LOGIKA

JENJANG DASAR

Fadjar Shadiq, M.App.Sc

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIDK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
YOGYAKARTA
2009

Daftar Isi

Kata Pengantar ---------- i

Daftar Isi ---------- ii

Kompetensi/Sub Kompetensi dan Peta Bahan Ajar ---------- iii

Skenario Pembelajaran ---------- iv

Bab I Pendahuluan ---------- 1

A. Latar Belakang ---------- 1

B. Tujuan ---------- 1

C. Cara Penggunaan Paket ---------- 1

Bab II Pengertian Logika dan Pernyataan ---------- 2

A. Pengertian Logika ---------- 2

B. Pernyataan ---------- 2

Bab III Perakit dan Negasinya ---------- 6

A. Perakit atau Perangkai ---------- 6

B. Ingkaran atau Negasi suatu Pernyataan ---------- 12

Bab IV Konvers, Invers, dan Kontraposisi suatu Implikasi ---------- 15

A. Konvers, Invers, dan Kontraposisi ---------- 15

B. Ingkaran Implikasi, Konvers, Invers, dan Kontraposisinya ---------- 15

Bab V Pernyataan berkuantor dan Negasinya ---------- 17

A. Kalimat Terbuka, Pernyataan, dan Kuantor ---------- 17

B. Kuantor Universal ---------- 18

C. Kuantor Eksistensial ---------- 20

D. Negasi Pernyataan Berkuantor Universal ---------- 22

E. Negasi Pernyataan Berkuantor Eksistensial ---------- 24

F. Negasi Pernyataan Berkuantor yang memuat lebih dari satu peubah ---------- 26

Daftar Pustaka ---------- 28

Lampiran Kunci Jawaban ---------- 29

KOMPETENSI

Memiliki kemampuan untuk mengembangkan keterampilan siswa dalam melakukan penalaran secara logis dan kritis.

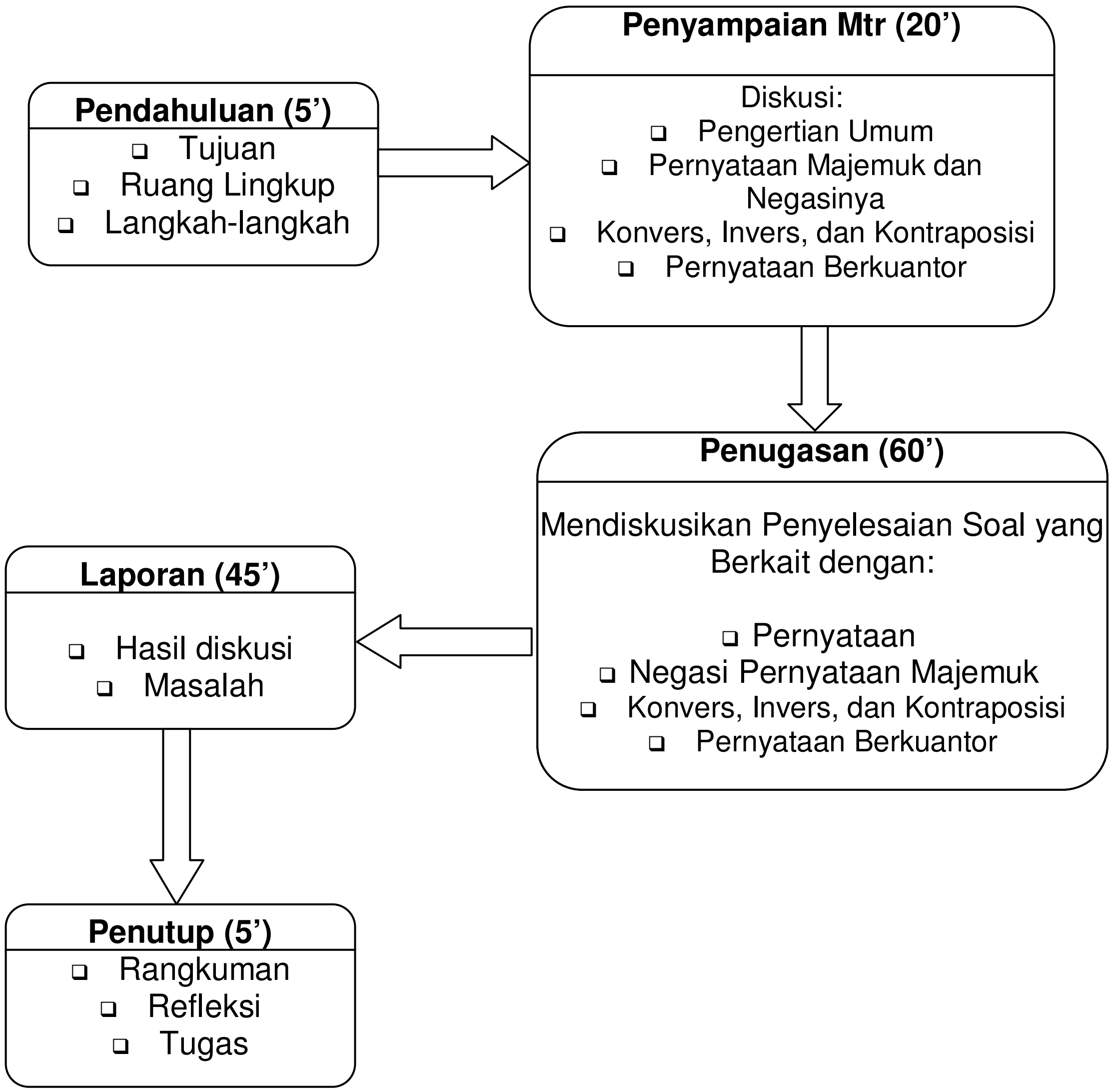
SUB KOMPETENSI

- Memiliki kemampuan menjelaskan perbedaan antara pernyataan dan bukan pernyataan dan dapat menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan.
- Memiliki kemampuan menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan majemuk dan nilai kebenaran dari negasi suatu pernyataan majemuk.
- Memiliki kemampuan menentukan konvers, invers, dan kontraposisi suatu implikasi dan menentukan nilai kebenarannya serta nilai kebenaran dari negasi bentuk-bentuk tersebut.
- Memiliki kemampuan menentukan nilai kebenaran suatu kalimat berkuantor universal dan eksistensial serta dapat menentukan nilai kebenaran dari negasi suatu pernyataan berkuantor.

PETA BAHAN AJAR

Mata diklat untuk jenjang dasar ini tidak membutuhkan pengetahuan prasyarat yang terlalu tinggi, namun membutuhkan pengetahuan matematika sederhana sehingga dapat berdiri sendiri. Pada diklat jenjang dasar ini kepada para peserta hanya diberikan pengetahuan yang berkait dengan pernyataan tunggal dan majemuk, implikasi beserta konvers, invers, dan kontraposinya; negasi dari bentuk-bentuk tadi; pernyataan berkuantor dan negasinya. Di samping itu, selama proses diklat, diharapkan akan muncul juga diskusi tentang bagaimana cara mengajarkan topik-topik tersebut. Pada diklat tahap lanjut dan menengah, kepada para peserta diharapkan sudah lebih mampu menyusun contoh-contoh pembelajaran logika yang lebih mengacu pada pendekatan terbaru seperti pembelajaran berbasis pemecahan masalah, pembelajaran matematika realistik maupun kontekstual.

SKENARIO PEMBELAJARAN



Bab I
Pendahuluan

A. Latar Belakang

Merupakan suatu kenyataan yang tidak dapat dibantah bahwa logika, penalaran, dan argumentasi sangat sering digunakan di dalam kehidupan nyata sehari-hari, di dalam mata pelajaran matematika sendiri maupun mata pelajaran lainnya. Karenanya, topik ini akan sangat berguna bagi siswa, karena di samping dapat meningkatkan daya nalar mereka, topik tersebut akan dapat langsung diaplikasikan di dalam kehidupan nyata mereka sehari-hari dan di saat mempelajari mata pelajaran lainnya.

Berkait dengan pentingnya penalaran dan logika, Arnold Chace (Jacobs, 1982:38) menyatakan: "*I venture to suggest that if one were to ask for that single attribute of the human intellect which would most clearly indicate the degree of civilization of a race, the answer would be, the power of ... reasoning, and that this power could best be determined in a general way by the mathematical skill which members of the race displayed. Judged by this standard the Egyptians of the nineteenth century BC had a high degree of civilization.*" Artinya: Saya ingin menyatakan bahwa jika ada orang yang bertanya tentang hal khusus dari kecerdasan insan yang paling nampak pengaruhnya pada tingkat peradaban suatu bangsa, jawabnya adalah ... kemampuan bernalar, dan cara terbaik menentukan kekuatan ini dengan cara yang umum adalah melalui keterampilan matematika yang diperlihatkan warga bangsa tersebut. Berdasar pada hal itu, dapatlah disimpulkan bahwa bangsa Mesir pada abad 19 SM telah memiliki peradaban dan kebudayaan yang sangat tinggi.

B. Tujuan

Modul ini disusun dengan maksud untuk memberikan tambahan pengetahuan berupa wawasan bagi guru SMA yang mengikuti pelatihan di PPPPTK Matematika, dengan harapan dapat digunakan sebagai salah satu sumber untuk memecahkan masalah-masalah pengajaran Logika Matematika SMA dan dapat digunakan juga sebagai bahan pengayaan wawasan para guru sehingga bahan yang disajikan dapat lebih mudah dicerna para siswa.

C. Cara Penggunaan Modul

Pembahasan pada modul ini lebih menitik-beratkan pada pengertian logika, konjungsi, disjungsi, implikasi, konvers, invers, kontraposisi, dan kuantor. Setiap bagian modul ini dimulai dengan teori-teori, diikuti beberapa contoh dan diakhiri dengan latihan. Di samping itu, dikemukakan juga tentang hal-hal penting yang perlu mendapat penekanan para guru di saat membahas pokok bahasan ini di kelasnya. Karenanya, para pemakai modul ini disarankan untuk membaca lebih dahulu teorinya sebelum mencoba mengerjakan latihan yang ada, yang untuk mempermudahnya telah disiapkan juga kunci jawabannya. Jika para pemakai modul ini mengalami kesulitan maupun memiliki saran, sudi kiranya menghubungi penulisnya, melalui *email:* fadjar_p3g@yahoo.com, HP: 08156896973, *website (situs):* www.fadjarp3g.wordpress.com atau melalui PPPPTK Matematika, Kotak Pos 31 YKBS, Yogyakarta.

Bab II
Pengertian Logika Matematika, Pernyataan, dan Perakit

Kebenaran suatu teori yang dikemukakan setiap ilmuwan, matematikawan, maupun para ahli merupakan hal yang sangat menentukan reputasi mereka. Untuk mendapatkan hal tersebut, mereka akan berusaha untuk mengaitkan suatu fakta atau data dengan fakta atau data lainnya melalui suatu proses penalaran yang sahih atau valid. Sebagai akibatnya, logika merupakan ilmu yang sangat penting dipelajari. Di dalam mata pelajaran matematika maupun IPA, aplikasi logika seringkali ditemukan meskipun tidak secara formal disebut sebagai belajar logika. Bagian ini akan membahas tentang logika yang didahului dengan pengertian penalaran, diikuti dengan pernyataan, perakit-perakit pembentuk: negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi.

A. Pengertian Logika

Perhatikan pernyataan menarik yang dikemukakan mantan Presiden AS Thomas Jefferson sebagaimana dikutip Copi (1978) berikut ini: "*In a republican nation, whose citizens are to be led by reason and persuasion and not by force, the art of reasoning becomes of first importance*" (p. vii). Pernyataan itu menunjukkan pentingnya logika, penalaran dan argumentasi dipelajari dan dikembangkan di suatu negara sehingga setiap warga negara akan dapat dipimpin dengan daya nalar (otak) dan bukannya dengan kekuatan (otot) saja. Karenanya, seperti yang dinyatakan mantan Presiden AS tadi, seni bernalar merupakan hal yang sangat penting. Di samping itu, Copi (1978) juga mengutip pendapat Juliana Geran Pilon yang senada dengan yang diucapkan mantan Presiden AS tadi: "*Civilized life depends upon the success of reason in social intercourse, the prevalence of logic over violence in interpersonal conflict*" (p. vii).

Dua pernyataan di atas telah menunjukkan pentingnya penalaran (*reasoning*) dalam percaturan politik dan pemerintahan di suatu negara. Tidak hanya di bidang ketatanegaraan maupun hukum saja kemampuan bernalar itu menjadi penting. Di saat mempelajari matematika maupun ilmu-ilmu lainnya penalaran itu menjadi sangat penting dan menentukan. Secara etimologis, logika berasal dari kata Yunani *'logos'* yang berarti kata, ucapan, pikiran secara utuh, atau bisa juga berarti ilmu pengetahuan (Kusumah, 1986). Dalam arti luas, logika adalah suatu cabang ilmu yang mengkaji penurunan-penurunan kesimpulan yang sahih (valid, *correct*) dan yang tidak sahih (tidak valid, *incorrect*). Proses berpikir yang terjadi di saat menurunkan atau menarik kesimpulan dari pernyataan-pernyataan yang diketahui benar atau dianggap benar itu sering juga disebut dengan penalaran (*reasoning*).

B. Pernyataan

Dimulai sejak ia masih kecil, setiap manusia, sedikit demi sedikit melengkapi perbendaharaan kata-katanya. Di saat berkomunikasi, seseorang harus menyusun kata-kata yang dimilikinya menjadi suatu kalimat yang memiliki arti atau bermakna. Kalimat adalah susunan kata-kata yang memiliki arti yang dapat berupa *pernyataan* ("Pintu itu tertutup."), *pertanyaan* ("Apakah pintu itu tertutup?"), *perintah* ("Tutup pintu itu!") ataupun *permintaan*

("Tolong pintunya ditutup."). Dari empat macam kalimat tersebut, hanya pernyataan saja yang memiliki nilai benar atau salah, tetapi tidak sekaligus benar atau salah. Meskipun para ilmuwan, matematikawan ataupun ahli-ahli lainnya sering menggunakan beberapa macam kalimat tersebut dalam kehidupan sehari-harinya, namun hanya pernyataan saja yang menjadi perhatian mereka dalam mengembangkan ilmunya.

Setiap ilmuwan, matematikawan, ataupun ahli-ahli lainnya akan berusaha untuk menghasilkan suatu pernyataan atau teori yang benar. Suatu pernyataan (termasuk teori) tidak akan ada artinya jika tidak bernilai benar. Karenanya, pembicaraan mengenai benar tidaknya suatu kalimat yang memuat suatu teori telah menjadi pembicaraan dan perdebatan para ahli filsafat dan logika sejak dahulu kala. Beberapa nama yang patut diperhitungkan karena telah berjasa untuk kita adalah Plato (427 – 347 SM), Aristoteles (384 – 322 SM), Charles S Peirce (1839 – 1914) dan Bertrand Russell (1872 – 1970). Paparan berikut akan membicarakan tentang kebenaran, dalam arti, bilamana suatu pernyataan yang dimuat di dalam suatu kalimat disebut benar dan bilamana disebut salah. Untuk menjelaskan tentang kriteria kebenaran ini perhatikan dua kalimat berikut:

a. Semua manusia akan mati.
b. Jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180°.

Pertanyaannya, dari dua kalimat tersebut, kalimat manakah yang bernilai benar dan manakah yang bernilai salah. Pertanyaan selanjutnya, mengapa kalimat tersebut dikategorikan bernilai benar atau salah, dan bilamana suatu kalimat dikategorikan sebagai kalimat yang bernilai benar atau salah. Untuk menjawab pertanyaan tersebut, Suriasumantri (1988) menyatakan bahwa ada tiga teori yang berkait dengan kriteria kebenaran ini, yaitu : teori korespondensi, teori koherensi, dan teori pragmatis. Namun sebagian buku hanya membicarakan dua teori saja, yaitu teori korespondensi dan teori koherensi sehingga pembicaraan kita hanya berkait dengan dua teori tersebut.

1. Teori Korespondensi

Teori korespondensi (the correspondence theory of truth) menunjukkan bahwa suatu kalimat akan bernilai benar jika hal-hal yang terkandung di dalam pernyataan tersebut sesuai atau cocok dengan keadaan yang sesungguhnya. Contohnya, “Surabaya adalah ibukota Propinsi Jawa Timur” merupakan suatu pernyataan yang bernilai benar karena kenyataannya memang demikian, yaitu Surabaya memang benar merupakan ibukota Propinsi Jawa Timur. Namun pernyataan “Tokyo adalah Ibukota Singapura”, menurut teori ini akan bernilai salah karena hal-hal yang terkandung di dalam pernyataan itu tidak sesuai dengan kenyataannya.

Teori-teori Ilmu Pengetahuan Alam banyak didasarkan pada teori korespondensi ini. Dengan demikian jelaslah bahwa teori-teori atau pernyataan-pernyataan Ilmu Pengetahuan Alam akan dinilai benar jika pernyataan itu melaporkan, mendeskripsikan, ataupun menyimpulkan kenyataan atau fakta yang sebenarnya. Sedangkan Matematika yang tidak hanya mendasarkan pada kenyataan atau fakta semata-mata namun mendasarkan pada rasio dan aksioma telah melahirkan teori koherensi yang akan dibahas pada bagian berikut ini.

2. Teori Koherensi

Teori koherensi menyatakan bahwa suatu kalimat akan bernilai benar jika pernyataan yang terkandung di dalam kalimat itu bersifat koheren, konsisten, atau tidak bertentangan dengan pernyataan-pernyataan sebelumnya yang dianggap benar. Contohnya, pengetahuan Aljabar telah didasarkan pada pernyataan pangkal yang dianggap benar. Pernyataan yang dianggap benar itu disebut aksioma atau postulat.

Vance (19..) menyatakan ada enam aksioma yang berkait dengan bilangan real a, b, dan c terhadap operasi penjumlahan (+) dan perkalian (.) berlaku sifat:

1) tertutup, $a + b \in R$ dan $a.b \in R$.
2) asosiatif, $a + (b + c) = (a + b) + c$ dan $a .(b . c) = (a . b) . c$
3) komutatif, $a + b = b + a$ dan $a.b = b.a$
4) distributif, $a.(b + c) = a.b + a.c$ dan $(b + c).a = b.a + c.a$
5) identitas, $a + 0 = 0 + a = a$ dan $a.1 = 1. a = a$
6) invers, $a + (-a) = (-a) + a = 0$ dan $a.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.a = 1$

Berdasar enam aksioma itu, teorema seperti $-b + (a + b) = a$ dapat dibuktikan.

Bukti:

$-b + (a + b)$	$= -b + (b + a)$	Aks 3 - Komutatif
	$= (-b + b) + a$	Aks 2 - Asosiatif
	$= 0 + a$	Aks 6 - Invers
	$= a$	Aks 5 - Identitas

Demikian juga pernyataan bahwa jumlah sudut-sudut suatu segi-n adalah: $(n - 2) \times 180^0$ akan bernilai benar karena konsisten dengan aksioma yang sudah disepakati kebenarannya dan konsisten juga dengan dalil atau teorema sebelumnya yang sudah terbukti. Dengan demikian jelaslah bahwa bangunan matematika didasarkan pada rasio semata-mata, kepada aksioma-aksioma yang dianggap benar tadi. Suatu hal yang sudah jelas benar pun harus ditunjukkan atau dibuktikan kebenarannya dengan langkah-langkah yang benar.

Dari paparan di atas jelaslah bahwa pada dua pernyataan berikut:

a) Semua manusia akan mati.
b) Jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180°.;

maka baik pernyataan a) maupun b) akan sama-sama bernilai benar, namun dengan alasan yang berbeda. Pernyataan a) bernilai benar karena pernyataan itu melaporkan, mendeskripsikan ataupun menyimpulkan kenyataan atau fakta yang sebenarnya. Sampai detik ini, belum pernah ada orang yang hidup kekal dan abadi. Pernyataan a) tersebut akan bernilai salah jika sudah ditemukan suatu alat atau obat yang sangat canggih sehingga akan ada orang yang tidak bisa mati lagi. Sedangkan pernyataan b) bernilai benar karena pernyataan itu konsisten atau koheren ataupun tidak bertentangan dengan aksioma yang sudah disepakati kebenarannya dan konsisten juga dengan dalil atau teorema sebelumnya yang sudah terbukti. Itulah sekilas tentang teori korespondensi dan teori koherensi yang memungkinkan kita untuk dapat menentukan benar tidaknya suatu pernyataan.

Beberapa istilah lain yang perlu mendapat perhatian Bapak dan Ibu Guru adalah tentang konstanta, variabel (peubah), dan kalimat terbuka. **Konstanta** adalah lambang yang menunjuk anggota tertentu dari suatu semesta pembicaraan, **variabel** (**peubah**) adalah lambang yang menunjuk anggota sembarang dari semesta pembicaraan, sedangkan **kalimat terbuka** adalah kalimat yang belum dapat dinyatakan benar atau salah. Contoh kalimat terbuka adalah $x + 2 = 10$.

<u>Latihan 2.1</u>

1. Manakah di antara kalimat berikut yang merupakan pernyataan?
   a. $x + 3 = 2$.
   b. $x + 3 = 2$ adalah suatu pernyataan.
   c. 111 adalah bilangan prima.
   d. Tadi pagi Fahmi bertanya: "Pak Guru kapan ulangan?"
   e. $2n + 1$ untuk $n \in A$ adalah bilangan ganjil.

2. Pilihlah pernyataan-pernyataan yang benar di bawah ini. Pilihan pernyataan yang benar dapat lebih dari satu. Akar-akar persamaan $(x - 1)(x + 2) = 0$ adalah:
   a. $x = 1$ atau $x = -2$
   b. $x = 1$ dan $x = -2$
   c. 1 atau -2
   d. 1 dan -2

3. Pilihlah pernyataan-pernyataan yang benar di bawah ini.
   Himpunan penyelesaian persamaan $(x - 1)(x + 2) = 0$ adalah:
   a. $\{1, -2\}$
   b. $\{x \in R \mid x = 1 \text{ atau } x = -2\}$
   c. $\{x \in R \mid x = 1 \text{ dan } x = -2\}$

4. Seorang siswa menulis kata-kata yang tidak pantas di papan tulis. Berikut pernyataan lima siswa ketika ditanya gurunya.
   Ali: “Tulisan seperti itu adalah tulisan Budi atau Chandra.”
   Budi: “Bukan Edo dan juga bukan saya yang menulis kata-kata kotor itu.”
   Chandra: “Baik Ali maupun Budi sama-sama berbohong.”
   Deni: “Hanya satu dari A atau B yang berkata benar.”
   Edo: “Deni telah berbohong.”
   Jika tiga orang dari siswa itu selalu berkata benar dan dua lainnya masih mungkin berbohong, siapakah yang menulis tulisan kotor tersebut?

5. Andi berbohong pada hari Senin, Selasa, dan Rabu, sedangkan pada hari-hari yang lain ia berkata benar. Teman karibnya, si Badu berbohong pada hari Kamis, Jumat, dan Sabtu, sedangkan pada hari-hari yang lain ia berkata benar. Pada suatu hari, Andi berkata: "Kemarin adalah hari di mana saya berbohong." Badu lalu menimpali: "Kemarin adalah hari di mana saya berbohong juga."
   a. Pada hari-hari apakah mereka berdua dapat menyatakan hal itu.
   b. Jika mereka berdua sama-sama menyatakan bahwa hari kemarin adalah hari di mana mereka berkata benar, pada hari-hari apakah mereka berdua dapat menyatakan hal itu?

Bab III
Perakit Dan Negasinya

Sudah dibahas bahwa kebenaran suatu teori yang dikemukakan setiap ilmuwan, matematikawan, maupun para ahli merupakan hal yang sangat menentukan reputasi mereka. Untuk mendapatkan hal tersebut, mereka akan berusaha untuk mengaitkan suatu fakta atau data dengan fakta atau data lainnya melalui suatu proses penalaran yang sahih atau valid. Setiap pernyataan harus ditentukan lebih dahulu kebenarannya. Adakalanya, mereka harus menegasikan atau membuat pernyataan baru yang menunjukkan pengingkaran atas pernyataan yang ada, dengan menggunakan perakit “bukan” atau “tidak”. Di samping itu, mereka harus menggabungkan dua pernyataan atau lebih dengan menggunakan perakit “atau”, “dan”, “Jika … maka ….”, maupun “… jika dan hanya jika ….” yang dikenal di matematika sebagai konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi. Bagian ini akan membahas perakit-perakit tersebut

A. Perakit atau Perangkai

Perakit atau perangkai ini sering juga disebut dengan operasi. Dari satu atau dua pernyataan tunggal dapat diberikan perakit “tidak” , “dan”, “atau”, “jika … maka …”, dan “ … jika dan hanya jika … “ sehingga terbentuk suatu negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi. Sub bagian ini akan membahas tentang perakit atau penggandeng tersebut.

1. Negasi

Jika p adalah "Surabaya ibukota Jawa Timur", maka negasi atau ingkaran dari pernyataan p tersebut adalah ~p yaitu: "Surabaya bukan ibukota Jawa Timur." atau "Tidak benar bahwa Surabaya ibukota Jawa Timur.".

Dari contoh di atas nampak jelas bahwa p merupakan pernyataan yang bernilai benar karena Surabaya pada kenyataannya memang ibukota Jawa Timur, sehingga ~p akan bernilai salah. Namun jika p bernilai salah maka ~p akan bernilai benar seperti ditunjukkan oleh tabel kebenaran di bawah ini.

p	~p
B	S
S	B

2. Konjungsi

Konjungsi adalah suatu pernyataan majemuk yang menggunakan perakit "dan". Contohnya, pernyataan Adi berikut:

"Fahmi makan nasi <u>dan</u> minum kopi."

Pernyataan tersebut ekivalen dengan dua pernyataan tunggal berikut: "Fahmi makan nasi." dan sekaligus "Fahmi minum kopi."

Dalam proses pembelajaran di kelas, berilah kesempatan kepada para siswa untuk bertanya kepada diri mereka sendiri, dalam hal mana pernyataan Adi di atas bernilai benar dan dalam hal mana bernilai salah dalam empat kasus berikut:

> Kasus pertama, Fahmi memang benar makan nasi dan ia juga minum kopi.
> Kasus kedua, Fahmi makan nasi namun ia tidak minum kopi.
> Kasus ketiga, Fahmi tidak makan nasi namun ia minum kopi.
> Kasus keempat, Fahmi tidak makan nasi dan ia tidak minum kopi.

Pada kasus pertama, Fahmi memang benar makan nasi dan ia juga minum kopi. Dalam kasus seperti ini, tidaklah mungkin Anda akan mengatakan pernyataan Adi tadi bernilai salah. Alasannya, pernyataan Adi tadi sesuai dengan kenyataannya.

Pada kasus kedua, Fahmi makan nasi namun ia tidak minum kopi. Dalam hal ini, tentunya Anda akan menyatakan bahwa pernyataan majemuk Adi tadi bernilai salah karena meskipun Fahmi sudah makan nasi namun ia tidak minum kopi sebagaimana yang dinyatakan Adi.

Sejalan dengan itu, pada kasus ketiga, Fahmi tidak makan nasi meskipun ia sudah minum kopi. Sebagaimana kasus kedua tadi, Anda akan menyatakan bahwa pernyataan majemuk Adi tadi bernilai salah karena Fahmi tidak makan nasi sebagaimana yang dinyatakan Adi bahwa Fahmi makan nasi dan minum kopi.

Akhirnya, pada kasus keempat, Fahmi tidak makan nasi dan ia tidak minum kopi. Dalam hal ini Anda akan menyatakan bahwa pernyataan majemuk Adi tadi bernilai salah karena tidak ada kesesuaian antara yang dinyatakan dengan kenyataan yang sesungguhnya.

Berdasar penjelasan di atas, dapatlah disimpulkan bahwa suatu konjungsi $p \wedge q$ akan bernilai benar hanya jika komponen-komponennya, yaitu baik p maupun q, keduanya bernilai benar, sedangkan nilai kebenaran yang selain itu akan bernilai salah sebagaimana ditunjukkan pada tabel kebenaran berikut:

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

3. Disjungsi

Disjungsi adalah pernyataan majemuk yang menggunakan perakit "atau". Contohnya, pernyataan Adi berikut: "Fahmi makan nasi <u>atau</u> minum kopi." Sekarang, bertanyalah kepada diri Anda sendiri, dalam hal mana pernyataan Adi di atas akan bernilai benar dalam empat kasus berikut:

> Kasus pertama, Fahmi memang benar makan nasi dan ia juga minum kopi.
> Kasus kedua, Fahmi makan nasi namun ia tidak minum kopi.

Kasus ketiga, Fahmi tidak makan nasi namun ia minum kopi.
Kasus keempat, Fahmi tidak makan nasi dan ia tidak minum kopi.

Pada kasus pertama, Fahmi memang benar makan nasi dan ia juga minum kopi. Dalam kasus seperti ini, tidaklah mungkin Anda akan mengatakan pernyataan Adi tadi bernilai salah, karena pernyataan Adi tadi sesuai dengan kenyataannya.

Pada kasus kedua, Fahmi makan nasi namun ia tidak minum kopi. Dalam hal ini, tentunya Anda akan menyatakan bahwa pernyataan majemuk Adi tadi bernilai benar karena Fahmi sudah benar makan nasi meskipun ia tidak minum kopi sebagaimana yang dinyatakan Adi.

Pada kasus ketiga, Fahmi tidak makan nasi namun ia minum kopi. Sebagaimana kasus kedua tadi, Anda akan menyatakan bahwa pernyataan majemuk Adi tadi bernilai benar karena meskipun Fahmi tidak makan nasi namun ia sudah minum kopi sebagaimana yang dinyatakan Adi.

Akhirnya, pada kasus keempat, Fahmi tidak makan nasi dan ia tidak minum kopi. Dalam hal ini Anda akan menyatakan bahwa pernyataan majemuk Adi tadi bernilai salah karena tidak ada kesesuaian antara yang dinyatakan dengan kenyataan yang sesungguhnya. Ia menyatakan Fahmi makan nasi atau minum kopi namun kenyataannya, Fahmi tidak melakukan hal itu.

Berdasar penjelasan di atas, dapatlah disimpulkan bahwa suatu disjungsi $p \vee q$ akan bernilai salah hanya jika komponen-komponennya, yaitu baik p maupun q, keduanya bernilai salah, yang selain itu akan bernilai benar sebagaimana ditunjukkan pada tabel kebenaran berikut:

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Contoh: Tentukan nilai kebenaran "$3 \leq 5$".
Jawab:
$3 \leq 5$ dapat dinyatakan dengan $3 < 5$ atau $3 = 5$.
Pilih $2 \in R$, di mana $2 > 0$ dan $3 + 2 = 5$, sehingga $3 < 5$.
Jika $\tau(p)$ berarti atau dibaca "Nilai kebenaran pernyataan p.", maka $\tau(3 < 5) = B$. Di samping itu, $\tau(3 = 5) = S$.
Jadi, $\tau(3<5 \text{ atau } 3=5) = B$ atau $\tau(3 \leq 5) = B$. Dengan kata lain, "$3 \leq 5$" merupakan pernyataan yang bernilai benar.

4. Implikasi

Misalkan ada dua pernyataan p dan q. Yang sering menjadi perhatian para ilmuwan maupun matematikawan adalah menunjukkan atau membuktikan bahwa jika p bernilai benar akan mengakibatkan q bernilai benar juga. Untuk mencapai keinginannya tersebut, diletakkanlah kata "Jika" sebelum pernyataan pertama lalu diletakkan juga kata "maka" di antara pernyataan pertama dan pernyataan kedua, sehingga didapatkan suatu pernyataan majemuk yang disebut dengan implikasi, pernyataan bersyarat, kondisional atau hypothetical dengan notasi "$\Rightarrow$" seperti ini:

$$p \Rightarrow q$$

Notasi di atas dapat dibaca dengan:

1) Jika p maka q,
2) q jika p,
3) p adalah syarat cukup untuk q, atau
4) q adalah syarat perlu untuk p.

Implikasi $p \Rightarrow q$ merupakan pernyataan majemuk yang paling sulit dipahami para siswa SMU. Untuk membantu para siswa memahami kalimat majemuk implikasi tersebut, Bapak dan Ibu Guru dapat memulai proses pembelajaran dengan berceritera bahwa Adi menyatakan pernyataan majemuk berikut ini:

Jika hari hujan maka saya (Adi) membawa payung.

Dalam hal ini dimisalkan:

p: Hari hujan.
q: Adi membawa payung.

Berilah kesempatan bagi siswa untuk berpikir, dalam hal manakah pernyataan Adi tadi akan bernilai benar atau salah untuk empat kasus berikut:

Kasus pertama: Hari benar-benar hujan dan Adi benar-benar membawa payung.
Kasus kedua: Hari benar-benar hujan namun Adi tidak membawa payung.
Kasus ketiga: Hari tidak hujan namun Adi membawa payung.
Kasus pertama: Hari tidak hujan dan Adi tidak membawa payung.

Pada kasus pertama, hari benar-benar hujan dan Adi benar-benar membawa payung sebagaimana yang ia nyatakan. Bagaimana mungkin ia akan dinyatakan berbohong dalam kasus ini? Dengan demikian jelaslah bahwa kedua komponen yang sama-sama bernilai benar itu telah menyebabkan pernyataan majemuk (implikasi) yang dinyatakan Adi tadi akan bernilai benar.

Pada kasus kedua, hari itu benar-benar hujan akan tetapi Adi tidak membawa payung sebagaimana yang seharusnya ia lakukan seperti yang telah dinyatakannya, bagaimana mungkin pernyataan Adi tadi akan dinilai benar? Dengan kata lain, komponen p yang bernilai benar namun tidak diikuti dengan komponen q yang seharusnya bernilai benar juga, akan menyebabkan pernyataan majemuk (implikasi) yang dinyatakan Adi tadi akan bernilai salah.

Akhirnya, untuk kasus ketiga dan keempat, di mana hari itu tidak hujan, tentunya Anda tidak akan menyebut pernyataan majemuk (implikasi) Adi tersebut sebagai pernyataan yang salah, karena Adi hanyalah menyatakan bahwa sesuatu akan terjadi yaitu dia akan membawa payung jikalau hari hujan.

Dengan demikian jelaslah bahwa implikasi p $\Rightarrow$ q hanya akan bernilai salah untuk kasus kedua di mana p bernilai benar namun q-nya bernilai salah, sedangkan yang selain itu implikasi p $\Rightarrow$ q akan bernilai benar seperti ditunjukkan tabel kebenaran berikut ini:

p	q	p $\Rightarrow$ q
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

5. Biimplikasi

Biimplikasi atau bikondisional adalah pernyataan majemuk dari dua pernyataan p dan q yang dinotasikan dengan p $\Leftrightarrow$ q yang bernilai sama dengan (p $\Rightarrow$ q) $\wedge$ (q $\Rightarrow$ p) sehingga dapat dibaca: "p jika dan hanya jika q" atau "p bila dan hanya bila q."
Tabel kebenaran dari p $\Leftrightarrow$ q adalah:

p	q	p $\Leftrightarrow$ q
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Dengan demikian jelaslah bahwa biimplikasi dua pernyataan p dan q hanya akan bernilai benar jika kedua pernyataan tunggalnya bernilai sama.
Contoh biimplikasi:

1. Suatu segitiga adalah segitiga siku-siku jika dan hanya jika luas persegi pada hipotenusanya sama dengan jumlah luas dari persegi-persegi pada kedua sisi yang lain.
2. Suatu segitiga adalah segitiga sama sisi bila dan hanya bila ketiga sisinya sama.

Tabel kebenaran dari suatu negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi di atas merupakan dasar dalam mencari nilai kebenaran pernyataan-pernyataan majemuk seperti di saat menentukan nilai kebenaran pernyataan majemuk (~p $\wedge$ r) $\vee$ (~r $\Rightarrow$ q) seperti ini.

p	q	r	~p	~r	(~p $\wedge$ r)	(~r $\Rightarrow$ q)	(~p $\wedge$ r) $\vee$ (~r $\Rightarrow$ q)
B	B	B	S	S	S	B	B
B	B	S	S	B	S	B	B
B	S	B	S	S	S	B	B
B	S	S	S	B	S	S	S
S	B	B	B	S	B	B	B
S	B	S	B	B	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B	B
S	S	S	B	B	S	S	S

Latihan 3.1

1. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut!
   a. Jika $x^2 = 4$ maka $x = 2$.
   b. Jika $x = -2$ maka $x^2 = 4$.
   c. Jika $3x + 4 = 2$ dan $x \in B$, maka $x = -1$.
   d. $3 + 2 = 6 \Leftrightarrow 4 + 2 = 5$.
   e. $3 + 2 = 5 \Rightarrow 4 + 2 = 5$.
   f. $3 + 2 = 5$ atau Jakarta ibukota DI Aceh.

2. Jika p : 10 habis dibagi 5.
   q : 8 adalah bilangan prima.
   Nyatakan dalam kalimat sehari-hari pernyataan-pernyataan di bawah ini lalu tentukan nilai kebenarannya.
   a. $\sim p$ b. $\sim q$ c. $p \wedge q$
   d. $p \vee q$ e. $\sim p \wedge \sim q$ f. $\sim p \wedge q$
   g. $p \wedge \sim q$ h. $p \Rightarrow q$ i. $p \Leftrightarrow q$.
   j. $(p \vee \sim q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$

3. Jika a: Lisa gadis cantik dan
   b: Lisa gadis cerdas,
   Nyatakan pernyataan di bawah ini dengan menggunakan a, b dan simbol-simbol logika matematika.

   a. Lisa gadis yang cantik namun tidak cerdas.
   b. Lisa gadis yang tidak cantik dan tidak cerdas.
   c. Meskipun Lisa bukanlah gadis yang cantik namun ia gadis yang cerdas.
   d. Lisa gadis yang cantik sekaligus juga gadis yang cerdas.
   e. Tidak benar bahwa Lisa gadis yang cantik dan cerdas.
   f. Jika Lisa gadis yang cantik maka ia tidak cerdas.
   g. Jika Lisa gadis yang tidak cantik maka ia tidak cerdas.

4. Buatlah tabel kebenaran dari pernyataan ini:
   a. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ b. $p \wedge q \Rightarrow (q \wedge \sim q \Rightarrow r \wedge q)$
   c. $\sim[(\sim p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow \sim q)] \wedge r$

B. Ingkaran Atau Negasi Suatu Pernyataan

1. Negasi Suatu Konjungsi

Konjungsi adalah suatu pernyataan majemuk yang menggunakan perakit "dan". Contohnya, pernyataan Adi berikut:

"Fahmi makan nasi dan minum kopi."

Pernyataan tersebut ekivalen dengan dua pernyataan tunggal berikut: "Fahmi makan nasi." dan sekaligus "Fahmi minum kopi." Suatu konjungsi p $\wedge$ q akan bernilai benar hanya jika komponen-komponennya, yaitu baik p maupun q, keduanya bernilai benar. Sedangkan negasi atau ingkaran suatu pernyataan adalah pernyataan lain yang bernilai benar jika pernyataan awalnya bernilai salah dan bernilai salah jika pernyataan awalnya bernilai benar. Karena itu, negasi dari: "Fahmi makan nasi dan minum kopi." adalah suatu pernyataan majemuk lain yang salah satu komponennya merupakan negasi dari komponen pernyataan awalnya. Dengan demikian, negasinya adalah “"Fahmi tidak makan nasi atau tidak minum kopi."; sebagaimana ditunjukkan tabel kebenaran berikut:

p	q	p $\wedge$ q	~p	~q	~p $\vee$ ~q
B	B	B	S	S	S
B	S	S	S	B	B
S	B	S	B	S	B
S	S	S	B	B	B

2. Negasi Suatu Disjungsi

Disjungsi adalah pernyataan majemuk yang menggunakan perakit "atau". Contohnya, pernyataan Adi berikut: "Fahmi makan nasi atau minum kopi." Suatu disjungsi p $\vee$ q akan bernilai salah hanya jika komponen-komponennya, yaitu baik p maupun q, keduanya bernilai salah, yang selain itu akan bernilai benar. Karenanya, negasinya adalah "Fahmi tidak makan nasi dan tidak minum kopi," sebagaimana ditunjukkan tabel kebenaran berikut:

p	q	p $\vee$ q	~p	~q	~p $\wedge$ ~q
B	B	B	S	S	S
B	S	B	S	B	S
S	B	B	B	S	S
S	S	S	B	B	B

3. Negasi Suatu Implikasi

Perhatikan pernyataan berikut yang merupakan suatu implikasi:

“Jika hari hujan maka Adi membawa payung.”

Telah dibahas di bagian depan bahwa pada suatu implikasi $p \Rightarrow q$, pernyataan p memuat pernyataan q. Karenanya, negasi pernyataan tersebut adalah suatu pernyataan yang pernyataan p-nya bernilai benar namun pernyataan q-nya bernilai salah. Pada contoh di atas, negasinya adalah: "Hari hujan namun Adi tidak membawa payung," seperti ditunjukkan tabel kebenaran berikut ini:

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim q$
B	B	S	B	S
B	S	B	S	B
S	B	S	B	S
S	S	B	B	S

Berdasar penjelasan di atas, $p \Rightarrow q \equiv \sim[\sim (p \Rightarrow q)] \equiv \sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$

4. Biimplikasi

Biimplikasi atau bikondisional adalah pernyataan majemuk dari dua pernyataan p dan q yang dinotasikan dengan $p \Leftrightarrow q$ yang ekuivalen $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$; sehingga:

$$\begin{aligned} \sim (p \Leftrightarrow q) &\equiv \sim[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \\ &\equiv \sim[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \\ &\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)] \\ &\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \end{aligned}$$

Tabel kebenaran dari suatu negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi di atas merupakan dasar dalam mencari nilai kebenaran pernyataan-pernyataan majemuk seperti di saat menentukan nilai kebenaran pernyataan majemuk $(\sim p \wedge r) \vee (\sim r \Rightarrow q)$ seperti berikut ini.

p	q	r	$\sim p$	$\sim r$	$(\sim p \wedge r)$	$(\sim r \Rightarrow q)$	$(\sim p \wedge r) \vee (\sim r \Rightarrow q)$
B	B	B	S	S	S	B	B
B	B	S	S	B	S	B	B
B	S	B	S	S	S	B	B
B	S	S	S	B	S	S	S
S	B	B	B	S	B	B	B
S	B	S	B	B	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B	B
S	S	S	B	B	S	S	S

Latihan 3.2

1. Tentukan negasi dari pernyataan berikut ini lalu tentukan nilai kebenarannya.
   a. $3 + 2 = 6 \Leftrightarrow 4 + 2 = 5$
   b. $3 + 2 = 5 \Rightarrow 4 + 2 = 5$.
   c. $3 + 2 = 5$ atau Jakarta ibukota DI Aceh.
   d. Jika saya makan maka saya menjadi kenyang
   e. Amir makan nasi dan minum kopi
   f. Amir ke rumah Anto atau ia nonton film bersama chandra

2. Jika p : 10 habis dibagi 5.
   q : 8 adalah bilangan prima.

   Tentukan negasi dari pernyataan-pernyataan di bawah ini lalu tentukan nilai kebenarannya.

   a. $\sim p$ b. $\sim q$ c. $p \wedge q$
   d. $p \vee q$ e. $\sim p \wedge \sim q$ f. $\sim p \wedge q$
   g. $p \wedge \sim q$ h. $p \Rightarrow q$ i. $p \Leftrightarrow q$.
   j. $(p \vee \sim q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$

3. Jika a: Lisa gadis cantik dan
   b: Lisa gadis cerdas,

   Nyatakan pernyataan di bawah ini dengan menggunakan a, b dan simbol-simbol logika matematika lalu tentukan negasinya.
   a. Lisa gadis yang cantik namun tidak cerdas.
   b. Lisa gadis yang tidak cantik dan juga tidak cerdas.
   c. Meskipun Lisa bukanlah gadis yang cantik namun ia gadis yang cerdas.
   d. Lisa gadis yang cantik sekaligus juga gadis yang cerdas.
   e. Tidak benar bahwa Lisa gadis yang cantik dan cerdas.
   f. Jika Lisa gadis yang cantik maka ia tidak cerdas.
   g. Jika Lisa gadis yang tidak cantik maka ia tidak cerdas.

4. Buatlah negasi dari pernyataan ini.
   a. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$
   b. $p \wedge q \Rightarrow (q \wedge \sim q \Rightarrow r \wedge q)$
   c. $\sim[(\sim p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow \sim q)] \wedge r$

Bab IV
Konvers, Invers dan Kontraposisi Suatu Implikasi

A. Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Perhatikan pernyataan berupa implikasi ini:

Jika suatu bendera adalah bendera RI maka bendera tersebut berwarna merah dan putih.

Bentuk umum suatu implikasi adalah

$p \Rightarrow q$

Pada kasus diatas,

p : Bendera RI
q : Bendera berwarna merah dan putih

Dari implikasi di atas, dapat dibentuk implikasi berikut:

a. Jika suatu bendera berwarna merah dan putih maka bendera tersebut adalah bendera RI.
b. Jika suatu bendera bukan bendera RI maka bendera tersebut tidak berwarna merah dan putih.
c. Jika suatu bendera tidak berwarna merah dan putih, maka bendera tersebut bukan bendera RI.

Berdasar penjelasan di atas, jawablah pertanyaan berikut:

a. Jika implikasinya dinotasikan dengan $p \Rightarrow q$, nyatakan implikasi pada a, b, dan c di atas dalam p, q, ~p, atau ~q.
b. Manakah yang menjadi konvers, invers, dan kontraposisi dari implikasi $p \Rightarrow q$ jika:
   Konversnya adalah $q \Rightarrow p$
   Inversnya adalah $\sim p \Rightarrow \sim q$
   Kontraposisinya adalah $\sim q \Rightarrow \sim p$
c. Tentukan nilai kebenaran dari implikasi, konvers, invers, dan kontraposisinya.
d. Hal menarik apa saja yang Anda dapatkan dari kegiatan c di atas?

B. Ingkaran Implikasi, Konvers, Invers, dan Kontraposisinya

Sudah dibahas di bagian depan tentang negasi atau ingkaran suatu pernyataan, termasuk ingkaran dari suatu implikasi. Untuk mengingatnya, tentuka ingkaran pernyataan berikut:

1. $p \wedge q$
2. $p \vee q$
3. $p \Rightarrow q$
4. $q \Rightarrow p$
5. $\sim p \Rightarrow \sim q$
6. $\sim q \Rightarrow \sim p$

Isikan negasi atau ingkaran pernyataan di atas pada tempat di bawah ini.

1. …

2. …

3. …

4. …

5. …

6. …

Latihan 4.1

1. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari implikasi berikut:
   a. Jika suatu bendera adalah bendera Jepang, maka ada bintang pada bendera tersebut.
   b. $a > 0 \Rightarrow a^3 > 0$
   c. $a = 0 \Rightarrow ab = 0$
   d. Jika dua persegipanjang kongruen maka luasnya sama.
   e. $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$
   f. Jika segitiga ABC adalah segitiga samasisi maka sisi-sisi segitiga tersebut sama panjang.

2. Tentuka nilai kebenaran implikasi, konvers, invers, dan kontraposisi dari soal di atas.

3. Apa yang anda dapatkan dari hasil pada kegiatan 2 itu?

4. Buatlah ingkaran dari implikasi, beserta konvers, invers, dan kontraposisinya.

5. Apa yang anda dapatkan dari hasil pada kegiatan 4 itu?

Bab V
Pernyataan Berkuantor Dan Negasinya

BabV ini dimulai dengan membahas perbedaan antara kalimat terbuka dan pernyataan sebagai suatu pengetahuan prasyarat. Soal-soal berikutnya adalah menyusun beberapa kalimat yang didapat dengan menambahkan kata-kata tertentu terhadap suatu kalimat terbuka. Kata-kata tertentu yang ditambahkan terhadap suatu kalimat terbuka itulah yang dikenal sebagai kuantor *(quantifier),* sehingga didapat pernyataan berkuantor yang bernilai benar saja atau salah saja. Dari contoh-contoh tersebut, pengertian kuantor yang terdiri atas dua macam yaitu kuantor universal dan kuantor eksistensial secara terinci akan dibahas. Pembahasan materi ini akan menggunakan pertanyaan-pertanyaan sehingga memungkinkan bagi Anda untuk mengalami sendiri proses pembelajaran 'Kuantor' yang berbasis pada pemecahan masalah (*problem-solving*), dengan harapan pengalaman itu dapat diaplikasikan langsung di dalam proses pembelajaran tentang 'Kuantor' ini di kelasnya masing-masing.

A. Kalimat Terbuka, Pernyataan, dan Kuantor

Perhatikan tiga kalimat berikut:

1. $3 + 4 = 6$
2. $x^2 - 5x + 6 = 0, x \in A$
3. $2x + 5 > 4, x \in A$

Ada beberapa pertanyaan berkait dengan kalimat di atas, diantaranya:

1. Mengapa kalimat pertama disebut dengan pernyataan? Mengapa kalimat kedua dan ketiga disebut dengan kalimat terbuka?
2. Dapatkah Anda mengubah kalimat terbuka menjadi pernyataan? Bagaimana caranya?

Kalimat 1 bernilai salah, sedangkan kalimat 2 dan 3 belum dapat ditentukan nilai kebenarannya sebelum peubah atau *variabel* x-nya diganti dengan salah satu anggota semesta pembicaraannya. Karenanya, kalimat pertama dapat dikategorikan sebagai pernyataan, sedangkan kalimat kedua dan ketiga dikategorikan sebagai kalimat terbuka.

Yang perlu mendapat perhatian adalah, kalimat terbuka $x^2 - 5x + 6 = 0, x \in A$ akan bernilai benar hanya jika peubahnya diganti dengan $x = 2$ atau $x = 3$. Artinya, hanya ada dua anggota bilangan asli A yang jika digantikan atau disubstitusikan ke kalimat terbuka tersebut akan menyebabkan kalimat terbuka tersebut menjadi bernilai benar. Sedangkan kalimat terbuka $2x + 5 > 4, x \in A$ akan bernilai benar jika peubah x-nya diganti oleh setiap anggota semesta pembicaraannya.

Cara lain mengubah kalimat terbuka menjadi suatu pernyataan adalah dengan menambahkan kata-kata yang berkait dengan banyaknya pengganti variabel atau peubah x-nya, seperti contoh berikut.

1. Untuk setiap bilangan asli x, $x^2 - 5x + 6 = 0$.
2. Terdapat bilangan asli x sedemikian sehingga $x^2 - 5x + 6 = 0$.
3. Tidak ada bilangan asli x, sedemikian sehingga $x^2 - 5x + 6 = 0$.
4. Untuk semua bilangan asli x, $2x + 5 > 4$
5. Ada beberapa bilangan asli x sedemikian sehingga $2x + 5 > 4$
6. Tidak ada bilangan asli x sedemikian sehingga $2x + 5 > 4$

Perhatikan sekali lagi ke-enam kalimat di atas. Beberapa pertanyaan yang dapat diajukan kepada siswa adalah:

1. Dapatkah Anda menentukan nilai kebenaran ke-enam kalimat di atas?
2. Tentukan nilai kebenaran setiap kalimat di atas. Jelaskan jawaban Anda.

Dari beberapa contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa terhadap suatu kalimat terbuka dapat ditambahkan kata-kata seperti:

- "Untuk semua x … " atau "Untuk setiap x … ";
- "Beberapa x … "; "Terdapat x … "; ataupun "Ada x …".
- "Tidak ada x …"

Karena itulah Wheeler (1977:23) menyatakan: *"Quantifiers are most useful in rewriting assertions that cannot be classified as true or false … so that they can be classified either as true or false."* yang dapat diterjemahkan menjadi: "Kuantor sangat berguna dalam mengubah kalimat berita yang tidak dapat dinyatakan bernilai benar atau salah … sedemikian sehingga kalimat berita tersebut dapat dikategorikan sebagai kalimat yang bernilai benar saja atau salah saja."

Menurut jenisnya kuantor dibedakan menjadi 2, yaitu Kuantor Universal (Kuantor Umum) yang menggunakan kata "untuk setiap" atau "untuk semua" dan Kuantor Eksistensial (Kuantor Khusus) yang menggunakan kata "beberapa", "terdapat'" atau "ada". Sedangkan kuantor "tidak ada x" dapat diubah ke bentuk "semua x tidak" atau "setiap x tidak". Secara lengkap kedua macan kuantor tersebut akan dibahas pada bagian berikut ini.

B. Kuantor Universal

Kuantor jenis ini mempunyai lambang $\forall$ dan dibaca "untuk setiap" atau "untuk semua". Misalkan p(x) adalah suatu kalimat terbuka, pernyataan $\forall x\ .\ p(x)$ dibaca "untuk setiap x berlaku p(x)" atau "untuk semua x berlaku p(x)". Berikut ini adalah beberapa contoh pernyataan berkuantor universal:

Contoh 1

'*Semua* artis adalah cantik.' Pernyataan berkuantor universal ini menggambarkan adanya dua himpunan, yaitu himpunan artis dan himpunan orang cantik. Di samping itu, pernyataan tadi menjelaskan tentang semua artis namun tidak menjelaskan tentang semua orang cantik.

Pernyataaan itu menjelaskan bahwa setiap anggota himpunan artis adalah merupakan anggota himpunan orang cantik, namun pernyataan itu tidak menjelaskan bahwa setiap anggota himpunan orang cantik adalah merupakan anggota himpunan artis. Hal terpenting yang pada akhirnya didapat adalah, pernyataan berkuantor: "*Semua* artis adalah orang cantik," menunjukkan bahwa himpunan artis termuat atau menjadi himpunan bagian dari himpunan orang cantik.

Pernyataan "*Semua* artis adalah cantik," ini akan bernilai benar jika telah ditentukan kriteria artis dan kriteria cantik serta dapat ditunjukkan bahwa setiap artis yang merupakan anggota himpunan artis adalah cantik. Namun pernyataan berkuantor universal tadi akan bernilai salah jika dapat ditunjukkan adanya satu atau beberapa orang yang dapat dikategorikan sebagai artis namun ia tidak termasuk pada kriteria cantik. Contoh yang menunjukkan salahnya suatu pernyataan berkuantor universal ini disebut dengan *counterexample* atau contoh sangkalan sebagaimana dinyatakan Clemens, O'daffer, dan Cooney (1984: 49) berikut: "*A counterexample is a single example that shows a generalization to be false* "

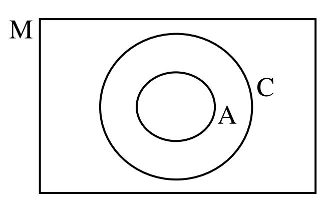
Contoh 2

Jika p(x) adalah "x + 4 > 1" dengan x adalah peubah pada himpunan bilangan bulat B maka $(\forall x \in B)$ p(x) adalah $(\forall x \in B)$ $x + 4 > 1$ dan dibaca: "Untuk setiap bilangan bulat x berlaku x + 4 > 1." Pernyataan ini bernilai salah, karena jika x-nya diganti dengan bilangan bulat –5 misalnya akan didapat pernyataan $-5 + 4 > 1$ yang bernilai salah.

Contoh 3

Jika q(n) berarti: $2^n - 1$ adalah bilangan prima untuk n bilangan bulat, maka $(\forall n \in B)$ q(n) berarti: $(\forall n \in B)$ $2^n - 1$ adalah bilangan prima, dan dibaca: "Untuk setiap bilangan bulat n berlaku $2^n - 1$ adalah bilangan prima". Pernyataan ini bernilai salah. Mengapa salah?
Bagaimana dengan pernyataan $(\forall x \in R)$ $x^2 = x$, bernilai salah juga. Mengapa?

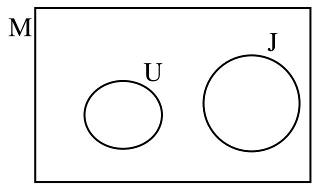
Jika pernyataan berkuantor universal, seperti "*Semua* artis adalah cantik" bernilai benar maka pernyataan itu dapat ditunjukkan dengan Diagram Venn berikut. Sebagaimana dijelaskan di bagian depan, himpunan artis A harus termuat atau menjadi himpunan bagian dari himpunan manusia cantik C; atau $A \subset C$. Paling tidak, A dan C bisa saja sama atau $A = C$.



M = {semua manusia}
A = {artis}
C = {cantik}.

Berdasarkan Diagram Venn di atas, para siswa diharapkan dapat menyimpulkan bahwa suatu pernyataan berkuantor universal dapat diubah menjadi suatu implikasi. Pada contoh di atas, pernyataan berkuantor universal: "Semua artis adalah cantik." adalah ekivalen dengan implikasi: "Jika x adalah artis maka x adalah cantik."

Sebagaimana dinyatakan di bagian depan, pernyataan berkuantor dengan kata awal "Tidak ada… ." dapat diubah ke bentuk pernyataan berkuantor universal. Contohnya, jika pernyataan berkuantor "Tiada murid SMU yang senang mendapat nilai ulangan jelek," bernilai benar, maka pernyataan tersebut dapat digambarkan dengan Diagram Venn berikut:



M = {semua manusia}
U = {murid SMU}
J = {manusia yang senang mendapat nilai jelek}.

Dengan demikian, jika pernyataan "Tiada murid SMU yang senang mendapat nilai ulangan jelek," bernilai benar dan jika digambarkan dengan Diagram Venn, pernyataan itu akan menyebabkan $U \cap J = \phi$. Alasannya, tidak ada satupun siswa SMU yang senang mendapat nilai jelek, sehingga kedua himpunan tersebut akan saling asing. Karenanya, pernyataan "Tiada murid SMU yang senang mendapat nilai ulangan jelek," itu adalah sama dengan pernyataan berkuantor universal: "Semua murid SMU tidak senang mendapat nilai ulangan jelek."

C. Kuantor Eksistensial

Kuantor jenis ini mempunyai lambang $\exists$ dan dibaca "beberapa", "terdapat", atau "ada". Jika dimisalkan p(x) adalah suatu kalimat terbuka maka $\exists x$ p(x) dibaca "untuk beberapa x berlaku p(x)" atau "ada x sedemikian sehingga berlaku p(x)".

Contoh 1

"Terdapat bilangan asli x sedemikian sehingga $x^2 - 5x + 6 = 0$," atau "Beberapa bilangan asli x memenuhi $x^2 - 5x + 6 = 0$."

Kata "beberapa" atau "*some*" menurut Copi (1978:179) adalah *indefinite* atau tidak terdefinisikan secara jelas. Apakah kata "beberapa" berarti "paling sedikit satu," "paling sedikit dua," ataukah berarti "paling sedikit seratus"?. Karena itu, meskipun dapat berbeda dengan pengertian sehari-hari, kata 'beberapa' adalah berarti "paling sedikit satu".

Dengan demikian, untuk menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan berkuantor eksistensial adalah cukup dengan menunjukkan adanya satu anggota Himpunan Semesta yang memenuhi. Karena dapat ditunjukkan bahwa untuk x = 2 atau x = 3 memenuhi persamaan $x^2 - 5x + 6 = 0$ sehingga dapat disimpulkan bahwa pernyataan berkuantor eksistensial "Beberapa bilangan asli x memenuhi $x^2 - 5x + 6 = 0$," memiliki nilai benar.

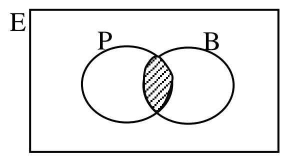
Contoh 2

Jika p(x) adalah "$x^2 + 4x + 3 = 0$ dengan x bilangan asli A, " maka $(\exists x \in A)$ p(x) adalah $(\exists x \in A)\ x^2 + 4x + 3 = 0$ yang dibaca "Ada bilangan asli x sedemikian sehingga $x^2 + 4x + 3 = 0$". Pernyataan ini bernilai salah. Mengapa?

Jika p(x) adalah “$x^2 + 4x + 3 = 0$ dengan x bilangan real R, ” maka $(\exists x \in R)$ p(x) adalah $(\exists x \in R)$ $x^2 + 4x + 3 = 0$ yang dibaca “Ada bilangan real x sedemikian sehingga $x^2 + 4x + 3 = 0$”. Pernyataan ini bernilai benar. Mengapa?

$(\exists x \in B)$ $2x + 3 = 4$. Pernyataan ini bernilai salah. Mengapa?

Pernyataan berkuantor eksistensial “Ada pria yang baik,” menunjukkan adanya himpunan manusia sebagai himpunan semestanya (E), adanya himpunan pria (P) dan adanya himpunan manusia yang baik (B). Jika pernyataan berkuantor eksistensial “Ada pria yang baik,” bernilai benar maka dapat ditarik suatu kesimpulan akan adanya anggota Himpunan Semesta (minimal satu anggota) yang merupakan anggota himpunan pria dan juga merupakan anggota manusia yang baik. Artinya, kedua himpunan tersebut tidak saling asing. Dengan demikian, $P \cap B \neq \phi$, yang dapat ditunjukkan dengan Diagram Venn berikut.



E = {semua manusia}
P = {semua pria}
B = {semua orang baik}.

Berdasar Diagram Venn di atas yang menunjukkan $P \cap B \neq \phi$, maka pernyataan berkuantor eksistensial dapat dinyatakan dalam bentuk konjungsi. Contohnya, pernyataan berkuantor eksistensial: “Ada pria yang baik,” adalah sama dengan konjungsi berikut: “Ada x sedemikian sehingga x adalah pria dan x adalah baik”.

Latihan 5.1

1. Dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan bulat, gunakan kuantor dengan urut-urutan: “Semua…”, “Beberapa…”, “Tidak ada…”, pada kalimat terbuka di bawah ini, sehingga didapat pernyataan berkuantor yang bernilai benar.
   a. $2x - 4 = -5$
   b. $x + 2 = -5$
   c. $x^2 - 16 = 0$
   d. $x + 3 = 3 + x$

2. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan berikut ini.
   a. Setiap perwira TNI adalah laki-laki.
   b. Beberapa Gubernur di Indonesia adalah perempuan.
   c. Setiap bilangan jika dipangkatkan 0 akan bernilai sama dengan 1.
   d. Setiap bilangan memiliki lawan (invers penjumlahan).
   e. Setiap bilangan memiliki kebalikan (invers perkalian).
   f. Setiap persegi adalah jajargenjang.
   g. Setiap jajargenjang adalah trapesium.
   h. Terdapat bilangan sedemikian sehingga setiap bilangan jika ditambahkan ke bilangan tersebut akan menghasilkan bilangan itu sendiri.
   i. Terdapat bilangan sedemikian sehingga setiap bilangan jika dibagi dengan bilangan tersebut akan menghasilkan bilangan itu sendiri.

j. Setiap jajargenjang memiliki simetri setengah putaran.
k. Beberapa siswa menganggap matematika sulit.
l. Setiap tahun yang habis dibagi 4 adalah tahun kabisat.

3. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan berikut ini dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan real.

a. $\exists x\ (x^2 = x)$	e. $\exists x\ (x^2 - 2x + 1 = 0)$
b. $\exists x\ (\|x\| = 0)$	f. $\forall x\ (x^2 + 2x + 1 > 0)$
c. $\forall x\ (x < x + 1)$	g. $\exists x\ (\|x\| \geq 0)$
d. $\forall x\ (x - 1 = x)$	h. $\forall x\ (x^2 - 3x + 2 = 0)$

4. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan di atas dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan asli.

5. Dengan menggunakan huruf yang disarankan, buatlah Diagram Venn-nya lalu tulis implikasi atau konjungsi yang sesuai dengan pernyataan-pernyataan berikut:
   a. Senua anjing mempunyai empat kaki (A, K).
   b. Beberapa matriks tidak memiliki invers (M, I).
   c. Semua laki-laki dapat dipercaya (L, P).
   d. Ada segitiga sama kaki yang bukan segitiga sama sisi (K, S).
   e. Tidak semua pulau di Indonesia didiami oleh penduduk (P, D).

6. Tentukan nilai kebenaran setiap pernyataan di bawah ini dengan semesta pembicaraannya adalah $X = \{1,2,3,4,5\}$.
   a. $\forall x\ \ (4 + x < 10)$
   b. $\exists x\ \ (4 + x = 7)$
   c. $\forall x\ \ (4 + x \leq 7)$
   d. $\exists x\ \ (4 + x > 8)$

D. Negasi Pernyataan Berkuantor Universal

Sudah dibahas di bagian depan bahwa pernyataan p (contohnya 10 habis dibagi 5) yang bernilai benar akan mengakibatkan pernyataan ~p (yaitu 10 tidak habis dibagi 5) bernilai salah. Sebaliknya, pernyataan q (contohnya 8 adalah bilangan prima) yang bernilai salah mengakibatkan pernyataan ~q (yaitu 8 adalah bukan bilangan prima) bernilai benar. Secara umum, suatu pernyataan p yang bernilai benar akan menyebabkan ~p bernilai salah, dan jika p bernilai salah maka ~p akan bernilai benar seperti ditunjukkan tabel kebenaran di bawah ini.

p	~p
B	S
S	B

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa negasi pernyataan berkuantor adalah pernyataan lain yang bernilai benar jika pernyataan awalnya bernilai salah dan akan bernilai salah jika pernyataan awalnya bernilai benar. Kesimpulan inilah yang menjadi dasar penentuan negasi atau ingkaran suatu pernyataan berkuantor.

Bagian berikut ini akan membahas tentang negasi atau ingkaran pernyataan berkuantor, dimulai dengan negasi pernyataan berkuantor universal, lalu negasi pernyataan berkuantor eksistensial, dan diakhiri dengan negasi pernyataan berkuantor yang memuat dua peubah atau lebih.

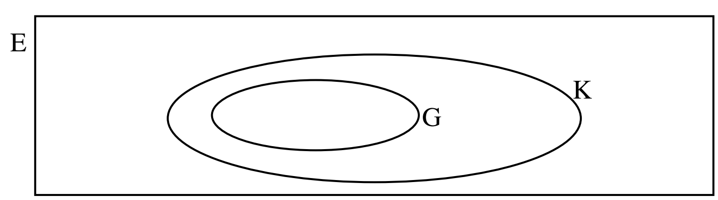
Perhatikan dua pernyataan berkuantor r dan s berikut:

r : Semua Guru Indonesia kaya.
s : Semua bilangan jika dibagi 1 akan menghasilkan bilangan itu sendiri.

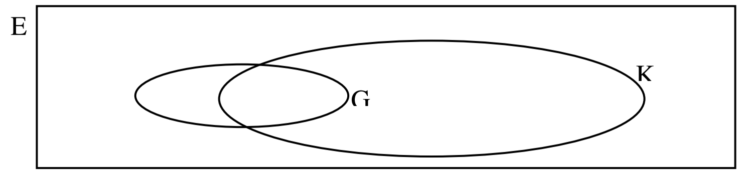
Pertanyaan tantangan yang dapat diajukan Bapak atau Ibu Guru kepada siswa di antaranya adalah: "Bagaimana menentukan negasi dari dua pernyataan berkuantor universal di atas?" dan "Apa yang dapat Anda lakukan untuk menjawab pertanyaan di atas?" Untuk menjawab pertanyaan di atas, dengan bantuan Bapak atau Ibu Guru para siswa harus mengingat dan menyimpulkan lebih dahulu bahwa: Karena pernyataan: "Semua Guru Indonesia kaya," merupakan pernyataan awal yang bernilai salah, maka untuk mencari negasi atau ingkaran dari pernyataan tadi adalah menurunkan dari pernyataan awal tersebut suatu pernyataan lain yang bernilai benar. Sedangkan negasi atau ingkaran dari pernyataan "Semua bilangan jika dibagi 1 akan menghasilkan bilangan itu sendiri", yang bernilai benar adalah suatu pernyataan lain yang bernilai salah.

Di dalam kehidupan sehari-hari, jika ada orang yang menyatakan di depan Bapak atau Ibu Guru bahwa "Semua Guru Indonesia kaya", apa yang Bapak atau Ibu akan lakukan? Mungkin Bapak atau Ibu akan menyatakan "Yang benar saja, masak saya yang berprofesi guru sampai saat ini belum punya rumah termasuk orang kaya?" Hal ini menunjukkan bahwa satu orang gurupun yang tidak termasuk kategori kaya dapat dijadikan dasar untuk mengingkari atau menegasikan pernyataan berkuantor tadi. Dengan demikian, negasi dari pernyataan berkuantor universal tadi adalah pernyataan berkuantor eksistensial yang dapat dipenuhi oleh minimal satu orang saja yang tidak memenuhi kriteria kaya tadi. Dengan demikian, negasi atau ingkaran "Semua Guru Indonesia kaya" adalah pernyataan berkuantor eksistensial yang tidak memenuhi kriteria kaya, yaitu "Beberapa Guru Indonesia tidak kaya"

Pernyataan berkuantor "Semua Guru Indonesia kaya", sebagaimana dibahas pada Bagian III di depan, menunjukkan bahwa himpunan Guru Indonesia (G) termuat atau merupakan himpunan bagian dari himpunan orang-orang kaya (K), sebagaimana ditunjukkan pada Diagram Venn berikut:



Berdasar Diagram Venn di atas, negasi dari pernyataan "Semua Guru Indonesia kaya" yang bernilai salah adalah adanya minimal satu anggota G yang berada di luar K. Dengan kata lain, ada anggota G yang tidak menjadi anggota K sebagaimana ditunjukkan Diagram Venn berikut.



Dengan cara sama, negasi atau ingkaran dari pernyataan berkuantor universal "Semua bilangan jika dibagi 1 akan menghasilkan bilangan itu sendiri," dengan nilai benar adalah pernyataan berkuantor eksistensial "Beberapa bilangan jika dibagi 1 akan tidak menghasilkan bilangan itu sendiri." Negasi atau ingkaran dari "Semua bunga indah" adalah "Tidak benar bahwa semua bunga indah" atau "Beberapa bunga tidak indah". Dengan simbol, negasi dari "$\forall x\ (x^2 \geq 0)$" adalah "$\exists x\ (x^2 < 0)$". Secara umum negasi pernyataan kuantor universal dapat dinyatakan sebagai berikut:

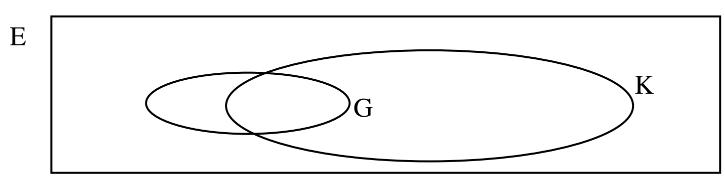
Pernyataan	**Negasi**
$\forall x\ p(x)$	$\sim (\forall x\ p(x)) \equiv \exists x\ \sim p(x)$

E. Negasi Pernyataan Berkuantor Eksistensial

Beberapa contoh pernyataan berkuantor eksistensial adalah: "Beberapa Guru Indonesia kaya," dan "Beberapa segitiga merupakan segitiga siku-siku samakaki."

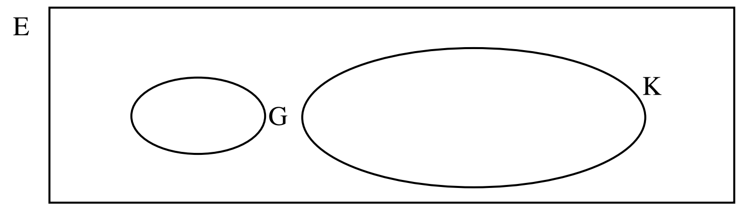
Di dalam kehidupan nyata sehari-hari, jika ada orang yang menyatakan di depan Bapak atau Ibu Guru bahwa "Beberapa Guru Indonesia kaya", apa yang Bapak atau Ibu akan lakukan? Mungkin Bapak atau Ibu akan menyatakan "Memang benar bahwa beberapa Guru Indonesia kaya". Pernyataan lain yang jelas salahnya dari pernyataan tadi adalah "Semua Guru Indonesia tidak kaya." Dengan demikian, negasi dari suatu pernyataan berkuantor eksistensial adalah pernyataan berkuantor universal yang seluruh anggotanya tidak memenuhi kriteria kaya tadi. Intinya, negasi atau ingkaran "Beberapa Guru Indonesia kaya" adalah pernyataan berkuantor universal yang tidak memenuhi kriteria kaya, yaitu "Semua Guru Indonesia tidak kaya" yang bernilai salah.

Pernyataan berkuantor "Beberapa Guru Indonesia kaya", sebagaimana dibahas pada Bagian III di depan, menunjukkan adanya (paling sedikit satu dan tidak tertutup kemungkinan untuk semua) anggota himpunan Guru Indonesia (G) yang sekaligus merupakan himpunan bagian dari himpunan orang-orang kaya (K), sebagaimana ditunjukkan pada Diagram Venn berikut:



Berdasar Diagram Venn di atas, dapatlah disimpulkan bahwa negasi pernyataan "*Beberapa* Guru Indonesia kaya" bukanlah "*Semua* Guru Indonesia kaya", dan juga bukan "*Beberapa* Guru Indonesia miskin". Alasannya, dua pernyataan terakhir ini dapat bernilai benar juga, padahal yang akan dicari adalah pernyataan yang bernilai salah. Sekali lagi, berdasar Diagram

Venn di atas, dapatlah disimpulkan bahwa negasi “Beberapa Guru Indonesia kaya” dengan nilai benar adalah ‘semua’ Guru Indonesia harus tidak termasuk himpunan K. Dengan kata lain, semua anggota G harus tidak menjadi anggota K sebagaimana ditunjukkan Diagram Venn berikut.



Dengan cara sama, negasi atau ingkaran dari pernyataan berkuantor eksistensial lainnya, yaitu “Beberapa segitiga merupakan segitiga siku-siku samakaki,” dengan nilai benar adalah “Semua segitiga tidak ada yang merupakan segitiga siku-siku samakaki.” Negasi dari pernyataan “Ada siswa yang senang matematika” adalah “Tidak benar bahwa ada siswa yang senang matematika” atau “Semua siswa tidak senang matematika”. Secara umum negasi pernyataan kuantor eksistensial dapat dinyatakan sebagai berikut:

Pernyataan	**Negasi**
$\exists x\ p(x)$	$\sim (\exists x\ p(x) \equiv \forall x\ \sim p(x)$

Latihan 5.2.

1. Tentukan negasi dari pernyataan berikut:
   a. $\exists x\ (x^2 = x)$
   b. $\exists x\ (|x| = 0)$
   c. $\forall x\ (x < x + 1)$
   d. $\forall x\ (x - 1 = x)$
   e. $\exists x\ (x^2 - 2x + 1 = 0)$
   f. $\forall x\ (x^2 + 2x + 1 > 0)$
   g. $\exists x\ (|x| \geq 0)$
   h. $\forall x\ (x^2 - 3x + 2 = 0)$

2. Tuliskan negasi pernyataan-pernyataan berikut :
   a. Semua laki-laki dapat dipercaya.
   b. Ada segitiga sama kaki yang bukan segitiga sama sisi.
   c. Beberapa matriks tidak memiliki invers.
   d. Setiap perwira TNI adalah laki-laki.
   e. Beberapa Gubernur di Indonesia adalah perempuan.
   f. Setiap bilangan jika dipangkatkan 0 akan bernilai sama dengan 1.
   g. Setiap bilangan memiliki kebalikan (invers perkalian).
   h. Setiap jajargenjang adalah trapesium.
   i. Tidak semua pulau di Indonesia didiami oleh penduduk.

3. Tentukan negasi pernyataan-pernyataan berikut, lalu tentukan nilai kebenaran negasi pernyataan itu dengan semesta pembicaraannya adalah X = {1,2,3,4,5}.
   a. $\forall x\ (4 + x < 10)$
   b. $\exists x\ (4 + x = 7)$
   c. $\forall x\ (4 + x \leq 7)$
   d. $\exists x\ (4 + x > 8)$

4. Tentukan negasi pernyataan-pernyataan berikut ini.
   a. $\exists x\ p(x) \wedge \forall y\ q(y)$
   b. $\forall x\ p(x) \Rightarrow \forall y\ q(y)$
   c. $\forall x\ p(x) \vee \exists y\ q(y)$
   d. $\exists x\ p(x) \Rightarrow \exists y\ \sim q(y)$

F. Negasi Pernyataan Berkuantor Yang Memuat Lebih Dari Satu Peubah

Pernyataan berkuantor dengan dua peubah atau lebih sering juga ditemui, terutama pada mata pelajaran Aljabar. Contohnya, pernyataan berikut:

1. Ada (terdapat) bilangan asli x sehingga untuk setiap bilangan asli y akan berlaku $x \times y = y$. Pernyataan tersebut akan bernilai benar, karena 1 yang merupakan salah satu anggota himpunan bilangan asli jika dikalikan dengan bilangan asli lainnya akan menghasilkan bilangan asli itu sendiri. Notasi matematisnya adalah $(\exists x \in A)(\forall y \in A)\ x \times y = y$. Pernyataan berkuantor dengan dua peubah di atas bernilai benar.

2. Ada (terdapat) bilangan asli x sehingga untuk setiap bilangan asli y akan berlaku $x + y = y$. Pernyataan seperti ini bernilai salah karena tidak ada bilangan asli yang memenuhinya. Pengganti x yang memenuhi adalah 0, namun 0 bukan anggota himpunan bilangan asli namun 0 anggota himpunan bilangan cacah. Bagaimana notasi matematisnya?

Ada empat variasi untuk pernyataan berkuantor dengan dua peubah (Bunarso Tanuatmodjo, 1987:45–46) beserta artinya yaitu:

- $\forall x\ \forall y\ p(x, y)$: "Untuk setiap x dan untuk setiap y berlaku p(x, y)."
- $\forall x\ \exists y\ p(x, y)$: "Untuk setiap x, ada y sehingga berlaku p(x, y)."
- $\exists x\ \forall y\ p(x, y)$: "Ada x sehingga untuk setiap y berlaku p(x, y)."
- $\exists x\ \exists y\ p(x, y)$: "Ada x dan ada y sehingga berlaku p(x, y)."

Contoh :

1. $(\forall x \in A)(\exists y \in A)\ x < y$.
   Dibaca "Untuk setiap bilangan asli x ada bilangan asli y sedemikian sehingga $x < y$". Untuk x = 10 misalnya dapat ditentukan y = 12 yang memenuhi $x < y$. Begitu juga untuk nilai x lainnya, dapat ditentukan nilai y yang memenuhi $x < y$. Dengan demikian, untuk setiap nilai x, dapat ditentukan satu atau lebih nilai y yang memenuhi $x < y$. Karena itu, pernyataan ini bernilai benar.
2. $(\exists x \in A)(\forall y \in A)\ x < y$.
   Dibaca: "Ada bilangan asli x sehingga untuk setiap bilangan asli y berlaku $x < y$." Pernyataan ini bernilai salah, Anda tahu sebabnya?

Negasi dari kuantor yang memuat lebih dari satu peubah menggunakan pola yang sama dengan negasi pernyataan berkuantor dengan satu peubah, yaitu:

Pernyataan	Negasi
$\forall x\ p(x)$	$\sim (\forall x\ p(x)) \equiv \exists x\ \sim p(x)$
$\exists x\ p(x)$	$\sim (\exists x\ p(x) \equiv \forall x\ \sim p(x)$

3. $\sim [\ \exists x\ \ \forall y\ \ p(x, y)\ ] \equiv \sim [\ \exists x\ \ \{\forall y\ \ p(x, y)\}\ ]$
$\equiv \forall x\ \ \sim[\ \forall y\ \ p(x, y)]$
$\equiv \forall x\ \ \exists y\ \ \sim p(x, y).$

4. $\sim [\ \exists x\ \ \forall y\ \ (p(x) \Rightarrow q(y))] \equiv \forall x\ \ \exists y\ \ \sim[p(x) \Rightarrow q(y)]$
$\equiv \forall x\ \ \exists y\ \ (p(x) \wedge \sim q(y)).$

Contoh ini menunjukkan bahwa untuk menentukan negasi pernyataan berkuantor dengan dua peubah atau lebih haruslah menggunakan kombinasi pola atau aturan dasar yang bersesuaian.

Latihan 5.3.

1. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan berikut ini dengan semesta pembicaraan A = {1, 2, 3}.
   a. $\forall x\ \exists y\ (x + y = 4)$
   b. $\exists x\ \forall y\ (x + y = 4)$
   c. $\exists x\ \forall y\ (xy = x)$
   d. $\exists x\ \forall y\ (xy = y)$
   e. $\exists x\ \forall y\ (x^2 < y + 1)$
   f. $\exists x\ \exists y\ \forall z\ (x^2 + y^2 < z^2)$
   g. $\exists x\ \forall y\ \exists z\ (x^2 + y^2 < z^2)$
   h. $\exists x\ \forall y\ (x^2 < y + 1)$
   i. $\forall x\ \exists y\ (x^2 < y + 1)$
   j. $\forall x\ \exists y\ (x^2 + y^2 < 10)$
   k. $\exists x\ \forall y\ (x^2 + y^2 > 10)$
   l. $\exists x\ \exists y\ (x^2 + y^2 > 10)$
   m. $\forall x\ \exists y\ \exists z\ (x^2 + y^2 < z^2)$
   n. $\exists x\ \exists y\ \exists z\ (x^2 + y^2 < z^2)$

2. Tentukan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan berikut dengan semesta himpunan bilangan real R.
   a. $\forall x\ \exists y\ (x + y = 6)$
   b. $\exists x\ \forall y\ (x + y = 6)$
   c. $\forall x\ \forall y\ (x + y = 6)$
   d. $\exists x\ \exists y\ (x + y = 6)$
   e. $\forall x\ \exists y\ (x + y = x)$
   f. $\exists x\ \forall y\ (x + y = x)$
   g. $\exists x\ \forall y\ (x + y = y)$
   h. $\forall x\ \forall y\ (x + y > 0)$
   i. $\exists x\ \forall y\ (xy = 6)$

3. Tentukan negasi pernyataan-pernyataan berikut.
   a. $\exists x\ \forall y\ [p(x)\ \Lambda\ q(y)]$
   b. $\forall x\ \forall y\ [\sim p(x)\ V\ q(y)]$
   c. $\exists x\ \forall y\ [p(x) \Rightarrow q(y)]$
   d. $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (x^2 + y^2 < z^2)$
   e. $\exists x\ \exists y\ (\ |x\ y| = |\ x\ |\ |\ y\ |\ )$

Daftar Pustaka

Copi, I.M. (1978) *Introduction to Logic.* New York: Macmillan.

Giere, R. N. (1984). *Understanding Scientific Reasoning (2ndEdition).* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Kusumah, Y.S. (1986). *Logika Matematika Elementer.* Bandung: Tarsito.

Krismanto, Al. (1991). *Prima EBTA Matematika SMA.* Klaten: PT Intan Pariwara.

Lipschutz, S; Silaban, P. (1985). *Teori Himpunan.* Jakarta: Erlangga.

Prayitno, E. (1995). *Logika Matematika.* Yogyakarta: PPPG Matematika.

Soekardijo, R.G. (1988). *Logika Dasar, Tradisionil, Simbolik dan Induktif.* Jakarta: Gramedia.

Suriasumantri, J.S. (1988). *Filsafat Ilmu.* Jakarta: Sinar Harapan.

Tirta Seputro, Theresia (1992). *Pengantar Dasar Matematika Logika dan Teori Himpunan.* Jakarta: Erlangga.

Tim Matematika (1980). *Matematika 12 untuk SMA.* Jakarta : Depdikbud.

Vance, E. P. (19..). *Modern College Algebra.* London : Addison Wesley.