DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

GEOMETRI DAN PENGUKURAN

Oleh:
Al. Krismanto, M.Sc

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
Jl. Kaliurang Km. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman,Yogyakarta
Kotak Pos 31 YKBS YOGYAKARTA 55281
Telp. (0274) 885752,881717,885725, Faks. (0274) 885752
Website: www.p4tkmatematika.com, E-mail: p4tkmatematika@yahoo.com

I. PENDAHULUAN

A. Memahami pengertian dan pernyataan

Kita mengenal penalaran induktif dan deduktif. Penalaran induktif berangkat dari hal-hal khusus sehingga dapat digeneralisasikan. Penalaran deduktif berangkat dari pernyataan umum yang benar yang dengan langkah-langkah logis diturunkan pernyataan-pernyataan lainnya yang benar. Kelebihan deduksi yang valid atau sahih, kesimpulan yang didapat dinyatakan tidak akan pernah salah jika premis-premisnya sungguh bernilai benar. Salah satu contoh yang merupakan ilmu deduktif-sistematik atau deduktik-aksiomatik, adalah geometri yang disajikan dalam geometri Euclides.

Dalam geometri aksiomatik atau geometri formal terdapat dua jaringan, yaitu**:** jaringan konsep (jaringan pengertian) dan jaringan pernyataan.

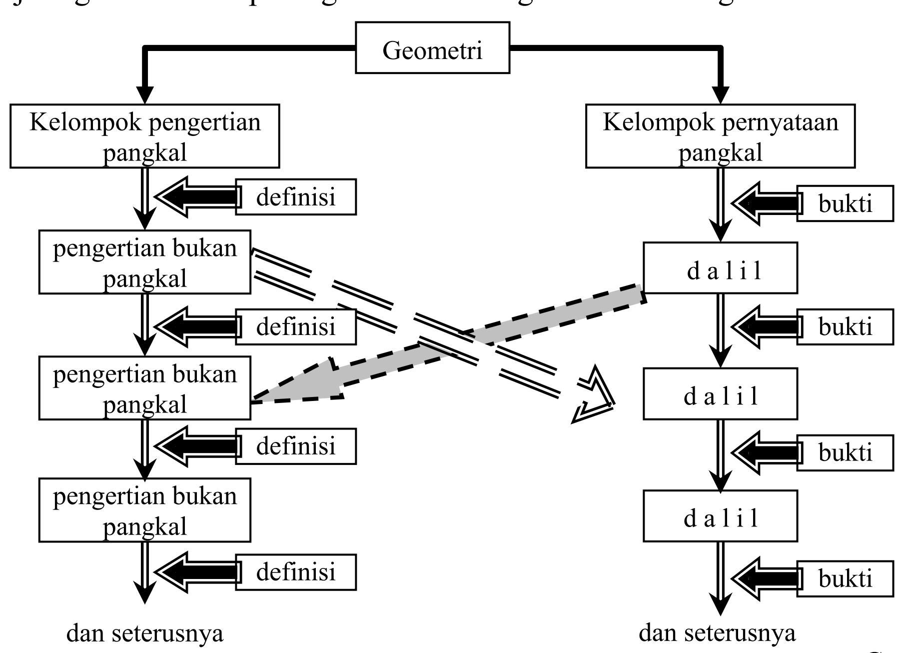
Ada dua jenis jaringan pengertian yaitu;
(i) pengertian pangkal (*primitive concept;* konsep pangkal)
(ii) pengertian bukan pangkal

Pengertian pangkal ialah pengertian yang tanpa harus didefinisikan, harus diterima. Artinya, tanpa definisi, makna setiap pengertian pangkal dianggap sudah cukup jelas (bagi siswa, pembaca). Sedangkan tiap-tiap pengertian yang bukan pangkal harus didefinisikan. Mula-mula dengan menggunakan pengertian pangkal, kemudian juga menggunakan pengertian bukan pangkal lain yang sudah didefinisikan terlebih dahulu.

Ada dua jenis pernyataan, yaitu
(i) pernyataan pangkal (aksioma), dan
(ii) pernyataan bukan pangkal

Pernyataan pangkal (aksioma) harus diterima kebenarannya (oleh pembaca, siswa) tanpa bukti. Semua pernyataan lain disebut dalil atau teorema, dan harus dibuktikan kebenarannya. Mula-mula dari aksioma-aksioma saja, kemudian juga dari dalil-dalil lain yang sudah dibuktikan terlebih dahulu.

Kedua jaringan di atas dapat digambarkan dengan skema sebagai berikut.



Gambar 1.1

B. Pengertian pangkal dan bukan pangkal

Konsep atau pengertian dapat dikategorikan sebagai konsep “benda” (benda pikiran) dan relasi. Termasuk konsep pangkal “benda” misalnya titik, garis, dan kurva. Termasuk konsep pangkal relasi, misalnya “terletak pada”, “melalui”, dan “terletak di luar”. Dikenal misalnya (titik) terletak pada (garis atau kurva) atau (garis atau kurva) melalui (titik), dan (titik) di luar (garis atau kurva).

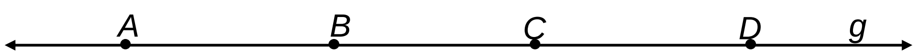
Dalam geometri titik menempati suatu posisi atau tempat, tetapi tidak memiliki ukuran. Sebuah noktah yang digambarkan dengan pensil sangat lancip mungkin secara kasar dapat merepresentasikan sebuah titik. Namun keterbatasan alat yang memberikan ketebalan sebuah noktah tidak mengurangi makna sifat titik dalam bahasan geometri sebagai ‘benda pikiran’. Titik diberi nama dengan sebuah huruf kapital.

Panjang garis tidak terbatas, tetapi tidak memiliki ketebalan. Jika sebuah garis ditelusuri dengan sebuah titik yang diwakili oleh ujung pensil, maka meskipun sekali lagi ketebalannya muncul, hal ini juga tidak berarti bahwa garis memiliki ketebalan. Pada Gambar2 direpresentasikan beberapa buah titik terletak pada sebuah garis.

Untuk memberikan nama sebuah garis atau bagian-bagiannya (contoh pengertian bukan pangkal), salah satu dapat dipilih**:**

a. gunakan huruf kecil (*lowercase*), misal garis pada Gambar 1.2 dinamakan **garis *g***.

b. ambil sebarang dua titik berbeda pada garis tersebut, dan tuliskan dengan lambang garis di atas kedua titik. Pada Gambar 2 garis *g* dapat diberi nama $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{AC}$, dan masih banyak lagi.



Gambar 1.2

c. jika hanya ditinjau bagian garis dari titik *A* sampai dengan titik *B*, maka bagian itu dinamakan **ruas garis,** diberi nama $\overline{AB}$ Pada gambar tersebut ada beberapa ruas garis lain, misal**:** $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, dan $\overline{BD}$. Panjang ruas garis $\overline{AB}$ dilambangkan *AB*.

d. Bagian garis dari titik *D* ke kanan tak terbatas disebut **sinar garis**. Demikian juga *C* ke kanan tanpa batas, *B* ke kanan tanpa batas, *B* ke kiri tanpa batas. Sinar-sinar garis tersebut misalnya: $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$.

Contoh lain dari pengertian bukan pangkal misalnya sudut, segitiga, segiempat, dan masih banyak lagi. Pengertian bukan pangkal memuat lebih dari satu pengertian-pengertian pangkal atau bahkan pengertian bukan pangkal lainnya. Karena itu, pengertian bukan pangkal itu didefinisikan. Definisinya dapat berupa kalimat deklaratif biasa (langsung), tetapi juga dapat berupa implikasi. Misalnya (1) segitiga samasisi adalah segitiga yang ketiga sisinya sama panjang, atau (2) jika ketiga sisi segitiga sama panjang, maka segitiga tersebut dinamakan segitiga samasisi.

Contoh**:**

a. **Sumbu sebuah ruas garis** adalah garis yang melalui titik tengah ruas garis yang diketahui dan tegaklurus terhadap ruas garis tersebut.

b. Segitiga samakaki adalah segitiga yang mempunyai dua sisi yang sama panjang

c. Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu.

C. Pernyataan pangkal dan bukan pangkal

Di sini pernyataan terkait dengan ‘prinsip’. Pernyataan dapat berupa aksioma, sifat, dalil atau teorema, atau sesuatu yang muncul sebagai akibat dari berbagai sifat atau teorema yang terkait. Salah satu dari yang terakhir ini di antaranya berbentuk soal.

Prinsip yang kebenarannya diterima tanpa bukti disebut **aksioma.** Atau aksioma adalah pernyataan yang diterima kebenaranannya tanpa bukti. Beberapa aksioma merupakan pernyataan-pernyataan pangkal.

Contoh**:**

a. Pada setiap garis terdapat paling sedikit dua buah titik.
b. Melalui sebuah titik di luar sebuah garis hanya dibuat tepat satu buah garis sejajar garis tersebut.
c. Melalui dua buah titik hanya dapat dibuat tepat sebuah garis lurus.

Dari aksioma atau definisi dapat diturunkan pernyataan-pernyataan bukan pangkal. Penurunan ini menghasilkan **sifat**. Kebenaran sifat harus dibuktikan.

Contoh**:**

a. Panjang sebuah sisi dalam sebuah segitiga kurang dari jumlah panjang dua sisi lainnya
b. Pada segitiga samakaki, kedua sudut pada kaki yang sama, sama besar.

Pernyataan bukan pangkal yang lain adalah **teorema/dalil**. Kebenarannya dibuktikan berdasar kebenaran-kebenaran terdahulu yang telah diterima atau dibuktikan, termasuk dimasukkannya definisi-definisi “baru” dalam mengembangkan geometri.(Pada bab berikutnya diberikan beberapa contoh pembuktian teorema; di sini tidak semua teorema/dalil dibuktikan).

Contoh**:**

a. Dengan terdefinisinya ‘sudut sehadap’, ‘sudut dalam/luar sepihak’, ‘sudut dalam/luar berseberangan’, beberapa dalil dibuktikan kebenarannya, misalnya**:**

   Jika garis dua garis sejajar dipotong oleh sebuah garis lain, maka**:**
   1) sudut berseberangannya sama besar
   2) sudut sehadapnya sama
   3) sudut dalam sepihaknya saling berpelurus
   4) sudut-sudut luar sepihaknya saling berpelurus

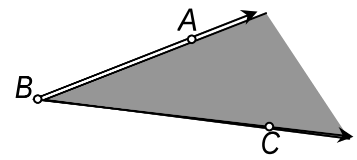
   dan beberapa dalil kebalikannya, misaL

   Jika dua buah garis dipotong oleh sebuah garis ketiga sehingga sudut berseberangannya sama besar, maka kedua garis itu sejajar.
b. Jika sebuah segitiga mempunyai dua sudut yang sama besar, maka segitiga tersebut adalah segitiga samakaki.
c. Jika sudut-sudut yang berhadapan pada sebuah segiempat sama besar, maka segiempat tersebut adalah jajargenjang.
d. Dalam sebuah segitiga siku-siku, jumlah kuadrat panjang sisi-sisi siku-sikunya sama dengan kuadrat panjang hipotenusanya.

Untuk menyatakan sebuah teorema agar lebih cepat dikenali sering digunakan lambang-lambang, yang dituliskan dalam bentuk ***rumus***. Misalnya dalil atau teorema Pythagoras dalam ΔABC yang siku-siku di titik sudut C dinyatakan dalam *Rumus Pythagoras***:** $c^2 = a^2 + b^2$

II. SUDUT

A. Pengertian Sudut



Gambar 2.1

1. Sudut adalah daerah antara dua sinar garis yang bersekutu pada pangkal sinar-sinar garis tersebut.
   Gambar 2.1 adalah sudut *ABC*, atau $\angle ABC$, atau $\angle B$.
2. Dapat pula disebut sudut *CBA*, atau $\angle CBA$
   $\overrightarrow{BA}$ dan $\overrightarrow{BC}$ masing-masing dinamakan kaki-kaki sudut *CBA*.

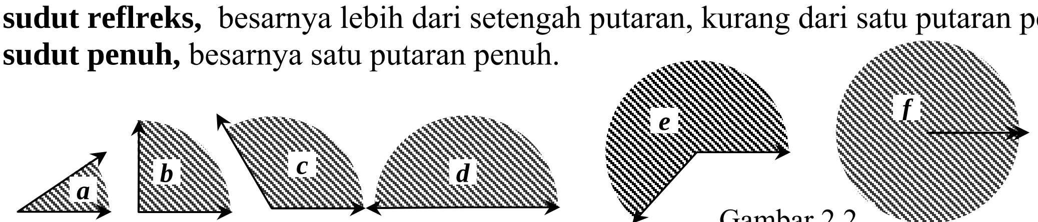
3. Ukuran besarnya suatu sudut dinyatakan oleh jarak putar salah satu kaki terhadap kaki sudut lainnya. Dalam hal tertentu dibedakan perputaran ke kiri dan ke kanan. Arah putaran ke kiri (berlawanan dengan arah putar jarum jam) disepakati bertanda positif, ke kanan (sama dengan arah putar jarum jam) negatif. Untuk keperluan tertentu lain-nya besar sudut tidak memperhatikan arah putaran kaki yang satu terhadap lainnya.

Untuk bahasan pada geometri datar, yang diperhatikan adalah perputaran diawali dari kedua kaki berimpit sampai dengan satu putaran penuh (*sudut penuh, full angle*)

B. Sudut Sebagai Bentuk

Dengan pmemperhatikan **bentuk-bentuk sudut** yang terbentuk dari awal sampai satu putaran penuh diklasifikasikan sebagai berikut (Gellert et.al, 1977:147-148)

1. **sudut lancip**, besarnya kurang dari seperempat putaran penuh.
2. **sudut siku-siku,** besarnya *seperempat* putaran penuh
3. **sudut tumpul,** besarnya lebih dari seperempat putaran, kurang dari setengah putaran.
4. **sudut lurus,** besarnya setengah putaran penuh
5. **sudut reflreks,** besarnya lebih dari setengah putaran, kurang dari satu putaran penuh.
6. **sudut penuh,** besarnya satu putaran penuh.



Gambar 2.2

C. Satuan Ukuran Sudut

Semua cara pengukuran sudut berlandas pada pembagian lingkaran atau putaran penuh. Dikenal dua macam ukuran, yaitu **derajat** dan **radian.** Yang terakhir ini berdasar pada panjang busur lingkaran yang bersangkutan.

1. Satuan Derajat

Bila pada sebuah lingkaran digambar jari-jari sedemikian sehingga membaginya menjadi 360 bagian yang sama, maka sudut antara setiap dua jari-jari yang berurutan besarnya dinamakan 1 (satu) derajat, dilambangkan $\mathbf{1^o}$**.** Demikianlah maka 1^o adalah ukuran sudut yang besarnya seperenamratus enampuluh putaran penuh.
Satu derajat dibagi menjadi 60 sama besar, masing-masing dinamakan 1 menit ($1'$).
Satu menit dibagi menjadi 60 sama besar, masing-masing 1 detik ($1''$)

Pembagian di atas mengingatkn kita pada pembagian waktu, yaitu suatu sistem yang menggunakan sistem seksagesimal, sistem enampuluhan: menit dan detik Karena itu perlu kehati-hatian pada penggunaannya.

Jadi pada ukuran sudut ini berlaku: $\boxed{\mathbf{1^o = 60' = 3600''}}$
(satu derajat sama dengan 60 menit, sama dengan 3600 detik)

Pada perhitungan, sering juga digunakan satuan campuran. Dalam derajat dilambangkan dengan sistem desimal, misalnya $31{,}5^o = 31^o30'$.

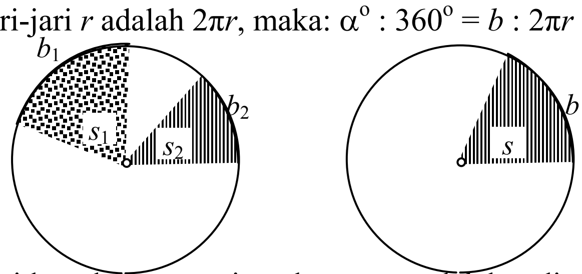
Ada suatu ***sistem baru* derajat** dimana satu putaran penuh dibagi menjadi 400 bagian yang sama, masing-masing *satu derajat baru* yang dikenal dengan 1 **grade** (1^g). Karena itu maka $90^o = 100^g$. Setiap 1^g dibagi menjadi 100 *menit baru* = 100^c dan $1^c = 100^{cc}$ (*detik baru*): $\boxed{\mathbf{1^g = 100^c = 10.000^{cc}}}$

Tujuan penggunaan satuan ini adalah mengaitkannya dengan sistem desimal. Namun yang lebih banyak digunakan sampai sekarang adalah tetap menggunakan satuan derajat-menit-detik atau derajat dengan bagian-bagiannya merupakan bentuk desimal dari derajat.

2. Satuan busur

Pada sebuiah lingkaran, panjang sebuah busur antara dua jari-jari sebanding dengan besarnya sudut di antaranya dan panjang jari-jarinya.

Jika panjang busurnya adalah b dan besar sudutnya adalah α, maka $\alpha_1 : \alpha_2 = b_1 : b_2$. Dibandingkan dengan satu lingkaran/putaran penuh dan dengan mengingat bahwa panjang busur satu lingkaran penuh berjari-jari r adalah $2\pi r$, maka: $\alpha^o : 360^o = b : 2\pi r$



Gambar 2.3

Satuan sudut yang dikaitkan dengan panjang busurnya adalah radian.

Sebuah sudut pusat s dalam sebuah lingkaran berjari-jari r dikatakan besarnya 1 aradian (**1 rad**) jika sudut pusat lingkaran tersebut menghadap busur lingkaran yang bersangkutan yang panjangnya sama dengan panjang jari-jarinya.

Karena keliling lingkaran atau panjang busur lingkaran penuh adalah 2πr, maka besar sudut satu lingkaran penuh adalah $2\pi r$ radian.

Jadi 2π rad = 360^o 1 rad = $\frac{360^\circ}{2\pi}$ = 57,295779513…$^o \approx 57^o.17'44''$

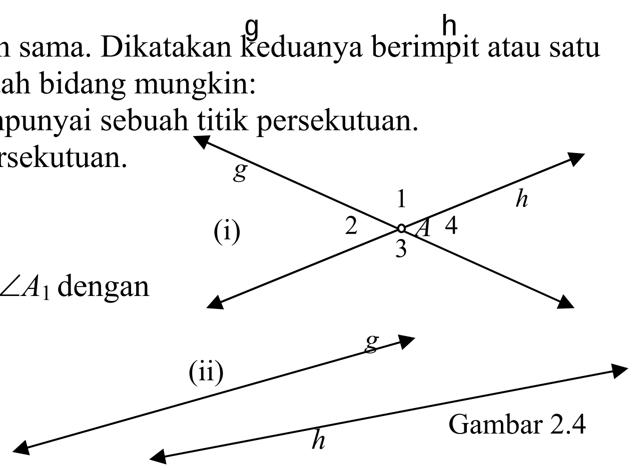
π rad = 180^o $1^o = \frac{\pi}{180}$ rad $\approx$ 0.01745329252 rad

$\frac{1}{2}\pi$ rad = 90^o

Lingkaran satuan adalah lingkaran yang panjang jari-jarinya 1 satuan. Karena itu maka kelilingnya adalah 2π. Selanjutnya besar sudut-sudut pusatnya pun dapat dinya-takan sesuai panjang busurnya. Misalnya, panjang busur 1/6 lingkaran sering disebut 60^o sesuai sudut pusatnya. meskipun berlaku hanya jika panjang jari-jarinya 1 satuan.

D. Relasi antar Garis; Antar Sudut

1. Dua garis g dan h pada sebuah bidang mungkin sama. Dikatakan keduanya berimpit atau satu garis saja. Dua garis berbeda g dan h pada sebuah bidang mungkin:
   a. berpotongan di sebuah titik. Keduanya mempunyai sebuah titik persekutuan.
   b. sejajar. Keduanya tidak mempunyai titik persekutuan.
2. Dua garis berpotongan membentuk:
   - ★ sudut bersisihan
     Pada Gambar 2.4 yang bersisihan misalnya $\angle A_1$ dengan $\angle A_4$ dan $\angle A_2$, $\angle A_3$ dengan $\angle A_4$ dan $\angle A_2$,
   - ★ sudut bertolak belakang
     - Jumlah besar sudut bersisihan 180^o
     - Sudut bertolak belakang sama besar



Gambar 2.4

- Jika satu di antara sudutnya 90^o, maka keempat sudutsama besar, besarnya masing-masing 90^o. Dalam hal demikian maka kedua garis dikatakan saling tegak lurus; dituliskan $g \perp h$ atau $h \perp g$.

3. Perpotongan dua garis mungkin dapat ditunjukkan pada gambar (Gambar 2.4 (i)), mungkin juga tidak (Gambar 2.4 (ii)), antara lain karena bidang gambarnya tidak mencukupi atau memang tidak perlu untuk menunjukkannya.

4. Tiga garis

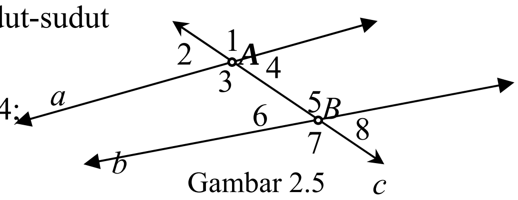
   Tiga garis berbeda *a*, *b*, dan *c* mungkin

   a. sejajar. Jika $a \parallel b$ dan $a \parallel c$, maka $b \parallel c \Rightarrow a \parallel b \parallel c$

   b. tidak semuanya sejajar

      1) ketiganya tidak saling sejajar, terbentuk pasangan sudut-sudut

         a) sehadap:
            $\angle 5$ dan $\angle 1$; $\angle 6$ dan $\angle 2$; $\angle 7$ dan $\angle 3$; $\angle 8$ dan $\angle 4$;
         b) berseberangan luar: $\angle 7$ dan $\angle 1$; $\angle 8$ dan $\angle 2$
         c) berseberangan dalam: $\angle 5$ dan $\angle 3$; $\angle 6$ dan $\angle 4$



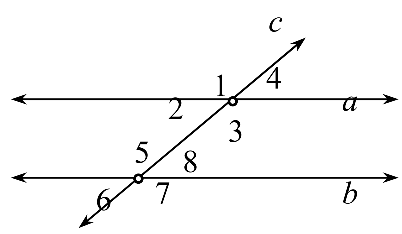
Gambar 2.5

      2) dua di antaranya sejajar, yang ketiga memotong keduanya.

         Jika $a \parallel b$ dan *c* memotong *a*, maka *c* memotong *b*. Lihat butir 5 berikut ini.

5. Sudut dan Kesejajaran Garis

a. Jika garis $a \parallel b$ dipotong oleh garis *c* maka:
   1) sudut sehadap sama besar:
      $\angle 5 = \angle 1$; $\angle 6 = \angle 2$; $\angle 7 = \angle 3$; $\angle 8 = \angle 4$;
   2) sudut berseberangan luar sama besar:
      $\angle 7 = \angle 1$; $\angle 8 = \angle 2$
   3) sudut berseberangan dalam sama besar: $\angle 5 = \angle 3$; $\angle 6 = \angle 4$
   4) Akibat: $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7$ dan $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8$



Gambar 2.6

b. Jika garis *a* dan *b* dipotong oleh garis *c* dan sudut sehadapnya sama besar, maka $a \parallel$ b.

c. Jika garis *a* dan *b* dipotong oleh garis *c* dan sudut berseberangan luarnya sama besar, maka $a \parallel$ b.

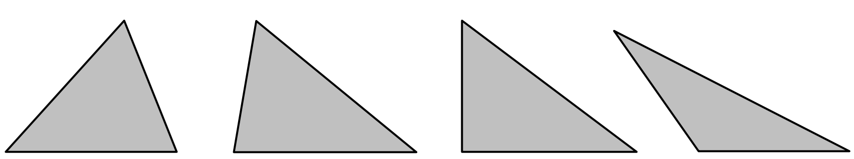
d. Jika garis *a* dan *b* dipotong oleh garis *c* dan sudut berseberangan dalamnya sama besar maka $a \parallel$ b.

6. Berdasar sifat kesejajaran tersebut beberapa sifat diturunkan:

   a. Jumlah besar sudut sebuah segitiga 180^o. Dalam ΔABC:
      $u\angle A + u\angle B + u\angle C = 180^o$ ($u\angle A$ = ukuran/besar sudut *A*)

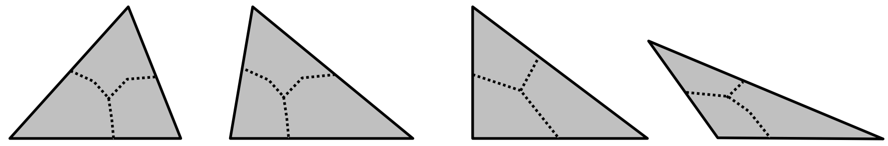
Berikut ini adalah satu contoh kegiatan penalaran induktif yang dapat dilakukan siswa. Di suatu kelas setiap siswa ditugasi menggambar sebuah segitiga. Mereka diminta (1) menggunting segitiga sekeliling sisi-sisinya, (2) memotongnya menjadi tiga bagian daerah segitiga yang memuat setiap pojoknya dan (3) mengimpitkan kaki-kaki segitiga tersebut. Beberapa kemungkinan hasilnya adalah**:**

Langkah (1)



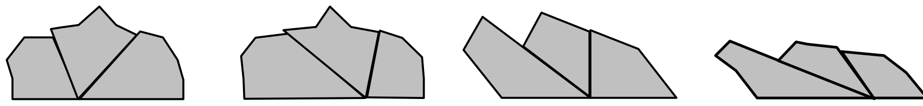
Gambar 2.7 (i)

Langkah (2)



Gambar 2.7 (ii)

Langkah (3)



Gambar 2.7 (iii)

Ternyata diperoleh bahwa hasil pengimpitan ketiga sudut segitiga dari berbagai bentuk segitiga tersebut adalah sudut lurus, sehingga disimpulkan bahwa jumlah besar ketiga sudut sebarang segitiga adalah 180^o.

Dengan penalaran deduktif, dalil atau teorema di atas dibuktikan sebagai berikut:

Untuk membuktikan kebenaran bahwa jumlah besar susut-sudut sebuah segitiga adalah 180^o, dapat digunakan dalil yang sebelumnya telah dibuktikan kebenarannya. Dalil itu adalah**:** Jika ada dua garis sejajar dipotong garis ketiga, maka: sudut sehadap sama besar, sudut dalam bersebarangan sama besar, dan sudut luar berseberangan sama besar.

Diketahui**:** ΔABC

Buktikan**:** besar $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$

Bukti**:**

Tarik garis $\overleftrightarrow{AB}$

Tarik melalui B tarik garis $g \parallel \overleftrightarrow{AC}$

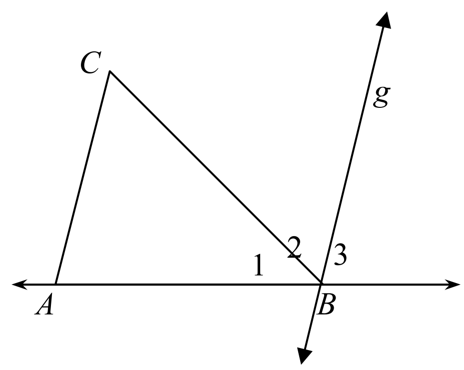
Garis $g \parallel \overleftrightarrow{AC}$ dipotong oleh $\overleftrightarrow{AB}$

Akibat**:** besar $\angle A = \angle B_3$ (sudut sehadap)

besar $\angle C = \angle B_2$ (sudut dalam bersebarangan)

Jadi besar $\angle A + \angle B + \angle C$ = besar $\angle B_3 + \angle B_1 + \angle B_2$

$= 180^o$ (karena ketiganya membentuk sudut lurus). (terbukti)

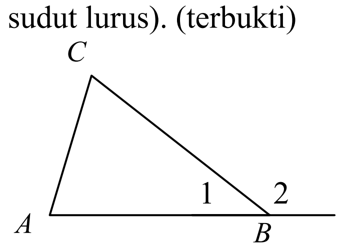


Gambar 2.8

b. Besar sebuah **sudut luar** sebuah segitiga sama dengan jumlah besar dua sudut lainnya.

$u\ \angle B_2 = u\angle A + u\angle C$

(dapat dibuktikan berdasarkan Gambar 2.8)



Gambar 2. 9

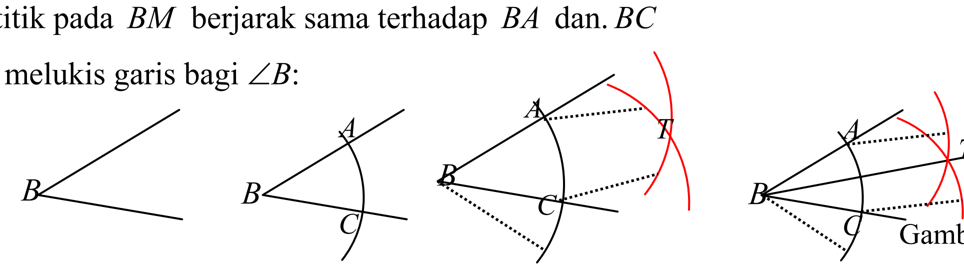
E. Konstruksi Sudut

1. Melukis garis bagi sudut

a. Jika titik M adalah sebuah titik pada sudut di antara kedua kaki sudut ABC sedemikian sehingga $u\ \angle MBA = u\angle MBC$, maka $\overrightarrow{BM}$ disebut garis bagi $\angle ABC$.

b. Setiap titik pada $\overrightarrow{BM}$ berjarak sama terhadap $\overrightarrow{BA}$ dan. $\overrightarrow{BC}$

c. Teknik melukis garis bagi $\angle B$:

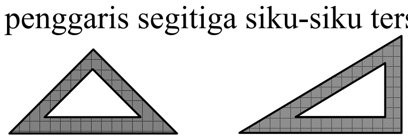


Gambar 2.10

1) Jangkakan sebuah busur lingkaran berpusat di titik *B*, memotong kaki sudut misal di titik *A* dan *C*.
2) Dengan panjang jari-saji sama, jangkakan sebuah busur lingkaran masing-masing berpusat di titik *A* dan *C*.Kedua busur berpotongan misal di titik *T*.
3) Tarik $\overrightarrow{BT}$, yang merupakan garis bagi sudut *B*.

2. Pasangan Segitiga Siku-siku

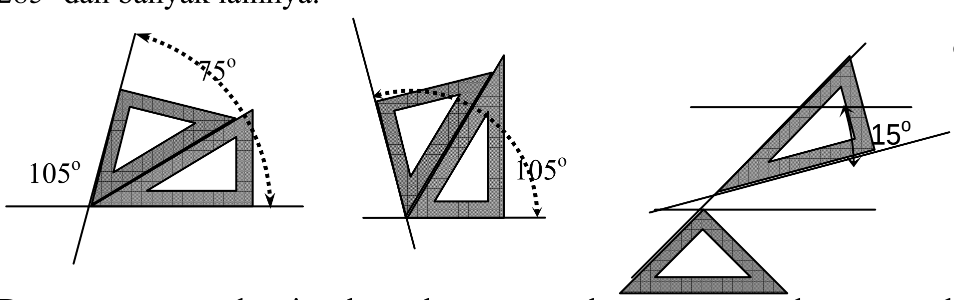
Pasangan segitiga siku-siku bersudut 90^o, 45^o. 45^o dan bersudut 90^o, 60^o, 30^o sangat berguna untuk menggambar sudut-sudut tertentu. Tidak semua sudut dapat dibuat menggunakan jangka dan pasangan penggaris segitiga siku-siku tersebut.



Gambar 2.11

3. Melukis Sudut Khusus

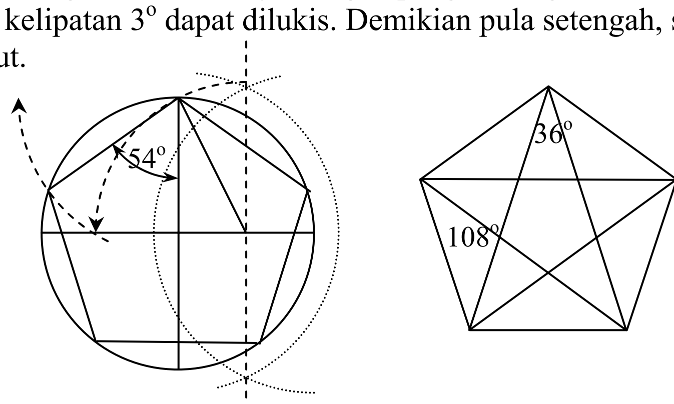
a. Dengan menggunakan variasi kedudukan pasangan segitiga siku-siku dapat digambar sudut-sudut tertentu, misalnya 75^o, 15^o, dan semua sudut yang berelasi dengannya, misalnya 105^o, 285^o dan banyak lainnya.



Gambar 2.12

b. Dengan menggunakan jangka maka semua sudut yang merupakan setengah, seperdelapan, seperenambelas sudut-sudut yang dapat terlukis pada langkah 1) dapat dilukis, misalnya 22,5^o, 7,5^o, 67,5^o, 11,25^o, 3,75^o dan seterusnya.

c. Sudut-sudut Sudut 54^o, 108^o dapat dilukis sesuai dengan langkah melukis segilima beraturan. Jika dikembangkan, maka sudut 72^o, 18^o, dan 9^o dapat dilukis menggunakan jangka dan penggaris. Dengan mengombinasikannya dengan pengembangan lukisan sudut 45^o, dan 30^o, maka semua sudut kelipatan 3^o dapat dilukis. Demikian pula setengah, seperempat, … dari sudut-sudut tersebut.



Gambar 2.13

III. SEGITIGA

Segitiga terbentuk oleh tiga ruas garis yang setiap ujungnya bersekutu dengan sebuah ujung ruas garis lainnya.
Pesekutuan-persekutuan tersebut membentuk (tiga) buah titik sudut segitiga. Ruas garis semula membentuk sisi-sisi segitiga. Ketiga ruas garis melingkupi sebuah *daerah segitiga”*. Jumlah ketiga panjang ruas garis dinamakan keliling segitiga tersebut. Ukuran besar daerah segitiga merupakan ukuran luas daerah segitiga yang secara singkat dinamakan luas segitiga.

A. Jenis Segitiga

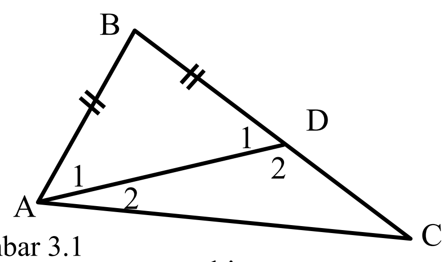
1. **Segitiga lancip**: ketiga sudutnya lancip
2. **Segitiga siku-siku**: salah satu sudutnya siku-siku
3. **Segitiga tumpul**: salah satu sudutnya tumpul
4. **Segitiga samakaki**: mempunyai dua sisi yang sama panjang
5. **Segitiga samasisi**: ketiga sisinya sama panjang

B. Keti*da*ksamaan P*ada* Sisi Segitiga *Da*n Hubungan Sudut & Sisi

1. Jika dua buah sisi sebuah segitiga tidak sama panjang, maka sudut terbesar terletak di hadapan sisi terpanjang.

   Pada ΔABC, $BC > AB \Rightarrow \angle BAC > \angle ACB$

   Bukti:



Gambar 3.1

ΔABD samakaki
$\angle DAB = \angle ADB$
$\angle ADB = \angle DAC + \angle ACD$
$\angle DAB = \angle DAC + \angle ACD$

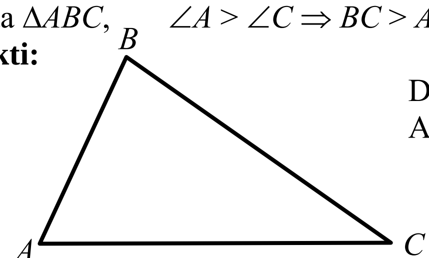
sehingga:
$\angle DAB + \angle DAC > \angle DAC + \angle ACD$
$\angle BAC > \angle ACD$
atau $\angle BAC > \angle ACB$

Sebaliknya:

2. Jika dua buah sudut pada sebuah segitiga tidak sama, maka sisi terpanjang terletak di hadapan sudut terbesar

   Pada ΔABC, $\angle A > \angle C \Rightarrow BC > AB$

   Bukti:



Gambar 3.2

Digunakan bukti tidak langsung.
Ada 3 kemungkinan hubungan antara BC dan AB yaitu:
1) $BC < AB$
2) $BC = AB$
3) $BC > AB$

1) Jika $BC < AB$, maka $\angle A < \angle C$ (menurut Teorema I)
2) Jika $BC = AB$, maka $\angle A = \angle C$. Hal ini bertentangan dengan yang diketahui. Jadi $BC = AB$ **salah**
3) Jadi kemungkinan yang benar $BC > AB$

3. Dalam sebuah segitiga, jumlah panjang dua buah sisi, lebih panjang dari panjang sisi yang ketiga

Jika pada ΔABC, $\overline{AC}$ yang panjangnya b adalah sisi terpanjang pun, $b < a + c$

C. Teorema Pythagoras

1. Sisi di depan sudut siku-siku padasegitiga siku-siku disebut ***hipotenusa***
2. Segitiga siku-siku $\Leftrightarrow$ jumlah kuadrat panjang dua sisi siku-siku segitiga itu sama dengan kuadrat panjang sisi ketiga (*hipotenusa*).

   Teorema Pythagoras sangat penting karena banyak digunakan diberbagai banyak topik di dalam matematika maupun fisika. .

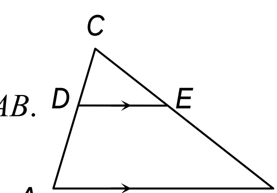
D. Similaritas dan Kongruensi

1. Dua bangun disebut kongruen (sama dan sebangun) jika setiap dua pasang titik yang bersesuaian pada kedua bangun berjarak sama.
2. Dua segitiga dikatakan kongruen (sama dan sebangun) jika dan hanya jika sisi-sisi (dan akibatnya sudut-sudut) yang bersesuaian sama besar.
   a. Dua segitiga kongruen $\Leftrightarrow$ ketiga sisinya sama panjang $\rightarrow$ *s, s, s*
   b. Dua segitiga kongruen $\Leftrightarrow$ sebuah sisi dan kedua sudut apit sama besar$\rightarrow$ *sd, s, sd*
   c. Dua segitiga kongruen $\Leftrightarrow$ dua sisi sama panjang dan sudut apitnya sama besar. $\rightarrow$ *s, sd, s*
   d. Dua segitiga kongruen $\Leftrightarrow$ satu sisi bersesuaian sama panjang dan dua sudut pada sisi dan di hadapan sisi bersesuaiam itu sama besar. $\rightarrow$ *s, sd, sd*
3. Dua bangun disebut sebangun (*similar*) jika setiap dua pasang titik yang bersesuaian pada kedua bangun jaraknya sebanding dengan jarak dua pasang titik lainnya.
4. Dua segitiga dikatakan sebangun (similar) jika:

a. perbandingan panjang sisi-sisinya yang bersesuaian sama, atau
b. sudut-sudutnya yang bersesuaian sama besar

5. Beberapa akibat:

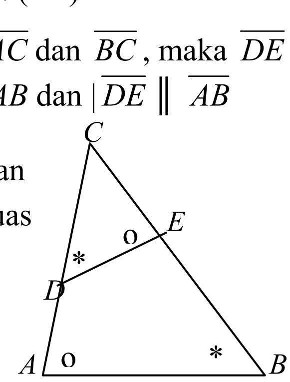
a. Jika sebuah garis $g \parallel$ sisi $\overline{AB}$ pada ΔABC dan memotong $\overline{AC}$ di titik D dan $\overline{BC}$ di E, maka:
   1) $\angle CDE \cong \angle CAB$ dan $\angle CED \cong \angle CBA$
      ($\angle CDE \cong \angle CAB$ dibaca sudut CDE kongruen dengan sudut CAB. Dua sudut kongruen jika keduanya sama besar).
   2) $\Delta CDE \sim \Delta CAB$; Akibat lebih lanjut:
   3) $CD : CA = CE : CB = DE : AB$
   4) $CD : DA = CE : CB$
   5) Luas $_{\Delta CDE}$: Luas $_{\Delta CAB}$ = $(CD)^2 : (CA)^2 = (CE)^2 : (CB)^2 = (DE)^2 : (A\mathrm{B})^2$



Gambar 3.2

b. Jika titik D dan E pada gambar di atas masing-masing titik tengah $\overline{AC}$ dan $\overline{BC}$, maka $\overline{DE}$ disebut (salah satu) *paralel tengah* pada segitiga tersebut. $DE = \frac{1}{2}AB$ dan $|\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

c. Jika pada ΔABC tersebut titik D pada $\overline{AC}$ dan E pada $\overline{BC}$ sedemikian sehingga besar $\angle CDE = \angle B$ dan $\angle CED = \angle A$, maka $\overline{DE}$ disebut ruas garis anti paralel terhadap $\overline{AB}$.



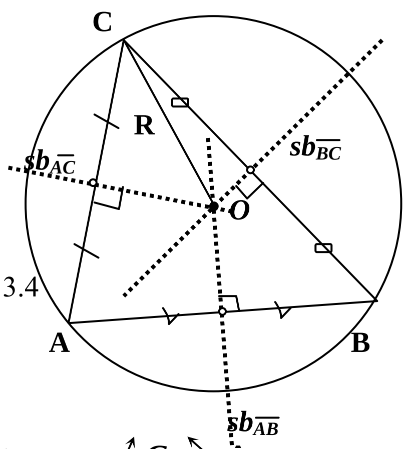
Gambar 3.3

E. Sumbu

1. Sumbu sisi segitiga adalah garis yang melalui titik tengah sisi segitiga dan tegaklurus sisi tersebut.
2. Ketiga sumbu berpotongan pada satu titik (misal di O)

   Titik O berjarak sama terhadap ketiga titik sudut, sehing-ga merupakan pusat lingkaran luar segitiga tersebut.
3. Jari-jari lingkaran luar $\Delta ABC = R \rightarrow R = \dfrac{abc}{4L}$

   L = Luas segitiga ABC

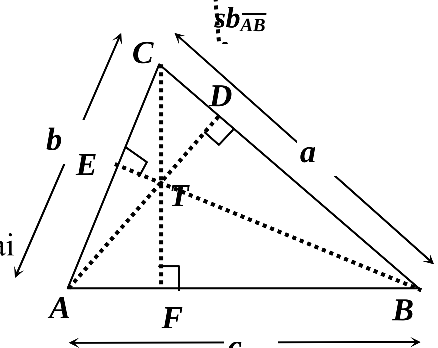


Gambar 3.4

F. Garis Tinggi

1. Garis tinggi adalah ruas garis yang melalui sebuah titik sudut dan tegaklurus pada sisi di hadapan titik sudut tersebut.
2. Ketiga garis tinggi suatu segitiga bertemu di satu titik, disebut titik tinggi segitiga tersebut.
3. Panjang dua garis tinggi suatu segitiga berbanding sebagai kebalikan sisi-sisi yang berhadapan.

   $AD \perp BC$ dan $BE \perp AC$ maka: $AD : BE = \dfrac{1}{BC} : \dfrac{1}{AC}$



Gambar 3.5

Catatan : sering dinyatakan: $t_b : t_b = \dfrac{1}{a} : \dfrac{1}{b}$; $t_b : t_c = \dfrac{1}{b} : \dfrac{1}{c}$, dan $t_b : t_b : t_c = \dfrac{1}{a} : \dfrac{1}{b} : \dfrac{1}{c}$

Jika $a + b + c = 2s$ Diperoleh $a + b - c = a + b + c - 2c = 2c - 2c = 2(s - c)$

$$a - b + c = a + b + c - 2b = 2s - 2b = 2(s - b)$$
$$-a + b + c = a + b + c - 2a = 2s - 2a = 2(s - a)$$

Jika dijabarkan diperoleh: $t_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ sehingga Luas $\Delta\, ABC = \frac{1}{2}\, a \times t_b$, atau

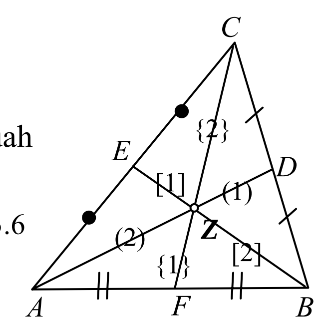
Luas $\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

G. Garis Berat

1. Garis berat dalam sebuah segitiga adalah ruas garis yang melalui sebuah titik sudut dan titik tengah sisi di hadapan (titik) sudut tersebut.

   $AE = CE$; $AF = BF$; $BD = CD \Rightarrow$

   $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, dan $\overline{CF}$ adalah garis-garis berat.

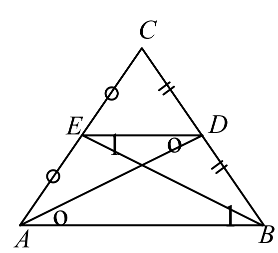


Gambar 3.6

2. Ketiga garis berat dalam sebuah segitiga berpotongan pada sebuah titik. Titik tersebut dinamakan titik berat segitiga tersebut.

   $\rightarrow$Titik Z adalah titik berat.
3. Ketiga garis berat dalam sebuah segitiga berpotongan pada titik sebuah titik (disebut titik berat) dengan perbandingan panjang bagian-bagiannya 2 : 1, dengan bagian terpanjang dekat pada titik sudut.

   $AZ : ZD = BZ : ZE = CZ : ZF = 2 : 1$



Gambar 3.7

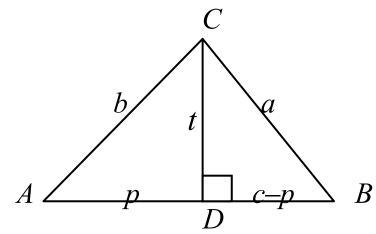
4. Jika z_a panjang garis berat dari titik sudut A, maka $z_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$

H. Dalil Proyeksi

Jika pada ΔABC $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ dan panjang proyeksi $\overline{AC}$ pada $\overline{AB}$ adalah p, maka

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ cp$

Diketahui: $\Delta\ ABC,\ CD \perp AB$
Buktikan: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\ cp$


Gambar 3.8

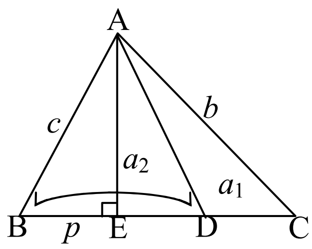
Bukti: Dalam ΔBCD : $a^2 = t^2 + (c - p)^2$ … (1)
Dalam ΔACD : $t^2 = b^2 - p^2$ … (2)
$t^2 = b^2 - p^2$ disubstitusikan pada (1) diperoleh:
$a^2 = b^2 - p^2 + (c - p)^2$
$a^2 = b^2 - p^2 + c^2 - 2cp + p^2$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ cp$

I. Dalil Stewart

Jika D sebuah titik pada sisi BC sebuah ΔABC, sehingga $CD = a_1$ dan $BD = a_2$, maka:

$$\mathbf{a \times AD^2 = a_2 b^2 + a_1 c^2 - a_1 . a_2 . a}$$

Bukti :


Gambar 3.9

Menurut dalil proyeksi dalam $\Delta\ ABD$
$AD^2 = c^2 + a_2^{\ 2} - 2a_2p$
Dalam $\Delta\ AB$C: $b^2 = c^2 + a^2 - 2ap$
Jika p dieliminasi didapat :
a.$AD^2 - a_2b^2 = ac^2 - a_2c^2 + aa_2^{\ 2} - a^2a_2$
atau

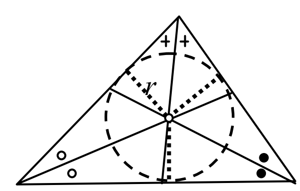
$$\text{a}\times AD^2 = a_2b^2 + \underbrace{ac^2 - a_2c^2}_{} + \underbrace{aa_2^{\ 2} - a^2a_2}_{}$$

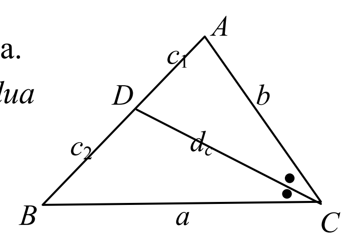
$$\text{a}\times AD^2 = a_2b^2 + a_1c^2 - a_1.a_2.a$$

(terbukti).

J. Garis bagi

1. Garis bagi sebuah sudut pada sebuah segitiga adalah ruas garis dari titik sudut yang bersangkutan ke salah satu titik pada sisi di hadapan titik sudut tersebut dan membagi dua sama besar sudut tersebut.
2. Ketiga garis bagi pada sebuah segitiga berpotongan pada sebuah titik, dan dinamakan titik bagi segitiga tersebut.
3. Titik bagi sebuah segitiga merupakan titik pusat lingkaran dalam segitiga tersebut. Lingkaran tersebut menyinggung semua sisi segitiga.
4. Garis bagi sudut suatu segitiga membagi sisi yang berhadapan atas *dua* bagian yang berbanding sebagai sisi-sisi yang berdekatan
   $DA : DB = AC : BC$ atau $c_1 : c_2 = b : a$
5. Panjang garis bagi $\angle ACB$ $d_c^{\ 2} = ab - c_1\ c_2$
6. Jari jari lingkaran dalam $\Delta\ ABC$ (r): $r = \dfrac{L}{s}$


Gambar 3.10


Gambar 3.11

L = Luas $\Delta\ ABC$
$2s = a + b + c$

Latihan 1

1. Sebutkan beberapa konsep dan pengertiannya dalam geometri datar.
2. Sebutkan beberapa prinsip dalam geometri.

3. Jika $\alpha + \theta = 180$, maka sudut yang besarnya α^{o} dan θ^{o} disebut sudut yang merupakan suplemen antara satu dan lainnya,

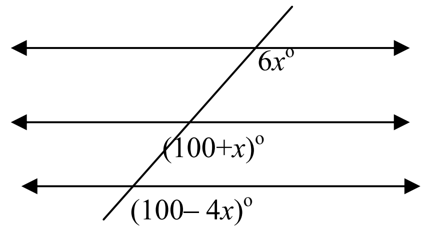
   berlakukah: $\angle A$ dan $\angle B$ sudut bersisihan $\Leftrightarrow m\angle A + m\angle B = 180^{o}$? Beri penjelasan!

4. Berlakukah pernyatan berikut:

   a. $g \perp h \Leftrightarrow$ sudut antara g dan h adalah 90^{o}

   b. Garis $g \parallel h$ dan $k \parallel g \Rightarrow k \parallel h$

   c. $\Delta\, ABC$ samakaki $\Rightarrow \Delta\, ABC$ samasisi



5. Informasi yang diberikan pada gambar di atas *salah*. Jelaskan!

Latihan 2

1. Sudut A dan B adalah sudut yang bersupmen satu terhadap lainnya. Jika α 30^{o} lebih dari 2 kali besar sudut B, berapakah sudut itu masing-masing?

2. Sudut A dan B saling berpenyiku dan sudut B dfan C saling berpelurus. Jika besar $\angle A$: besar $\angle C = 7 : 16$ dan besar $\angle B$: besar $\angle C = 1 : 8$, berapa besar sudut masing-masing?

3. Ubahlah ke sistem sexagesimal (derajat, menit, detik)
   a. $30, 25^{o}$ b. $45{,}6^{o}$ c. $75{,}36^{o}$ d. $27{,}45^{o}$

4. Ubahlah ke sistem desimal dalam derajat:
   a. $25^{o}45'$ b. $40^{o}.32'$ c. $65^{o}.45'.15'$ d. $57^{o}.17'30'.15''$

5. Nyatakan dalam derajat:
   a. $1\frac{2}{3}\pi$ rad b. $\frac{7}{12}\pi$ rad c. 1 rad d. $\frac{2}{3}$ rad

6. Nyatakan dalam radian atau π radian
   a. 75^{o} b. 300^{o} c. 100^{o} d. 20^{o}

7. Lukislah sudut-sudut berikut dengan jangka dan pasangan penggaris siku-siku.
   a. 27^{o} b. 36^{o}

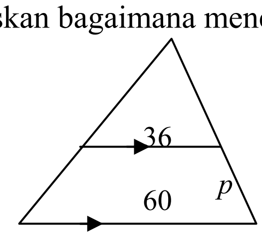
8. Sebuah roda berputar dengan kecepatan 2160 RPM (*rotaion per minute*; putaran per menit).
   a. Berapa RPS (*rotation per secon;* putaran per detik) kecepatan itu?
   b. Berapa derajat yang dilampauinya dalam seperempat detik?

9. Diameter roda berikut bannya dari sebuah mobil adalah 52,5 cm. Jika mobil itu melaju dengan kecepatan 150 km/jam, berapa RPM ban mobil tersebut?

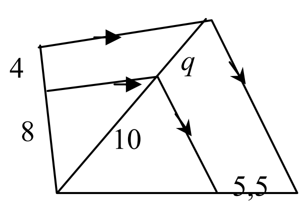
Latihan 3

1. Jelaskan bagaimana menentukan nilai-nilai variabel pada gambar-gambar berikut

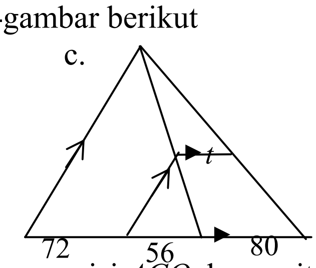
   a. .



   b.

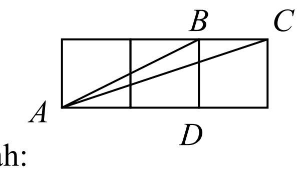


   c.



2. Diketahui ΔABC sembarang. Ke arah luar segitiga dilukis segitiga samasisi ACQ dan segitiga samasisi BCP. Buktikanlah bahwa $AP = BQ$.

3. Jika ketiga segiempat terkecil pada Gambar 3.5 adalah persegi-persegi yang kongruen, buktikanlah bahwa jumlah besar sudut *BAD* dan *CAD* adalah 45°.



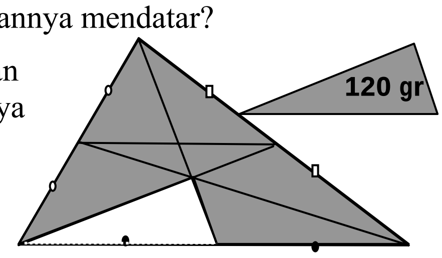
4. Diketahui ΔABC. $AB = 28$ cm, $BC = 25$ cm, dan $AC = 17$ cm. Hitunglah:
   a. panjang garis tinggi, garis bagi dan garis beratnya dari titik sudut *C*.
   b. panjang jari-jari lingkaran dalam dan lingkaran luarnya.

5. Titik *D*, *E*, dan *F*¸adalah titik-titik singgung lingkaran dalam sebuah ΔABC, berturut-turut pada sisi-sisi $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{AC}$. $AB = 40$ cm, $BC = 42$ cm dan $AC = 26$ cm. Hitunglah jarak titik-titik sudut segitiga tersebut ke titik-titik singgungnya yang bersangkutan.

6. Titik *M* adalah sebuah titik dalam $\angle B$ sedemikian sehingga jaraknya ke kedua kaki sudut sama. Sebuah garis *g* berjarak 16 cm memotong kedua kaki sudut di titik *A* dan *C*. Garis yang melalui *B* dan *M* memotong *g* di *D* sehingga $AD = 26$ cm dan $CD = 30$ cm. Hitunglah panjang $\overline{AB}$ dan $\overline{BC}$.

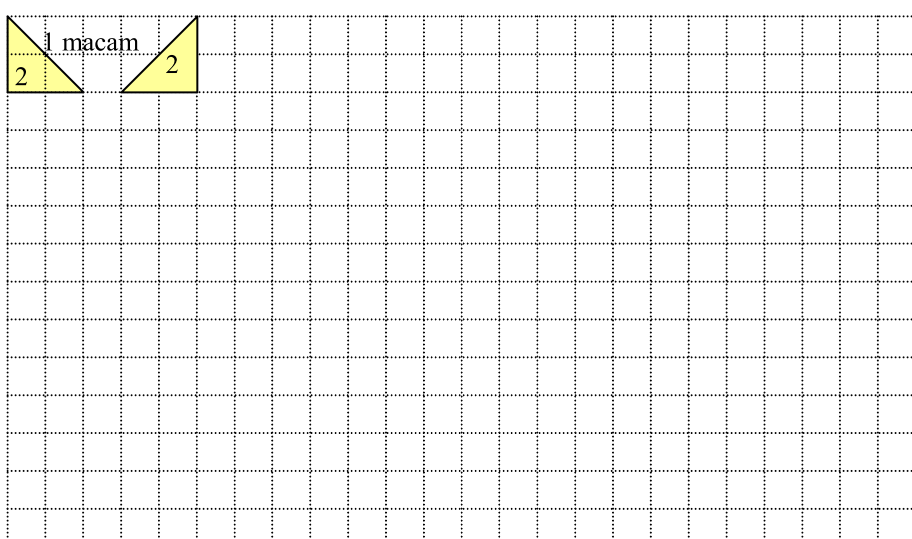
7. Sebuah papan homogen berbentuk segitiga berukuran 16 cm, 17 cm, dan 17 cm. Dimanakah tempat titik gantung papan tersebut agar jika digantung papannya mendatar?

8. Gambar di samping adalah lempengan besi dengan ketebalan homogen. Yang semula berbentuk segitiga, sebagian padanya sudah dipotong dan ketika ditimbang ternyata beratnya 120 gram. Berapa berat bagian-bagian lempengan itu masing-masing?



9. Diketahui ΔABC siku-siku di *B*, $BC = 40$ cm dan $AB = 75$ cm; $\overline{CD}$ garis bagi sudut *C*.Hitunglah panjang $\overline{AD}$.

10. Siapkan kisi-kisi seperti di bawah ini; setiap kotak luasnya 1 satuan.
    Gambarlah segitiga-segitiga tidak kongruen sebanyak mungkin, yang titik-titik sudutnya terletak pada titik perpotongan kisi-kisi, yang luasnya:
    a. 1,5 satuan b. 2 satuan c. 2,5 satuan



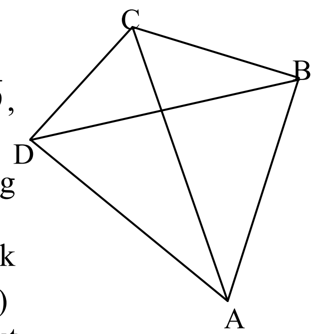
IV. SEGIEMPAT

A. Jenis-jenis Segiempat

1. Pengertian

Segiempat adalah terbentuk oleh 4 ruas garis yang ditentukan oleh 4 buah titik (sebidang), yang setiap 3 titiknya tidak segaris, dan ruas-ruas garis itu saling bertemu hanya di tiap-tiap titik ujungnya. (Clemens, 1984**:**17).

Setiap segiempat mempunyai (Gb. 4.1: segi-4 *ABCD*)**:**



Gambar 4.1

a. sisi (4 buah), yaitu ruas-ruas garis pembentuk segiempat: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, dan $\overline{DA}$.

b. titik sudut (4 buah), yaitu titik persekutan antara sisi-sisinya yang berpotongan (*A*, *B*, *C*, dan *D*).

c. pasangan sisi berhadapan (2 pasang), yaitu pasangan sisi yang tidak berpotongan (pada ruas garisnya) ($\overline{AB}$ dengan $\overline{CD}$ dan $\overline{BC}$ dengan $\overline{DA}$)

d. (pasangan) sisi bersisian, yaitu sisi-sisi yang merupakan kakl titik sudut ($\overline{AB}$ dengan $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ dengan $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ dan $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ dengan $\overline{AD}$)

e. titik sudut berhadapan (2 pasang), yaitu titik sudut yang tidak memiliki sisi persekutuan. (*A* dengan *D* dan *B* dengan *C*)

f. sudut berhadapan (2 pasang), yaitu pasangan sudut pada titik sudut yang berhadapan . ($\angle A$ dengan $\angle D$ dan $\angle B$ dengan $\angle C$)

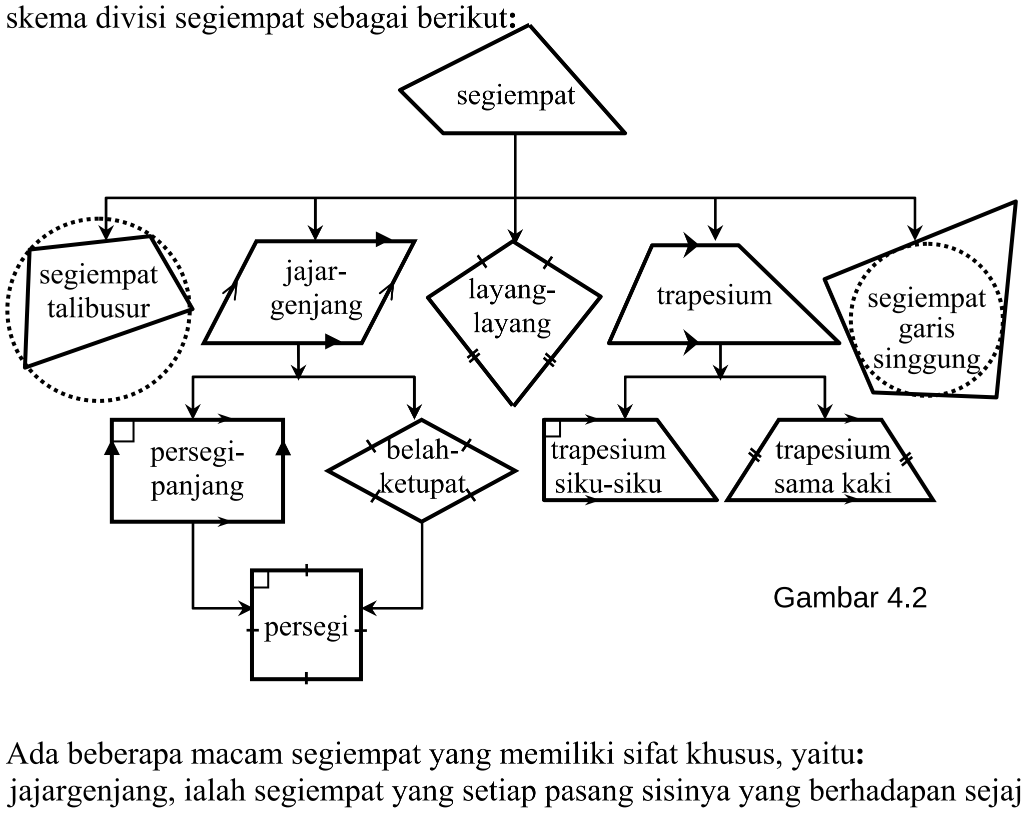
g. diagonal (2 buah), yaitu ruas garis penghubung dua titik yang berhadapan.($\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$,)

Sifat . Jumlah besar sudut sebuah segiempat 360^o.

Pada segi-4 *ABCD*, $u\angle A + u\angle B + u\angle C + u\angle D = 360^o$

2. Jenis-jenis segiempat

Ada beberapa cara mengklasifikasi (menyusun divisi) segiempat. Wirasto (1986**:**7) menyusun skema divisi segiempat sebagai berikut**:**



Gambar 4.2

Ada beberapa macam segiempat yang memiliki sifat khusus, yaitu**:**

a. jajargenjang, ialah segiempat yang setiap pasang sisinya yang berhadapan sejajar.

1) jajargenjang yang mempunyai sebuah sudut siku-siku disebut persegipanjang (*Catatan*: Dengan adanya satu sudut siku-siku, maka dengan sendirinya berakibat semua sudutnya siku-siku)
2) persegipanjang yang semua sisinya sama panjang disebut persegi
3) jajar genjang yang keempat sisinya sama panjang dinamakan belahketupat
4) belahketupat yang mempunyai sudut siku-siku disebut persegi.

b. Layang-layang, ialah segiempat yang mempunyai *tepat dua* pasang sisi yang bersisian sama panjang (Clemens, 1984: 115).

c. Trapesium, ialah segiempat yang mempunyai tepat sepasang sisi sejajar.
Sisi-sisi yang tidak sejajar dinamakan kaki-kaki trapesium.
1) trapesium yang salah satu titik sudutnya siku-siku disebut trapesium siku-siku.
2) trapesium yang kedua kakinya sama panjang dinamakan trapesium sama kaki.

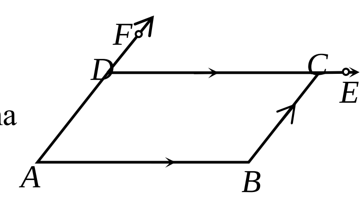
d. segiempat talibusur (segiempat siklik), ialah segiempat yang titik-titik sudutnya terletak pada sebuah lingkaran.

e. segiempat garis singgung, ialah segiempat yang keempat sisinya menyinggung sebuah lingkaran tertentu.

Catatan: Segiempat talibusur dan segiempat siklik dapat berupa segiempat yang memiliki satu di antara sifat ketiga jenis lainnya.

B. Prinsip-prinsip (Sifat-sifat dan Dalil) pada Segiempat

a. Prinsip-prinsip dalam/yang berhubungan dengan jajargenjang

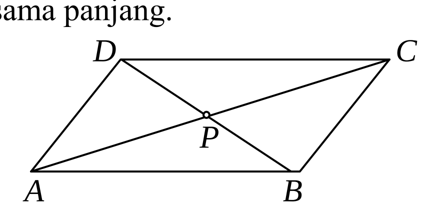


Gambar 4.3

P1 Dalam setiap jajargenjang, sudut-sudutnya yang berhadapan sama besarnya.

Pada jajargenjang $ABCD$, besar $\angle A = \angle C$ dan $\angle B = \angle D$

P2 Dalam setiap jajargenjang setiap dua sisi yang berhadapan sama panjang.
Pada jajargenjang $ABCD$, $CD = AB$ dan $AD = BC$

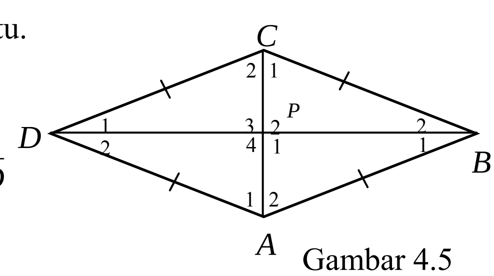


Gambar 4.4

P3 Dalam setiap jajargenjang kedua diagonalnya saling membagi dua sama panjang.
Pada jajargenjang $ABCD$
($\overline{AC}$, $\overline{BD}$) = P, maka: $AP = CP$ dan $BP = DP$

P4 Jika dalam sebuah segiempat dua sisi yang berhadapan sejajar dan sama panjang, maka segiempat tersebut adalah jajargenjang,
Jika pada segiempat $ABCD$; $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ dan $AB = DC$, maka segiempat $ABCD$ jajargenjang

P5 Dalam setiap belahketupat kedua diagonal
a. membagi dua sama sudut-sudut belah ketupat itu.
b. saling berpotongan sama panjang
c. saling berpotongan tegaklurus



Gambar 4.5

Pada belahketupat $ABCD$, diagonal $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$ berpotongan di P
Maka a. 1) $\angle A_1 = \angle A_2$, 2) $\angle B_1 = \angle B_2$,
3) $\angle C_1 = \angle C_2$, 4) $\angle D_1 = \angle D_2$.
b. 1) $AP = CP$ dan 2) $DP = BP$
c. $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

Sifat-sifat pada belahketupat di atas merupakan sifat yang penting sebagai dasar beberapa lukisan.

P6 Jika dalam sebuah jajargenjang kedua diagonal berpotongan tegaklurus, atau salah satu diagonal membagi dua sama salah satu sudut, maka jajargenjang itu adalah sebuah belah ketupat..

P7 Dalam setiap persegipanjang kedua diagonalnya sama panjang

P8 Jika dalam sebuah jajargenjang diagonalnya samapanjang, maka jajargenjang tersebut adalah persegipanjang.

b. **Prinsip-prinsip dalam/yang berhubungan dengan layang-layang**

P9 Dalam setiap layang-layang, kedua diagonalnya berpotongan tegak-lurus

c. **Prinsip-prinsip dalam/yang berhubungan dengan trapesium**

P10 Dalam setiap trapesium samakaki sudut-sudut yang terletak pada ujung setiap sisi sejajar, sama.

P11 Trapesium yang sudut alasnya sama, adalah trapesium samakaki.

P10 Dalam setiap trapesium samakaki kedua diagonalnya sama panjang.

P12 Jika dalam sebuah trapesium kedua diagonalnya sama, maka trapesium itu adalah trapesium samakaki.

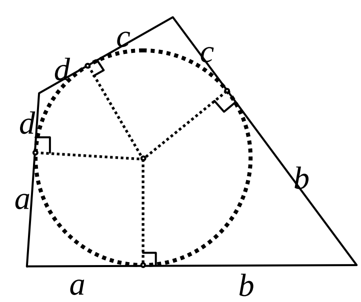
d. **Prinsip-prinsip dalam/yang berhubungan dengan segiempat talibusur**

P13 Dalam setiap segiempat talibusur jumlah pasangan sudutnya yang berhadapan 180^o.

P14 Dalam setiap segiempat talibusur kedua hasil kali panjang ruas garis bagian-bagian diagonal oleh adanya titik potong keduanya, sama.

e. **Prinsip-prinsip dalam/yang berhubungan dengan segiempat garis singgung**

P15 Dalam setiap segiempat garis singgung jumlah panjang kedua pasang sisi yang berhadapan, sama.



Gambar 4.6

C. Penggunaan Sifat Belahketupat untuk Melukis

Sifat **P5** di atas digunakan untuk lukisan-lukisan berikut**:**

a. Melukis garis tegak lurus garis yang diketahui melalui titik di luar garis yang diketahui tersebut.

b. Melukis garis tegak lurus garis yang diketahui melalui titik terletak pada garis yang diketahui tersebut.

c. Melukis garis bagi sebuah sudut.

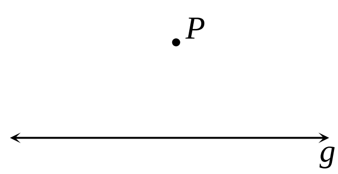
d. Melukis sumbu ruas garis (garis tegak lurus ruas garis dan melalui titik tengah ruas garis)

e. Melukis sudut-sudut khusus**:** (90^o, 45^o, 60^o, 30^o).

1. Melukis garis tegak lurus garis yang diketahui melalui titik di luar garis yang diketahui tersebut.

Diketahui**:** garis g dan titik P di luar g.

Lukis**:** garis $h \perp g$, melalui titik P.



Gambar 4.7

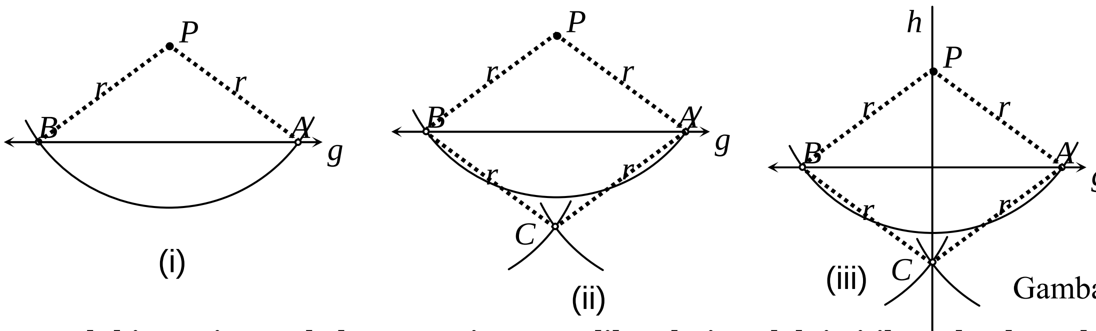
Lukisan**:**

(i) Berpusat di P lukislah busur lingkaran dengan jari-jari tertentu (dipilih misal r) sedemikian sehingga memotong garis g di titik A dan B.

(ii) Berpusat di A dan B, lukislah masing-masing sebuah busur lingkaran berjari-jari r sedemikian sehingga keduanya berpotongan, misal di C.

(iii) Lukis garis melalui titik P dan C.

Garis $\overleftrightarrow{PC}$ = garis h yang dimaksud (melalui titik P tegaklurus garis g).

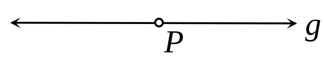


Gambar 4.8

2. Melukis garis tegak lurus garis yang diketahui melalui titik terletak pada garis yang diketahui tersebut.

Diketahui**:** garis g dan titik P di luar g.

Lukis**:** garis $h \perp g$, melalui titik P.



Gambar 4.9

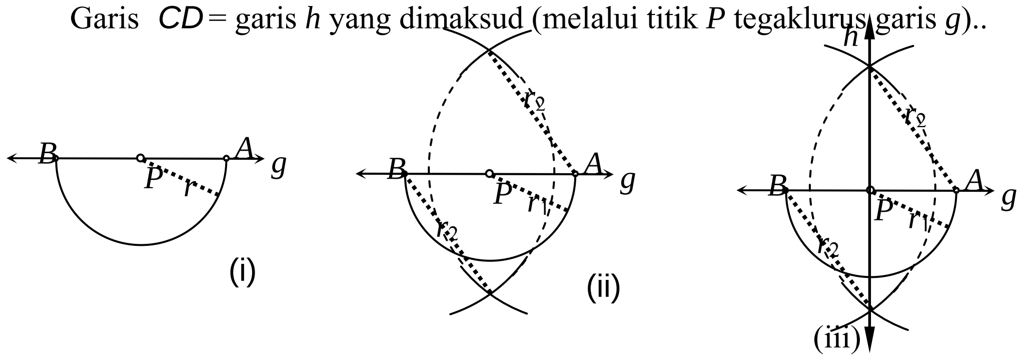
Lukisan**:**

(i) Berpusat di P lukislah busur lingkaran dengan jari-jari tertentu (dipilih misal r_1) sedemikian sehingga memotong garis g di titik A dan B.

(ii) Berpusat di A dan B, lukislah masing-masing sebuah busur lingkaran berjari-jari r_2 ($r_2 > r_1$) sedemikian sehingga keduanya berpotongan, misal di titik C dan titik D.

(iii) Lukis garis melalui titik C dan D (sekaligus juga melalui P).

Garis $\overleftrightarrow{CD}$ = garis h yang dimaksud (melalui titik P tegaklurus garis g)..



Gambar 4.10

Melukis garis bagi sebuah sudut

Diketahui**:** sudut A.

Lukis**:** garis b yang membagi dua sama besar $\angle A$.

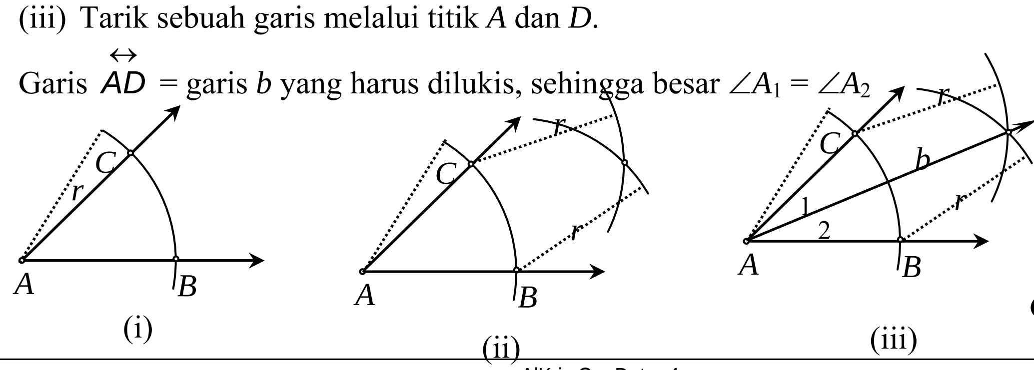
Lukisan**:**

(i) Berpusat titik sudut A, lukis sebuah busur lingkaran berjari-jari tertentu (misal r), sehingga memotong kedua kaki sudut di titik A dan B.

(ii) Berpusat di titik B dan C, lukislah masing-masing sebuah busur lingkaran berjari-jari r sedemikian sehingga keduanya berpotongan, misal di titik D.

(iii) Tarik sebuah garis melalui titik A dan D.

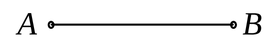
Garis $\overleftrightarrow{AD}$ = garis b yang harus dilukis, sehingga besar $\angle A_1 = \angle A_2$



Gambar 4.11

3. Melukis sumbu ruas garis

Sumbu sebuah ruas garis adalah sebuah garis yang melalui titik tengah ruas garis yang diketahui dan tegaklurus ruas garis tersebut.



Gambar 4.12

Diketahui**:** ruas garis $\overline{AB}$

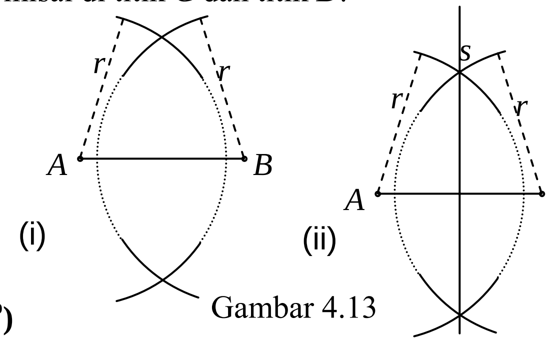
Lukis**:** garis *s* sebagai sumbu $\overline{AB}$

Lukisan**:**

(i) Berpusat di titik *A* dan *B*, lukis busur-busur lingkaran berjari-jari sama (misal $r > \frac{1}{2}AB$) sedemikian sehingga keduanya berpotongan, misal di titik *C* dan titik *D*.

(ii) Tarik sebuah garis melalui titik *C* dan *D*.

Garis $s = \overleftrightarrow{CD}$, sumbu ruas garis $\overline{AB}$.



Gambar 4.13

4. Melukis sudut-sudut khusus: (90°, 45°, 60°, 30°)

a. Melukis sudut 90° dan 45°

(i) Lukis sebuah sinar garis, misal $\overrightarrow{OA}$

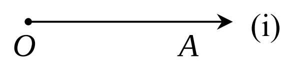
(ii) Lukis sinar garis $\overrightarrow{OB}$ ke arah berlawanan dengan arah $\overrightarrow{OA}$

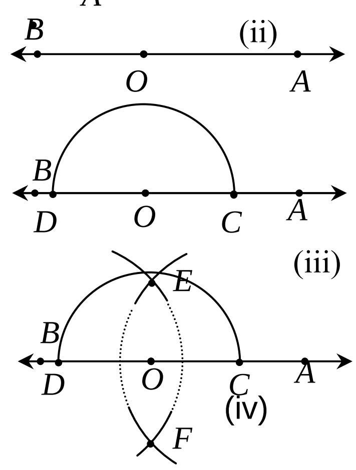
(iii) Berpusat di titik *O*, lukis sebuah busur lingkaran memotong $\overrightarrow{OA}$ di titik *C* dan $\overrightarrow{OB}$ di titik *D*.

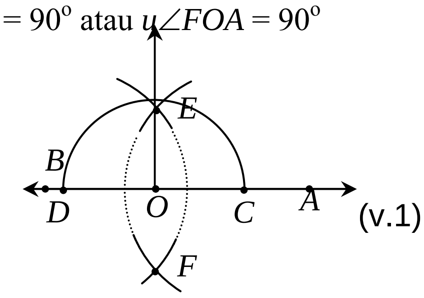
(iv) Berpusat di titik *C* dan *D*, lukis busur-busur lingkaran berjari-jari sama (misal *r* dengan $r > \frac{1}{2}AB$) sedemikian sehingga keduanya berpotong-an, misal di titik *E* dan titik *F*

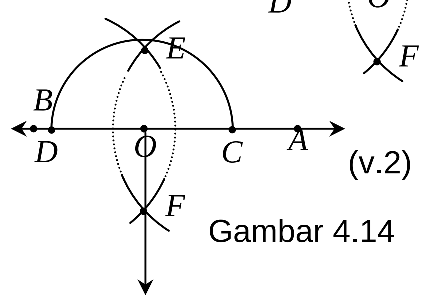
(v) Tarik salah satu, $\overrightarrow{OE}$ **atau** $\overrightarrow{OF}$

$u\angle EOA = 90^\circ$ atau $u\angle FOA = 90^\circ$









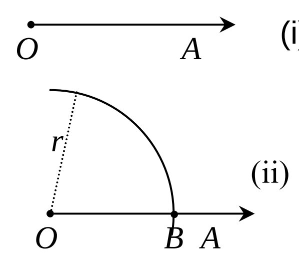
Gambar 4.14

Untuk melukis sudut 45°, dari sudut 90° yang terlebih dahulu dilukis, dilukis garis baginya.

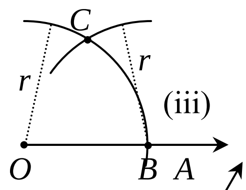
b. Melukis sudut 60° dan 30°

(i) Lukis sebuah sinar garis, misal $\overrightarrow{OA}$

(ii) Berpusat di titik *O*, lukislah sebuah busur lingkaran berjari-jari tertentu (misal *r*), memotong $\overrightarrow{OA}$ misal di titik *B*.



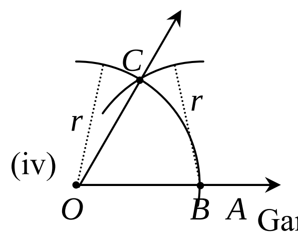
(iii) Berpusat di titik *B*, lukislah sebuah busur lingkaran berjari-jari *r*, memotong busur pada (ii) misal di titik *C*.

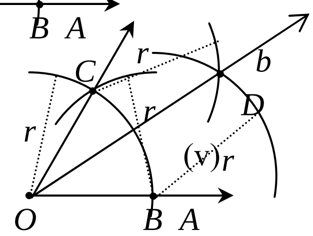


(iv) Tarik $\overrightarrow{OC}$. Besar $\angle COB = 60^o$

(v) Lukis *b*, garis bagi $\angle COB$.

Terlukis sudut 30^o ($\angle DOB$.)





Gambar 4.15

D. Keliling dan Luas Segiempat

Jika *K* adalah keliling, *L* adalah luas, *s* adalah panjang sisi, *d* adalah panjang diagonal, dan *t* adalah tinggi bangun (jika ada), maka:

1.	Persegi:	$K = 4s$	$L = s^2$	
2.	Persegipanjang	$K = 2(s_1 + s_2)$	$L = s_1 \times s_2$; s_1 dan s_2 panjang sisi yang berpotongan	
3.	Jajargenjang	$K = 2(s_1 + s_2)$	$L = s_1t_1 = s_2t_2$;	t_1 panjang garis tinggi ke sisi yang panjangnya s_1
4.	Belah ketupat	$K = 4s$	$L = \frac{1}{2}d_1d_2$	d = panjang diametar
5.	Trapesium		$L = \frac{1}{2}(s_1 + s_2)$	t; s_1 dan s_2 panjang sisi sejajar
6.	Layang-layang	$K = 2(s_1 + s_2)$	$L = \frac{1}{2}d_1d_2$	

Latihan 4.1

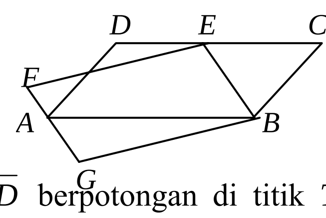
1. *ABCD* adalah sebuah jajargenjang. Besar $\angle A = (9x - 11)^o$ dan $u\angle C = (7x + 3)^o$. Hitunglah besar masing-masing sudut jajargenjang tersebut.
2. Pada jajargenjang *ABCD*, $AB = 3x + 5y$, $CD = 6x + 3y - 1$, $AD = 4x + 2y - 4$, dan $BC = 2x + y + 13$. Hitunglah keliling jajargenjang tersebut.
3. Diketahui sebuah segiempat sebarang, panjang diagonalnya *p* dan *q* satuan dan keduanya membentuk sudut 30^o. Sebuah jajargenjang salah satu titik sudutnya pada pertengahan sebuah sisi segi-4 tersebut, dan titik-titik sudut lainnya pada ketiga sisi lainnya segiempat yang diketahui tersebut. Berapakah luas (a) segiempat tersebut (b) jajargenjang tersebut?
4. Jika jarak antara dua sisi sejajar yang panjangnya *p* pada sebuah jajargenjang adalah *t*, dan luasnya *L*, buktikanlah bahwa $L = p \times t$.
5. Buktikanlah, bahwa luas sebuah segi-4 yang diagonalnya saling tegaklurus sama dengan setengah hasilkali panjang kedua diagonalnya.
6. Buktikanlah bahwa dalam jajargenjang *ABCD* berlaku
   $(AC)^2 + (BD)^2 = 2((AB)^2 + (AD)^2)$
7. Dalam trapesium *ABCD*, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. Titik *P* dan *Q* berturut-turut titik tengah $\overline{AB}$ dan $\overline{BC}$. Buktikanlah bahwa
   (i) $\overline{PQ} \parallel \overline{DC}$ (ii) $PQ = \frac{1}{2}(AB + CD)$
8. Sebuah titik *P* berada di dalam sebuah persegi *ABCD*. $AB = 12$ cm. Jarak *P* ke titik sudut *C* dan *D* sama dan sama pula dengan jaraknya ke sisi $\overline{AB}$. Berapakah jarak tersebut?

9. $ABCD$ adalah sebuah persegipanjang, M titik tengah sisi $\overline{AB}$. Sebuah garis ditarik dari M tegaklurus $\overline{CM}$, memotong $\overline{AD}$ di P. Buktikanlah bahwa besar sudut BCM = besar sudut PCM.

10. $ABCD$ adalah sebuah persegi. Titik T berjarak sama terhadap titik sudut C dan D, dan besar $\angle TCD = 15^o$. Buktikanlah bahwa ΔTAB samasisi.

11. $ABCD$ adalah sebuah trapesium sama kaki, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ dan $AB > DC$. Titik E adalah titik tengah $\overline{BC}$. Jika luas ΔABE **:** Luas segiempat $AECD = 2 : 3$, tentukan perbandingan panjang $\overline{DC}$ dan $\overline{AB}$.

12. $ABCD$ adalah sebuah jajargenjang. Titik E pada $\overline{DC}$. Ruas garis $\overline{FG}$ melalui A sama panjang dan sejajar $\overline{EB}$. Buktikanlah bahwa luas jajargenjang $BEFG$ = luas jajargenjang $ABCD$



13. $ABCD$ adalah sebuah segiempat siklik. $AB > CD$. $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$ berpotongan di titik T. Buktikanlah bahwa $TA \times TC = TB \times TD$.

14. $ABCD$ adalah sebuah segiempat siklik. AB = 45 cm, dan BC = 60 cm, $\overline{BA}$ dan $\overline{CD}$ berpotongan di titik T, TD = 28 cm, dan TA = 35 cm. Hitunglah panjang talibusur $\overline{BD}$.

15. Buktikanlah bahwa dalam segiempat siklik, hasil kali panjang diagonal-diagonalnya sama dengan jumlah hasil kali panjang sisi-sisinya yang berhadapan (*Dalil Ptolomeus*).

16. Sebuah trapesium samakaki merupakan sebuah segiempat garis singgung. Panjang sisi sejajarnya 64 cm dan 36 cm. Hitunglah
    a. panjang jari-jari lingkaran yang disinggung sisi-sisi trapesium.
    b. jarak pusat lingkaran tersebut ke titik-titik sudut trapesium

17. Garis b adalah garis bagi sudut A. Titik T adalah sembarang titik pada garis b. Buktikanlah bahwa jarak titik T ke kedua kaki sudut tersebut sama.

18. Garis s adalah sumbu ruas garis AB. Buktikanlah bahwa untuk setiap titik T pada s, $TA = TB$.

19. Sekeliling kebun berbentuk persegi berukuran 40 m × 20 m dipagari dengan kawat yang setiap 2 m diperkuat dengan tiang besi setinggi 2 m termasuk yang tertanam. Berapa batang besi yang diperlukan jika setiap batang besi panjangnya 6 m?

20. Sebuah tiang dipancangkan di dalam sebidang pekarangan berbentuk segi-4. Tiang itu berjarak sama ke keempat patok batas pekarangan tersebut. Jarak patok pertama ke patok kedua 33 m, patok kedua ke patok ketiga 56 m, patok ketiga ke keempat 25 m.
    a. Berapa jarak tiang ke setiap patok batas pekarangan?
    b. Berapa jarak patok keempat ke patok pertama?
    c. Berapa luas pekarangan tersebut?

21. Selembar kertas HVS ukuran A4 dipotong-potong untuk masing-masing berbentuk trapesium samakaki yang semuanya kongruen berukuran sisi sejajar 3 cm dan 6 cm serta sisi tegak yang pendek 3 cm. Berapa bangun trpesium yang diperoleh?

22. Ukuran kertas, misalnya HVS 80 gram, adalah kertas jenis HVS yang setiap meterpersegi beratnya 80 gram. Berapa berat 1 reem HVS 80 gram ukuran A4?

23. Selembar seng berukuran 50 cm × 50 cm dipotong-potong menjadi bahan-bahan dasar mainan berbentuk " L" yang kelilingnya 80 cm. Berapa banyak bahan mainan maksimum yang dapat dibuat?

bentuk bahan dasar:

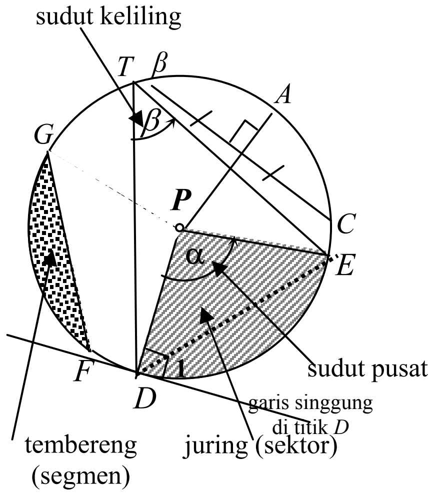
V. LINGKARAN

A. Lingkaran, Daerah Lingkaran dan Bagian-bagiannya

1. Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik berjarak sama terhadap titik tertentu.

   Titik tertentu (P) disebut pusat, jarak tertentu merupakan panjang jari-jari lingkaran tersebut.
2. Talibusur = ruas garis hubung dua titik pada lingkaran.
3. Talibusur yang melalui pusat lingkaran = diameter, panjangnya $2r$.

   Dua titik ujung sebuah diameter disebut pasangan titik *diametral*.



Gambar 5.1

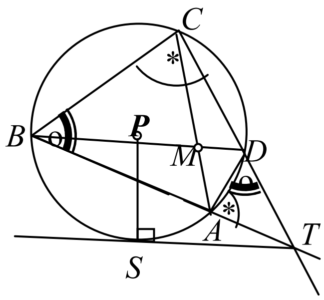
B. Beberapa Sifat

1. Setiap sumbu sebuah talibusur melalui pusat lingkaran ($\overleftrightarrow{PA}$ sumbu $\overline{BC}$)
2. Setiap diameter yang tegaklurus sebuah talibusur merupakan sumbu talibusur tersebut. Jadi $u\angle D_1 = u\angle DET$
3. $\alpha = 2\beta$ (besar sudut pusat = 2× besar sudut keliling yang menghadap busur sama).

   $\alpha = 180^o \Leftrightarrow$ talibusur adalah diameter $\Rightarrow$ besar sudut keliling = 90^o

C. Segiempat Talibusur

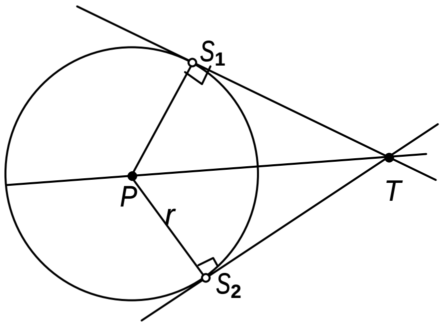
1. Segi-4 talibusur = segi-4 siklik = segi-4 yang semua titik sudutnya terletak selingkaran.
2. Sifat-sifat
   a. sudut-sudut yang berhadapan berjumlah 180^o.
   b. Segi-4 $ABCD$ = segi-4 talibusur $\rightarrow u\angle A + u\angle C = u\angle B + u\angle D = 180^o$
   c. $\overline{DA}$ merupakan anti paralel terhadap BC pada ΔTBC.
   d. $\Delta TDA \sim \Delta TBC$
   e. $MA \times MC = MB \times MD$
   f. $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$ (Dalil Ptolomeus).



Gambar 5.2

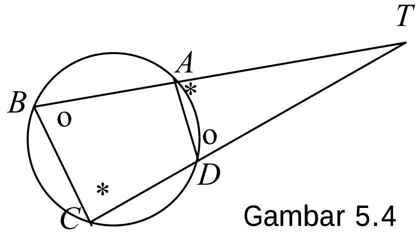
D. Garis Singgung

1. Garis singgung sebuah lingkaran adalah garis yang memotong lingkaran pada sebuah titik (dua buah titik yang berimpit)
2. Setiap garis singgung tegak lurus jari-jari yang melalui titik singgung$\rightarrow \overleftrightarrow{TS_1} \perp . \overleftrightarrow{PS_1}$



Gambar 5.3

3. *Segiempat* TS_1PS_2 dinamakan layang-layang garis singgung.
4. Jika T adalah sebuah titik di luar lingkaran berpusat di titik P dan *titik* S adalah titik singgung garis singgung $\overleftrightarrow{TS}$ dan garis g dan h bertutur-turut memotong lingkaran di A dan B dan di C dan D, maka:



Gambar 5.4

   a. $TA \times TB = TD \times TC = TS^2$, disebut kuasa titik T terhadap lingkaran.

Perhatikan kesamaan sudut yang ditunjukkan oleh pada Gambar 5.4. Akibatnya ialah bahwaΔTDA sebangun dengan $\Delta TBC \Rightarrow TD : TA = TB : TC \Leftrightarrow TA \times TB = TD \times TC$

b. Akibat**:** panjang ruas garis singgung $\overline{TS}$ adalah $TS = \sqrt{(P_1P_2)^2 - r^2}$

c. $MD \times MB = MA \times MC$ = kuasa titik M terhadap lingkaran, M di dalam lingkaran (secara analitik, nilainya bertanda negatif).

E. Keliling dan Luas

Jika r = panjang jari-jari, d = panjang diameter, K = keliling, dan L = luas, maka:

1. Panjang busur menghadap sudut pusat sebesar α (radian) adalah α
   Panjang busur menghadap sudut pusat sebesar α^o adalah $\alpha\pi r/180$
2. $K_{\odot} = 2\pi r$ *atau* $K_{\odot} = \pi d$
3. $L_{\odot} = \pi r^2$
4. $L_{\text{juring}} = \frac{1}{2}\alpha r^2$, α = besar sudut pusat (dalam radian)

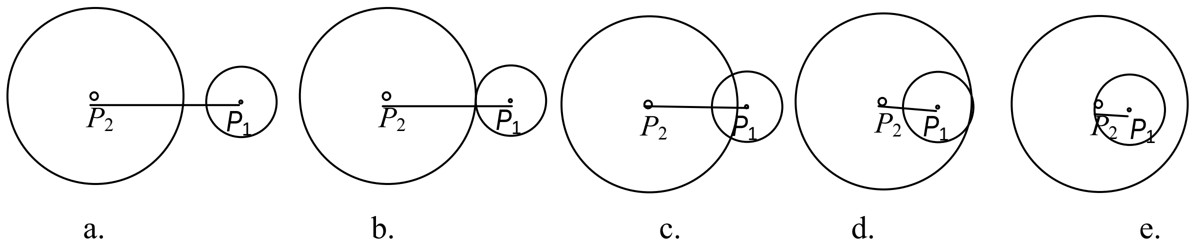
   $L_{\text{juring}} = (\alpha/360)\pi r^2$, α = besar sudut pusat (dalam derajat)

   Catatan: $\pi \approx$ 3,14159265358979323846264338327950…

   $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$**. Nilai pendekatan π =** $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$

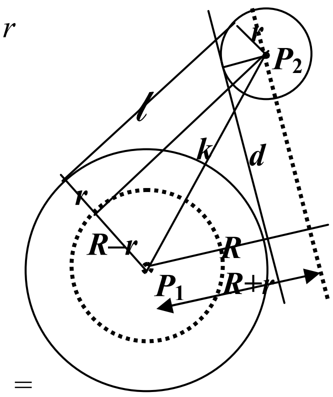
F. Dua lingkaran

1. Kedudukan dua lingkaran (berjari-jari R dan r; $R > r$)



Gambar 5.5

a. L_1 di luar L_2 $\Leftrightarrow P_1P_2 > R + r$
b. L_1 dan L_2 **bersinggungan di luar** $\Leftrightarrow P_1P_2 = R + r$
c. L_1 dan L_2 **berpotongan** $\Leftrightarrow R - r < P_1P_2 < R + r$
d. L_1 **menyinggung** L_2 **dari dalam** $\Leftrightarrow P_1P_2 = R - r$
e. L_1 **di dalam** L_2 $\Leftrightarrow 0 < P_1P_2 < R - r$



Gambar 5.6

2. Garis Singgung
   R **=** jari-jari lingkaran berpusat P_1
   r **=** jari-jari lingkaran berpusat P_2
   k = P_1P_2

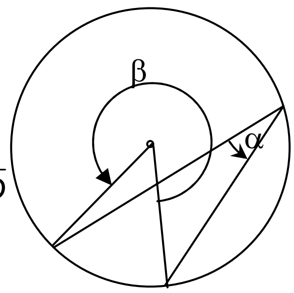
   a. L_1 di luar L_2
   ℓ = panjang ruas garis singgung persekutuan luar
   $= \sqrt{k^2 - (R-r)^2}$
   d = panjang ruas garis singgung persekutuan dalam = $\sqrt{k^2 - (R+r)^2}$

   b. Kedua lingkaran bersinggungan (di luar), maka $k = R + r$, sehingga
   ℓ = panjang ruas garis singgung persekutuan luar
   $= \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = \sqrt{4Rr} = \mathbf{2}\sqrt{Rr}$

$\boldsymbol{d}$ = panjang ruas garis singgung persekutuan dalam = $\sqrt{(R+r)^2-(R+r)^2} = \mathbf{0}$

Latihan 5

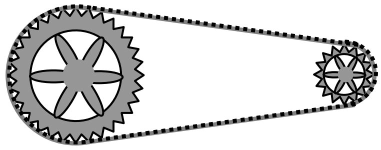
1. Nyatakanlah *benar* atau *salah* pernyataan berikut.
   a. Dalam sebuah lingkaran, jika sebuah jari-jari membagi dua sama sebuah talibusur, maka jari-jari tersebut tegaklurus talibusur yang dipotongnya.
   b. Dalam sebuah lingkaran. garis singgung dan diameter yang memotongnya saling tegaklurus.
   c. Jika talibusur sebuah lingkaran sama panjang dengan talibusur lingkaran lain, maka kedua lingkaran berjari-jari sama.
   d. Dalam sebuah lingkaran, jika dua talibusur berjarak sama terhadap pusat, maka keduanya sama panjang.
   e. Dalam sebuah lingkaran, jika keduanya sama panjang, maka keduanya berjarak sama terhadap pusat lingkaran.
   f. Jika sebuah garis tegak lurus sebuah jari-jari lingkaran, maka garis tersebut adalah garis singgung lingkaran.
   g. Jika sebuah diameter sebuah lingkaran merupakan sumbu talibusur p dan q, maka kedua talibusur sejajar.
2. Dari gambar di samping,
   a. Berapa besar α
   b. Nyatakan α dalam radian



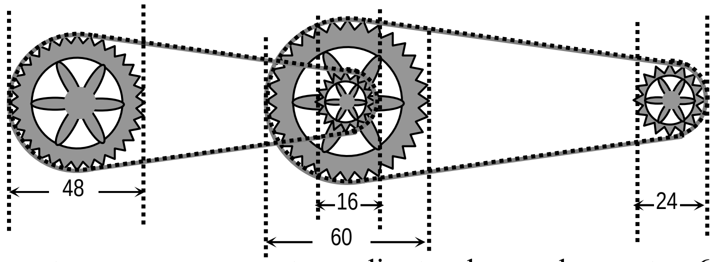
3. $\overline{AB}$ adalah sebuah diameter lingkaran berpusat di titik P. $\overline{CD}$ sebuah talibusur lingkaran yang tegak lurus $\overline{AB}$ di titik T. Buktikanlah bahwa $CT^2 = AT \times TB$.
4. Sebuah talibusur dari sebuah lingkaran yang panjangnya 48 cm berjarak 7 cm dari pusat lingkaran. Berapa panjang talibusur yang berjarak 15 cm dari pusat?
5. *A, B, C,* dan *D* adalah titik-titik pada sebuah lingkaran. Diagonal $\overline{AC}$ dan $\overline{BD}$ berpotongan di titik *T*. Tariklah sisi-sisi segi-4 *ABCD*. Sebutkanlah segitiga-segitiga yang kongruen pada gambar tersebut.

   Berdasarkan hal di atas, jelaskan bagaimana memperoleh Sifat pada C.2.f.
6. Dalam sebuah lingkaran talibusur $\overline{DE}$ sejajar garis tengah $\overline{AC}$. $\overline{CD}$ dan $\overline{AE}$ berpotongan di titik *F*. Jika EF = 4 cm, DE = 6 cm dan EA = 16 cm, hitunglah panjang jari-jari lingkaran tersebut.
7. *ABCD* adalah sebuah segi-4 siklik. AB = 45 cm, dan BC = 60 cm, $\overleftrightarrow{BA}$ dan $\overleftrightarrow{CD}$ berpotongan di titik *T*, TD = 28 cm, dan TA = 35 cm. Hitunglah panjang talibusur $\overline{BD}$.
8. Sebuah lingkaran memiliki sebuah talibusur sepanjang 24 cm yang berjarak 5 cm dari pusatnya, memotong diameter yang tegaklurus padanya di titik *A* menjadi dua bagian.
   a. Berapakah panjang masing-masing bagian diameter itu?
   b. Jika sebuah talibusur melalui titik *A* dan memotong lingkaran menjadi dua bagin yang salah satu bagiannya panjangnya 6 cm. Berapa panjang talibusur tersebut?
   c. Berapakah panjang talibusur yang berjarak 12 cm dari pusat lingkaran?
9. Buktikanlah bahwa dalam segiempat siklik, hasil kali panjang diagonal-diagonalnya sama dengan jumlah hasil kali panjang sisi-sisinya yang berhadapan (*Dalil Ptolomeus*).

10. Gambar di samping adalah dua roda yang dihubungkan dengan rantai ‘sempurna’. Diameter roda besar 18 cm dan yang kecil 8 cm. Jika roda besar diputar dengan kecepatan 60 rpm, berapakah kecepatan putar roda yang kecil?



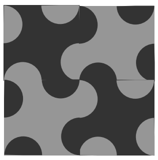
11. Roda kedua pada pasangan roda pertama ditempelkan pada roda kedua pasangan roda kedua.

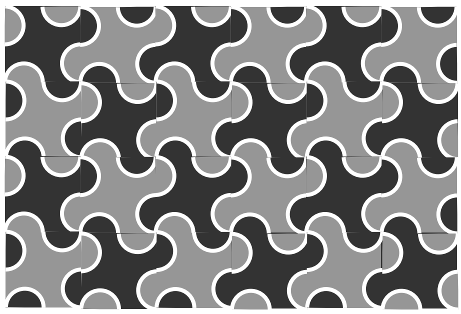


Jika roda pertama pasangan pertama diputar dengan kecepatan 60 rpm, berapa rpm kecepatan roda kedua pasangan kedua?

12. Jika pasangan kedua diletakkan di depan dengan model seperti di atas, berapa rpm roda terakhir jika roda pertama diputar dengan kecepatan 60 rpm. Apa yang dapat disimpulkan sementara jika hasilnya dibandingkan dengan cara pertama?

13. Setiap bagian terkecil gambar lengkung pada gambar pertama adalah setengah lingkaran. Sepanjang gambar lengkung pada ubin dicat dengan warna emas, sehingga setelah ubinnya terpasang tampak sebagian lantai seperti gambar kedua. Ubinnya berukuran 40 cm × 40 cm dan dipasang pada lantai berukuran 14 m × 8 m. Jika 1 kaleng cat warna emas dapat digunakan untuk mengecat lengkungan sepanjang 80 m, berapa kaleng cat paling sedikit harus dibeli untuk menyelesaikan pekerjaan tersebut?



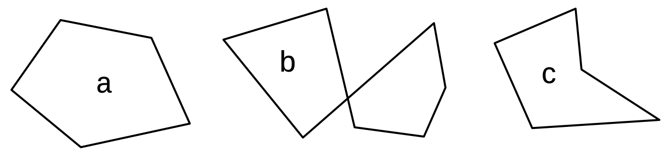


14. Selembar seng ukuran 70 cm × 80 cm disediakan untuk membuat lempengan-lempengan berbentuk lingkaran berdiameter 14 cm. Berapa buah lempeng lingkaran yang dapat dibuat?

VI. POLIGON

A. Pengertian

1. **Poligon** atau segi banyak adalah bangun datar yang terbentuk oleh ruas-ruas garis yang membentuk daerah tertutup.
2. Dibedakan (Gellert et.al.: 1977:162)
   a. Poligon Konveks
   b. Poligon refleks
   c. Poligon konkaf



Gambar 6.1

3. Jika dipilih dua titik berbeda di dalam poligon dan ruas garis yang menghubungkannya tidak memotong sisi pologon ⇔ Poligon Konveks.

   Untuk selanjutnya, jika tidak ditentukan lain, maka yang dibahas hanyalah poligon konveks
4. Nama poligon (konveks) dapat ditentukan sesuai banyak sisinya: segi-3, segi-4, segi-5, … segi-*n*

B. Beberapa Sifat

1. Banyak diagonal segi-*n* adalah $\frac{1}{2}n(n-3)$
2. Jumlah besar sudut segi-*n* = $(n-2) \times 180^o$

C. Poligon (Segi banyak) beraturan

1. Segi banyak dikatakan beraturan jika semua sisinya sama panjang dan semua sudutnya sama besar.
2. Dikenal: segi-3 beraturan (= segitiga sama sisi), segi-4 beraturan (= persegi), segi-5 beraturan, segi-6 beraturan dan seterusnya.
3. Jika α adalah besar sebuah sudut segi-*n* beraturan, maka $\alpha = \frac{(n-2).180^o}{n}$

D. Barisan segi-*n*

Misalkan ada sebuah segi-*n*. Dengan pertolongan garis melalui pusat dan perte-ngahan sisi dapat ditemukan titik potong garis-garis tersebut. Bersama titik-titik sudut semula, jika melalui setiap dua titik berurutan ditarik sebuah ruas garis, maka terben-tuk sebuah segi-2*n*. Misalnya dari sebuah segi-3 beraturan tertentu dapat dilukiskan segi banyak lainnya yang banyak sisinya merupakan kelipatan 6, 12, 24, 48, …

E. Lingkaran Dalam dan Lingkaran Luar

1. Di dalam setiap poligon beraturan dapat ditemukan sebuah titik pusat lingkaran dalam poligon tersebut, yaitu lingkaran yang menyinggung semua sisi poligon.
2. Di dalam setiap poligon beraturan dapat ditemukan sebuah titik pusat lingkaran luar poligon tersebut, yaitu lingkaran yang melalui semua titik sudut sisi poligon.
3. Pusat lingkaran luar dan dalam sebuah poligon berimpit. Titik pusat tersebut dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut:
   a. Jika segibanyaknya bersisi ganjil, pusatnya adalah titik potong antara ruas garis yang melalui sebuah titik sudut dan titik tengah sisi yang tepat berhadapan dengan titik sudut tersebut.

   b. jika segibanyaknya bersisi genap, pusatnya adalah titik potong diagonal-diagonal-nya, atau titik potong ruas-ruas garis yang penghubung titik-titik tengah pasangan -sisi sejajarnya.

F. Jari-jari Lingkaran Luar, kaitannya dengan Panjang Sisi dan Luas Poligon Beraturan

Jika R adalah panjang jari-jari lingkaran luar segi-n,
α = besar sudut pusat antara dua jari-jari penghubung dua titik sudut terdekat,
θ = besar sebuah sudut segi-n
s = panjang sisi segi-n
K = keliling poligon
L = luas daerah segi-n
maka:

n	α	θ	s	K	L
3	120^o	60^o	$R\sqrt{3}$	$3R\sqrt{3}$	$\frac{3}{4}R^2\sqrt{3} \approx 1{,}29990\, R^2$
4	90^o	90^o	$R\sqrt{2}$	$4R\sqrt{2}$	$2R^2$
5	72^o	108^o	$\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$2\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{5}{8}R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
6	60^o	120^o	R	$6R$	$1\frac{1}{2}R^2\sqrt{3}$
8	45^o	135^o	$R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$8R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$2R^2\sqrt{2}$
10	36^o	144^o	$\frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1)$	$5R(\sqrt{5}-1)$	$\frac{5}{4}R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
12	30^o	150^o	$R\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$6R\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$3R^2$
15	24^o	156^o	$\frac{R}{2}\sqrt{(7-\sqrt{5}-\sqrt{(30-6\sqrt{5})})}$	$\frac{15R}{2}\sqrt{(7-\sqrt{5}-\sqrt{(30-6\sqrt{5})})}$	$\frac{15R^2}{8}\sqrt{(7+\sqrt{5}-\sqrt{(30+6\sqrt{5})})}$
16	$22^o30'$	$157^o30'$	$R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$16R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$4R^2\sqrt{2-\sqrt{2}}$
20	18^o	162^o	$R\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$	$20R\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$	$\frac{5R^2}{2}\sqrt{6-2\sqrt{5}}$
24	15^o	165^o	$R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	$24R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	$6R^2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Jika diperhatikan atau dianalisis tampak bahwa $s_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - s_n^2}}$

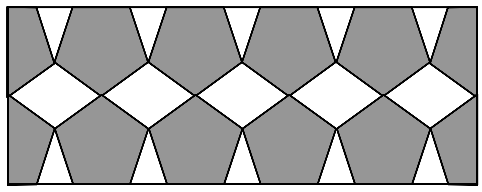
G. Poligon Sembarang

1. Keliling poligon sembarang, sesuai pengertian keliling, diperoleh antara lain dengan menjumlahkan semua panjng sisi-sisi atau pembatasnya.
2. Keliling poligon sembarang, dalam keadaan khusus dapat diperoleh melalui pemotongan bagian-bagian yang mengarah pada bentuk yang dikenali
3. Luas daerah sembarang poligon (selanjutnya disebut luas poligon) diperoleh dengan menjumlahkan luas semua potongan bagian yang bangun (dan rumus luasnya)dikenali.

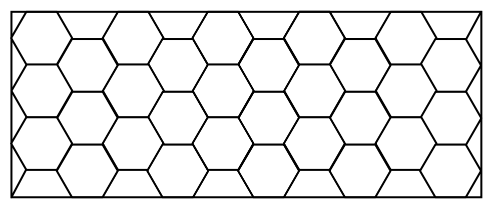
Latihan 6

1. Lukislah segi-n beraturan dengan n = ... (panjang sisi dapat dipilih)
   a. 6 b. 8 c. 5 d. 10
2. Tentukan keliling dan luas bangun-bangun berikut:
   a. Segi-6 beraturan dengan panjang jari-jari lingkaran luar 6 cm.
   b. Segi-6 beraturan dengan panjang sisi 6 cm.
   c. Segi-8 beraturan dengan panjang jari-jari lingkaran luar 8√2 cm.
   d. Segi-8 beraturan dengan panjang sisi 8 cm.

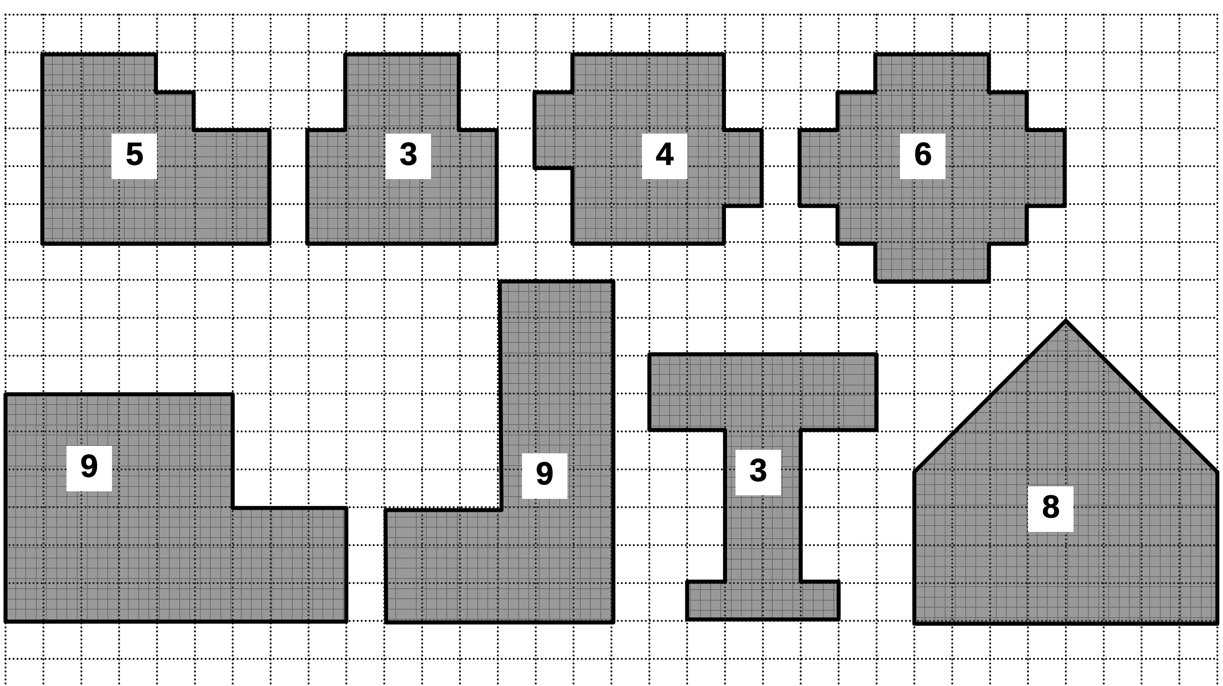
3. Sebuah lempeng aluminium direncanakan untuk membuat “emblim” suatu organisasi. Jika yang tersedia adalah lempeng berukuran 1 m × 1 m, berapa buah emblim dapat dibuat jika bentuk emblim
   a. segi-6 beraturan bersisi 3 cm   b. segilima beraturan bersisi 3 cm
4. Hiasan seperti pada gambar di bawah ini bagian yang diarsir merupakan bidang segi-5 beraturan dan empat buah “setengah bidang segi-5 beraturan”. Dari bidang hiasan tersebut, tentukan perbandingan luas bagian yang tidak diarsir dan yang diarsir.



5. Lukislah sebuah segilima beraturan. Kemudian gambarlah semua diagonalnya. Bentuk ”bintang” yang terjadi kita sebut segilima bintang beraturan. Berapakah perbandingan luas segilima bintang tersebut dengan segi-5 beraturan semula?
6. Buatlah potongan-potongan kertas yang terdiri dari poligon-poligon beraturan bersisi 3, 4, dan 6. Buatlah “pengubinan” menggunakan
   a. hanya segitiga-segitiga samasisi dan persegi (poligon bersisi-3 dan 4 beraturan).
   b. ketiga macam segibanyak beraturan yang tersedia di atas.
7. Setiap segienam beraturan yang terbentuk dari kawat seperti gambar di samping, panjang sisi-sisinya adalah 3 cm. Berapakah panjang seluruh kawat yang digunakan untuk membuat potongan ”pagar” tersebut?



8. Untuk setiap poligon (konkaf) yang tersedia, bagilah masing-masing menjadi bagian kongruen sebanyak yang dituliskan pada masing-masing gambar.

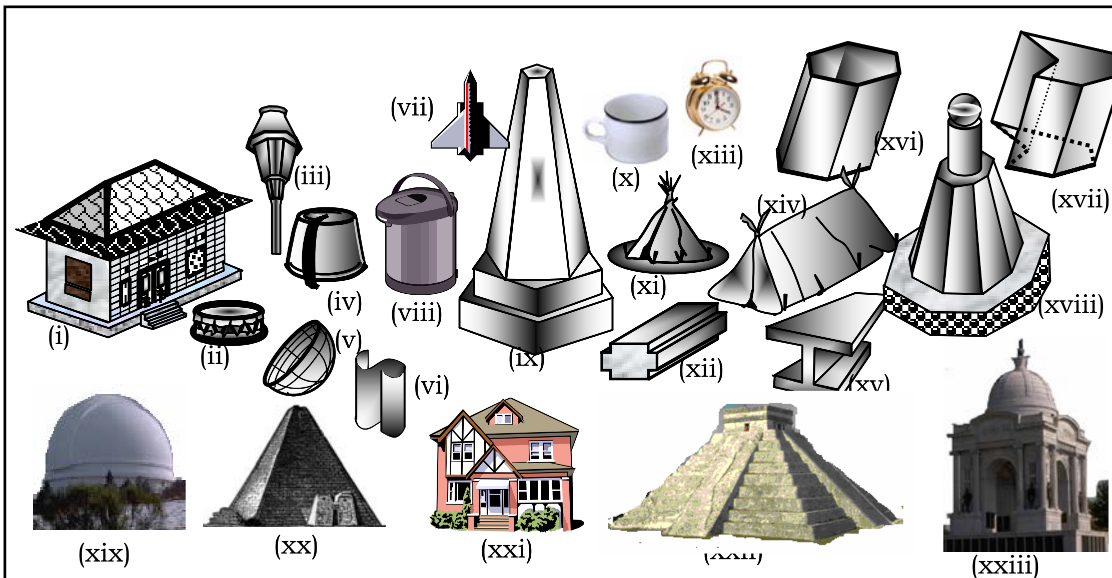


VII. GEOMETRI RUANG

(Oleh: Al. Krismanto, M.Sc.)

A. Bangun Ruang, Klasifikasi dan Unsur-unsurnya

Benda-benda yang dijumpai dalam kehidupan sehari-hari sering merupakan gabungan dari berbagai bangun datar dan bangun ruang yang dipelajari di sekolah.



Gambar 7.1

Kumpulan gambar pada Gambar 7.1 di atas merupakan contoh dari sebagian gambar benda-benda yang komponen dasarnya adalah bangun-bangun yang dikenal dan dijumpai di berbagai tempat. Jika kita ingin menentukan kebutuhan bahan yang digunakan untuk membuat benda-benda tersebut, maka diperlukan perhitungan bagian-bagian pembentuknya. Untuk mempermudah biasanya dilakukan penyederhanaan model sesuai keperluannya dengan **penyederhanan** dan **idealisasi**, yang menghasilkan bentuk yang "sempurna" misalnya ukuran dan sifatnya. Karena itu maka diperlukan pemahaman tentang bangun-bangun geometri yang mendasari terbentuknya benda-benda tersebut.

Geometri yang dipelajari di sekolah terdiri dari geometri datar atau geometri bidang (*plane geometry*) dan geometri ruang (*solid geometry*). Geometri bidang membahas bangun-bangun datar, yaitu bangun yang semua elemen pembentuk bangun tersebut terletak pada sebuah bidang datar. Geometri ruang membahas bangun-bangun berdimensi tiga: bangun-bangun ruang dan bangun-bangun datar atau bagian-bagian bidang lengkung pembentuk atau unsur bangun ruang tersebut. Bangun ruang adalah bangun yang semua elemen pembentuknya tidak seluruhnya terletak pada sebuah bidang datar atau lengkung. Bangun berdimensi tiga mungkin merupakan bangun tertutup, mungkin tidak tertutup (Gambar 7 (v), (vi)). Bangun ruang dapat berupa luasan dan bukan berupa luasan, misalnya spiral. Yang dibahas hanya yang berupa luasan saja.

Jika suatu bangun ruang tertutup dibatasi seluruhnya oleh segibanyak (*polygon*), maka bangun ruang itu disebut **bidang banyak** (*planar body* atau ***polyhedron;*** Yunani: *polys* = banyak; *hedron* = permukaan). Bahan pelatihan ini membahas bangun-bangun ruang sisi datar dan bangun ruang sisi lengkung tertentu yang yang selanjutnya disebut bangun ruang saja. Bidang banyak dibedakan menjadi bidang banyak konveks (*convex polyhedron*; misal gambar (xvi) pada Gambar 7) dan tidak konveks (*non-convex polyhedron*; misal gambar (xvii) pada Gambar 7). Bidang banyak disebut bidang banyak konveks hanya jika setiap irisan terhadap bidang banyak itu menghasilkan segi banyak konveks.

Poligon ataupun bidang lengkung yang membatasi polihedron disebut **bidang sisi** atau secara singkat **sisi** (permukaan). Segmen garis atau kurva yang merupakan perpotongan dua sisi disebut rusuk. Titik ujung rusuk merupakan titik-titik sudut bangun ruang tersebut. Titik sudut merupakan titik persekutuan tiga atau lebih rusuk bangun ruang.

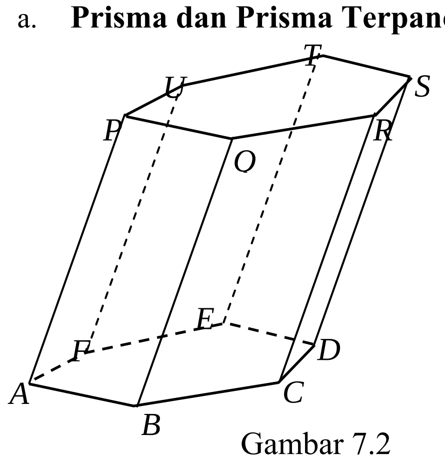
Latihan 1

1. Kumpulkan benda-benda yang tersedia di kelas dan di sekitar Anda, atau bayangkan benda-benda berdimensi tiga yang pernah Anda jumpai. Bersama dengan benda atau *bagian gambar benda* yang gambarnya ada ada Gambar 7, padankan atau berilah nama dengan bangun ruang yang pernah Anda kenal dalam geometri ruang.
2. Dari yang Anda peroleh pada butir 1 di atas, klasifikasikanlah bangun-bangun ruang tersebut.
3. Untuk setiap bidang banyak konveks yang Anda peroleh, hitunglah banyaknya rusuk, titik sudut, dan bidang sisinya masing-masing. Hubungan apa yang Anda peroleh?

Apakah hubungan serupa juga dapat Anda temukan pada semua bangun ruang sisi datar?

B. Bangun Ruang Bersisi Datar

a. Prisma dan Prisma Terpancung



Gambar 7.2

Prisma adalah bangun ruang yang dibatasi oleh dua daerah poligon kongruen yang terletak pada dua bidang sejajar, dan oleh bidang-bidang lain yang berpotongan menurut garis-garis sejajar. Dua poligon sejajar tersebut masing-masing adalah **bidang alas** dan **bidang atas**, sedangkan bidang-bidang sisi lainnya disebut (bidang) **sisi tegak**. Setiap sisi poligon bidang atas disebut **rusuk ata**s prisma, dan setiap sisi poligon bidang alas disebut **rusuk alas** prisma. Ruas-ruas garis potong sisi-sisi tegak disebut rusuk tegak. **Tinggi sebuah prisma** adalah jarak antara bidang atas dan alasnya.

Gambar 7.2 adalah gambar sebuah prisma segi-6 *ABCDEF.PQRSTU*. *A*lasnya adalah bidang segi-6 *ABCDEF*, bidang atasnya adalah bidang segi-6 *PQRSTU*.
Rusuk-rusuk tegaknya adalah $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$, $\overline{DS}$, $\overline{ET}$, dan. $\overline{FU}$
Semua bidang sisi tegaknya berbentuk jajargenjang (Mengapa?)

a. Prisma Miring dan Prisma Tegak

Ditinjau dari kedudukan rusuk tegaknya terhadap bidang alas dikenal prisma miring (condong) dan prisma tegak. Disebut prisma tegak jika rusuk tegaknya tegaklurus alas. Jika tidak dinyatakan secara khusus, yang dimaksud adalah prisma miring.

Ditinjau poligon alasnya, maka dikenal prisma segitiga, prisma segi-4, dan seterusnya. Gambar 7.2 adalah gambar prisma segi-6 miring. Semua bidang sisi tegak prisma tegak berbentuk persegi panjang. Mengapa?

Di SMP **hanya dibahas prisma tegak** sehingga jika tidak ada keterangan lain, yang dimaksud adalah prisma tegak.

b. Prisma Beraturan

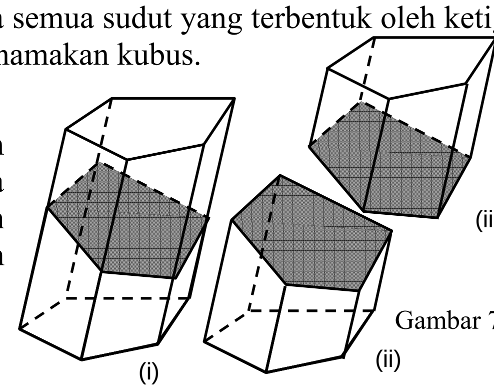
Prisma beraturan adalah prisma tegak yang bidang alasnya segi-*n* beraturan.

c. Paralelepipedum

Paralelepipedum adalah prisma yang alasnya berbentuk jajar genjang. Dengan demikian maka semua sisi paralelepipedum berbentuk jajar genjang. Jika rusuk tegaknya tegaklurus alas, disebut **paralel epipedum tegak**. Jika alas paralelepipedum tegak berbentuk persegipanjang, maka disebut **paralelepipedum siku-siku**, dan dikenal pula sebagai **balok**. Jika paralelepipedum siku-siku tesebut semua bidang sisinya kongruen, maka disebut **kubus**. Paralelepipedum yang semua rusuknya sama panjang disebut **rhomboeder**.Jika semua sudut yang terbentuk oleh ketiga rusuk utamanya siku-siku, maka rhomboeder tersebut dinamakan kubus.

d. Prisma Terpancung

Jika sebuah prisma (Gb.7.3 (i)) dipotong oleh sebuah bidang datar yang tidak sejajar bidang alas/atas prisma pada semua rusuk tegak-*n*ya, maka terjadi dua bangun ruang. Kedua bangun ruang masing-masing dinamakan prisma terpancung. (lihat Gb.7.3 (ii) dan (iii))

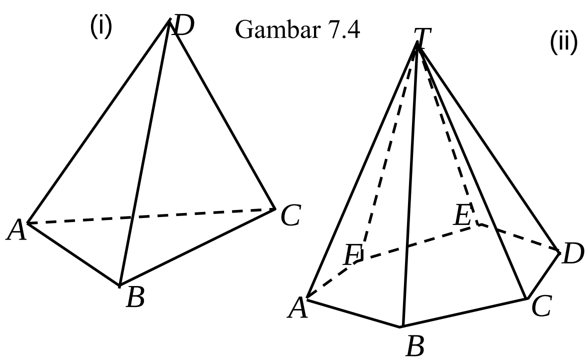


Gambar 7.3

b. Limas dan Limas Terpancung

Jika bangun datar *b* adalah sebuah segibanyak yang terletak pada sebuah bidang datar α dan *T* adalah sebuah titik di luar bidang α, maka bangun ruang yang dibatasi oleh daerah bangun datar *b* dan semua daerah-daerah segitiga berpuncak di *T* beralas sisi bangun ruang *b* dinamakan limas.

Jika segibanyaknya adalah segi-*n* maka limasnya dinamakan limas segi-*n* atau limas sisi-*n*. Daerah segibanyak tersebut disebut alas limas. Sisi-sisi segi-*n* alas lmas disebut rusuk alas limas. Titik persekutuan puncak-puncak segitiga disebut puncak limas. Bidang-bidang segitiga berpuncak di puncak limas disebut bidang-bidang sisi tegak atau secara singkat sisi tegak limas. Ruas-ruas garis potong antara bidang-bidang sisi tegak disebut rusuk tegak limas.s



Gambar 7.4

Gambar 7.4(i) adalah gambar limas segi-3 *D.ABC*, berpuncak di titik *D*. Bidang segitiga *ABC* adalah alas limas. Rusuk alasnya $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ dan $\overline{BC}$. Rusuk tegaknya $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, dan $\overline{DC}$.

Gambar 7.4 (ii) adalah gambar limas segi-6 *T.ABCDEF*, berpuncak di titik *T*. Bidang segi enam *ABCDEF* adalah alas limas. Rusuk alasnya $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ dan $\overline{FA}$. Rusuk tegaknya $\overline{TA}$, $\overline{TB}$, $\overline{TC}$, $\overline{TD}$, $\overline{TE}$, dan. $\overline{TF}$

Limas segitiga disebut juga bidang empat. Setiap titik sudut dapat dipandang sebagai puncak bidang empat, dan setiap bidang sisi dapat dipandang sebagai alas yang berhadapan dengan puncaknya.

a. Garis Tinggi

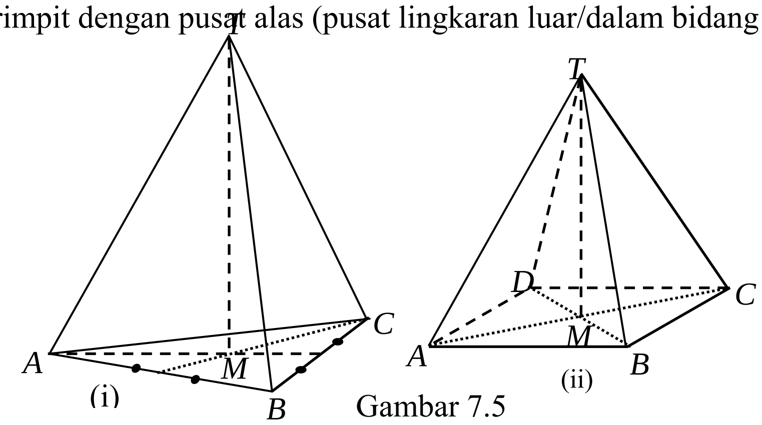
Garis tinggi sebuah limas adalah sebuah ruas garis yang ditarik dari puncak limas ke titik kaki garis tegaklurus dari puncak ke alas. Ukuran panjangnya dinamakan *tinggi* limas.

b. Apotema

Setiap ruas garis yang terletak pada sisi tegak yang ditarik dari puncak limas sampai ke rusuk alas disebut apotema.

c. Limas Beraturan

Limas beraturan adalah limas yang alasnya segi-*n* beraturan dan titik kaki garis tingginya berimpit dengan pusat alas (pusat lingkaran luar/dalam bidang alas).

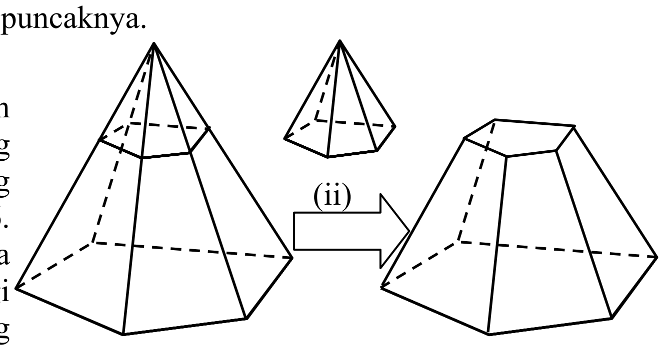


Gambar 7.5

Gambar 7.5(i) adalah gambar limas segitiga beraturan. *A*lasnya, ΔABC adalah segitiga samasisi. Gambar 7.5(ii) adalah gambar limas segi-4 beraturan. *A*lasnya, *ABCD* adalah sebuah persegi. Pada kedua Gambar, $\overline{TM}$ merupakan garis tinggi limas. Untuk bidang empat, disebut beraturan jika semua rusuk sama panjang. Dapat dibuktikan bahwa semua ruas garis dari setiap titik sudut ke titik kaki garis tegak lurus sisi di hadapannya sama panjang, dan merupakan tinggi bidang empat beraturan tersebut, dimana pun puncaknya.

d. Limas Terpancung

Jika sebuah limas dipotong oleh sebuah bidang sejajar alas maka bangun ruang yang terjadi di antara alas dan bidang potong tersebut dinamakan limas terpancung (Gb.7.6.(iii)). Daerah bangun datar potongan-nya menjadi bidang atas limas terpancung. Tinggi limas terpancung adalah jarak antara bidang atas dan alasnya.



(i) Gambar 7.6 (iii)

c. **Bidang Banyak Beraturan**

Yang dimaksud dengan bidang banyak beraturan adalah bangun ruang yang dibatasi oleh sejumlah bidang poligon beraturan kongruen dan berpotongan rusuk sama banyak pada setiap titik sudutnya. Karena pada setiap titik sudut bertemu paling tidak 3 rusuk, maka sudut poligon pembentuknya haruslah kurang dari 120^o. (Mengapa?) Berarti poligon pembentuk yang mungkin hanya segitiga sama sisi (3, 4, atau 5 segitiga sama sisi setiap titik sudut), tiga persegi per titik sudut, atau tiga segi lima beraturan setiap titik sudut Dengan demikian hanya ada lima bidang banyak beraturan, yang dikenal sebagai *Platonic,* yaitu (Gb.7.7):

a. bidang empat beraturan (*tetrahedron*), dibatasi oleh empat daerah/bidang segitiga kongruen. Pada setiap titik sudut terdapat 3 bidang segitiga samasisi, dan 3 rusuk (Gb.7.7 (i.a)):

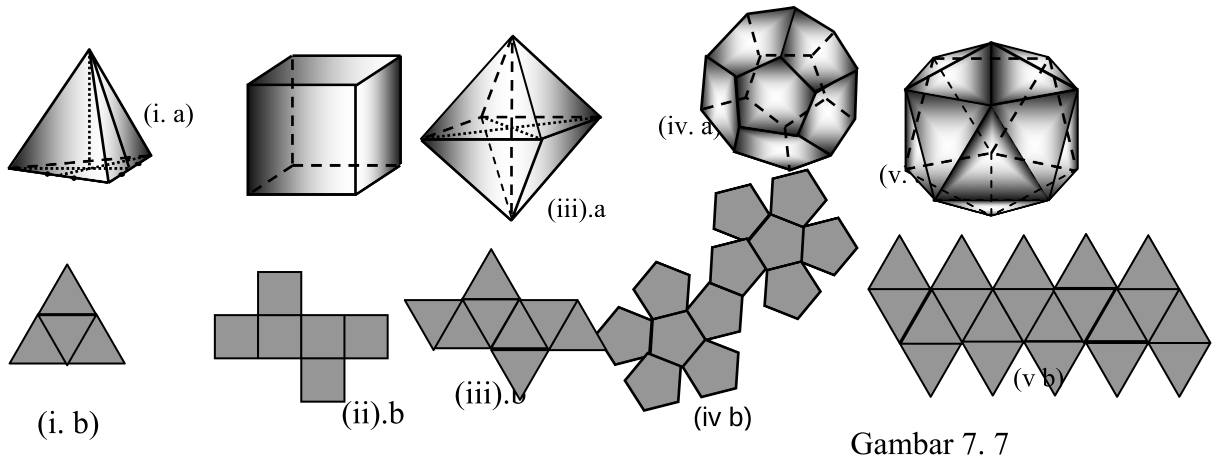
b. bidang enam beraturan, lebih diikenal sebagai kubus (*heksahedron*), dibatasi oleh 6 daerah/bidang persegi kongruen. Pada setiap titik sudut terdapat 3 bidang persegi, dan 3 rusuk (Gb.7.7 (ii.a).

c. bidang delapan beraturan (*octahedron*), dibatasi oleh 8 bidang segitiga kongruen. Pada setiap titik sudut terdapat empat bidang segitiga sama sisi, dan 4 rusuk (Gb.7.7 (iii.a)).

d. bidang duabelas beraturan (*icosahedron*), dibatasi oleh 8 bidang segitiga kongruen. Pada setiap titik sudut terdapat tiga bidang segi lima beraturan dan 3 rusuk (Gb.7.7 (iv.a)).

e. bidang duapuluh beraturan (*dodecahedron*), dibatasi oleh 20 bidang segitiga kongruen.. Pada setiap titik sudut terdapat lima bidang segitiga sama sisi, dan 5 rusuk (Gb.7.7 (v.a)).

f.

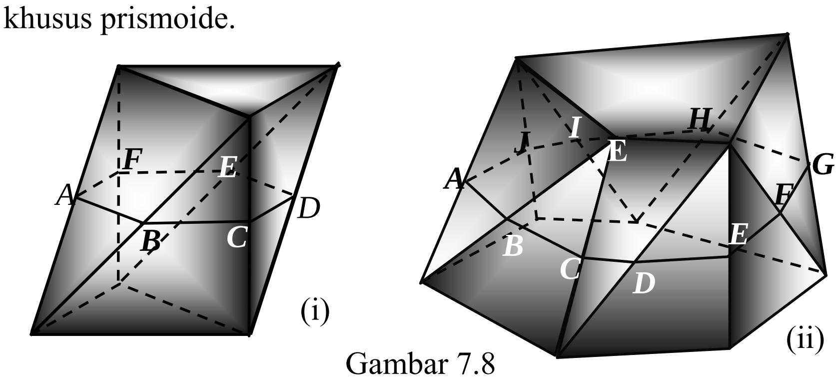


Gambar 7. 7

Semua gambarpada Gb.7.7 bernomor “b” adalah bentuk jaring-jaring bangun ruang tersebut pada nomor a.

d. **Prismoide**

Prismoide adalah bangun ruang bersisi datar yang dibatasi oleh dua bidang sejajar (sebagai bidang atas dan alas) dan bidang-bidang segitiga atau bidang trapesium sebagai bidang sisi tegak. (saling berpotongan pada “rusuk tegak”) Prisma dan limas terpancung merupakan bangun khusus prismoide.



Gambar 7.8

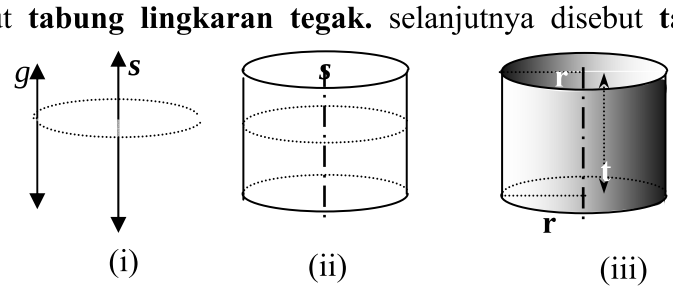
Gambar 7.8 adalah gambar prismoide. Pada Gambar 7.8 (i) *ABCDEF* dan pada Gambar 7.8 (ii) *ABCDEFGHIJ* masing-masing disebut irisan tengah prismoide tersebut, yaitu irisan sejajar bidang atas/alas yang melalui semua titik tengah rusuk tegak prismoide.

C. Bangun Ruang Bersisi Lengkung

Bangun ruang bersisi lengkung yang dibahas berikut ini dibatasi pada bidang lengkung yang khusus.

a. **Tabung**

Diketahui garis *g* // *s*. Garis *g* diputar mengelilingi garis *s* sebagai **sumbu** putar. Tempat kedudukan *s* adalah sebuah bidang lengkung yang disebut **bidang tabung** atau **selimut tabung** (Gb.7.9 (ii)). Garis *s* disebut **sumbu tabung** dan *g* disebut **garis pelukis** bidang tabung. Jika bidang tabung tersebut dipotong oleh dua bidang sejajar dan keduanya tegak lurus sumbu tabung, maka diperoleh bangun ruang yang dibatasi oleh bidang tabung dan kedua bidang lingkaran, yang disebut **tabung lingkaran tegak.** selanjutnya disebut **tabung** atau **silinder** saja.(Gb.1.9 (iii))**.**

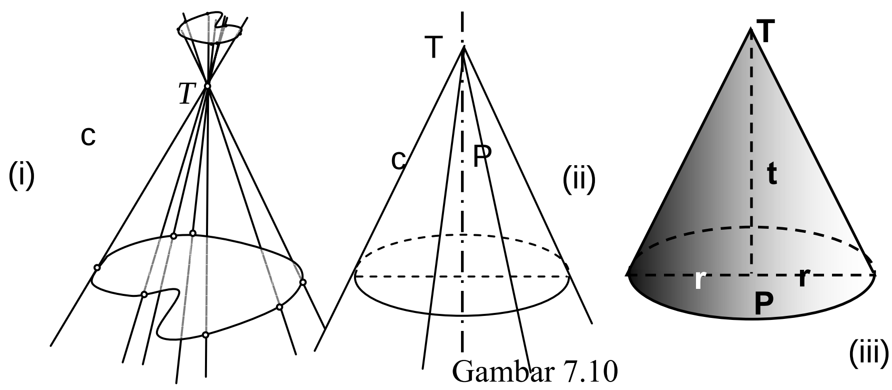


Gambar 7.9

Untuk selanjutnya, kecuali disebutkan lain, yang dimaksud yang dimaksud tabung adalah **tabung lingkaran tegak**. Bidang-bidang lingkaran pembatasnya disebut **bidang atas** dan **bidang alas** tabung, yang jari-jarinya disebut juga sebagai **jari-jari tabung.** Jarak antara bidang atas dan alas disebut **tinggi tabung.**

b. **Kerucut**

Diketahui kurva tertutup c terletak pada sebuah bidang, dan sebu-ah titik *T* berada di luar bidang tersebut. Jika dibuat garis-garis yang melalui *T* dan semua titik pada kurva tersebut, maka diperoleh bidang lengkung yang disebut **bidang kerucut,** yang dikenal dengan kerucut berdaun ganda (terletak sebelah-menyebelah terhadap titik *T.* Jika garis c adalah sebuah lingkaran dan proyeksi titik *T* berimpit dengan pusat lingkarannya (titik P), maka diperoleh **bidang kerucut lingkaran tegak,** dan selanjutnya hanya dibahas yang berdaun tunggal. Garis TP disebut **sumbu kerucut.**



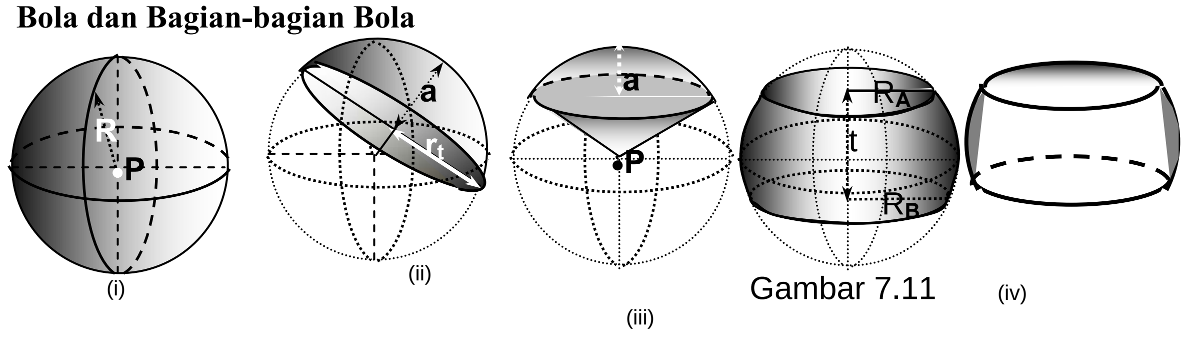
Gambar 7.10

Untuk bahasan ini hanya akan ditinjau kerucut berdaun tunggal saja. Jika dibuat sebuah bidang yang memotong bidang kerucut seca-ra tegak lurus TP, maka diperoleh sebuah bangun ruang yang dibatasi oleh sebuah bidang kerucut lingkaran tegak dan sebuah bidang lingkaran yang tegaklurus sumbu kerucut. Bangun ruang ini disebut **kerucut lingkaran tegak.** Jika tidak disebutkan lain, maka pada bahasan ini yang **kerucut** adalah kerucut lingkaran tegak. (Gambar 7.10. (iii))**.**

Titik P disebut **puncak** kerucut, TP disebut **garis tinggi kerucut,** dan ukuran panjangnya disebut **tinggi kerucut.** Bidang lingkarannya disebut **alas** kerucut. Jari-jari lingkaran alasnya disebut sebagai **jari-jari kerucut.** Setiap ruas garis pada bidang kerucut yang menghu-bungkan puncak dan titik pada lingkaran alas disebut **apotema.** Sudut yang terbentuk oleh sumbu dan setiap apotema disebut **setengah sudut puncak.** Jika kerucut diiris oleh sebuah bidang yang melalui sumbu kerucut (disebut irisan meredian), maka diperoleh sebuah segitiga beralas diameter alas kerucut dan kaki sudutnya dua apotema. Sudut puncak segitiga merupakan **sudut puncak** kerucut tersebut..

Jika kerucut dipotong bidang sejajar alas, bangun ruang antara alas dan pengirisnya disebut kerucut terpancung,

c. **Bola dan Bagian-bagian Bola**



Gambar 7.11

Bola adalah tempat kedudukan titik-titik dalam ruang yang berjarak sama terhadap titik tertentu. Titik tertentu tersebut disebut pusat bola, dan jarak tertentu tersebut disebut panjang jari-jari bola. Semua ruas garis penghubung dua titik pada bola yang melalui pusat disebut diameter (garis tengah).

Gambar 1.11 (i) adalah gambar sebuah bola berpusat di titik P, dengan panjang jari-jari *R*. Jika bola tersebut dipotong oleh sebuah bidang datar, maka terjadi dua bagian bola, masing-masing disebut **tembereng bola** (Gb.7.11(ii)), yang terbentuk oleh bagian bola dan sebuah daerah lingkaran. Ruas garis dari titik pusat lingkaran ini sampai ke titik pada bola disebut anak panah, yang didefinisikan sebagai tinggi tembereng (***segmen***) bola tersebut. Tembereng bola yang bagian datarnya merupakan daerah lingkaran yang sepusat pusat bola (lingkaran terbesar), atau tembereng yang tingginya sama dengan panjang jari-jari bola, dinamakan **setengah bola.**

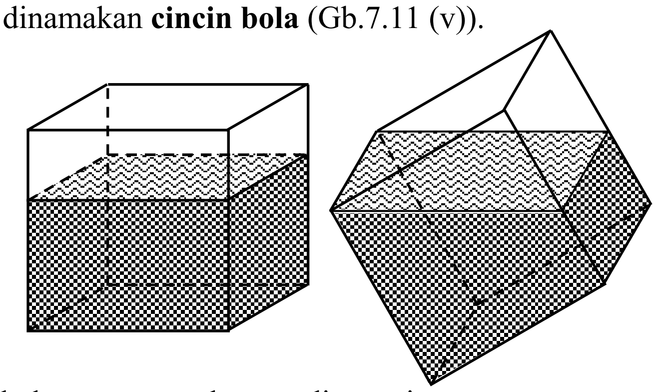
Gambar 7.11 (iii) adalah gambar **juring (juring) bola**, yang dapat dipandang sebagai gabungan sebuah tembereng bola dan sebuah kerucut beralas lingkaran alas tembereng. Tinggi tembereng mengindikasikan tinggi juring tersebut. Setengah bola juga dapat dipandang sebagai juring bola yang tingginya sama dengan panjang jari-jari bola.

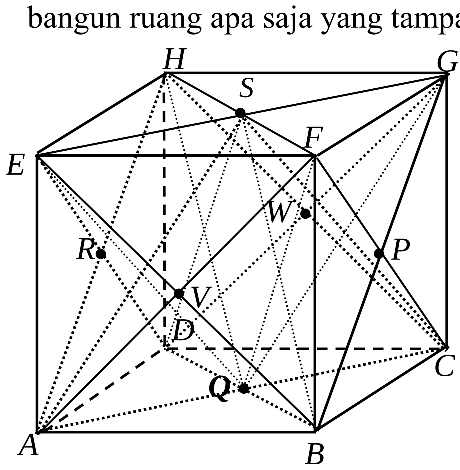
Jika sebuah bola dipotong oleh dua bidang sejajar, maka bangun di antara kedua bidang sejajar disebut **keratan bola** (Gb.7.11 (iv)). Bidang lingkarannya masing-masing dinamakan bidang atas dan bidang alas keratan bola tersebut.

Jika bagian dalam dari keratan bola yang berupa kerucut terpancung atau tabung dihilangkan, maka tinggallah bagian bola yang dinamakan **cincin bola** (Gb.7.11 (v)).

Latihan 2

1. Sebuah bak berbentuk kubus berisi cairan, tidak penuh. Bak itu digulingkan berporos pada salah satu rusuk alasnya, sehingga cairan di dalamnya hampir tumpah.
   Dari keadaan awal dan akhir tersebut, bangun ruang apa saja yang tampak?



2. 

   Dari kubus yang gambarnya di samping:
   a. Apa nama bangun S.*ABCD*? Berikan alasan. Sebutkan bangun lain seperti S.*ABCD* dalam kubus tersebut! Jika perlu, *A*nda dapat menambah nama titik atau ruas garis yang dianggap perlu
   b. Sebutkan nama bangun bidang empat beraturan dalam kubus tersebut.
   c. Apa nama bangun *BDC.EFH*? Sebutkan beberapa bangun lain yang kongruen dengan bangun tersebut!
   d. Adakah nama khusus bangun *ABDC.EFH*? Sebutkan beberapa bangun lain yang kongruen dengan bangun tersebut!
3. Gambarlah skema pembagian jenis prisma ditinjau dari kedudukan rusuk tegaknya maupun dari jenis segibanyak alasnya..
4. Gambarlah skema perubahan dari prisma, melalui paralelepipedum sampai dengan kubus.
5. Lukislah masing-masing sebuah bangun berikut dengan ukuran sesuai pilihan Anda, agar dengan gambar tersebut akan mempermudah dalam melakukan perhitungan dalam benda tersebut.:
   a. kubus *ABCD.EFGH* dengan salah satu bidang sisi frontal (pada/sejajar bidang gambar)
   b. prisma segienam beraturan

c. limas segiempat beraturan dengan salah satu bidang diagonal frontal
d. limas segiempat beraturan dengan bidang frontal yaitu bidang yang melalui dua titik tengah rusuk alas berhadapan.
e. limas segitiga beraturan
f. bidang empat beraturan.

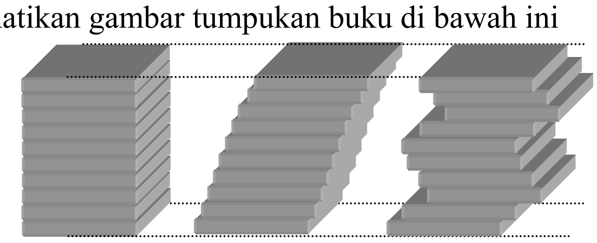
6. Dimanakah letak pusat bola yang:
   a. melalui semua titik sudut sebuah kubus?
   b. melalui semua titik sudut sebuah balok?
7. Sebuah bola berada di dalam sebuah tabung, sehingga menyinggung semua sisi tabung (disebut bola dalam). Apa syaratnya agar hal tersebut dapat terjadi?
8. Sebuah bola berada di dalam sebuah kerucut, sehingga menyinggung semua sisi kerucut (disebut bola dalam). Apa syaratnya agar hal tersebut dapat terjadi?

D. Volum dan Luas Bangun Ruang

Pengantar

Sebelum membahas volum dan luas bangun ruang, terlebih dulu akan dibahas sebuah prinsip yang akan digunakan pada bangian tertentu untuk menunjang bahasan ini, yaitu **Prinsip Cavalieri**.

Perhatikan gambar tumpukan buku di bawah ini



(i) (ii) (iii)

Gambar 7.12

Gambar 7.12.(i) menggambarkan sebuah prisma tegak. Jika dilakukan "gusuran" terjadilah Gambar 7.12 (ii), yang menggambarkan sebuah prisma miring. Luas alas dan tinggi kedua prisma sama. Gambar 7.12 (iii) tumpukannya "tak teratur", namun bagian demi bagian pada ketinggian yang sama, luas bagian-bagian potongan tersebut sama. Ketiganya menggambarkan situasi berbeda dengan ada beberapa hal yang sama. Utamanya, yang sama adalah volum ketiga "benda" tersebut, dan kesamaan itu terjadi karena ketiganya mempunyai ketinggian sama, dan pada setiap bagian ketinggian yang sama luas bagiannya pun sama.

Prinsip Cavalieri:

Jika dua benda tingginya sama dan semua bidang irisan mendatar pada ketinggian yang sama luasnya sama, maka kedua benda tersebut mempunnyai volum yang sama

Prinsip itu berlaku untuk semua bangun ruang, tidak terbatas pada mpodel prisma seperti digambarkan di atas.

1. Kubus

Telah dibahas di SMP: Sebuah kubus yang panjang rusuknya 1 satuan panjang luas permukaannya 66 satuan luas dan volumnya 1 satuan volum

Sebuah kubus yang panjang rusuknya *p* satuan panjang:

- luas sebuah bidang sisinya p^2
- luas permukaannya 6 × luas setiap bidang sisi = $6p^2$ satuan luas
- volumnya $p \times p \times p$ satuan volum = p^3 satuan volum

2. Balok

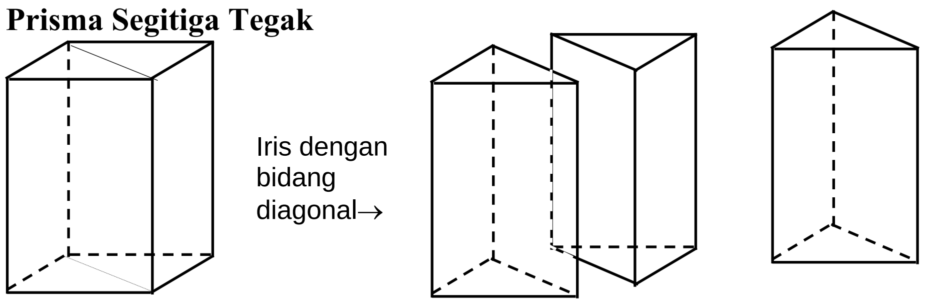
Telah dibahas di SMP: Jika panjang ruruk-rusuk balok p, ℓ dan t satuan maka

Volum: $V \rightarrow V = P \times \ell \times t$

Luas alas balok: $\boldsymbol{A = P \times \ell \rightarrow V = A}$

Luas permukaan: $\boldsymbol{L_p} \rightarrow \boldsymbol{L_p} = 2(p\,\ell + pt + \ell\,t)$

3. Prisma Segitiga Tegak



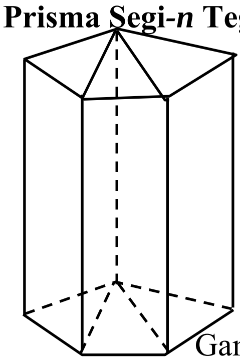
Gambar 7.13

$V = p\,\ell\,t$ ——→ Setiap prisma segitiga tegak↑

$V = \frac{1}{2} p\,\ell\,t$, dengan $\frac{1}{2} p\,\ell$. adalah luas alas prisma segfitiga tegak

Jika luas setiap segitiga (alas prisma segitiga tegak) adalah A
maka volum setiap prisma segitiga tegak $\boldsymbol{V = At}$

4. Prisma Segi-*n* Tegak



Prisma segi-n tegak diiris dengan semua bidang diagonal yang melalui salah satu rusuk tertentu. Terjadi n – 2 buah prisma segitiga tegak (Gb. 7.14)

$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_{n-2}$, dengan $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_{n-2}$ adalah volum masing-masing limas segitiga tegak.

$= A_1t + A_2t + A_3t + \ldots + A_{n-2}t$, dengan $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-2}$ adalah luas alas masing-masing limas segitiga tegak.

Gambar 7.14

$= (A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-2})t$

$= At$, dengan A = luas alas prisma tegak segi-n tersebut

Jadi prisma tegak segi-n dengan luas alas A dan panjang rusuk tegak t, volumnya = $V = At$.

Jika panjang rusuk apas berturut-turut $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$, maka:

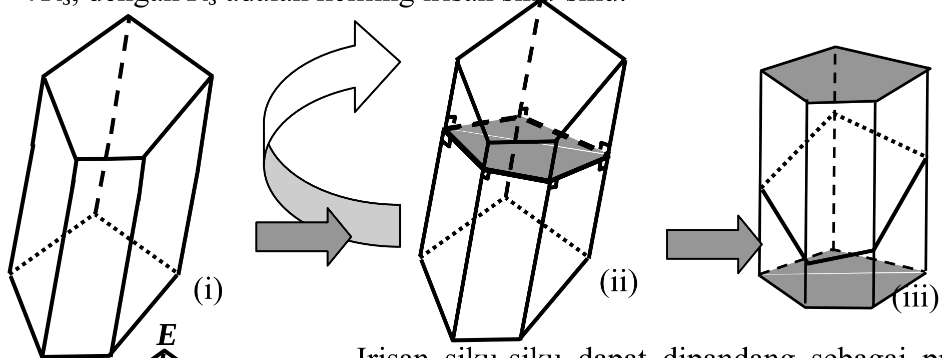
Luas selimut prisma tegak adalah $L_S = k_1t + k_2t + k_3t + \ldots, k_nt$
$= (k_1 + k_2 + k_3 + \ldots, k_n)t$
$=$ kt, dengan k adalah keliling alas

Jika luas alasnya A, maka luas permukaan prisma tegak, namakan L: $= 2A + kt$

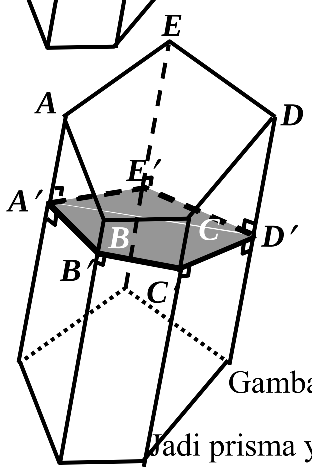
5. Prisma Miring

Sebuah prisma miring (Gb. 7.15 (i)) dipotong oleh sebuah irisan siku-siku, yaitu irisan yang tegak lurus rusuk tegak. (Gb. 7.15 (ii)). Jika prisma bagian bawah irisan dipindahkan dan ditempatkan tepat di atas bagian atas irisan, terjadilah bangun ruang baru (Gb. 7.15 (iii)). Panjang rusuk tegaknya tidak berubah. Yang semula irisan siku-siku menjadi bidang atas dan alas, dan rusuk tegaknya tegak lurus bidang-bidang ini. Jadi yang terjadi adalah sebuah prisma tegak. dengan alas adalah irisan siku-siku dan tingginya sama dengan panjang rusuk tegak prisma semula. Jadi volum prisma dapat diperoleh sebagai hasil kali luas irisan siku-siku dengan panjang rusuk tegaknya.

Luas bidang sisi tegak prisma (selimut prisma) adalah jumlah semua luas jajar genjang sisi tegaknya. Setiap jajar genjang tersebut luasnya sama dengan hasil kali panjang rusuk tegak dengan jarak antara rusuk tegak sebidang sisi, yang tidak lain adalah panjang ruas garis potong sisi tegak dengan bidang irisan siku-siku. Jika panjangnya berturut-turut p_1, p_2, p_3, … dan panjang rusuk tegaknya adalah r, maka jumlah luasnya adalah $rp_1 + rp_2 + rp_3 \ldots = r(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots) = rK_s$, dengan K_s adalah keliling irisan siku-siku.



Gambar 7.15



Irisan siku-siku dapat dipandang sebagai proyeksi bidang atas prisma pada irisan siku-siku tersebut. Jika luas alas prisma adalah *A,* dan sudut antara bidang atas dan irisan siku-siku adalah α, maka luas irisan siku-siku tersebut adalah $L_s = A \cos \alpha$, sedangkan jarak antara bidang atas dan alas $t = r \cos \alpha$

Volum prisma: $V = L_s \times r$

$$= L_s \times r \text{ ; karena } t = r \cos \alpha \Leftrightarrow r = \frac{t}{\cos\alpha} \text{ dan } L_s = A \cos \alpha$$

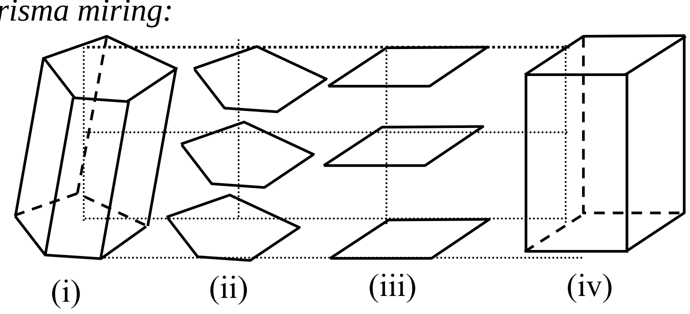
Gambar 2.5

$$\text{maka } V = A \cos \alpha \times \frac{t}{\cos\alpha} = A.t$$

Jadi prisma yang luas alasnya *A* dan tingginya t, volumnya: $\boldsymbol{V = At}$.

Cara lain memperoleh rumus Volum prisma miring:

Gambar 7.17 (i) adalah sebuah prisma miring, tingginya *t* satuan. Gb. 7.17(iv) adalah prisma siku-siku (balok) yang tingginya juga *t* satuan. Gb. 7.17(ii) adalah sebagian hasil irisan jika prisma Gb. 7.17(i) dipotong bidang sejajar alas, sedangkan Gb. 7.17(iii) adalah hasil irisan jika prisma Gb. 7.17(iv) dipotong bidang sejajar alas.



Gambar 7.17

Luas setiap irisan pada Gb. 7.17(ii) sama dengan luas setiap irisan pada Gb. 7.17(iii). Dengan kata lain, luas alas kedua prisma sama, misalkan *A*.

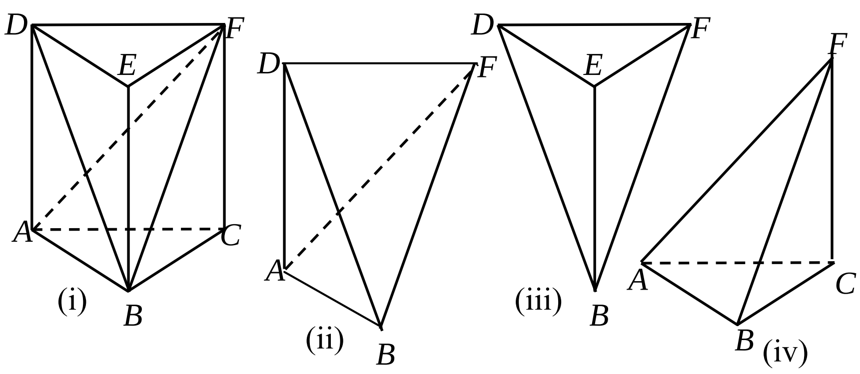
Maka menurut prinsip Cavalieri, volum prisma pada Gb. 7.17(i) = volum prisma pada Gb. 7.17(iv). Jika volumnya = *V*, maka $\boldsymbol{V = At}$.

6. Limas

Misalkan luas alas sebuah limas adalah *A* dan tingginya *t* satuan. Limas itu dipotong bidang sejajar alas. Misal luas irisannya adalah *A′* dan tinggi limas sisanya adalah t′ satuan. Jika panjang sebuah rusuk alas limas semula r, maka pada limas yang terpotong panjangnya adalah s′. Dengan demikian maka untuk setiap *s* dan s′ berlaku s′ : *s* = t′ : t. Karena luas bangun datar berbanding lurus dengan kuadrat panjang sisi-sisi bangun, maka $A' : A = (s')^2 : s^2 = (t')^2 : t^2$. Karena itu maka untuk setiap irisan sejauh t′ dari puncak sejajar alas limas, yang luas alasnya *A* satuan, luas irisan sejajarnya: $A' = \frac{(t')^2}{t^2}A$. Karena hal ini berlaku untuk setiap limas segi-*n* berapa pun n-*n*ya, maka sesuai prinsip Cavalieri dapat dinyatakan bahwa:

Setiap limas yang luas alas dan tingginya sama volum*nya sama pula.*

a. Volum limas



Gambar 7.18

Pada Gb 2.7 (i) *ABC.DEF* adalah sebuah prisma segitiga, yang oleh bidang *AF*E dan *B*D*F* terbagi menjadi tiga buah limas segitiga seperti terlihat pada Gb 2.17 (ii), (iii), dan (iv). Namakan luas Gb. 7.18 (ii), (iii), dan (iv) berturut-turut $V_{(ii)}$,$V_{(iii)}$ dan $V_{(iv)}$

$V_{F.ABD} = V_{F.BDE}$ (karena ΔABD dan ΔBDE kongruen dan sebidang) $\rightarrow V_{(ii)} = V_{(iii)}$

$V_{F.ABD} = V_{B.DEF} = V_{F.ABC}$ (karena ΔDEF dan ΔABC kongruen, tinggi keduanya sama = jarak bidang atas dan alas prisma) $\rightarrow V_{(iii)} = V_{(iv)}$

Jadi $V_{(ii)} = V_{(iii)} = V_{(iv)}$. *B*erarti volum ketiga limas sama. Dengan kata lain, volum setiap limas adalah sepertiga volum prisma, yang luas alas dan tingginya sama. $\rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{V_{\text{limas}} = \frac{1}{3} At}}$ (*A* = luas alas dan *t* tinggi limas)

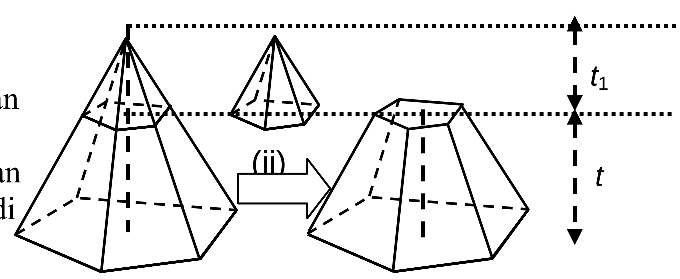
Generalisasi itu dimungkinkan, karena tanpa memandang bentuk alas, asal luas alas dan tingginya sama, volum limas adalah sama.

b. Luas permukaan limas

Luas permukaan limas adalah jumlah semua bidang sisi limas. Untuk limas segi-*n* beraturan, jika luas alasnya *A,* keliling alasnya k dan panjang apotemanya *p,*luas seluruh permukaan: $\boldsymbol{L = A + \frac{1}{2}kp}$

7. Limas Terpancung

Untuk menentukan luas permukaan dan volum limas terpancung, perhatikan kembali Gambar 7.4 yang telah telah dilengkapi dengan ukuran-ukuran termsuk dari limas "asalnya" di bawah ini (Gambar 7.19).



Gambar 7.19

8. Tabung

Bandingkan sebuah tabung dan sebuah prisma yang luas alasnya sama, misal *A* dan tingginya juga sama, misal t. Karena keteraturaan bentuk keduanya, maka jika dipotong oleh bidang sejajar alas, bagian-bagian potongannya semuanya kongruen dengan alasnya masing-masing, sehingga luas setiap irisan yang terjadi juga sama dengan luas alas keduanya, yaitu *A*. Sesuai prinsip Cavalieri, maka volum tabung tersebut sama dengan volum prisma, yaitu $V = At$.

Karena luas alas tabung $A = \pi R^2$, R = panjang jari-jari alas tabung, maka untuk setiap tabung berlaku: $_{tabung} = \pi R^2 t$

Untuk memperoleh luas seluruh permukaan tabung, maka tabung tersebut dibuka untuk diamati jaring-jaringnya. Bidang atas dan alasnya adalah dua daerah lingkaran berjari-jari R, sehingga luas keduanya = $A + A = \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi R^2$. Bidang selimutnya terbuka menjadi sebuah persegipanjang. Jika tinggi tabung t, maka ukuran persegipanjang tersebut adalah dengan ukuran $t \times 2\pi R$ (panjangnya sesuai keliling lingkaran alas). Jadi luas selimutnya adalah $2\pi R$t.

Luas permukaan tabung = $L_{\text{tabung}} = 2\pi R^2 + 2\pi Rt$

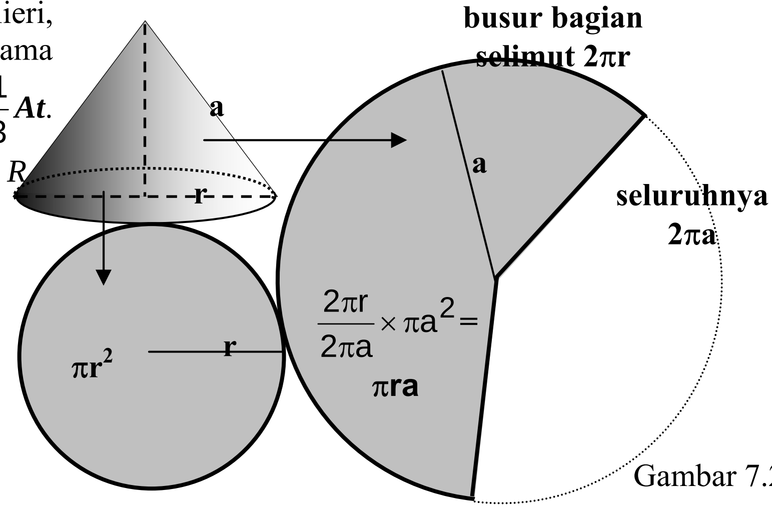
$_{tabung} = 2\pi R(R + t)$

9. Kerucut

Bandingkan sebuah kerucut dengan sebuah limas beraturan yang luas alasnya sama, misal A dan tingginya juga sama, misal t. Karena keteraturaan bentuk keduanya, maka jika dipotong oleh bidang sejajar alas, bagian-bagian potongannya semuanya sebangun dengan alasnya masing-masing, sehingga luas setiap irisan yang terjadi pada kerucut sama dengan luas irisan yang terjadi pada limas.

Sesuai prinsip Cavalieri, maka volum kerucut tersebut sama dengan volum limas, yaitu $\boldsymbol{V = \frac{1}{3}At}$.

Karena luas alas kerucut $A = \pi R^2$, R panjang jari-jari alas kerucut.

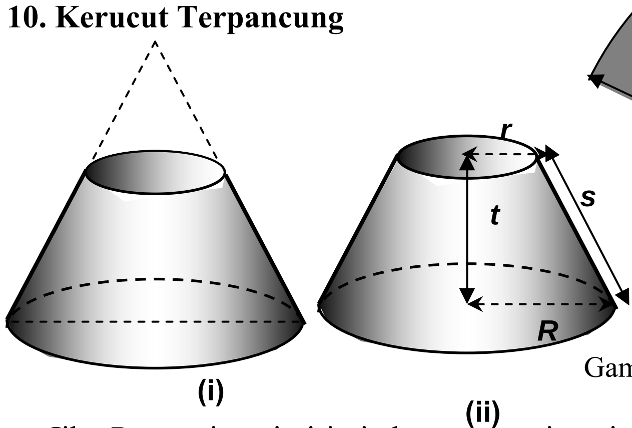


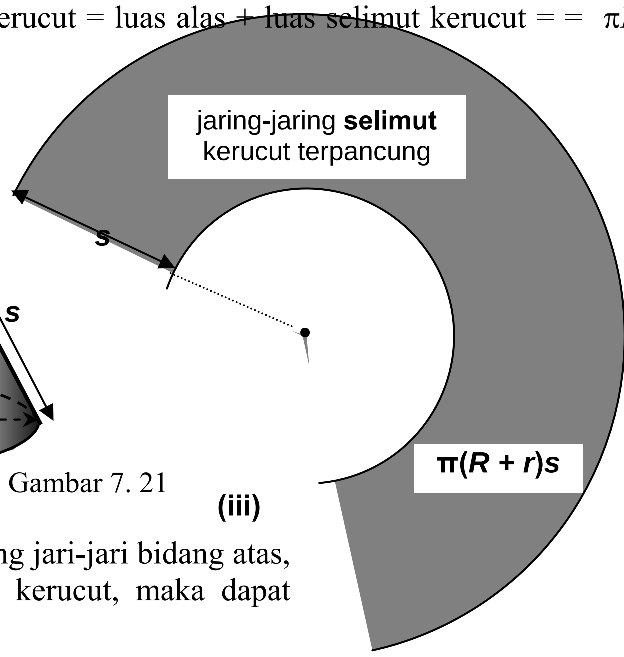
Gambar 7.20

Luas kerucut dapat diperoleh dengan membukanya untuk mendapatkan jaring-jaring kerucut tersebut (Gambar 7.20) Luas kerucut = luas alas + luas selimut kerucut = = $\pi R^2 + \pi R$t = $\pi R(R + $t)

Jadi $_{kerucut} = \pi R(R + t)$.

10. Kerucut Terpancung





Gambar 7. 21

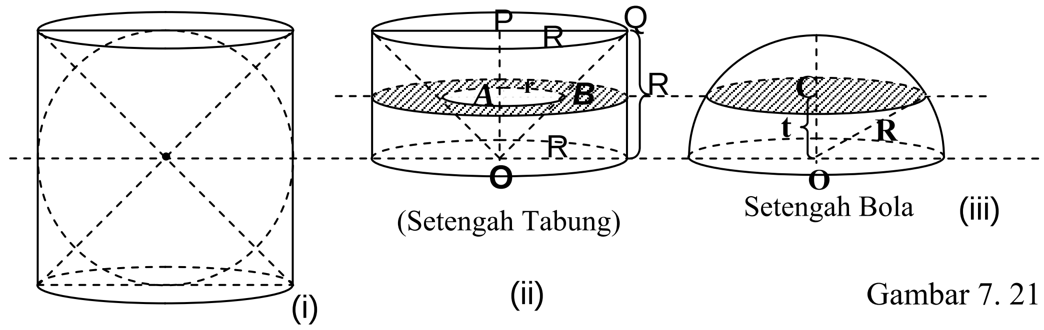
Jika R = panjang jari-jari alas, r = panjang jari-jari bidang atas, s = panjang apotema, dan t = tinggi kerucut, maka dapat diperoleh bahwa:

Luas selimut kerucut $= \pi(R + r)s$

Volum kerucut $= \frac{1}{3}\pi t(R^2 + Rr + r^2)$

11. Bola

Untuk menurunkan rumus volum bola perhatikan bola berikut tabung pasangannya (tabung luar bola), dan sepasang kerucut lingkaran tegak yang puncaknya di pusat bola dan lingkaran alasnya pada tutup alas dan tutup atas tabung (lihat gambar)



Gambar 7. 21

Perhatikan sebagian dari bangun itu, yaitu setengah tabung dan setengah bola. Sebuah bidang yang berjarak *t* dari alas setengah bola (sekaligus sebagai alas setengah tabung) pasti akan memotong bangun ruang di dalam setengah tabung dan di luar kerucut dalam bentuk mirip cincin dan akan memotong bangun setengah bola dalam bentuk bagian daerah lingkaran (lihat bagian-bagian yang diarsir).

I. Untuk bangun setengah tabung

ΔOAB kongruen Δ OPQ, maka

$\dfrac{alas \Delta OAB}{alas \Delta OPQ} = \dfrac{tinggi \Delta OAB}{tinggi \Delta OPQ}$, yakni

$\dfrac{r}{R} = \dfrac{t}{R} \Leftrightarrow r = t$

Luas cincin $= L_{\odot\text{besar}} - L_{\odot\text{kecil}}$

$= \pi R^2 - \pi r^2$

$= \pi R^2 - \pi t^2$

II. Untuk bangun setengah bola

Δ OCD adalah segitiga siku-siku, maka

$CD = \sqrt{R^2 - t^2}$

Luas lingkaran = $\pi\, CD^2$

$= \pi\, (\sqrt{R^2 - t^2}\,)^2$

$= \pi(R^2 - t^2)$

$= \pi R^2 - \pi t^2$

Karena luas permukaan bidang potongnya sama, yaitu luas cincin = luas lingkaran (dalam hal ini = $\pi R^2 - \pi t^2$), maka menurut Prinsip Cavalieri

$$V_{\frac{1}{2}bola} = V_{\frac{1}{2}tabung} - V_{\text{ker}ucut} = \text{L}_{\text{ alas}} \times \text{tinggi} - \frac{1}{3}\text{L}_{\text{ alas}} \times \text{tinggi} = \pi \text{R}^2 \times \text{R} - \frac{1}{3}\pi \text{R}^2 \times \text{R}$$

$V_{\frac{1}{2}bola} = \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$, maka $\boxed{V_{bola} = \frac{4}{3}\pi R^3}$

Untuk memperoleh rumus luas permukaan bola pandanglah volum bola itu sebagai jumlah volum limas-limas kecil yang alasnya pada permukaan bola dan puncak-puncak kerucutnya terletak di titik pusat bola.

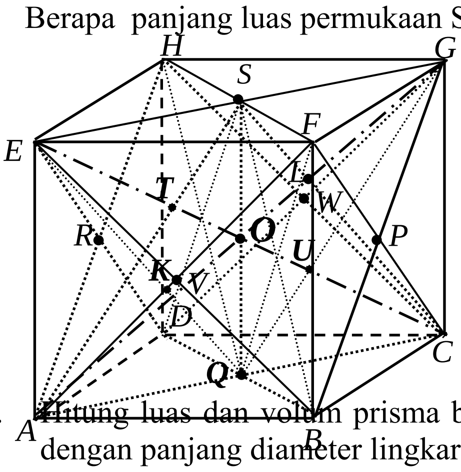
Jika permukaan bola itu terdiri dari n ($n \to \infty$) limas, dan masing-masing luasnya L_n, maka $\sum_{n=1}^{\infty} L_n$, misal = *A*. Karena volum setengah bola berjari-jari *R* adalah $\frac{2}{3}\pi R^3$, maka hubungan yang ada adalah: $\frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}A.R$, sehingga $A = 2\pi R^2$. Maka diperoleh luas seluruh permukaan bola = $2A = 4\pi R^2$.

Jadi: $\boxed{L_{\text{bola}} = 4\pi R^2}$

Latihan 2

1. Dari kubus di bawah ini panjang rusuknya a satuan,

a. Berapa panjang luas permukaan S.*ABCD*? Berapa volumnya?



b. Berapa luas permukaan dan volum G.*AB*D?

c. Berapakah luas permukaan *BDC.EFH*?

d. Hitunglah luas permukaan *ABDC.EFH*.

2. Sebuah prisma segi-6 panjang rusuk alasnya a cm dan tinginya $2a$ cm. Hitung luas dan volumnya!

3. Berapakah banyak rusuk pada masing-masing bangun-bangun ruang beraturan? (Gunakan teorema Euler).

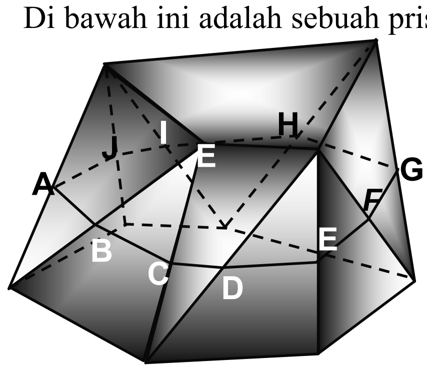
4. Hitung luas dan volum prisma beraturan bersisi enam yang panjang rusuk tegaknya sama dengan panjang diameter lingkaran luar bidang alas, yaitu 24 cm.

5. Tentukan luas bidang delapan beraturan yang panjang diagonal ruangnya $6\sqrt{2}$ cm

6. Jika panjang rusuk octagon a cm, berapakah luas dan volumnya?

7. Sebuah limas, alasnya sebuah belahketupat *ABCD*, AB = 26 cm. Panjang diagonal *AC* = 20 cm. Proyeksi puncak ke alas berimpit dengan titik potong kedua diagonal. Jika panjang rusuk $\overline{TD}$ 40 cm, hitung volum limas tersebut.

8. Di bawah ini adalah sebuah prismoide. Luas bidang alasnya A_1, luas bidang atasnya A_3, luas bidang (irisan) paralel tengahnya adalah A_2, dan tingginya t satuan. Buktikan prinsip Kepler untuk prismoide, bahwa volumnya = $V = \frac{1}{6}t(A_1 + A_2 + 4A_3)$



(Petunjuk: Pilih sebuah titik T bidang pada irisan tengah, hubungkan dengan semua titik sudut, akan terbentuk dua limas berpuncak di T beralas bidang atas dan alas prismoide, dan beberapa limas berpuncak dititik sudut prismoide beralas bagian bidang irisan tengah)

9. Perhatikan bangun ruang *ABCD.FGH* pada kubus soal No. 1, yang panjang rusuknya a cm. Jika dibuat irisan paralel tengah, berapakah luas irisan paralel tengah tersebut?

10. Berapakah panjang batang besi terpanjang yang dapat dimaukkan ke dalam bak berbentuk balok berukuran $12 \text{ m} \times 16 \text{ m} \times 21 \text{ m}$

11. Sebuah bak berbentuk kubus yang panjang rusuknya 120 cm bersisi air tidak penuh. Bejana digulingkan, sehingga pada saat bidang alasnya bersudut α terhadap bidang mendatar dengan tan α = 0,75, air dalam keadaan tepat hampir tumpah. Berapa tinggi air dalam bejana semula?

12. Sebuah tabung diameter dan tingginya sama, yaitu 30 cm, penuh berisi air. Kedalam tabung dimasukkan bola yang diameternya 30 cm. Setelah bola menyentuh alas tabung, bola dikeluarkan. Berapakah tinggi air di dalam tabung sekarang?

13. Sebuah bejana berbentuk kerucut, puncak di bawah, diameter dan tingginya sama, yaitu 30 cm, penuh berisi air. Kedalam bejana dimasukkan bola yang menyentuh selimut kerucut dan permukaan atas bola tepat pada permukaan bejana. Berapakah tinggi air di dalam bejana jika bolanya dikeluarkan?

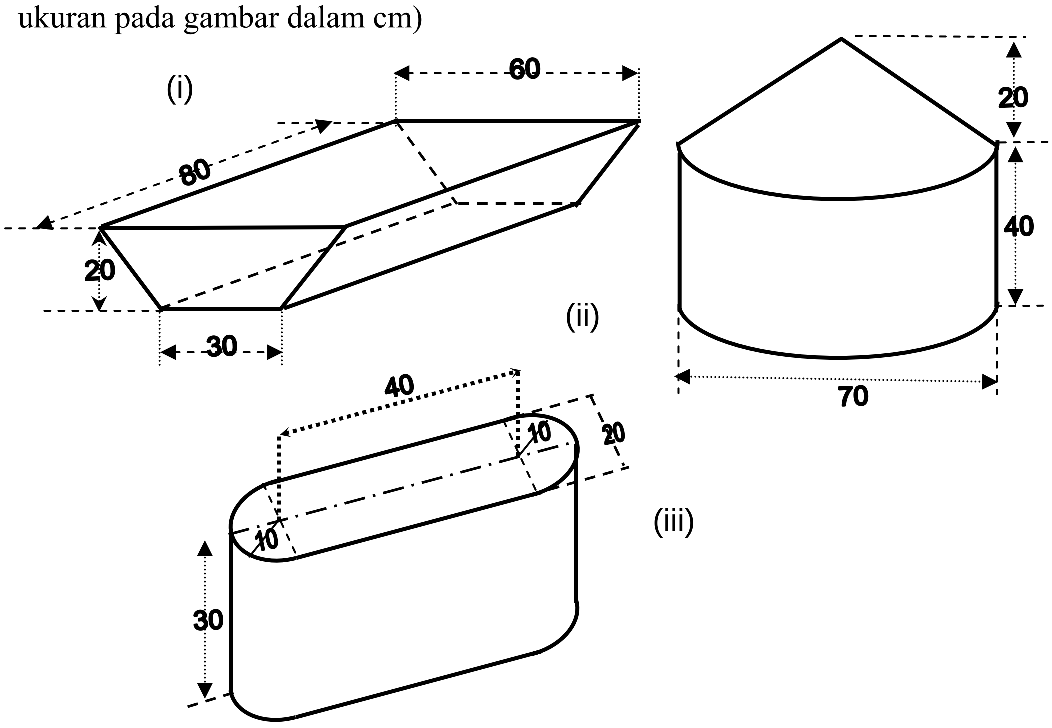
14. Sebuah kerucut terpancung, jari-jari bidang atasnya r, jari-jari alasnya R, tinggi = t dan panjang apotemanya s. Buktikanlah bahwa

    a. Luas selimut kerucut $= \pi(R + r)s$ b. Volum kerucut $= \frac{1}{3}\pi t(R^2 + Rr + r^2)$

15. Buatlah sebuah gayung berbentuk terbuka yang volumnya 1 liter dengan diameter dan tinggi sama. Berapa cm^2 luas bahan yang digunakan?

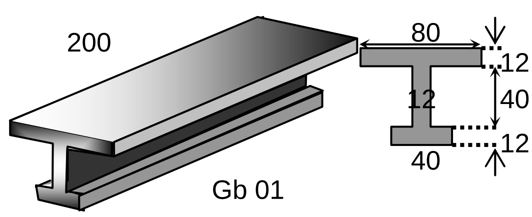
16. Buatlah sebuah gayung berbentuk terbuka yang volumnya 1 liter dengan perbandingan panjang diameter dan tinggi 2 : 3. Berapa cm^2 luas bahan yang digunakan?

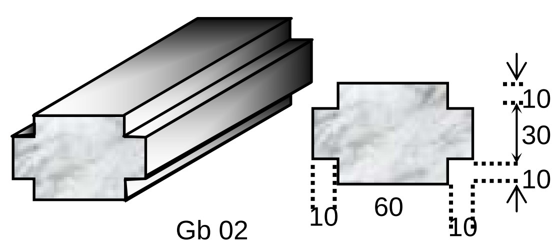
17. Hitunglah luas permukaan dan volum tangki/bejana yang gambarnya berikut ini (semua ukuran pada gambar dalam cm)



18. Benda yang gambarnya pada Gb 01 ukuran yang dikemukakan adalah dengan satuan cm. Berapakah luas permukan dan volum bangun ruang tersebut?

19. Kerjakan seperti No. 18, untuk Gb 02.





20. Untuk soal yang terkait Gb. 03 gunakan nilai pendekatan luas segilima beraturan ≈ 2,3776 R^2 (R adalah panjang jari-jari lingkaran luar poligon) dan satuan ukuran pada gambar adalah cm. Berapa luas permukaan yang perlu dicat, jika semua bagian yang tampak di luar harus dicat?

    Jika tugu pada gambar tersebut seluruhnya terbuat dari campuran semen dan pasir dengan perbandingan volum semen dan pasir 1 : 8, berapa m^3 pasir yang perlu disiapkan?

Daftar Pustaka

Clemens, SR., O′Dafter, PG., and Cooney, YJ. 1984. *Geometry.* Reading, Massachusetts: Addison Wesley Publishing Company

Gellert, W., Kü stner, Hellwich, M, and Kä stner, H. (Ed). 1977. *The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics.* New York: Van Nostrand Reinhold Company.

Krismanto, Al. dkk. 2000. *Pengajaran Matematika SMU: Materi Pembinaan SMU di Daerah.* Yogyakarta: PPPG Matematika

Krismanto, 2006. *Geometri Ruang untuk Pelatihan Guru KTI.* Yogyakarta: PPPG Matematika

Rawuh. 1964. *Soal-soal Ilmu Ukur Ruang*. Jakarta: Pradnjaparamita.

Suwarsono, St. DR. (2003). *Media Pembelajaran (Geometri Dimensi Tiga). Bahan Pelatihan Terintegrasi Berbasis Kompetensi Guru Mata Pelajaran Matematika.* Jakarta: Diektorat PLP Depdiknas.

Travers,K., Dalton, L.C., and Layton, K. (1987). *Laidlaw Geometry.* River Forest: Laidlaw Publisher

Winarno, M.Sc. (2000). *Geometri Datar, Materi Pembinaan SMP di Daerah* Yogyakarta: PPPG Matematika.