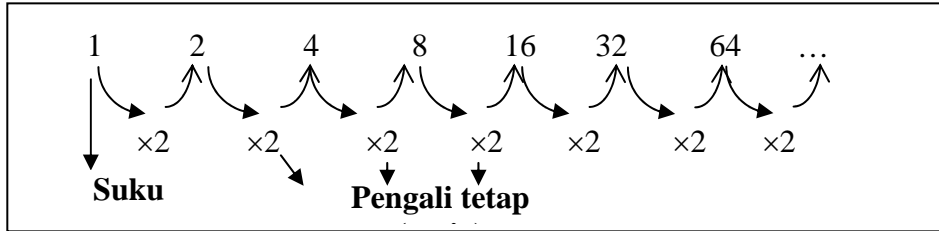
1. Pemahaman Pola Perkalian

Perhatikanlah beberapa pola bilangan berikut:

(1) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... (2) 144, 96, 64, 42⅔, (3) 3, -6, 12, -24, 48, ...

Dengan menentukan suku pertama maka suku-suku lainnya diperoleh dari suku tepat yang mendahuluinya dikalikan bilangan tertentu. Barisannya dikenal sebagai barisan geometri. Pengali tetap tersebut dinamakan rasio (pembanding), yang nilainya adalah $u_n : u_{n-1}$ (untuk $n > 1$)

Misalnya pada (1) dapat digambarkan sebagai berikut:



Pola (2) diperoleh dengan memilih suku pertama 144 dan bilangan secara terurut bilangan lainnya diperoleh dengan mengalikannya dengan rasionya. Sedangkan pada (3) suku pertama 3 dan rasio = -2.

2. Pola dan Barisan Geometri

Contoh 1 pada Pasal C butir 1 di atas adalah contoh-contoh barisan geometri.

Suatu barisan dengan suku umum u_n dinamakan barisan aritmetika jika dan hanya jika untuk setiap bilangan asli $n > 1$ berlaku $u_n - u_{n-1} = r$, dengan r sebuah konstan.

Misalnya: pada barisan aritmetika: $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n$ berlaku

$$u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = u_5 - u_4 = \dots = u_n - u_{n-1} = r$$

Contoh: (i) 2, 6, 18, 54, 162, ... $r = 6 : 2 = 18 : 6 = 54 : 18 = \dots = 3$

(ii) 12, -6, 3, $-1\frac{1}{2}$, ..., $r = (-6) : 12 = 3 : (-6) = (-1\frac{1}{2}) : 3 = \dots = -\frac{1}{2}$

Jika suku pertama yaitu u_1 dinamakan a , maka:

$$\begin{aligned} u_1 &= a && = a \\ u_2 : u_1 = r &\Leftrightarrow u_2 = u_1 \times r &\Leftrightarrow u_2 = a \cdot r^1 &= a \cdot r^{2-1} \\ u_3 : u_2 = r &\Leftrightarrow u_3 = u_2 \times r &\Leftrightarrow u_3 = a \cdot r^1 \times r &= a \cdot r^2 = a \cdot r^{3-1} \\ u_4 : u_3 = r &\Leftrightarrow u_4 = u_3 \times r &\Leftrightarrow u_4 = a \cdot r^2 \times r &= a \cdot r^3 = a \cdot r^{4-1} \\ u_5 : u_4 = r &\Leftrightarrow u_5 = u_4 \times r &\Leftrightarrow u_5 = a \cdot r^3 \times r &= a \cdot r^4 = a \cdot r^{5-1} \\ &&& \vdots \end{aligned}$$

sehingga dapat diperoleh $u_n = a \cdot r^{n-1}$

Dengan cara seperti pada barisan aritmetika buktikan dalam barisan geometri: $u_{t-k} \times u_{t+k} = u_t^2$

Contoh 1:

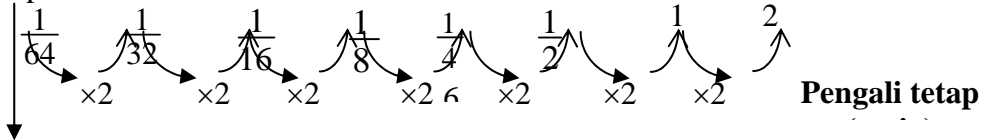
Carilah suku ke-8 dari barisan geometri $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \dots$

Jawab: 1) Dengan barisan geometri:

Pada barisan tersebut $n = 12$, $a = \frac{1}{64}$ dan $r = \frac{1}{32} : \frac{1}{64} = \frac{1}{32} : \frac{1}{16} = \dots = 2$

$$u_n = a \cdot r^{n-1} \Rightarrow u_{12} = \frac{1}{64} \times 2^{8-1} = 2^{-6} \times 2^7 = 2^1 = 2.$$

2) Dengan pola:



3. Pola Harmonik

Jika setiap suku barisan 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... dibalik, diperoleh barisan:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

yang dinamakan barisan harmonik, yaitu barisan yang setiap sukunya adalah kebalikan suku-suku barisan aritmetika. Dua contoh lain adalah sebagai berikut:

(1) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \dots$ (2) $\frac{1}{8}, \frac{2}{21}, \frac{1}{13}, \frac{2}{31}, \frac{1}{18}, \dots$ yang identik dengan $\frac{2}{16}, \frac{2}{21}, \frac{2}{26}, \frac{2}{31}, \frac{2}{36}, \dots$

4. Pola Barisan Lainnya

Pola-pola yang dikemukakan di atas adalah beberapa dari pola-pola dasar. Masih banyak pola-pola lainnya. Dari pola-pola dasar tersebut dapat disusun pula pola-pola campuran. Perhatikanlah contoh berikut ini:

(1) $2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, 5 \times 6, 6 \times 7, 7 \times 8, \dots$

- (2) $3 \times 1, 5 \times 2, 7 \times 4, 9 \times 8, 11 \times 16, 13 \times 32, 15 \times 64, \dots$
 (3) $1 \times 2^2, 2 \times 3^2, 3 \times 4^2, 4 \times 5^2, 5 \times 6^2, \dots$
 (4) $1, 1 + 3, 1 + 3 + 5, 1 + 3 + 5 + 7, 1 + 3 + 5 + 7 + 9, \dots$
 (5) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$
 (6) $-3, 5, -7, 9, -11, 13, -15, 17, \dots$

LATIHAN 2

Tentukanlah lima suku berikutnya dari setiap barisan bilangan berikut. Jelaskan pula pola atau cara memperoleh suku-sukunya tanpa menggunakan rumus-rumus barisan..

1. 3, 7, 11, 15, 19, 23, ...
2. 2, 5, 8, 11, 14, ...
3. 23, 19, 15, 11, 7, ...
4. -17, -13, -9, -5, ...
5. $18, -15\frac{1}{2}, 13, -10\frac{1}{2}, 8, \dots$
6. 3, -5, 7, -9, 11, -13, 15, ...
7. 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, ...
8. 5, 12, 7, 14, 9, 16, 11, 18, ...
9. 100, 97, 92, 85, 76, ...
10. 5, 7, 12, 22, 39, 65, ...
11. 2, 3, 4, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 22, ...
12. 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
13. 4, 1, 5, 6, 11, 17, 28, 45, ...
14. 3, 1, 2, 6, 9, 20, 35, 64, ...

F. DERET ARITMETIKA DAN GEOMETRI

1. Deret Aritmetika

Sebuah perusahaan dalam mempersiapkan tenaga tetapnya harus melalui "masa kontrak" selama dua tahun. Pada masa kontrak tersebut, dari upah dasar, setiap bulan akan ditambah dengan Rp 25.000,00 di samping tunjangan lainnya. Jika upah dasarnya adalah Rp 450.000,00 dan pada akhir masa kontrak merupakan upah pokok gaji karyawan tetap, (1) berapa gaji karyawan tetap pada awal pengangkatannya, dan (2) berapa jumlah uang yang telah diterima karyawan kontrak itu selama 2 tahun?

Masalah di atas adalah salah satu masalah yang menyangkut penerapan deret aritmetika.

Telah dibahas sebelumnya, pada Barisan Aritmetika dengan suku pertama a dan beda b , berlaku:

$$u_1 = a$$

$$u_2 = a + b$$

$$u_3 = a + 2b \text{ dan seterusnya, dan secara umum: } u_n = a + (n - 1)b$$

Adapun deret aritmetika adalah $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$ dengan $u_n = a + (n - 1)b$

Jumlah n suku pertamanya yang dilambangkan dengan S_n :

$$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + (u_n - 2b) + (u_n - b) + u_n$$

$$S_n = u_n + (u_n - b) + (u_n - 2b) + \dots + (a + 2b) + (a + b) + a$$

$$\begin{array}{r} \text{----- (+)} \\ 2S_n = \underbrace{(a + u_n) + (a + u_n) + (a + u_n) + \dots + (a + u_n) + (a + u_n) + (a + u_n)}_{n \text{ suku masing-masing } (a + u_n)} \end{array}$$

$$= n \times (a + u_n), \text{ sehingga } \boxed{S_n = \frac{1}{2} (a + u_n)}$$

$$\text{Karena } u_n = a + (n - 1)b, \text{ maka diperoleh: } \boxed{S_n = \frac{1}{2} (2a + (n - 1)b)}$$

Dari rumus di atas, masalah di atas dapat dipecahkan.

2. Deret Geometri

Untuk menyiapkan biaya kuliah anaknya, setiap bulan kelahiran anaknya seorang ayah menabung di suatu bank yang memberikan bunga 10% per tahun sebesar Rp 500.000,00. Berapakah jumlah tabungan itu ketika anaknya genap berusia 18 tahun dan tabungan itu tidak pernah diambil?

Persoalan di atas dengan segera dapat dipecahkan jika dikuasai konsep deret geometri dan penerapannya.

Telah dibahas sebelumnya, pada Barisan Geometri dengan suku pertama a dan rasio r , berlaku bahwa:

$$u_1 = a$$

$$u_2 = ar$$

$$u_3 = ar^2 \text{ dan seterusnya, dan secara umum: } u_n = a \cdot r^{n-1}$$

Deret geometri adalah: $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-3} + ar^{n-2} + ar^{n-1} + \dots$

Jumlah n suku pertama deret geometri adalah:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-3} + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-3} + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n$$

$$\begin{array}{r} S_n - rS_n = a - ar^n \Leftrightarrow (1-r)S_n = a(1-r^n) \Leftrightarrow S_n = a \frac{1-r^n}{1-r} \Leftrightarrow S_n = a \frac{r^n-1}{r-1} \quad (r \neq 1) \end{array}$$

LATIHAN 4: BARISAN/DERET ARITMETIKA DAN GEOMETRI

- Berapa suku ke-100 barisan 1, 4, 8, 13, 19, ... ?
 - Berapa suku ke-100 barisan aritmetika : ..., ..., 6, ..., 20, ...?
 - Suku ke-7 dan ke-25 sebuah barisan aritmetika ber-turut-turut 15 dan 97. Berapakah suku ke-43?
 - Pada barisan 99, 95, 91, 87, ... suku berapakah yang besarnya 3?
- Jumlah n suku pertama sebuah deret aritmetika dengan beda -3 dan suku awal 33 adalah 135. Berapakah banyak suku deret itu?
- Sebuah perusahaan dalam mempersiapkan tenaga tetapnya harus melalui "masa kontrak" selama tiga tahun. Pada masa kontrak tersebut, dari upah dasar, setiap bulan akan ditambah dengan Rp 25.000,00 di samping tunjangan lainnya. Jika upah dasarnya adalah Rp 400.000,00 dan pada akhir masa kontrak merupakan upah pokok gaji karyawan tetap, (1) berapa gaji karyawan tetap pada awal pengangkatannya, dan (2) berapa jumlah uang yang telah diterima karyawan kontrak itu selama 3 tahun?
- Gunakanlah rumus jumlah n suku pertama untuk mencari jumlah deret geometri berikut sesuai banyak suku yang disebutkan. Tuliskan hasilnya dalam bentuk paling sederhana.

a. $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ sebanyak 10 suku	g. $1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \dots$ sebanyak 12 suku
b. $2 + 6 + 18 + 54 + \dots$ sebanyak 8 suku	h. $4 - 2\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + \dots$ sebanyak 10 suku
c. $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots$ sebanyak 8 suku	i. $2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + \dots$ sebanyak 8 suku
d. $9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots$ sebanyak 7 suku	j. $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ sebanyak n suku
e. $8 - 4 + 2 - 1 + \dots$ sebanyak 10 suku	k. $1 - k + k^2 - k^3 + \dots$ sebanyak n suku
f. $-2 + 6 - 18 + 54 - \dots + \dots$ sebanyak 6 suku	. $x^{1/2} + x + x^{3/2} + x^2 + \dots + x^5$
- Carilah n , jika: a. $3 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + \dots + 3^n = 363$ b. $2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + \dots + 2^n = 510$
- Suku ke-3 dan ke-6 sebuah deret geometri berturut-turut 128 dan 16. Berapakah jumlah 10 suku pertama deret itu?
- Seorang Raja menjanjikan hadiah bagi seorang hambanya yang dapat memecahkan masalah yang dihadapi raja. Orang itu dapat minta apapun yang berupa barang kepada raja. Permintaan seorang hamba yang akhirnya pantas menerima hadiah itu tampaknya cukup sederhana, yaitu: "Butir padi yang harus diletakkan di sebuah daerah berbentuk papan catur dengan ukuran yang cukup besar: Satu butir pada perseg pertama, dua butir pada perseg kedua, empat butir pada perseg ketiga, delapan butir pada perseg keempat, dan seterusnya sampai perseg ke-64."

- a. Berapa butir beras harus diletakan pada persegi ke-64?
 - b. Berapa jumlah semua butir padi pada seluruh kotak persegi tersebut. Perkirakan berapa ton padi yang harus disediakan untuk memberi hadiah tersebut.
8. Telly menabung Rp 1000.000,00 setiap awal tahun sejak tahun 2004 di bank yang memberikan bunga majemuk 12% per tahun - bersih. Berapa tabungan dan bunga tabungan Telly pada akhir tahun 2010?
 9. Mulai awal Januari dan dilanjutkan setiap awal bulan berikutnya Bonar menabung Rp 50.000,00 di sebuah bank yang memberikan bunga berganda 1% per bulan. Jika ia tidak pernah mengambil uangnya selama 3 tahun dan bank tidak membebaninya dengan ongkos atau potongan tertentu, berapa uang Bonar di bank itu pada akhir bulan Desember tahun yang ketiga dari ia menabung?
 10. Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 10 meter. Setiap kali mengenai lantai memantul bola itu $\frac{4}{5}$ dari ketinggian maksimum sebelumnya. Berapa jumlah panjang lintasan yang ditempuh bola itu dari saat dilepaskan sampai menyentuh lantai yang keenam kalinya?
 11. Budi menabung sebesar Rp 3.000.000,00 di sebuah bank yang memberikan bunga 12% per tahun. Jika selama 5 tahun tidak diambil dan bank itu tidak memotong apapun dari modal dan bunganya, hitunglah uang Ali di bank itu pada akhir tahun kelima.
 12. Ulangi soal No. 9 untuk tabungan Rp 5.000.000,00 bunga 10% per tahun selama 6 tahun.
 13. Sebuah mobil dibeli seharga Rp 80.000.000,00. Jika penyusutan nilai jual mobil itu 10% per tahun, carilah nilai jual mobil itu pada setiap akhir tahun dari akhir tahun pertama sampai dengan ke-5 terhitung dari pembelannya.
 14. Sebuah mesin suatu pabrik dibeli seharga Rp 100.000.000,00. Jika penyusutan nilai jual mesin itu 8% per tahun, carilah nilai jual mesin itu pada akhir tahun ke-10 terhitung dari pembelannya.
 15. Tiga bilangan merupakan barisan aritmetika. Jika yang terbesar ditambah 18 terjadi barisan geometri yang hasil kali ketiga suku itu 512. Berapakah bilangan terbesar semula?

DAFTAR PUSTAKA

- Boyer, Carl B. (1968). *A History of Mathematics*. Brooklyn, New York: John Wiley & Sons.
- Coughlin, R & Zitarelli, D. E. (1984). *The Ascent of Mathematics*. New York: McGraw-Hill, Inc.
- Gellert, W. et al (eds). (1977). *The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics*. New York: Van Nostrand Reinhold Company.
- HBJ, 1987. *Chapter Test Algebra 2 with Trigonometry, Revision Edition*. USA: Harcourt Brace Jovanovich
- Keedy, Bittinger, 1983. *Introductory Algebra, 4th edition*. USA: Addison Wesley Publishing Company.
- Keedy, Bittinger, 1986. *Algebra & Trigonometry, a Function Approach, 4th edition*. USA: Addison Wesley Publishing Company.
- Krismanto, Al. (2001). *Pola, Barisan dan Deret . Paket Pembinaan Penataran*. Yogyakarta: PPPG Matematika
- Krismanto, Al. (2004). *Bilangan Berpangkat dan Bentuk Akar. Bahan Pelatihan Terintegrasi Berbasis Kompetensi Guru Mata Pelajaran Matematika SMP*. Jakarta: Direktorat SLTP
- Nasution, A.H. dkk, 1994. *Matematika I SMU*. Jakarta: Balai Pustaka
- Tim PPPG Matematika (2002). *Aritmetika*. Yogyakarta: PPPG Matematika Yogyakarta
- Yunker, Elswick, Vannatta, Crosswhite, 1986. *Advanced Mathematical Concept*