DIKLAT GURU PENGEMBANG MATEMATIKA SMK
JENJANG LANJUT TAHUN 2009

BILANGAN REAL





Oleh: Drs. MARKABAN, M.Si.

PPPPTK MATEMATIKA
YOGYAKARTA

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK
DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
2009

Quality System
Quality Endorsed Company
ISO 9001: 2000
Lic no:QEC 23961
SAI Global

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas karunia-Nya, bahan ajar ini dapat diselesaikan dengan baik. Bahan ajar ini digunakan pada Diklat Guru Pengembang Matematika SMK Jenjang Lanjut Tahun 2009, pola 120 jam yang diselenggarakan oleh PPPPTK Matematika Yogyakarta.

Bahan ajar ini diharapkan dapat menjadi salah satu rujukan dalam usaha peningkatan mutu pengelolaan pembelajaran matematika di sekolah serta dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat di dalam maupun di luar kegiatan diklat.

Diharapkan dengan mempelajari bahan ajar ini, peserta diklat dapat menambah wawasan dan pengetahuan sehingga dapat mengadakan refleksi sejauh mana pemahaman terhadap mata diklat yang sedang/telah diikuti.

Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah berpartisipasi dalam proses penyusunan bahan ajar ini. Kepada para pemerhati dan pelaku pendidikan, kami berharap bahan ajar ini dapat dimanfaatkan dengan baik guna peningkatan mutu pembelajaran matematika di negeri ini.

Demi perbaikan bahan ajar ini, kami mengharapkan adanya saran untuk penyempurnaan bahan ajar ini di masa yang akan datang. Saran dapat disampaikan kepada kami di PPPPTK Matematika dengan alamat: Jl. Kaliurang KM. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, DIY, Kotak Pos 31 YK-BS Yogyakarta 55281. Telepon (0274) 881717, 885725, Fax. (0274) 885752. email: p4tkmatematika@yahoo.com

Kepala,

Kasman Sulyono
NIP. 130352806

DAFTAR ISI

Bab I
Pendahuluan

A. Latar Belakang

Bilangan real atau disebut juga bilangan nyata merupakan bilangan yang sering digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya ketika seseorang melakukan transaksi jual beli, ketika seorang pedagang membagi satu karung gula menjadi beberapa bagian, ketika seorang tukang kayu mengukur tinggi pintu yang tepat untuk bangunan yang didirikannya, ketika seorang nasabah bank menghitung persentase bunga dari uang simpanannya dan sebagainya.

Bahan ajar ini sebagai lanjutan dari bahan ajar bilangan real sebelumnya yang telah membahas tentang konsep-konsep dasar bilangan real sehingga dalam bahan ajar ini perlu dikembangkan lebih lanjut oleh guru dengan contoh-contoh penerapan pada bidang keahliannya. Materi bilangan real ini harus dikuasai oleh Guru Matematika, karena dengan menguasai bahan ajar guru mampu mengembangkan pembelajarannya dan memberi kesempatan pada siswa untuk mengembangkan keterampilan siswa dalam melakukan, menerapkan dalam kehidupan sehari-hari

Mengingat penting dan luasnya penggunaan bilangan real dalam kehidupan sehari-hari maka bilangan real perlu dimasukkan sebagai salah satu materi pembelajaran yang harus dikuasai siswa SMK. Oleh karena itu guru matematika SMK perlu memahami dan menguasai materi bilangan real ini

B. Tujuan

Setelah pembelajaran materi bilangan real diharapkan peserta diklat mampu untuk mengembangkan siswa dalam melakukan, menerapkan dalam kehidupan sehari-hari dengan memberikan contoh terkait dengan operasi bilangan real.

C. Ruang Lingkup

Materi yang dipelajari dalam bahan ajar ini meliputi conoh-contoh penerapan pada program keahlian yang terkait dengan sistem bilangan real, operasi hitung pada bilangan real, fungsi eksponen dan logaritma beserta persamaan dan pertidaksamannya dalam beberapa bentuk.

Bab II
Bilangan Real

A. Sistem Bilangan Real

Jenis atau macam bilangan berkembang bersamaan dengan perkembangan jaman, dan digunakan untuk mengungkapkan sesuatu besaran. Awalnya mengungkapkan tentang banyaknya sesuatu. Oleh keperluan berikutnya, operasinya memerlukan ungkapan-ungkapan yang lebih lanjut namun yang juga mudah dipahami. Demikianlah maka ungkapan yang kemudian diwujudkan dalam berbagai lambang juga berkembang. Dari semacam turus sampai terbentuknya lambang yang sekarang digunakan dalam aritmetika, khususnya angka “1”, “2”, “3”, ... dan muncul pula kemudian “0”, di samping lambang-lambang dengan angka Rumawi seperti “I”, “V”, “C”, “M”, “L”, masing-masing dengan variasinya.

Dari perkembangan tersebut kini kita mengenal antara lain:

1. Bilangan Asli: 1, 2, 3, 4, 5, ... Himpunan bilangan asli dilambangkan dengan A.
2. Bilangan Cacah: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ….Himpunan bilangan cacah dilambangkan dengan C.
3. Bilangan Bulat: ..., –3, –2, –2, 0, 1, 2, 3, ... Himpunan bilangan bulat dilambangkan dengan B.
4. Bilangan Rasional: Bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, a dan b bilangan bulat, b ≠ 0, misalnya: $\frac{8}{17}$, $\frac{19}{45}$, $3\left(=\frac{3}{1}=\frac{6}{2}\right)$, - 2, $-\frac{3}{4}$. Himpunan bilangan rasional dilambangkan Q.

Di antara bilangan rasional ada yang merupakan bilangan bulat ada pula yang merupakan bilangan pecah, positif, maupun negatif, di samping 0. Jika bilangan rasional bentuk desimal, maka bagian desimal memiliki perulangan. Perulangannya merupakan sejumlah angka tertentu atau berulang pada 0 (nol).

Bagian desimal yang berulang dengan 0, biasanya perulangannya tidak dituliskan, sehingga cukup ditulis: $\frac{1}{5}$ = 0,2. Penulisan perulangan pada 0 dilakukan biasanya pada permasalahan pengukuran yang terkait dengan tingkat ketelitian yang diharapkan.

Bagian desimal yang perulangannya tidak 0 dituliskan dengan memberikan tanda garis di atas perulangan atau titik di awal dan akkhir perulangan.

Cara mengubah pecahan berulang dengan pecahan biasa seperti contoh berikut.

Nyatakan 0,363636336…. dalam bentuk pecahan biasa.

Jawab: 0,363636336….= $0,\overline{36}$

$$\begin{array}{r} 100 \times 0,\overline{36} = 36,\overline{36} \\ 0,\overline{36} = \ \ 0,\overline{36} \\ \hline 99 \times 0,\overline{36} = 36 \Rightarrow 0,\overline{36} = \dfrac{36}{99} = \dfrac{4}{11} \end{array} \; -$$

5. Bilangan Irasional, Bilangan yang muncul karena tidak ditemukannya bentuk $\frac{a}{b}$ yang dapat mewakilinya, meskipun dalam keseharian sering dijumpai. Misalnya berapa panjang sisi persegi yang luasnya 2 satuan luas. Hal ini memunculkan bilangan dengan lambangnya yaitu $\sqrt{2}$, yang merupakan salah satu contoh bilangan irasional.

   Jika dinyatakan dalam bentuk desimal, maka bagian desimalnya tidak pernah terjadi perulangan.

   Misalnya: $\sqrt{2}$ = 1,4142135623730950488016887242....

   $\sqrt{3}$ = 1.7320508075688772935274463415...

   $\sqrt[3]{2}$ = 1,2599210498948731647672106072 78...

   π = 3,1415926535897932384626433 83...

   Sementara ini π yang sering dikenal siswa disamakan dengan $\frac{22}{7}$ atau 3,14 pahahal ini adalah pendekatan. Dalam kata lain π tidak sama dengan $\frac{22}{7}$ atau 3,14, karena $\frac{22}{7}$ dan 3,14 merupakan bilangan rasional.

6. Bilangan Real, mencakup bilangan rasional dan irasional. Untuk selanjutnya dalam tulisan ini himpunan bilangan real dilambangkan dengan R. Semua yang terkait dengan bilangan real senantiasa dapat dipahami karena dapat dikaitkan dengan hal-hal yang real. Misalnya: 2 buah rumah, Keliling roda yang panjang jari-jarinya 1 m adalah 2π m

7. Bilangan Imajiner, kata "imajiner" digunakan untuk menggambarkan bilangan seperti $\sqrt{-1}, \sqrt{-15}, \sqrt{-8}.$ Unit imajiner (disimbolkan *i*) didefinisikan sebagai berikut:

   $i = \sqrt{-1}$ dan $i^2 = -1$. Selanjutnya didefinisikan akar dari bilangan negatif sebagai berikut: jika a > 0, $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$

8. Bilangan Kompleks merupakan gabungan bilangan real dan imajiner.

Setiap bilangan yang berbentuk $a+bi$, dimana a dan b adalah bilangan real dan i adalah unit imajiner, disebut bilangan kompleks, misalnya: $4i$, $3+2i$, $2-i\sqrt{7}$, 7 dan 0.

Pada a+bi, a di sebut bagian real, dan b disebut bagian imajiner. Jika $b \neq 0$, maka bilangan tersebut disebut bilangan imajiner.

Pada bilangan imajiner, $a+bi$, jika $a = 0$, maka disebut bilangan imajiner murni. Contohnya: $3i$, $-i$, $i\sqrt{7}$ dan sebagainya.

Dua bilangan kompleks $a+bi$ dan $c+di$ dikatakan sama, jika dan hanya jika $a=c$ dan $b=d$.

B. Sistem Desimal

Keseharian kita, dalam menuliskan bilangan dengan lambang biangan digunakan sistem nilai tempat berbasis sepuluh (sistem desimal. Latin: decem = sepuluh). Dalam sistem ini, nilai sebuah angka "*a*" yang terletak pada urutan ke-*n* dari satuan arah ke kiri adalah $a \times 10^{n-1}$. Misalnya nilai dari 1959 = $1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 9 \times 10^0$. Di samping itu, beberapa di antaranya, penyebutan bilangan berpangkat dengan bilangan pokok 10 mempunyai namanya masing-masing antara lain:

10^n	nilai	penyebutan
10^0	= 1	satu
10^1	= 10	sepuluh
10^2	= 100	seratus
10^3	= 1.000	seribu
10^6	= 1.000.000	satu juta
10^9	= 1.000.000.000	satu milyar
10^{12}	= 1.000.000.000.000	satu trilyun

Penyebutan di atas tidak sama untuk beberapa negara tertentu. Di Inggris, 10^9 disebut *milliard* (seperti di Indonesia) tetapi 10^{12} disebut *billion*, sedangkan *trillion* digunakan untuk 10^{18}, dan selanjutnya *quadrillion*, *quintillion*, dan seterusnya mengkuti kelipatan 10^6. Meskipun jarang digunakan, 10^{15} disebut dengan billiard, yaitu $10^6 \times$ milliard. Di USA, Rusia dan Perancis, 10^9 disebut *billion*, 10^{12} disebut 1*trillion* (seperti di Indonesia, trilyun) dan 10^{15} disebut 1 *quadrillion*.

Untuk menyatakan bilangan-bilangan asli perpangkatan dari 10 juga sering digunakan istilah-istilah khusus yang merupakan kata depan sebagai tertera sebagai berikut:

kata depan	10 pangkat	kata depan	10 pangkat
tera	12	centi	–2
giga	9	milli	–3
mega	6	micro	–6
kilo	3	nano	–9
hecto	2	pico	–12
deka	1	femto	–15
deci	–1	atto	–18

Contoh: 1 hektoare (hektar) = 10^2 are = 100 are

(1 are = 100 m^2, sehingga 1 hektar = 10.000 m^2).

2 Gb = 2 Giga bytes = 2×10^9 bytes

40 Mb = 40 mega bytes = 40×10^6 bytes

1 mm = 1 mili meter = 10^{-3} meter = $\frac{1}{1000}$ meter.

C. Contoh Penerapan Operasi Hitung Pada Bilangan Real

1. Operasi Hitung pada Bilangan Bulat

Untuk mengembangkan keterampilan siswa memahami konsep operasi hitung dapat diberikan soal, misalnya:

Pada waktu pelajaran praktek, siswa kelas II Busana 1 akan dibagikan segulung kain yang panjangnya $19\frac{2}{5}$ meter. Kain tersebut kemudian dipotong-potong menjadi beberapa potongan yang sama panjang untuk keperluan praktek. Jika setiap siswa mendapat sepotong kain yang panjangnya $\frac{4}{5}$ meter, berapa meter panjang sisa kain dalam gulungan tersebut setelah semua potongan tersebut diberikan kepada siswa?

Diharapkan jawaban siswa adalah $\frac{1}{5}$ meter , bukan $\frac{1}{4}$

Disini diharapkan siswa memahami tentang konsep pembagian, tetapi untuk mengembangkan siswa agar berpikir dan terampil mengenai operasi hitung pada bilangan real dengan soal yang jawabannya terbuka dan siswa mencoba-coba dengan jawaban yang berbeda-beda seperti contoh berikut:

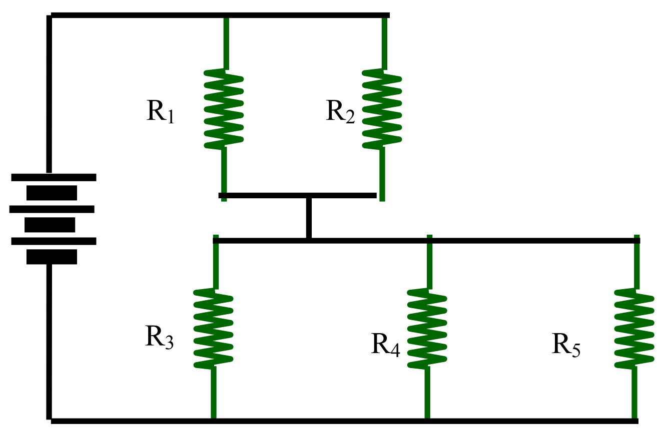
Di toko buku " Karina " terdapat beberapa jenis barang sebagai berikut:

Barang	**Harga satuan**
Buku	Rp.2.000,00
Pensil	Rp.1.500,00
Karet penghapus	Rp.200,00
Ballpoint	Rp.2.500,00

Berapa banyaknya masing-masing jenis barang tersebut yang dapat dibeli Hasan agar uangnya sebanyak Rp 20.000,00 dapat dibelanjakan untuk semua barang!

2. Operasi Hitung pada Bilangan Pecahan

Pada suatu rangkaian listrik seperti pada gambar berikut, tentukan R_t jika diketahui R_1=5,2 ohm, R_2=2,3 ohm, R_3=0,8 ohm, R_4=3,4 ohm dan R_5=0,7 ohm



D. Perbandingan

Sebagai contoh, tinggi badan Ani adalah 150 cm sedangkan Watik 160 cm. Jika cara membandingkan yang dimaksud adalah siapa yang lebih tinggi maka jawabannya adalah Watik dengan selisih tinggi badan = 160 cm – 150 cm = 10 cm. Namun jika yang ditanyakan adalah nilai perbandingan tinggi badan Ani dengan Watik maka dapat dinyatakan dengan perbandingan : 150 cm : 160 cm = 15 : 16 = $\frac{15}{16}$.

Perbandingan a : b, dibaca "a berbanding b". Ada dua macam perbandingan yang sering kita bicarakan antara lain :

1. **Perbandingan senilai:**

Apabila terdapat korespodensi satu-satu antara dua obyek dengan sifat bahwa nilai perbandingan dua elemen di obyek pertama *sama dengan* nilai perbandingan dua elemen yang bersesuaian di obyek kedua maka kedua obyek itu disebut berbanding senilai.

Perbandingan senilai digunakan juga dalam membuat skala pada peta atau membuat model. Grafik dari perbandingan senilai berupa garis lurus

Misalnya : Suatu kendaraan dengan kecepatan 60 km/jam, berarti :

Lama berjalan	1	2	3	…………….	n
jarak	60	120	180	…………….	n. 60

Tampak bahwa nilai perbandingan lama perjalanan = nilai perbandingan jarak yang bersesuaian, sehingga $\frac{1}{3} = \frac{60}{180}$ .Jika waktu bertambah , maka jarak yang dicapai juga bertambah. Dapat dikatakan bahwa perbandingan antara jarak dan waktu tetap yaitu 1 : 60. Perbandingan senilai terjadi apabila jika salah satu komponen yang dibandingkan semakin besar maka komponen yang lain juga akan semakin besar Dua variabel dengan perbandingan demikian ini disebut perbandingan senilai.

Yang dimaksud skala ialah perbandingan antara jarak / panjang pada gambar dengan jarak / panjang yang sebenarnya. Dalam perbandingan tersebut jarak pada gambar biasanya dinyatakan dengan 1.

Contoh : Skala pada peta adalah 1 : 150000. Jika jarak dua kota pada peta adalah 7,5 cm. Berapakah jarak yang sebenarnya ?

Jawab : Jarak yang sebenarnya = 150000 x 7,5 cm = 11,25 km

2. **Perbandingan berbalik nilai**

Apabila terdapat korespodensi satu-satu antara dua obyek dengan sifat bahwa nilai perbandingan dua elemen di obyek pertama *berbalik nilainya dengan* nilai perbandingan dua elemen yang bersesuaian di obyek kedua maka perbandingan antara obyek pertama dengan obyek kedua disebut perbandingan berbalik nilai.

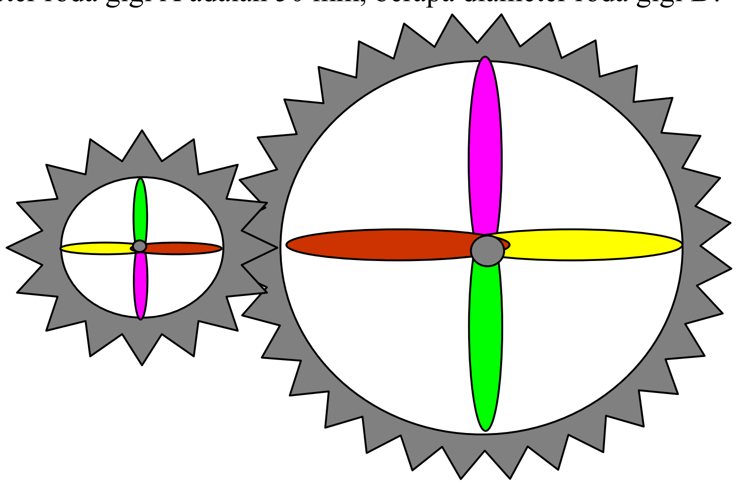
Misalnya : Suatu pekerjaan , jika dikerjakan oleh 1 orang akan selesai 60 hari, jika 2 orang akan selesa 30 hari, berarti :

Banyak orang	1	2	3	…………….	60
waktu	60	30	20	…………….	1

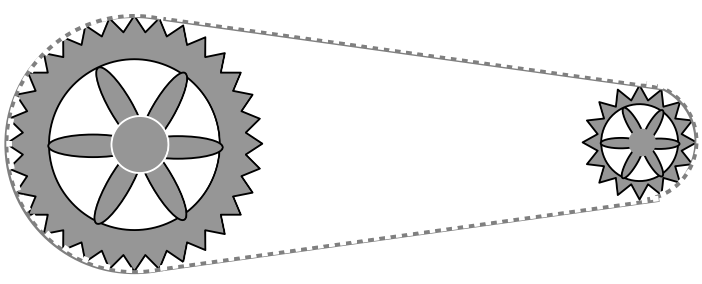
Jika banyak orang bertambah, maka banyak hari berkurang. Perbandingan banyak orang dan banyak hari tidak tetap (tetapi hasil kali dua variabel tersebut tetap yaitu 60. Dua variabel dengan perbandingan demikian ini disebut perbandingan berbalik nilai.

Untuk mengembangkan diberikan soal sebagai contoh:

1. Dengan 21 orang pekerja, CV Permatasari merencanakan suatu pekerjaan borongan akan selesai dalam waktu 35 hari. Tetapi baru bekerja selama 3 hari, pekerjaan tersebut dihentikan selama 8 hari karena sesuatu hal. Berapa banyaknya pekerja yang harus ditambahkan agar pekerjaan tersebut dapat selesai tepat waktu yang direncanakan?
2. Jumlah gigi masing-masing roda A dan B adalah SA= 16 dan SB= 32. Jika diameter roda gigi A adalah 50 mm, berapa diameter roda gigi B?



3. Diameter roda besar 18 cm dan yang kecil 8 cm. Jika roda besar diputar dengan kecepatan 60 rpm, berapakah kecepatan putar roda yang kecil?



4. Suatu pekerjaan jika dikerjakan oleh tenaga profesional sebanyak 3 orang akan selesai dalam 20 hari, sedangkan jika non profesional sebanyak 5 orang akan selesai dalam 40 hari. Jika pekerjaan itu dikerjakan oleh 2 orang profesional dan 2 orang non profesional, dalam berapa hari akan selesai ?

E. Bentuk Akar

Untuk memulai pembelajaran bentuk akar peserta diingatkan kembali tentang perpangkatan baru dilanjutkan ke akar dengan mengajukan pertanyaan sebagai berikut:

Kita sudah mengenal perpangkatan, Berapakah 2^3? Setelah dijawab 8, lalu pertanyaan dilanjutkan dengan berapa x berapa supaya hasilnya 8?

Disinilah letak konsep akar yaitu mencari bilangan pokok apabila pangkat dan hasil perpangkatannnya diketahui. $2^3 = 8 \longrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$. Padahal $2 = 2^{3(\frac{1}{3})} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}$

Jadi $\sqrt[3]{8}$ dapat ditulis $8^{\frac{1}{3}}$. Secara umum $\sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}$

Perhatikan bahwa adanya tanda akar belum berarti merupakan bentuk akar, misalnya $\sqrt{49}$ dan $\sqrt[3]{1,728}$ bukanlan bentuk-bentuk akar karena $\sqrt{49}$ dan $\sqrt[3]{1,728}$ merupakan bilangan-bilangan rasional.. Perlu di ingat bahwa $\sqrt{a}$, telah kita artikan sebagai akar kuadrat yang non negatif dari a, dimana a ≥ 0 , misalnya $\sqrt{49} = +\,7$ dan bukan $-\,7$

Bentuk akar merupakan bilangan irasional, walaupun dalam perhitungan-perhitungan bentuk akar dapat didekati dengan bilangan-bilangan rasional, misalnya $\sqrt{7}$ dapat didekati dengan bilangan rasional 2,646 jika digunakan pendekatan teliti sampai 3 angka dibelakang koma.

1. Penjumlahan dan Pengurangan

   Penjumlahan dan pengurangan bentuk akar dapat disederhanakan apabila akar-akarnya sejenis. Dua akar disebut sejenis, jika pangkatnya sama dan bilangan dibawah tanda akar sama, misalnya: bagaimana menyederhanakan bentuk $\sqrt{4n} + \sqrt{9n} - \sqrt{25n} - \sqrt{36n} + \sqrt{64n}$

2. **Perkalian dan Pembagian Bentuk Akar**

   Dua bentuk akar dapat dikalikan atau dibagi , jika bentuk akar itu senama. Atau jika index pangkatnya sama.

   Apabila index pangkat akar berbeda maka indexnya disamakan dahulu baru dikalikan misalnya $\sqrt[n]{a^p}\ \sqrt[m]{b^q} = \sqrt[nm]{a^{pm}}\ \sqrt[mn]{b^{qn}} = \sqrt[nm]{a^{pm}.b^{qn}}$, sekarang bagaimana menyederhanakan $\dfrac{2\sqrt{4xy}}{3\sqrt[3]{2xy^2}}$

3. Merasionalkan Penyebut Pecahan

Jika penyebut pecahan terdapat satu atau beberapa bentuk akar, maka penyebutnya dijadikan rasional. Untuk penyebut yang terdiri tiga suku, maka dua dari ketiga suku itu dikumpulkan dahulu.

Contoh: $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$$\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} \times \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5} \; \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5}$$

Sekarang bagaimana menyederhanakan $\sqrt{27+10\sqrt{2}}$

Latihan 1:

1) Buatlah contoh-contoh soal dalam kehidupan sehari-hari atau masalah-masalah yang program keahlian yang ada kaitannya dengan operasi bilangan real.
2) Nyatakan dalam bentuk pangkat pecahan:

   a. $\sqrt{p}$ b. $\sqrt[3]{a^5}$ c. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^{-2}}}$

3) Nyatakan dalam bentuk pangkat pecahan

   a. $\sqrt{32}$ b. $\sqrt[3]{125}$ c. $\dfrac{2}{\sqrt[5]{27}}$

4) Hitunglah:

   a. $32^{\frac{2}{5}} + 16^{\frac{3}{4}}$ b. $81^{\frac{1}{4}} + \dfrac{1}{125^{-\frac{4}{3}}}$

5) Sederhanakan:

   a. $\sqrt{32}+\sqrt{50}-\sqrt{128}$ b. $(\sqrt{75}+\sqrt{27})3\sqrt{2}$ c. $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$ d. $\sqrt{27+10\sqrt{2}}$

6) Apabila a = 16 dan b = 27, maka hitunglah berikut ini :

   a. $2a^{-2/3}$ b. $(a^{1/4})^4 \times b^{-1/3}$ c. $3(a^{-1/2})^2 \times 4b^{-1/3}$

Bab III

Fungsi Eksponen dan Logaritma

A. Pengertian Fungsi Eksponen dan Logaritma

Dalam perkembangan amuba, kira-kira sehari atau dalam satu periode yang sama setelah mencapai ukuran tertentu seekor amuba akan membelah menjadi 2 ekor amuba dan dalam periode yang sama setiap ekornya membesar kemudian membelah masing-masing menjadi 2 ekor sehingga seluruhnya menjadi 4 ekor demikian seterusnya. Perkembangan banyaknya amuba ini dapat dinyatakan dalam tabel sebagai berikut:

Periode awal	0 (awal)	1	2	3	4	5	……	x
Banyak amuba	1	2	4	8	16	32	……	
Bentuk pangkat	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	……	2^x

Bilangan seperti 2^3 disebut bilangan berpangkat (eksponen), sedangkan $2^{\cdots} = 8$ (mencari besarnya pangkat dari 2 yang hasilnya 8) dituliskan dengan ${}^2\log 8 = x$, dengan x adalah pangkat dari 2. Dengan demikian ${}^2\log 8 = x \Leftrightarrow 2^{\cdots} = 8$ (log = logaritma). Disini tampak bahwa logaritma terkait erat dengan eksponen.

Fungsi $f : x \rightarrow f(x) = 2^x$ merupakan salah satu fungsi eksponen, sehingga perkembangan amuba tersebut merupakan salah satu contoh dari fungsi eksponen yang domainnya adalah bilangan cacah.

1. Fungsi Eksponen

Fungsi $f : x \rightarrow a^x$, dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ disebut fungsi eksponen, yang mempunyai domain bilangan real dan range bilangan positif.

Fungsi $f : x \rightarrow a^x$, untuk $a > 1$ adalah fungsi naik dan jika $0 < a < 1$ maka fungsi turun. Karena range dari f adalah bilangan positif dan $a^0 = 1$, maka grafik fungsi $f : x \rightarrow a^x$ untuk $a > 0$ terletak di atas sumbu x dan melalui titik (0,1).

Grafik fungsi $f : x \rightarrow a^x$ dan $g : x \rightarrow a^{-x}$ akan simetris terhadap sumbu y

2. Fungsi Logaritma

Dari fungsi $f : x \rightarrow a^x$ yang mempunyai domain bilangan real dan range bilangan real positif. Fungsi tersebut bijektif dari R ke R^+ sehingga mempunyai invers f^{-1}: $R^+ \rightarrow R$ Yaitu setiap $x \in R$ mempunyai peta tunggal $y \in R^+$ dan sebaliknya $y \in R^+$ mempunyai peta tunggal $x \in R$.

Jadi fungsi f : x $\rightarrow$ a^x mempunyai invers f^{-1} sehingga dari y = a^x $\Leftrightarrow$ ${}^a\log y = x$ diperoleh : $f^{-1}(x)$ = ${}^a\log x$ dan $f^{-1}(y)$ = ${}^a\log y$.

Fungsi invers ini disebut fungsi logaritma yang mempunyai domain himpunan bilangan positif R^+ dan range himpunan bilangan real R Berarti fungsi f^{-1} : x $\rightarrow$ ${}^a\log x$ adalah fungsi invers dari fungsi f : x $\rightarrow$ a^x Fungsi – fungsi tersebut grafiknya simetris terhadap garis y = x sehingga setiap titik (q,p) pada grafik y=${}^a\log x$ merupakan peta titik (p,q) pada grafik y = a^x

Dalam logaritma ${}^a\log x$ diisyaratkan a > 0 dan a $\neq$ 1, serta x > 0

B. Persamaan dan Pertidaksamaan Eksponen

Persamaan eksponen adalah suatu persamaan yang memuat variabel sebagai eksponen bilangan berpangkat

Bentuk –bentuk persamaan eksponen yang akan dibahas diantaranya adalah :

1. Bentuk $a^{f(x)} = a^p$

Untuk menyelesaikan persamaan ini digunakan sifat :

Jika $a^{f(x)} = a^p$; a > 0; a $\neq$ 1, maka f(x) = p

Contoh : Tentukan himpunan penyelesaian persamaan $9^{x+1} = 27$

Jawab : $9^{x+1} = 27 \Leftrightarrow (3^2)^{x+1} = 3^3$

$\Leftrightarrow 3^{2x+2} = 3^3$

$\Leftrightarrow$ 2x + 2 = 3

$\Leftrightarrow$ 2x = 1

$\Leftrightarrow$ x = $\frac{1}{2}$ Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{\frac{1}{2}\}$.

2. Bentuk $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Penyelesaian dari persamaan bentuk ini digunakan sifat :

Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}; a > 0; a \neq 1,$ maka f(x) = g(x)

Contoh : Tentukan himpunan penyelesaian persamaan $8^{2x+1} = 128^{x-5}$

Jawab : $8^{2x+1} = 128^{x-3} \Leftrightarrow (2^3)^{2x+1} = (2^7)^{x-3}$

$\Leftrightarrow 2^{6x+3} = 2^{7x-21}$

$\Leftrightarrow$ 6x + 3 = 7x – 21

$\Leftrightarrow$ x = 24

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{24\}$.

3. Bentuk $a^{f(x)} = b^{f(x)}$

Untuk menyelesaikan persamaan eksponen bentuk ini digunakan sifat :

Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$; $a > 0$; $a \neq 1$; $b > 0$; $b \neq 1$; $a \neq b$, maka $f(x) = 0$

Contoh : Tentukan himpunan penyelesaian persamaan 32x-4 = 52x-4

Jawab : $3^{2x-4} = 5^{2x-4} \Leftrightarrow 2x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {2}.

4. Bentuk $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

Cara menyelesaikan persamaan $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ jika x tidak dapat dinyatakan ke dalam bentuk $a^{f(x)} = a^{h(x)}$, maka persamaan itu dapat diselesaikan dengan menggunakan sifat-sifat logaritma.

$A^p = b^q \Leftrightarrow \log a^p = \log b^q$

$\Leftrightarrow p \log a = q \log b$; $a > 0$; $b > 0$

Contoh : Tentukan himpunan penyelesaian persamaan $2^{x+1} = 3^{x-1}$

Jawab : $2^{x+1} = 3^{x-1} \Leftrightarrow \log 2^{x+1} = \log 3^{x-1}$

$\Leftrightarrow (x + 1) \log 2 = (x - 1) \log 3$

$\Leftrightarrow x \log 2 + \log 2 = x \log 3 - \log 3$

$\Leftrightarrow x (0{,}301) + 0{,}301 = x (0{,}477) - 0{,}477$

$\Leftrightarrow 0{,}176x = 0{,}778$

$\Leftrightarrow x = 4{,}420$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {4,420}.

5. Bentuk $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{h(x)}$

Untuk menyelesaikan persamaan bentuk di atas perlu dipertimbangkan beberpa kemungkinan :

1) Persamaan berlaku untuk pokok = 1 atau $f(x) = 1$
2) Persamaan berlaku untuk pokok = -1, dengan syarat :
   g(x) dan h(x) bernilai genap atau g(x) dan h(x) bernilai ganjil.
3) Persamaan berlaku untuk pokok = 0 atau $f(x) = 0$, dengan syarat g(x) dan h(x) bernilai positif.
4) Persamaan berlaku jika pangkatnya sama atau $g(x) = h(x)$, dengan syarat untuk pokok = 0, pangkat bernilai positif, atau untuk $f(x) = 0$ maka g(x) dan h(x) bernilai positif.

Contoh : Tentukan himpunan penyelesaian persamaan $(x + 2)^{2x-5} = (x + 2)^{x-3}$

Jawab : $(x + 2)^{2x-5} = (x + 2)^{x-3}$

Kemungkinan penyelesaian :

1) $x + 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$
2) $x + 2 = -1 \Leftrightarrow x = -3$

   Pengecekan terhadap eksponennya :

   Untuk $x = -3$, $2x – 5 = 2.-3 – 5 = -11$ (ganjil)

   $x – 3 = -3 – 3 = -6$ (genap)

   berarti $x = -3$ tidak memenuhi persamaan
3) $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

   Pengecekan terhadap eksponennya :

   Untuk $x = -2$, $2x – 5 = 2.-2 – 5 = -1$ (negatif)

   $x – 3 = -2 – 3 = -5$ (negatif)

   Berarti $x = -2$ tidak memenuhi persamaan.
4) $2x – 5 = x – 3 \Leftrightarrow x = 2$

   Pengecekan terhadap pokoknya :

   Untuk $x = 2$, $x + 2 = 2 + 2 = 4$ (tidak nol) maka tidak perlu pengecekan terhadap eksponen.

   Berarti $x = 2$ merupakan penyelesaian persamaan.

   Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{-1, 2\}$.

6. Bentuk $(f(x))^{g(x)} = (k(x))^{g(x)}$

Untuk menyelesaikan persamaan di atas, perlu dipertimbangkan beberapa kemungkinan :

1) $f(x) = k(x)$
2) $g(x) = 0$, syarat tidak menyebabkan $f(x) = 0$ atau $k(x) = 0$.

Contoh : Tentukan himpunan penyelesaian persamaan

$$(2x-3)^{x^2+3x} = (x+1)^{x^2+3x}$$

Kemungkinan penyelesaian :

1) $2x – 3 = x + 1 \Leftrightarrow x = 4$
2) $x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) = 0$

   $\Leftrightarrow x = 0$ atau $x = -3$

Pengecekan terhadap pokoknya :

- untuk $x = 0$; $2x – 3 = 2.0 – 3 = -3$ (tidak nol)
  berarti $x = 0$ merupakan penyelesaian persamaan
- untuk $x = -3$; $2x – 3 = 2.-3 – 3 = -9$ (tidak nol)
  $x + 1 = -3 + 1 = -2$ (tidak nol)

Sehingga $x = -3$ merupakan penyelesaian persamaan.

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {-3, 0, 4}.

7. Bentuk $A(a^{f(x)})^2 + B(a^{f(x)}) + C = 0$; $A \neq 0$; $a > 0$; $a \neq 1$.

Untuk menyelesaikan persamaan di atas, dilakukan dengan cara mengubah persamaan tersebut dikembalikan ke bentuk persamaan kuadrat. Dengan memisahkan $a^{f(x)} = p$, maka diperoleh persamaan kuadrat : $Ap^2 + Bp + C = 0$.

Contoh : Tentukan himpunan penyelesaian persamaan $7^{2-x} – 49^{2-x} + 42 = 0$

Jawab : $7^{2-x} – 49^{2-x} + 42 = 0 \Leftrightarrow 7^{2-x} –(7^2)^{2-x} + 42 = 0$

$\Leftrightarrow 7^{2-x} – (7^{2-x})^2 + 42 = 0$

Misalkan $7^{2-x} = p$, maka diperoleh :

$p – p^2 + 42 = 0 \Leftrightarrow -p^2 + p + 42 = 0$

$\Leftrightarrow p^2 – p – 42 = 0$

$\Leftrightarrow (p – 7)(p + 6) = 0$

$\Leftrightarrow p = 7$ atau $p = -6$

Untuk $p = 7$ didapat : $7^{2-x} = 7 \Leftrightarrow 7^{2-x} = 7^1 \Leftrightarrow 2 – x = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Untuk $p = -6$ tidak ada penyelesaian (Mengapa?)

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {1}.

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan eksponen, dapat menggunakan ketentuan bahwa

a). Untuk $a > 1$ sehingga: $a^p > a^q \Leftrightarrow p > q$

$a^p < a^q \Leftrightarrow p < q$

b). Untuk $0 < a < 1$ sehingga: $a^p > a^q \Leftrightarrow p < q$

$a^p < a^q \Leftrightarrow p > q$

Contoh : Tentukan nilai x yang memenuhi $2^{4x-5} > 8^{2x+7}$

Jawab : $2^{4x-5} > 8^{2x+7} \Leftrightarrow 2^{4x-5} > (2^3)^{2x+7}$

$\Leftrightarrow 4x – 5 > 6x + 21$ (tanda tetap karena bilangan pokok $a > 1$)

$\Leftrightarrow - 2x > 26$

$\Leftrightarrow x < - 13$

C. Persamaan dan Pertidaksamaan Logaritma

Persamaan logaritma adalah suatu persamaan yang memuat variabel dalam pokok logaritma atau dalam numerisnya (anti logaritma).

Ada beberapa bentuk persamaan logaritma diantaranya :

1. Persamaan logaritma berbentuk :

   a). ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log p$

   b). ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)$ dengan f(x) dan g(x) bukan fungsi konstan

2. Persamaan logaritma dalam bentuk persamaan kuadrat

   Hal ini sering dijumpai bentuk ${}^{a}\log^{n} f(x)$, yang artinya $({}^{a}\log\ f(x))^{n}$

Dalam persamaan logaritma perlu disyaratkan bahwa bilangan pokok dan yang dilogaritmakan harus positif dan bilangan pokok tidak sama dengan satu.

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaiaan dari : log (x –2) + log (x- 7) = log 6

Jawab : Syarat x – 2 > 0 dan x – 7 > 0 . Jadi syaratnya x > 7

Maka : log (x –2) + log (x- 7) = log 6 $\Leftrightarrow$ log (x^2 – 9x + 14) = log 6

$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 6$

$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 6$

$\Leftrightarrow$ x2 – 9x + 8 = 0

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 8) = 0$

$\Leftrightarrow$ x = 1 atau x =8

Jadi HP : { 8 }

Dari fungsi f : x $\rightarrow$ ${}^{a}\log x$ yang merupakan fungsi naik bila a > 1 dan x $\in$ R^+, sedangkan fungsi turun bila 0 < a < 1, berlakulah :

a). Untuk a > 1 sehingga: ${}^{a}\log x > {}^{a}\log y \Leftrightarrow x > y$

${}^{a}\log x < {}^{a}\log y \Leftrightarrow x < y$

b). Untuk 0 < a < 1 sehingga: ${}^{a}\log x > {}^{a}\log y \Leftrightarrow x < y$

${}^{a}\log x < {}^{a}\log y \Leftrightarrow x > y$

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian dari : ${}^{7}\log(x-1) > 3 - 2.\,{}^{x-1}\log 7$

Jawab : Misalkan ${}^{7}\log(x-1) = p$ maka ${}^{x-1}\log 7 = \frac{1}{p}$

Pertidaksamaan menjadi: $p > 3 - 2.\frac{1}{p} \Leftrightarrow p^2 - 3p + 2 > 0$

$\Leftrightarrow (p-1)(p-2) > 0$

$\Leftrightarrow p < 1$ atau $p > 2$

untuk $p < 1$ maka $x - 1 < 7 \Leftrightarrow x < 8$

karena syaratnya $x - 1 > 0$ sehingga $x > 1$ dan $x < 8$ diperoleh $1 < x < 8$

untuk $p > 2$ maka $x - 1 > 49 \Leftrightarrow x > 50$

Jadi himpunana penyelesaiannya : $\{ x | 1 < x < 8$ atau $x > 50 \}$

Latihan 2

1. Carilah contoh-contoh peristiwa dalam kehidupan sehari-hari atau masalah-masalah yang ada kaitannya dengan fungsi eksponen atau logaritma.
2. Sederhanakan dan nyatakan hasilnya dengan pangkat positif dari $\dfrac{\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}{x\sqrt{x}}$
3. Gambarlah grafik fungsi $f(x) = 3^x$ dan fungsi $f(x) = 3^{-x}$
4. Sketsalah grafik dari $y = \frac{1}{2}.3^x$ untuk $-1 \le x \le 3$
5. Tentukan penyelesaian dari :

   a). $25^{x^2-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-4}$

   b). 2x+1 + 2x2x+3 = 36

   c). 5x + 51-x ≤ 6

   d). log (x-2) + log (x-6) – log 3 = log 2

   e). log log (x-3) + log 3 = log log (x2 – 3x)

   f). $-2 < {}^{1/3}\log(x-1) < 2$

   g). $\log x + \log(2x-1) \le 1$
6. Sebuah perusahaan memiliki mesin yang nilai bukunya sebesar Rp. 200.000.000,00 yang setiap tahunnya mengalami penyusutan sebesar 10 % . Berapakah nilai buku mesin itu pada akhir tahun kelima ?

Bab IV
Penutup

Materi bilangan real dalam bahan ajar ini hanya membahas konsep secara umum dan hanya diberikan sedikit contoh soal beserta pembahasan, kemudian dilanjutkan dengan latihan soal. Pada bahan ajar ini contoh-contoh penerapan dalam kehidupan sehari-hari belum semua diberikan pada semua jurusan di SMK tetapi hanya diberikan sebagian saja dan diharapkan peserta diklat dapat memberikan contoh sesuai jurusan yang diajarkan. Untuk memperdalam penguasaan materi, peserta diklat dapat mengerjakan soal latihan yang ada pada akhir setiap pembahasan. Apabila ada kesulitan dalam mengerjakan latihan disarankan peserta mendiskusikan dengan peserta lain agar dapat memahami materi.

Disadari masih banyak kekurangan dalam bahan ajar ini, sehingga kritik dan saran dari pembaca sangat kami harapkan.

Daftar Pustaka

Avi C. Bajpai, 1983, *Applied Math*, New York, John Wiley & Sons

E.T. Ruseffendi, 1989, *Dasar – dasar Matematika Modern dan Komputer untuk Guru*, Bandung, Tarsito

Nasution,AH dkk, 1994, *Matematika I SMU*, Jakarta, Balai Pustaka

ST. NEGORO – B. HARAHAP, 1985, *Ensiklopedia Matematika*, Jakarta, Ghalia Indonesia.

Tim PPPG Matematika, 2004, *Aritmetika* , Yogjakarta : PPPg Matematika

-----------------------, 2005, *Bahan Ajar Diklat Guru Matematika*, Jakarta, Direktorat Pendidikan Menengah Kejuruan.