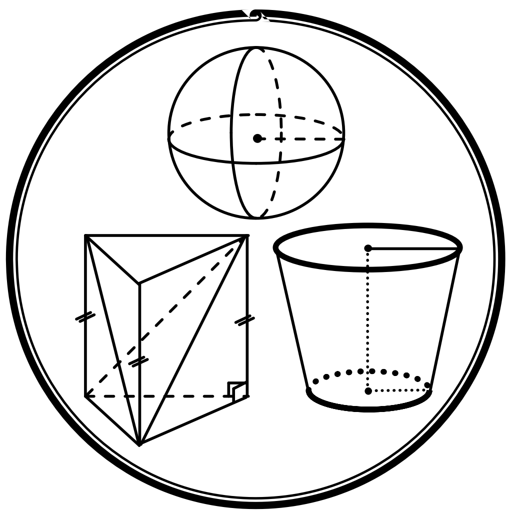
PPPG Matematika
Kode Dok : F-PRO-017
Revisi No. : 0

GEOMETRI RUANG

DISAJIKAN PADA
DIKLAT ......
DI ....
TANGGAL ....



Oleh:
Drs. MARSUDI RAHARJO, M.Sc.Ed
Widyaiswara Madya P4TK Matematika

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN (PMPTK)
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN (P4TK)
MATEMATIKA YOGYAKARTA
2009

KATA PENGANTAR

Puji syukur kita panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena atas rahmat dan karunia-Nya modul Diklat “Geometri Ruang” telah dapat diselesaikan oleh fasilitatator kami dengan baik.

Modul diklat ini diperuntukkan bagi para peserta Diklat instruktur/Guru Pengembang Matematika SMP jenjang dasar, dengan harapan agar dapat dijadikan sebagai salah satu rujukan dalam usaha peningkatan mutu pengelolaan pembelajaran dalam kegiatan Diklat. Modul ini diharapkan dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta di dalam maupun di luar kegiatan Diklat karena selain memuat konsep, contoh soal, dan soal-soal latihan juga dilengkapi dengan kunci jawaban di setiap latihannya. Tujuannya agar para peserta diklat dapat mengadakan refleksi sejauh mana mereka merasa tuntas pada mata diklat yang sedang/telah diikutinya.

Kepada berbagai fihak yang telah berpartisipasi dalam proses`penyusunan modul ini, kami sampaikan penghargaan dan terima kasih.

Kepada para pembaca, kami berharap modul ini dapat dimanfaatkan dengan baik dan demi perbaikan kami mengharapkan adanya masukan-masukan untuk penyempurnaan modul ini di masa mendatang. Jika ada kesulitan dalam menelaah modul ini silahkan menghubungi PPPG Matematika dengan alamat:

Jl. Kaliurang km 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, Yogyakarta.
Kotak Pos 31 Yk-BS Yogyakarta 55281.
Telepon (0274) 881717, 885725, Fax:(0274) 885752.
e-mail : p3gmatyo@indosat.net. Website: www.p3gmatyo.go.id.

Yogyakarta, 22 Maret 2006
Kepala PPPG Matematika

Kasman Sulyono
NIP. 130352806

DAFTAR ISI

GEOMETRI RUANG

KOMPETENSI

Memiliki kemampuan mengembangkan pengetahuan dan ketrampilan siswa SMP dalam memecahkan masalah geometri ruang khususnya volum dan luas permukaan bangun ruang.

SUB KOMPETENSI

Menjelaskan dan memberi contoh:

- Bangun ruang dan unsur-unsurnya (balok, kubus, pisma, limas, tabung, kerucut, bola)
- Penurunan Rumus Volum dan Luas Permukaan Bangun Ruang (balok, kubus, pisma, limas, tabung, kerucut, bola) secara induktif
- Penurunan Rumus Volum dan Luas Permukaan Bangun Ruang (balok, kubus, pisma, limas, tabung, kerucut, bola) secara deduktif
- Penerapan geometri ruang dalam pemecahan masalah kehidupan sehari-hari

GEOMETRI RUANG

PETA BAHAN AJAR

No.	Pokok Bahasan	Sub Pokok Bahasan
1	Bangun Ruang	Unsur-unsur Bangun Ruang • Balok • Kubus • Prisma • Limas • Tabung • Kerucut • Bola
2	Volum dan Luas Permukaan Bangun Ruang	Penurunan Rumus Volum Secara Induktif • Balok • Kubus • Prisma • Limas • Tabung • Kerucut • Bola Penurunan Rumus Volum Secara Deduktif • Balok • Kubus • Prisma • Limas • Tabung • Kerucut • Bola

BAB I

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Geometri merupakan bagian matematika yang membahas tentang bentuk dan ukuran dari suatu obyek yang memiliki keteraturan tertentu (Clemens, 1985). Geometri sudah dikenalkan sejak siswa kelas I sekolah dasar sebatas mengenal bola dan bukan bola, tabung dan bukan tabung, balok dan bukan balok, lingkaran dan bukan lingkaran, segitiga dan bukan segitiga, serta segiempat dan bukan segiempat. Di kelas-kelas berikutnya dilanjutkan dengan menggambar bangun datar, bangun ruang, menghitung panjang, luas, hingga volume pada batas-batas yang sesuai untuk tingkatan SD.

Di SMP pelajaran mengenai geometri (datar dan ruang) berdasar kurikulum 2004 diulang lagi dengan pendalaman dimulai dari melukis bangun datar, sudut, 2 garis sejajar, dua garis tegak lurus, membagi ruas garis atas beberapa bagian yang sama panjang, membagi sudut atas 2 bagian yang sama besar, pengenalan berpikir deduktif, dalil Pythagoras hingga terapannya dalam kehidupan sehari-hari. Sedangkan untuk geometri ruang dimulai lagi di kelas VIII akhir yaitu mengidentifikasi bangun-bangun ruang sisi lengkung (BRSL), mengidentifikasi bangun ruang sisi datar hingga menentukan besaran-basaran yang ada di dalamnya.

Melalui kesempatan ini penulis berupaya memberikan tambahan pengetahuan kepada teman-teman guru tentang pembelajaran volume bangun ruang secara induktif melalui aktifitas praktek kerja hingga menemukan rumusnya atas dasar paradigma pemberian kecakapan hidup (life skill) yang bersifat akademik menggunakan prinsip *learning to know, learning to do, learning to be, learning to live together dan learning to cooperate* (Depdiknas, 2001:11). Pada bagian berikutnya kami perkenalkan penurunan rumus-rumus volume bangun ruang itu berdasarkan tinjauan deduktif, yakni kebenaran suatu pernyataan (sifat dan dalil/teorema) secara matematik diturunkan dari kebenaran pangkal (aksioma/postulat) dan aturan-aturan main tertentu yang telah dibakukan (definisi/batasan/kesepakatan) dan kebenaran-kebenaran terdahulu yang telah diterima. Kami berharap teman-teman guru matematika SMP dapat menerima materi ini dengan baik dan menerapkannya dalam pembelajaran secara proporsional sesuai dengan standar kompetensi yang diharapakan dapat dicapai siswa pada umumnya, dan pemberian materi pengayaan kepada beberapa siswa berbakat pada khususnya.

B. TUJUAN

Bahan diklat ini ditulis sebagai bahan rujukan pelatihan dengan maksud untuk memberikan tambahan pengetahuan dan pendalaman materi geometri yang perlu bagi guru matematika SMP agar lebih berhasil dalam mengajarkan materi itu kepada para siswanya. Kepada teman-teman guru diharapkan untuk dapat menggunakan pengetahuan dari bahan diklat ini secara tepat dalam mengelola pembelajarannya di lapangan sesuai dengan kondisi siswa dan paradigma pembelajaran baru yang dianjurkan pemerintah saat ini. Setelah dipelajarinya materi ini diharapkan teman-teman guru dapat:

1. mengimbaskan pengetahuannya kepada guru-guru di wilayah MGMP-nya dan rekan-rekan seprofesi lainnya
2. mengajarkan kepada para siswanya secara lancar, lebih baik dan lebih jelas
3. mengembangkan dengan soal-soal yang variatif, diperlukan dalam pengem-bangan pengetahuan siswa dan menyentuh kehidupan nyata.

C. RUANG LINGKUP

Materi geometri yang ditulis pada bahan diklat ini merupakan ulasan tentang penurunan rumus-rumus volume dan luas permukaan bangun ruang secara induktif maupun deduktif yang perlu diketahui oleh guru SMP. Materi yang dibahas meliputi:

1. Pemahaman konsep penurunan rumus volume bangun ruang secara induktif (dari konsep/definisi volume, dilanjutkan dengan praktek kerja menggunakan alat-alat peraga, pengamatan hasil praktek, diakhiri penarikan kesimpulan secara umum).
2. Pemahaman konsep penurunan rumus volume bangun ruang secara deduktif (diawali dengan aksioma/postulat tentang volume yakni postulat Cavalieri, dilanjutkan dengan pengenalan dan pembuktian dari dalil-dalil/teorema-teorema pendukung untuk menurunkan rumus-rumus volume dan luas permukaan bangun ruang hingga berujung pembuktian rumus yang dimaksud didasarkan pada teorema-teorema yang telah dibuktikan kebenarannya).

BAGIAN II
PENURUNAN RUMUS-RUMUS VOLUM SECARA INDUKTIF

A. PENGERTIAN BERPIKIR INDUKTIF

Berpikir induktif dalam matematika diartikan sebagai berpikir dari unsur-unsur atau pola-pola menuju ke suatu generalisasi (kesimpulan yang bersifat umum). Kebenaran suatu pernyataan matematika secara induktif diturunkan berdasarkan hasil eksperimen dan pengamatan pola setelah diadakan abstraksi dan idealisasi (Wirasto, 1982). Abstraksi adalah anggapan di alam pikiran bahwa obyeknya ada, sedangkan idealisasi adalah anggapan bahwa obyeknya ideal (sempurna dalam segala hal).

B. VOLUM BANGUN RUANG

1. Konsep/definisi

Isi (volum) suatu bejana (bangun ruang berongga) ialah banyaknya takaran yang dapat digunakan untuk memenuhi bejana itu.

Perlu diketahui bahwa yang dimaksud dengan bejana ialah bangun ruang berongga dengan ruangan dalam rongganya dapat diisi dengan zat cair, beras, pasir dan sebagainya. Karena bejana merupakan bangun ruang yang memiliki keteraturan maka bentuk bejana dapat berupa:

- toples
- termos
- tangki
- bak mandi
- tandon air
- kolam renang, dan sebagainya

Sedangkan satuan volum/satuan penakarnya berupa bejana lain yang biasanya memiliki ukuran yang lebih kecil. Satuan penakar dapat berupa:

- cangkir
- gelas
- tabung takaran bensin 1 literan, $\frac{1}{2}$ literan, 2 literan dan seterusnya
- kubus-kubus satuan, dan lain-lain.

Contoh 1

Apabila sebuah toples

a) dapat dipenuhi dengan air sebanyak 15 cangkir kurang sedikit maka dikatakan (setelah dibulatkan) bahwa:

Volum toples = 15 cangkir

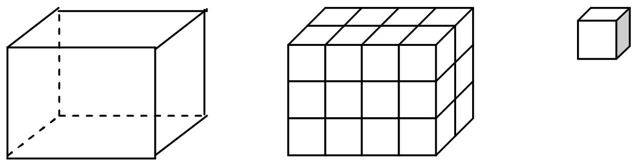
b) dapat dipenuhi dengan air sebanyak 8 gelas lebih sedikit maka dikatakan (setelah dibulatkan) bahwa:

Volum toples = 8 gelas

Contoh 1 ini memberikan penanaman konsep kepada anak akan arti volum sebagai banyaknya satuan penakar yang dapat digunakan untuk mengisi bejana itu hingga penuh.

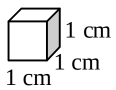
Contoh 2

(A) (B) (C)



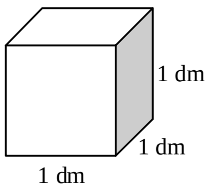
Gb. 1

Gambar (A) : Keadaan balok transparan kosong
Gambar (B) : Keadaan balok transparan setelah diisi/ditakar dengan kubus-kubus satuan (satuan takaran berupa kubus)
Gambar (C) : Satuan takaran (berupa kubus) yang digunakan.
Dengan mengisikan kubus-kubus satuan ke dalam balok transparan pada gambar (A) satu demi satu (diperagakan di hadapan siswa) hingga penuh (gambar B) dan melakukan penghitungan satu, dua, tiga, … dan seterusnya, ternyata hitungan terakhirnya 24. Ini berarti isi balok (gambar B) adalah 24 satuan kubus. Guru dapat mempertegas dengan menulis di papan tulis bahwa:



Gb. 2a

$$\left.\begin{array}{l}\text{panjang} = 1 \text{ cm}\\ \text{lebar} \quad = 1 \text{ cm}\\ \text{tinggi} \quad = 1 \text{ cm}\end{array}\right\} \text{1 satuan kubus} = \text{1 cm kubik} = 1 \text{ cm}^3$$



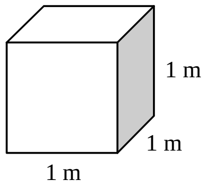
Gb. 2b

$$\left.\begin{array}{l}p = 1 \text{ dm}\\ \ell = 1 \text{ dm}\\ t = 1 \text{ dm}\end{array}\right\} \text{1 satuan kubus} = \text{1 dm kubik} = 1 \text{ dm}^3$$

Untuk selanjutnya disepakati bahwa:

Besaran: 1 (satu) liter ialah satuan ukuran volum yang setara dengan kubus satuan berukuran panjang, lebar, dan tinggi masing-masing 1 (satu) desimeter.

Sejalan dengan kedua contoh satuan kubus di atas siswa kemudian diajak menyimpulkan bahwa satu meter kubik adalah satuan volum berbentuk kubus dengan ukuran:



Gb. 3

$$\left.\begin{array}{ll}\text{panjang} & = 1 \text{ meter}\\ \text{lebar} & = 1 \text{ meter}\\ \text{tinggi} & = 1 \text{ meter}\end{array}\right\}$$

Sebagai pengetahuan tentang satuan volum tak baku kepada siswa dapat diberikan contoh antara lain sebagai berikut:

a) <u>Satuan volum tak baku:</u>
   Misal cangkir, gelas, mangkuk, ember dan lain-lain, yaitu satuan alat takar yang belum diketahui ukurannya berdasarkan satuan ukuran baku.

b) <u>Satuan volum baku:</u>
   Adalah alat penakar yang sudah diketahui ukuran volumnya misalkan:
   - takaran bensin (bentuk tabung) satu literan, dua literan, empat literan dan ada lagi $\frac{1}{5}$ literan, $\frac{1}{4}$ literan, $\frac{1}{2}$ literan dan lain-lain.
   - Gelas-gelas ukur yang di dalamnya terdapat skala-skala ketinggian yang menyatakan volum.
   - Meteran (angka bergerak) pada pompa bensin dan sejenisnya, Meteran ukur volum seperti ini hanya berlaku untuk zat cair (air, minyak, alkohol, tiner dsb.) karena gerakan angkanya berdasarkan atas kecepatan (debit) dari zat cair yang dialirkan.

<u>Keterangan:</u>
Debit zat cair ialah volum zat cair yang dapat dialirkan melalui selang (pipa) per satuan waktu (detik, per menit, per jam dan sebagainya).

C. PENURUNAN RUMUS-RUMUS VOLUME BANGUN RUANG SECARA INDUKTIF

1. Volume Balok/ Prisma Tegak Segi Empat

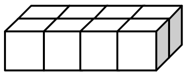
Untuk memberikan penalaran dalam memperoleh rumus-rumus volum secara induktif digunakan alat peraga kubus-kubus satuan. Harapannya dengan melakukan praktek langsung atas arahan guru siswa akhirnya dapat menyimpulkan sendiri bahwa volum balok yang ukuran panjang rusuk alasnya p, lebar rusuk alasnya ℓ, dan tinggi rusuk tegaknya t adalah

$$V = p \times \ell \times t.$$

Jika siswa dapat menyimpulkan sendiri seperti itu maka kompetensi yang diharapkan dapat tercapai. Langkah-langkah yang dapat dilakukan guru dengan menggunakan peraga (kubus-kubus satuan) itu kepada siswa SMP antara lain adalah seperti berikut.

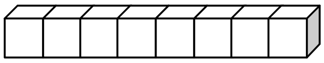
Langkah 1

Dengan sejumlah kubus satuan yang tersedia (misal sebanyak 50 kubus satuan), siswa/ kelompok siswa (sebanyak 3 orang) diminta membentuk sebuah balok menggunakan 8 kubus satuan. Setelah terbentuk misalnya seperti gambar 4a.



Gb. 4a

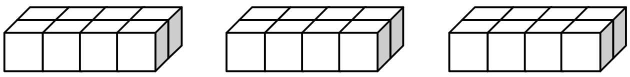
Tanyakan kepada siswa/kelompok siswa tersebut, apakah balok yang mungkin hanya itu saja?
Jawaban yang diharapkan adalah *tidak*.
Kalau tidak kemungkinan lainnya bentuknya seperti apa?
Kemungkinan yang lain bentuknya seperti pada gambar 4b berikut ini.



Gb. 4b

Langkah 2

Siswa diminta membentuk balok seperti gambar 4a sebanyak 3 buah

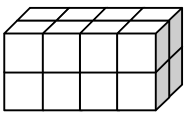


Gb. 5a

Guru mengatakan bahwa ketiga balok itu (gambar 5a) masing-masing disebut *balok satu lapis.*

Langkah 3

Siswa diminta membentuk balok baru yang terdiri dari 2 lapis.
Jawaban yang diharapkan adalah seperti gambar 5b berikut.



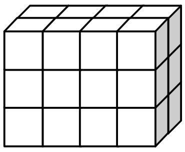
Gb. 5b

Kepada siswa/kelompok siswa tersebut kemudian ditanyakan berapa volume balok yang sekarang ini? (Gb. 5a).
Jawaban yang diharapkan adalah 16 (“penalarannya dari lapis pertama 8 ditambah lapis kedua 8)

Langkah 4

Siswa diminta menambah lapisannya menjadi 3 lapis.
Jawaban yang diharapkan adalah seperti gambar 5c berikut.

Gb. 5c



Kepada siswa/kelompok siswa tersebut kemudian ditanyakan sekarang berapa volume balok yang terbaru ini?
Jawaban yang diharapkan adalah 24 ("penalarannya dari lapis pertama 8 ditambah lapis kedua 8 dan lapis ketiga 8 *atau* yang 2 lapis sebelumnya 16 ditambah lapis yang ketiga 8")

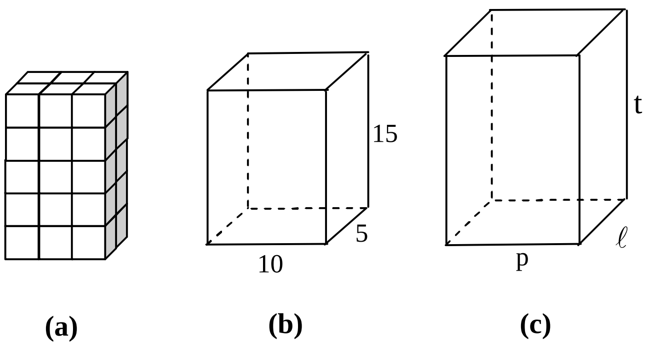
Langkah 5

Tanyakan kepada mereka (siswa/kelompok siswa) " jika banyaknya lapis ada 10 berapa volumenya, bagaimana jika banyaknya lapis ada 100? jika kita menganggap pembentukan lapisannya tak pernah runtuh.
Jawaban yang diharapkan adalah

1 lapis volumenya 8 satuan ⟶ 10 lapis volumenya 80 satuan, dan
100 lapis volumenya 800 satuan.

Langkah 6

Tanyakan kepada siswa berapa volume balok untuk masing-masing gambar berikut



Gb. 6

Jawaban yang diharapkan

(a) Volumenya V = $3 \times 2 \times 5 = 30$
(b) Volumenya V = $10 \times 5 \times 15 = 750$
(c) Volumenya V = $p \times \ell \times t$.

Terakhir guru memberikan penguatan bahwa volume balok yang ukuran rusuk-rusuk alasnya p dan ℓ sedangkan tingginya t adalah

$$\boxed{\mathbf{V = p \times \ell \times t}} \quad \textbf{....... (1)}$$

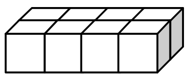
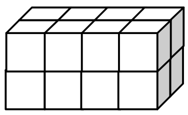
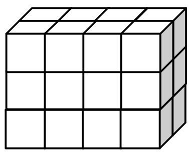
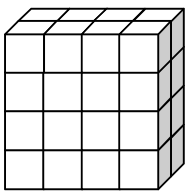
Selanjutnya karena p $\times$ ℓ adalah luas alas balok/prisma tegak, maka rumus (1) di atas sama dengan bila ditulis dalam bentuk

$$\boxed{\mathbf{V = A \times t \ \ dengan\ A = p \times \ell}} \quad \textbf{.... (2)}$$

A = luas alas balok dan t = tinggi balok

Cara lain yang dapat dilakukan guru dalam mengkonstruksi penemuan rumus volume balok di atas juga dapat dilakukan dengan memberikan lembar kerja seperti berikut.

LKS(Lembar Kerja Siswa)
Isikan jawabanmu pada titik-titik yang disediakan berikut ini.

No	Gambar Balok	Banyak lapis	Volume (Isi balok)	Ukuran panjang (p), lebar(ℓ), dan tinggi (t)			p $\times$ ℓ $\times$ t
				p	ℓ	t	
1		1	8	4	2	1	8
2		2	…	…	…	…	…
3		3	…	…	…	…	…
4		4	…	…	…	…	…
		10	…	…	…	…	…
		100	…	…	…	…	…

Perhatikan isian pada kolom volume V dan kolom hasil kali $p \times \ell \times t$. Apakah selalu sama nilainya?
Jawaban yang diharapkan adalah *ya*.
Kalau ya apa kesimpulan yang dapat kalian (siswa) kemukakan?
Jawaban yang diharapkan adalah $V = p \times \ell \times t$. Sehingga secara umum dapat disimpulkan bahwa *volume balok* adalah

$$\boxed{\mathbf{V = p \times \ell \times t}} \quad \text{....... (1)}$$

p = panjang rusuk alas balok
ℓ = lebar rusuk alas balok, dan
t = tinggi balok

Selanjutnya karena $p \times \ell$ adalah luas alas balok/prisma tegak, maka rumus (1) di atas sama dengan bila ditulis dalam bentuk

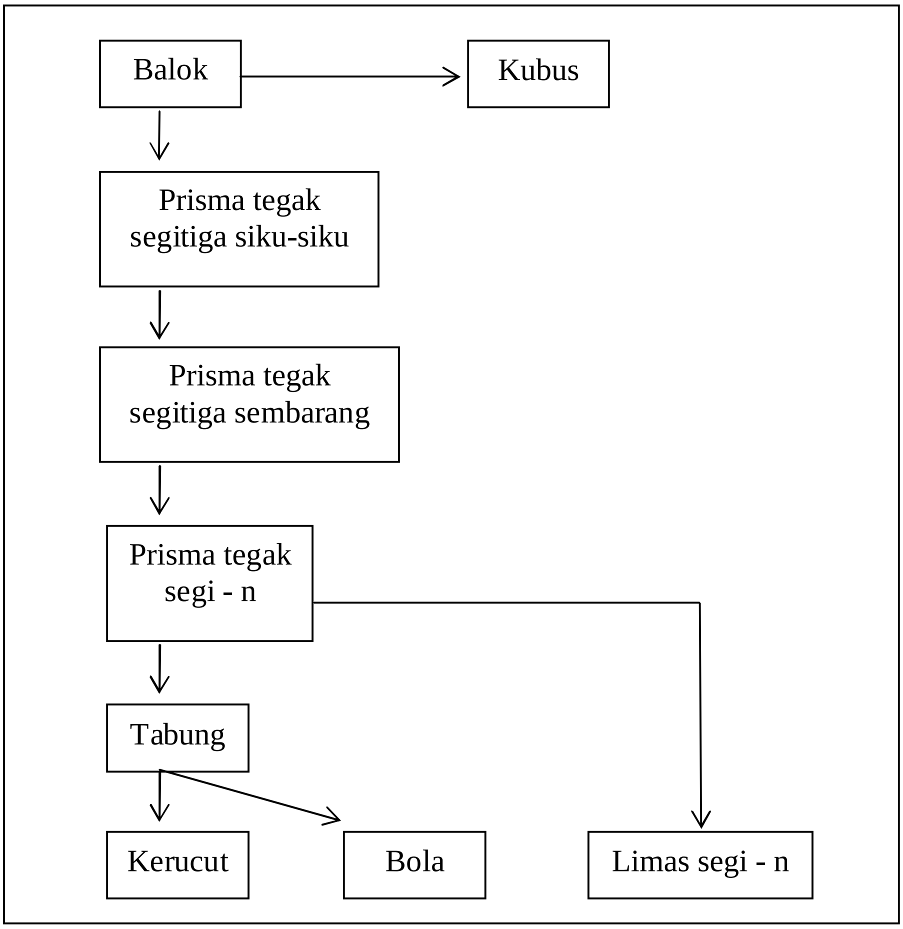
$$\boxed{\mathbf{V = A \times t \text{ dengan } A = p \times \ell}} \quad \text{.... (2)}$$

A = luas alas balok dan
t = tinggi balok

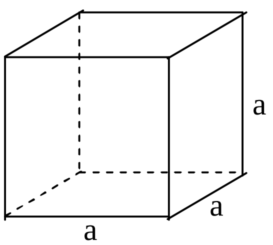
Setelah penurunan rumus volume balok ini penurunan rumus-rumus volume bangun ruang lainnya dapat diturunkan secara mudah dan kronologis baik secara induktif maupun deduktif. Penurunan rumus volume yang dimaksud adalah *volume* untuk
Kubus
Prisma tegak segitiga siku-siku
Prisma tegak segitiga sembarang
Prisma tegak segibanyak (segi-n)
Tabung
Kerucut
Bola, dan
Limas seegi banyak (segi-n)

Skema penurunan rumus bangun-bangun ruang berikutnya dapat kita lihat pada bagan berikut.

Penurunan Rumus-rumus Volum



2. Volum Kubus



Gb. 7

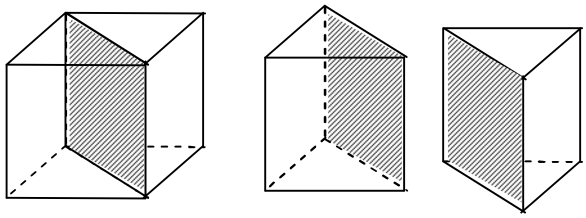
Kubus merupakan keadaan khusus dari balok, yakni balok yang ukuran rusuk-rusuknya sama panjang.

Jika ukuran panjang dari rusuk-rusuknya adalah a, maka panjang rusuk alas, lebar rusuk alas, dan tinggi rusuk tegak dari balok tersebut menjadi p = a, ℓ = a, dan t = a, sehingga volumenya menjadi

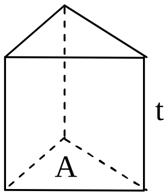
$V = p \times \ell \times t = a \times a \times a = a^3$. Jadi khusus untuk kubus volumenya adalah

$V = a^3$ a = panjang rusuk kubus

3. Volum Prisma Tegak Segitiga Siku-siku



Gb. 8a



Gb. 8b

Prisma tegak segitiga siku-siku diperoleh dari membelah balok menjadi 2bagian yang sama melalui salah satu bidang diagonal ruangnya (lihat gambar 8 di atas). Oleh sebab itu maka

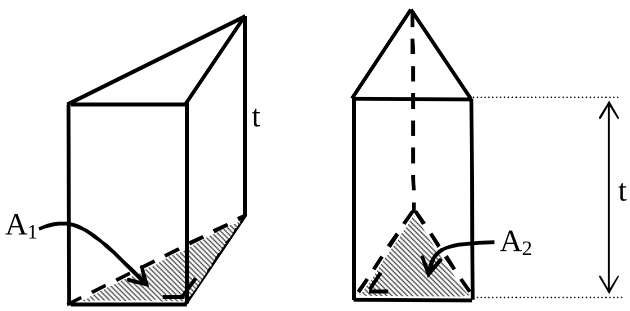
$$\begin{aligned} V_{\text{prisma tegak segitiga siku-siku}} &= \frac{1}{2} \text{ dari volume balok} \\ &= \frac{1}{2} \times p \times \ell \times t \\ &= (\frac{1}{2} \times p \times \ell) \times t \\ &= A \times t \end{aligned}$$

Jadi

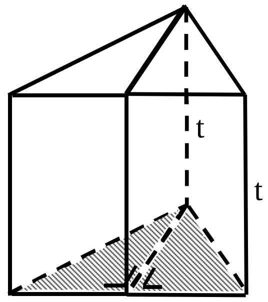
$$\boxed{V_{\text{prisma tegak segitiga siku-siku}} = A \times t}$$

A = luas alas, alasnya berbentuk segitiga siku-siku
t = tinggi prisma.

4. Volum Prisma Tegak Segitiga Sembarang



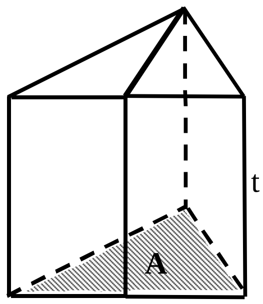
Gb. 9a



Gb. 9b

Prisma tegak segitiga sembarang diperoleh dari merangkai 2 prisma tegak segitiga siku-siku $AP_1C_1.DQ_1F_1$ dan prisma tegak segitiga siku-siku $P_2BC_2.Q_2EF_2$. Hasilnya akan berupa prisma tegak segitiga sembarang ABC.DEF. Jika A_1dan A_2 berturut-turut adalah luas alas prisma tegak segitiga siku-siku pertama dan kedua, sedang tinggi kedua prisma sama, maka volume dari prisma tegak segitiga sembarang yang dibentuknya yaitu prisma ABC.DEF adalah

$$
\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 \\
&= A_1 t + A_2 t \\
&= (A_1 + A_2)\, t \\
&= A \times t.
\end{aligned}
$$

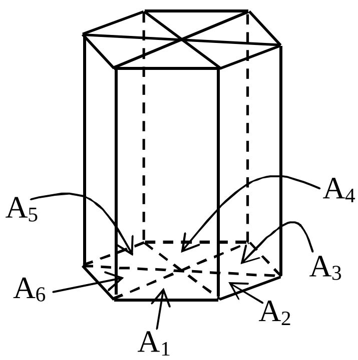


Gb. 9c

Jadi

$\mathbf{V_{\text{prisma tegak segitiga sembarang}} = A \times t}$ A = luas alas, alasnya berbentuk segitiga siku-siku   t = tinggi prisma.

5. Volum Prisma Tegak Segi n



Gb. 10

Prisma tegak segienam dapat disusun (dirangkai) dari 6 prisma tegak segitiga sembarang (lihat gambar 10). Jika A_1, A_2, A_3, … , A_n berturut-turut menyatakanluas alas dari masing-masing prisma tegak segitiga yang dimaksud, sedangkan tinggi masing-masing prisma itu sama yakni t, maka volume prisma tegak segienam tersebut adalah:

$$
\begin{aligned}
V &= A_1 \times t + A_2 \times t + \ldots + A_6 \times t \\
&= (A_1 + A_2 + \ldots + A_6) \times t \\
&= A \times t.
\end{aligned}
$$

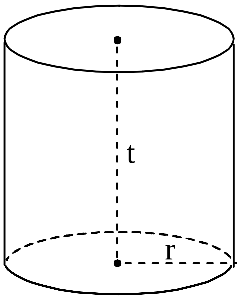
Dengan penalaran yang sama akan diperoleh :

$$
\begin{aligned}
V &= A_1 \times t + A_2 \times t + \ldots + A_n \times t \\
&= (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \times t \\
&= A \times t.
\end{aligned}
$$

Jadi

$\mathbf{V_{\text{prisma tegak segi – n}} = A \times t}$; A = luas alas prisma   t = tinggi prisma

6. Volum Tabung



Gb. 10

Tabung dapat dipandang sebagai prisma tegak segi - n beraturan dengan n tak terhingga. Oleh sebab itu maka

$$\begin{aligned} V_{tabung} &= V_{\text{prisma tegak segi - n}} \\ &= A \times t \\ &= \pi r^2 \times t. \end{aligned}$$

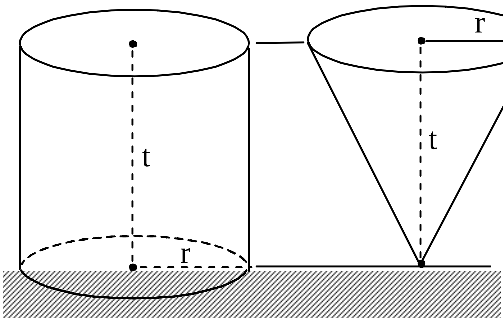
Jadi

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{V_{tabung} = \pi r^2 \times t}\ ;\ \pi = \dfrac{22}{7} \approx 3{,}14 \\ \qquad\qquad\qquad r = \text{jari-jari tabung} \\ \qquad\qquad\qquad t = \text{tinggi tabung} \end{array}}$$

7. Volum Kerucut

Untuk mencari rumus volume kerucut secara induktif dilakukan melalui peragaan dengan menakar menggunakan alat takar berupa kerucut dan tabung pasangannya.

Yang dimaksud dengan tabung pasangannya adalah tabung yang luas alasnya sama dengan luas alas kerucut dan tingginya juga sama dengan tinggi kerucut. Bahan yang dapat digunakan dalam melakukan penakaran dapat berupa beras, jagung, atau otek (sejenis gandum yang digunakan sebagai bahan makanan burung perkutut).



Gb. 11

Darihasil praktek menakar ternyata isi tabung sama dengan 3(tiga) takar menggunakan takaran kerucut. Itu berarti volume tabung sama dengan 3(tiga) kali volume kerucut. Sehingga

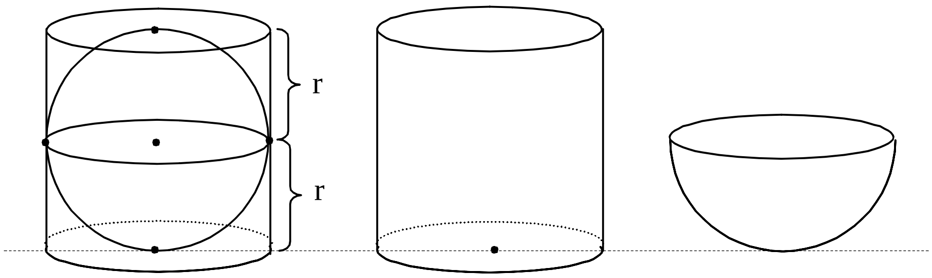
$$V_{tabung} = 3 \times V_{kerucut}\text{ , atau } V_{kerucut} = \frac{1}{3} \times V_{tabung}$$
$$= \frac{1}{3} \times \pi r^2 t.$$

Jadi

$$\mathbf{V_{kerucut}} = \frac{1}{3}\boldsymbol{\pi r^2 t}\text{, atau}$$
$$= \frac{1}{3} \times \pi \times \mathbf{r^2} \times \mathbf{t;}\ \text{r = panjang jari-jari}$$
t = tinggi kerucut

8. Volum dan Luas Permukaan Bola

Penurunan rumus volume dan luas permukaan bola secara induktif dilakukan melalui peragaan dengan cara menakar menggunakan alat takar setengah bola untuk ditakarkan ke tabung pasangannya. Yang dimaksud dengan tabung pasangannya adalah tabung yang tepat melingkupi bola secara utuh, yakni tabung yang tepat menyinggung bola di bagian atas, bagian bawah, dan bagian samping (lihat gambar 12).



Gb. 12

$V_{tabung} = 3 \times V_{setengah\ bola}$, atau

$$\begin{aligned} V_{setengah\ bola} &= \frac{1}{3} \times V_{tabung} \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times t \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times (2r) \\ &= \frac{2}{3} \times \pi \times r^3 \\ &= \frac{2}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

Karena

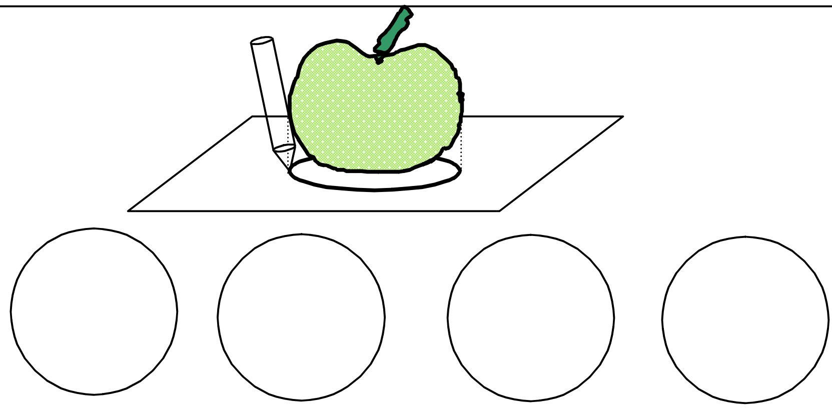
$V_{\frac{1}{2}\,bola} = \frac{2}{3}\pi r^3$, maka bila kedua ruas kita kalikan dua akan diperoleh

$$\mathbf{V_{bola}} = \frac{4}{3}\boldsymbol{\pi r^3}\ ;\ \pi = \frac{22}{7} \approx 3{,}14$$
r = panjang jari-jari bola

Terakhir penurunan luas permukaan bola secara induktif dapat dilakukan dengan 2(dua) cara yaitu (1) praktek kerja menggunakan sebuah jeruk, dan (2) praktek meliliti bola menggunakan sumbu kompor hingga tepat melingkupi seluruh permukaan bola dilanjutkan dengan melilitkan sumbu kompor yang tepat melingkupi permukaan bola tadi untuk dililitkan ke tabung pasangannya.

Cara 1
Praktek kerja menggunakan sebuah jeruk.
Siswa diminta praktek menggunakan benda dalam kehidupan sehari-hari yang mirip bentuknya dengan bola. Benda yang dimaksud adalah jeruk.
Siswa diminta kerja kelompok dengan jeruk yang disediakan untuk masing-masing kelompok.
Cara kerja

- Dalam kelompok siswa diminta menggambar di kertas polos gambar proyeksi permukaan jeruk ke selembar kertas yang diletakkan di atas meja (lihat gambar 13)
- Siswa diminta menggambar lagi lingkaran sebesar proyeksi permukaan jeruk tadi sebanyak empat buah
- Siswa diminta mengupas kulit jeruk itu mengunakan kuku



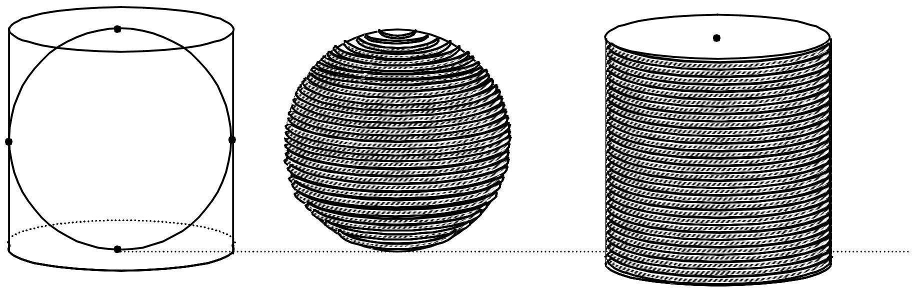
Gb. 13

- Siswa diminta mengisi lingkaran-lingkaran di atas dengan potongan-potongan kecil hasil kupasan kulit jeruk hingga tepat seluruh permukaan kulit jeruk itu terkupas. Tanyakan apa yang terjadi dengan hasil praktek tersebut.
- Ajaib, ternyata hasil praktek menunjukkan kalau kulit jeruk itu tepat memenuhi keempat lingkaran yang seukuran dengan lingkaran proyeksi jeruk itu ke alas. Sehingga disimpulkan bahwa

  Luas permukaan bola = $4 \times$ luas lingkaran, atau

$$\boxed{L_{\text{permukaan bola}} = 4\pi r^2 \text{ , r = jari-jari bola}}$$

Cara 2
Praktek mengunakan sumbu kompor



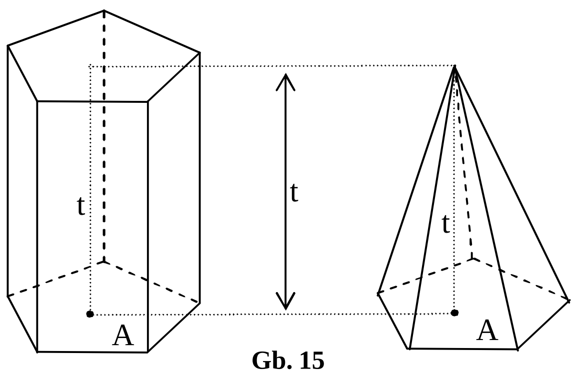
Gb. 14

Prinsip dalam praktek ini adalah sumbu kompor dililitkan ke sepanjang permukaan bola. Ujung awal kita tandai demikian pula ujung akhir saat sumbu kompor tepat melilit sepanjang permukaan bola.
Sumbu kompor yang dililitkan ke sepanjang permukaan bola tadi kemudian kita lepas untuk selanjutnya kita lilitkan sepanjang permukaan selimut tabung (lihat gambar 14).
Hasil praktek menunjukkan bahwa panjang tali yang dililitkan sama. Hal itu berarti bahwa luas permukaan bola sama dengan luas selimut tabung, atau

$$\begin{aligned} L_{\text{permukaan bola}} &= L_{\text{selimut tabung}} \\ &= \text{panjang lingkaran alas tabung dikalikan tinggi tabung} \\ &= 2\pi r \times 2r \\ &= 4\pi r^2 . \end{aligned}$$

9. Volume limas (Piramida)

Untuk menentukan rumus volume limas secara induktif dilakukan melalui peragaan menakar menggunakan sebuah limas (sembarang limas) dan sebuah prisma pasangannya.



Gb. 15

Yang dimaksud dengan prisma pasangannya adalah prisma yang alasnya kongruen dengan alas limas dan tingginya sama dengan tinggi limas.

Dari hasil praktek ternyata isi prisma sama dengan 3(tiga) takar limas, sehingga:

$$V_{\text{prisma}} = 3 \times V_{\text{limas}} \text{ atau}$$

$$V_{\text{limas}} = \frac{1}{3} \times V_{\text{prisma}}$$

$$= \frac{1}{3} \times A \times t.$$

Jadi

$$\boxed{\mathbf{V_{limas}} = \frac{1}{3} \times \mathbf{A} \times \mathbf{t}\ ;\ A = \text{luas alas limas},\quad t = \text{tinggi limas}}$$

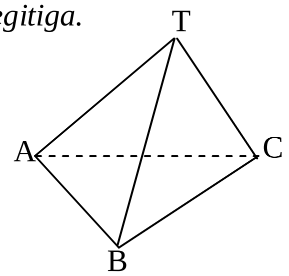
BAGIAN III
PEMBUKTIAN VOLUME BANGUN RUANG SECARA DEDUKTIF
(BAHAN PENGAYAAN)

A. PENGERTIAN BERPIKIR DEDUKTIF

Berpikir Deduktif dalam matematika diartikan sebagai berpikir berdasarkan aturan-aturan yang berlaku dalam matematika. Aturan-aturan yang dimaksud adalah bahwa suatu sifat harus dibuktikan kebenarannya secara langsung dari definisi atau aksioma, dalil (teorema) harus dibuktikan kebenarannya berdasarkan definisi yang berlaku atau berdasarkan aksioma (postulat) yang berlaku, atau berdasarkan sifat-sifat atau teorema-teorema terdahulu yang telah dibuktikan kebenarannya. Yang dimaksud dengan definisi adalah suatu batasan/kesepakatan yang harus diterima dan ditaati (taat azas) sedangkan aksioma atau postulat adalah suatu kebenaran matematika yang diterima tanpa bukti.

Contoh Definisi:

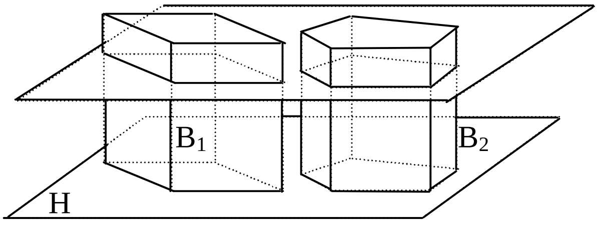
Limas segitiga ialah bangun yang dibatasi oleh empat bidang sisi yang berbentuk daerah segitiga.



T. ABC adalah limas segitiga sebab sesuai dengan definisinya bangun ruang itu dibatasi oleh 4 sisi berupa daerah-daerah segitiga.

Contoh Postulat (Aksioma)

Postulat Cavalieri (Penghormatan untuk matematikawan Italia Bonaventura Cavalieri yang hidup tahun 1598 samapai dengan 1647) bunyinya adalah sebagai berikut.



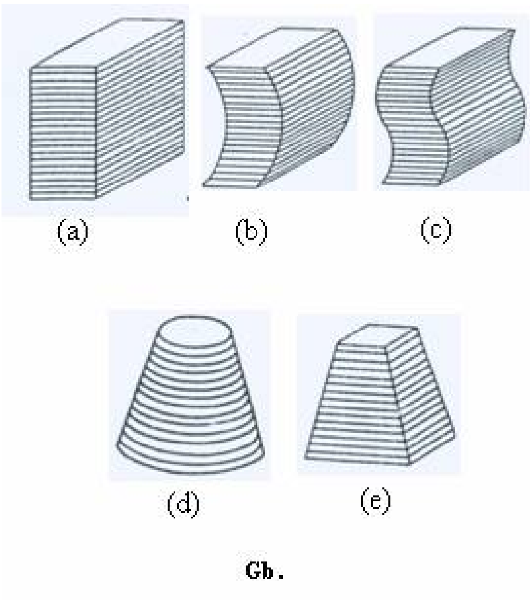
Gb.

Misalkan B_1 dan B_2 masing-masing adalah bangun ruang, sedangkan H adalah suatu bidang.

Jika setiap bidang yang sejajar H memotong bangun ruang B_1 dan B_2 atas 2 daerah yang sama luasnya, maka:

Volume $B_1 = B_2$.

Untuk mempermudah pemahaman dari postulat tersebut, ilustrasinya diberikan seperti berikut



Balok pada gambar (a) diiris-iris menjadi sayatan-sayatan tipis. Bangun pada gambar (b) dan (c) masing-masing merupakan bentukan dari balok pada gambar (a).

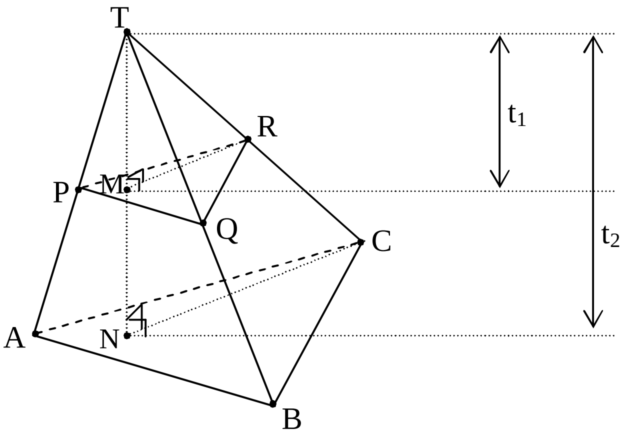
Karena tidak ada unsur yang hilang maka meskipun bentuknya berubah-ubah tetapi volumenya tentu tidak berubah (tetap).

Sejalan dengan itu misalkan kedua bangun ruang yang digambarkan pada gambar (d) dan (e) dapat diiris-iris ke dalam sayatan-sayatan tipis sedemikian sehingga bagian atas dari masing-masing sayatan yang bersesuaian adalah sama luasnya. Secara intuisi (kata hati) kita dapat menyatakan bahwa volume kedua bangun ruang (d) dan (e) adalah sama.

B. BEBERAPA PEMBUKTIAN SECARA DEDUKTIF

Beberapa bukti rumus tentang volume dan luas selimut bangun ruang secara deduktif yang akan dikemukakan dalam pembahasan ini adalah rumus tentang volume dan luas selimut untuk kerucut, kerucut terpancung, dan bola. Untuk maksud ini kami akan sajikan beberapa dalil (teorema) pendukung untuk mencapai tujuan tersebut. Uraian selengkapnya adalah sebagai berikut.

Teorema 1



Gb.

Jika bidang irisan PQR sejajar dengan bidang alas ABC, sedangkan jarak titik puncak ke bidang irisan dan ke bidang alas masing-masing adalah t_1 dan t_2, maka luas bidang irisan dibandingkan dengan luas bidang alas adalah

$$\boxed{\frac{L_{\Delta\,PQR}}{L_{\Delta\,ABC}} = \frac{t_1^2}{t_2^2}}$$

Bukti

Karena bidang irisan sejajar bidang alas, akibatnya

$\overline{PQ} // \overline{AB}$, $\overline{PR} // \overline{AC}$, dan $\overline{QR} // \overline{BC}$ ………………………………………….. (1)

Akibat dari (1) tersebut adalah

$$\left.\begin{array}{l} \Delta TPQ \sim \Delta TAB \Rightarrow \dfrac{TP}{TA} = \dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{TQ}{TB} \\ \\ \Delta TPR \sim \Delta TAC \Rightarrow \dfrac{TP}{TA} = \dfrac{PR}{AC} = \dfrac{TR}{TC} \end{array}\right\} \frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC} = \frac{TR}{TC} \text{ …………….. (2)}$$

Jika TM dan TN masing-masing menyatakan tinggi limas bagian atas dan tinggi limas seluruhnya (akibat dari bidang PQR // bidang ABC) maka $\overline{MR} // \overline{NC}$, dan akibat berikutnya $\Delta TMR \sim \Delta TNC$.

Karena $\Delta TMR \sim \Delta TNC \Rightarrow \dfrac{TR}{TC} = \dfrac{TM}{TN} = \dfrac{t_1}{t_2}$ ………………………………. (3)

Jika nilai perbandinganitu adalah λ, maka substitusi (2) dan (3) menghasilkan

$\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{PR}{AC} = \dfrac{TR}{TC} = \dfrac{t_1}{t_2} = \lambda$ ……………………………………………. (4)

Selanjutnya karena ΔPQR sebangun dengan ΔABC maka

$\angle QPR = \angle BAC = \theta$ dengan θ tertentu. Selanjutnya

$$\frac{L_{\Delta PQR}}{L_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}.PQ.PR\sin\theta}{\frac{1}{2}.AB.AC\sin\theta} = \frac{PQ.PR}{AB.AC} = \lambda.\lambda = \lambda^2$$

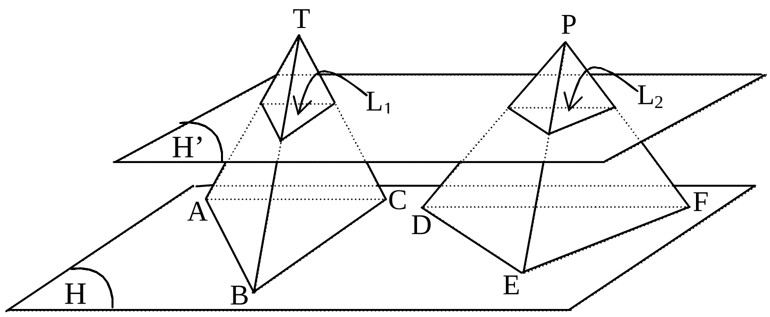
$$= \frac{t_1^2}{t_2^2}$$ ▧

Teorema 2

Jika 2 buah limas segitiga mempunyai luas alas dan tinggi yang sama, maka volume kedua limas itu sama.

Bukti:

Jika kedua limas terletak di bidang H (lihat gambar) sedangkan H' adalah bidang yang sejajar dengan bidang H dan memotong kedua limas (limas T.ABC dan limas P.DEF), maka garis-garis potong bidang irisannya yang bersesuaian tentu akan sejajar. Jika kedua limas yang dimaksud adalah T.ABC dan P.DEF dengan $L_{\Delta ABC} = L_{\Delta DEF} = L$ dan tinggi kedua limas sama (lihat gambar), maka:



Menurut teorema 1,

$$\frac{L_1}{L_{\Delta ABC}} = \frac{L_2}{L_{\Delta DEF}} = \frac{t_1^2}{t_2^2} \text{ atau } \frac{L_1}{L} = \frac{L_2}{L} \text{ atau } L_1 = L_2.$$

Karena $L_1 = L_2$ dan $H' // H$, menurut postulat Cavalieri maka:

$$\boxed{\textbf{Volume limas T. ABC = Volume limas P. DEF}}$$ ▧

Teorema 3

Volume limas segitiga adalah sepertiga kali luas alas kali tinggi (limas), yaitu $V = \frac{1}{3}At$.

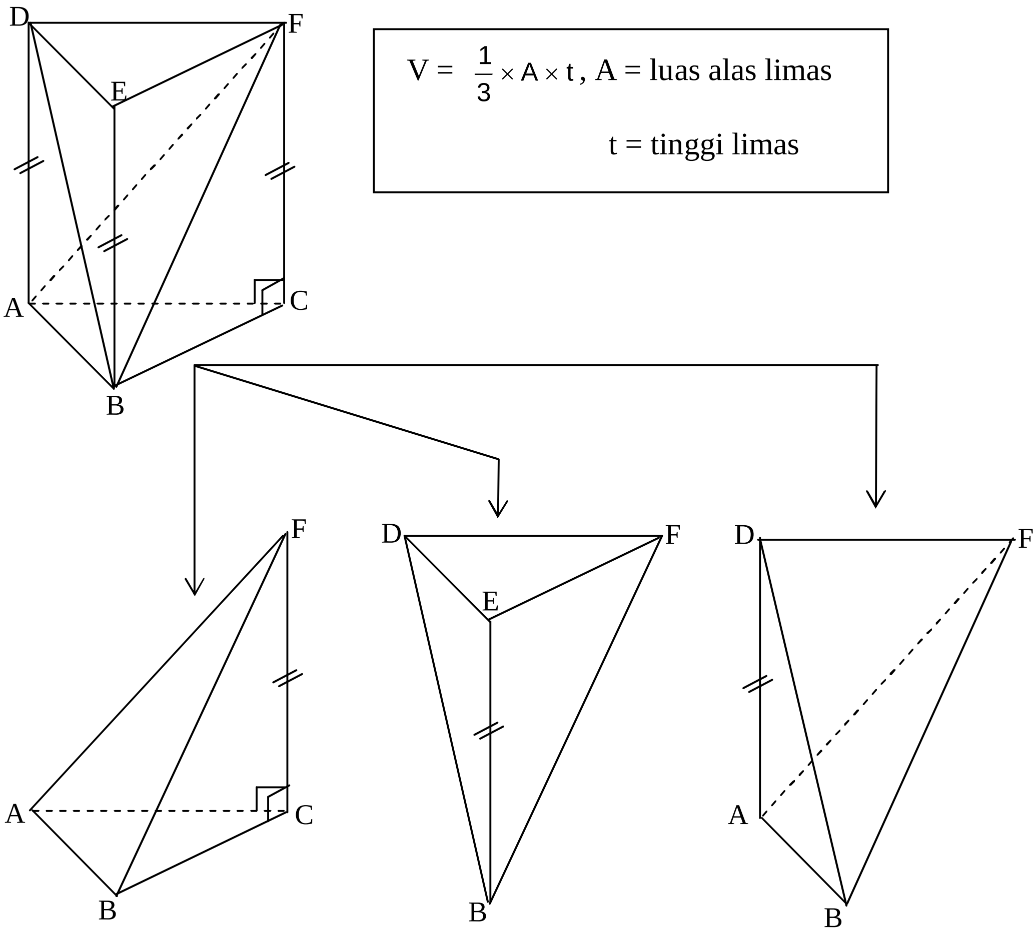
Bukti

Ambilah sebuah prisma tegak ABC.DEF.

Irislah prisma itu ke dalam 3 bagian bangun yang masing-masing bagiannya berupa limas (lihat gambar).

$V = \frac{1}{3} \times A \times t$, A = luas alas limas

t = tinggi limas



Perhatikan bahwa

(1) Limas F.ABC dan limas B.DEF mempunyai luas alas dan tinggi yang sama, maka menurut teorema 1 volume kedua limas tersebut sama.
Luas alas yang sama tersebut adalah $L_{\Delta\, ABC} = L_{\Delta\, DEF}$.
Tinggi yang sama adalah CF = BE.

(2) Limas F.BDE dan limas F.ABD luas alasnya sama yaitu

$$L_{\Delta\, BDE} = L_{\Delta\, ABD} = \frac{1}{2} L_{\text{persegi panjang ABED}}.$$

Tinggi masing-masing limas adalah jarak titik F ke bidang ABED. Karena ΔBDE dan ΔABD masing-masing adalah bagian dari ABED maka jarak titik puncak F ke bidang BDE = jarak titik F ke bidang BDE = jarak titik F ke bidang ABD = jarak titik F ke bidang ABED.

Karena limas F.BDE dan limas F.ABD mempunyai luas alas dan tinggi yang sama maka menurut teorema 2, kedua limas mempunyai volume yang sama.

(3) Dari pernyataan (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa ketiga limas mempunyai volume yang sama. Sehingga

$$V_{\text{limas segitiga}} = \frac{1}{3} V_{\text{prisma tegak segitiga}}$$

$$= \frac{1}{3} \times A \times t \quad ; A = \text{luas alas prisma}$$

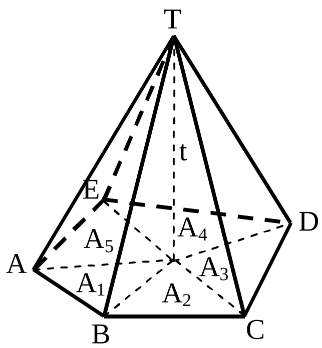
$= \text{luas alas limas}$

$t = \text{tinggi prisma}$

$= \text{tinggi limas.}$

Teorema 4

Volume sembarang limas adalah sepertiga kali luas alas kali tinggi



Gb.

$V = \frac{1}{3} \times A \times t$; A = luas alas limas

t = tinggi limas

Bukti

Ambil limas segilima di atas sebagai contoh. Perhatikan bahwa limas segilima dapat dibagi menjadi 5 buah limas segitiga yang masing-masing tingginya t. Menurut teorema 4 volume dari masing-masing limas segitiga yang dibentuk adalah $\frac{1}{3}A_1t$, $\frac{1}{3}A_2t$, $\frac{1}{3}A_3t$, $\frac{1}{3}A_4t$, dan $\frac{1}{3}A_5t$. Akibatnya

$$V_{\text{limas segilima}} = \tfrac{1}{3}A_1t + \tfrac{1}{3}A_2t + \tfrac{1}{3}A_3t + \tfrac{1}{3}A_4t + \tfrac{1}{3}A_5t$$

$$= \tfrac{1}{3}(A_1t + A_2t + A_3t + A_4t + A_5t)$$

$$= \tfrac{1}{3}(A_1 + A_2 + \ldots + A_5)t$$

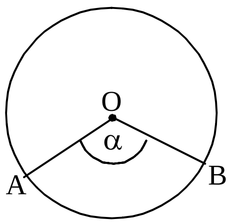
$$= \tfrac{1}{3}At.$$

Sejalan dengan itu maka untuk limas segi-n yang dibagi dalam n buah prisma tegak segitiga berlaku

$$V_{\text{limas segi - n}} = \tfrac{1}{3}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)t$$
$$= \tfrac{1}{3}At \quad \blacksquare$$

Teorema 5

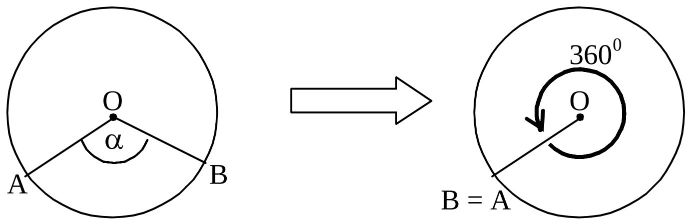
Pada lingkaran berlaku



$$\frac{\text{Luas juring OAB}}{\text{Luas lingkaran}} = \frac{\text{sudut juring OAB}}{\text{sudut satu lingkaran}}$$
$$= \frac{\text{panjang busur AB}}{\text{panjang keliling lingkaran}}$$

Bukti:

Bermula dari juring OAB, misal dipertahankan bahwa titik A tetap sedangkan tititk B bergerak sepanjang lingkaran hingga suatu saat titik B tepat berimpit dengan titik A. Maka gambar yang dihasilkan adalah:



Sudut juring AOB yang disebut sudut α, menjadi sudut 360^0 jika titik A tetap dan titik B bergerak sepanjang keliling lingkaran hingga tepat mencapai titik A. Hal yang sama akan berakibat busur AB yakni $\overset{\frown}{AB}$ *akan menjadi busur keliling lingkaran* dan *juring AOB akan menjadi daerah satu lingkaran penuh.* Sehingga *luas juring AOB menjadi luas daerah lingkaran.*

Dalam bentuk tabel perubahan itu adalah sebagai berikut.

Tabel 1

No.	OBYEK	
	Asal	Hasil
1	sudut α	sudut 360^0
2	busur AB	busur keliling lingkaran
3	luas juring AOB	luas lingkaran

Dengan mengambil sampel misal $\alpha = 90^0$, akan dihasilkan:

(1) $\dfrac{\text{sudut } \alpha}{\text{sudut } 360^0} = \dfrac{90^0}{360^0} = \dfrac{1}{4}$

(2) $\dfrac{\text{busur AB}}{\text{busur keliling lingkaran}} = \dfrac{\frac{1}{4}K}{K} = \dfrac{1}{4}$

(3) $\dfrac{\text{luas juring AOB}}{\text{luas lingkaran}} = \dfrac{\frac{1}{4}L}{L} = \dfrac{1}{4}$.

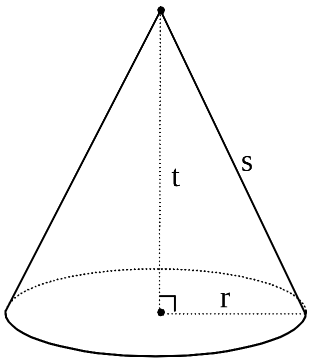
Coba selidiki untuk nilai-nilai α lainnya. Hasil yang diperoleh ternyata nilai perbandingannya selalu sama antara perbandingan sudut α dengan sudut 360^0, perbandingan busur AB dengan busur lingkaran, serta perbandingan luas juring AOB dengan luas lingkaran.

Karena masing-masing dari nilai perbandingannya menunjuk pada bilangan yang sama (salah satu di antaranya adalah $\frac{1}{4}$), maka secara umum disimpulkan bahwa

$$\frac{\text{Luas juring OAB}}{\text{Luas lingkaran}} = \frac{\text{sudut juring OAB}}{\text{sudut satu lingkaran}} = \frac{\text{panjang busur AB}}{\text{panjang keliling lingkaran}}$$ ▧

Teorema 6

Pada kerucut (yang dimaksud adalah kerucut lingkaran tegak) dengan ukuran panjang jari-jari lingkaran alas r dan tingginya t: volume, luas selimut (tidak termasuk alasnya), dan sudut juring bukaannya masing-masing adalah



(a) Volumenya

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 t}$$

(b) Luas selimutnya

$$\boxed{L = \pi rs}$$

(c) Sudut juring bukaannya

$$\boxed{\alpha = \frac{r}{s} \times 360^0}$$

Bukti:

(a) *Volume kerucut*

Karena kerucut dapat dipandang sebagai limas segi - n beraturan (dalam hal ini n bernilai tak terhingga), maka:

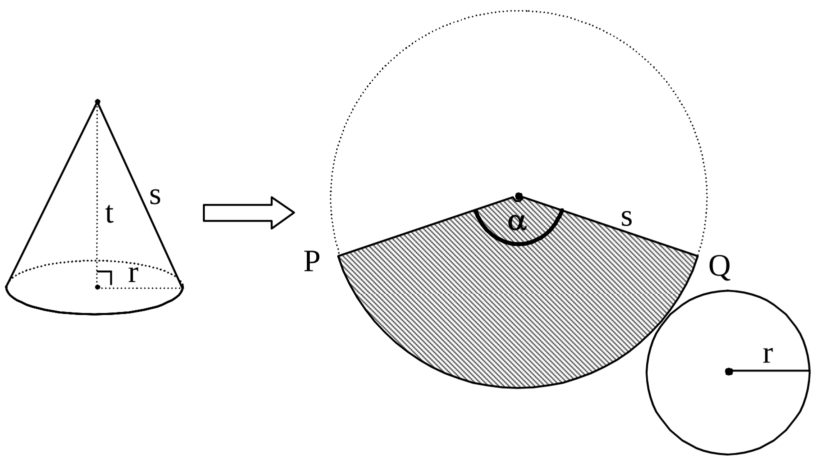
$$V_{\text{kerucut}} = V_{\text{limas beraturan segi} - n}$$

$$= \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times t = \frac{1}{3}\pi r^2 t \quad ▨$$

(b) *Luas selimut*

Luas selimut kerucut yang dimaksud adalah luas juring bukaannya saja (alas kerucut tidak termasuk). Kerucut digunting sepanjang apotemanya (garis pelukis s) kemudian dibuka. Hasilnya dapat dilukiskan pada gambar berikut.



Berdasarkan teorema 4 maka

$$\frac{\text{Luas bagian yang diarsir}}{\text{Luas lingkaran besar}} = \frac{\text{panjang busur PQ (= keliling lingkaran alas kerucut)}}{\text{keliling lingkaran besar yang berjari - jari s}}$$

$$= \frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{r}{s}, \text{ maka}$$

$$\frac{\text{Luas juring bukaan}}{\text{Luas lingkaran besar}} = \frac{r}{s}, \text{ atau}$$

$$\text{Luas juring bukaan} = \frac{r}{s} \times \text{luas lingkaran besar}$$

$$= \frac{r}{s} \times \pi s^2$$

$$= \pi rs \quad ▨$$

(c) Sudut juring bukaannya

Berdasarkan teorema 4 pula, maka

$$\frac{\text{Sudut juring bukaan}}{\text{Sudut satu putaran penuh (lingkaran besar)}} = \frac{\text{panjang busur PQ}}{\text{panjang keliling lingkaran besar}}$$

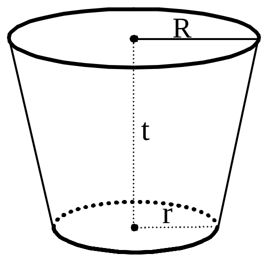
$$= \frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{r}{s}\text{ , sehingga}$$

$$\text{Sudut juring bukaan (besarnya)} = \frac{r}{s} \times \text{sudut satu putaran penuh}$$

$$\alpha = \frac{r}{s} \times 360^0 \ ▧$$

Teorema 7

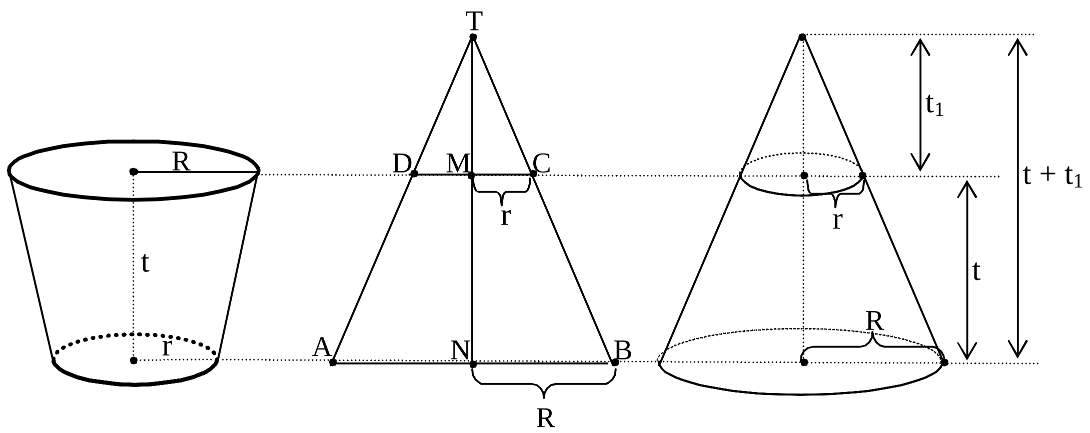
Volume kerucut terpancung (ember) yang ukuran jari-jari lingkaran alasnya r, jari-jari lingkaran atasnya R dan tingginya t adalah



$$V = \frac{1}{3}\pi t\,(R^2 + rR + r^2)$$

Bukti:

Kerucut terpancung (ember) secara matematis diperoleh dari kerucut lingkran tegak yang dipancung (dipotong) bagian atasnya oleh sebuah bidang yang sejajar dengan bidang alas kerucut. Kerangka pemikirannya dapat dilihat pada gambar-gambar peragaan berikut.



Perhatikan bahwa

Δ TMC sebangun dengan Δ TNB. Akibatnya

$$\frac{TM}{TN} = \frac{MC}{NB} \Leftrightarrow \frac{t_1}{t_1 + t} = \frac{r}{R}$$

$$\Leftrightarrow Rt_1 = rt_1 + rt$$

$$\Leftrightarrow (R - r)t_1 = rt$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{rt}{(R-r)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (1)$$

$$\frac{\text{V kerucut bagian atas}}{\text{V kerucut seluruhnya}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 t_1}{\frac{1}{3}\pi R^2 (t_1 + t)}$$

$$= \frac{r^2 t_1}{R^2(t_1 + t)} = \frac{r^2\left(\frac{rt}{R-r}\right)}{R^2\left[\frac{rt}{(R-r)} + t\right]}$$

$$= \frac{\frac{r^3 t}{(R-r)}}{R^2\left[\frac{rt + (R-r)t}{(R-r)}\right]} = \frac{r^3 t}{\cancel{(R-r)}} \cdot \frac{\cancel{(R-r)}}{R^2[\cancel{rt} + Rt - \cancel{rt}]}$$

$$= \frac{r^3 t}{R^3 t} = \frac{r^3}{R^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Akibat dari (2) maka

$$\frac{\text{V ker ucut bagian atas}}{\text{V ker ucut bagian bawah}} = \frac{r^3}{(R^3 - r^3)}$$

$$\frac{\text{V ker ucut bagian bawah}}{\text{V ker ucut bagian atas}} = \frac{(R^3 - r^3)}{r^3}$$

$$V_{\text{kerucut bagian bawah}} = \frac{(R^3 - r^3)}{r^3} . V_{\text{kerucut bagian atas}}$$

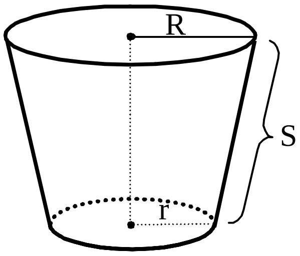
$$V_{\text{kerucut terpancung}} = \frac{(R^3 - r^3)}{r^3} . \frac{1}{3}\pi r^2 t_1$$

$$= \frac{(R-r)(R^2 + rR + r^2)}{r^3} . \frac{1}{3}\pi r^2 \left(\frac{rt}{R-r}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi t (R^2 + rR + r^2)$$

Teorema 8

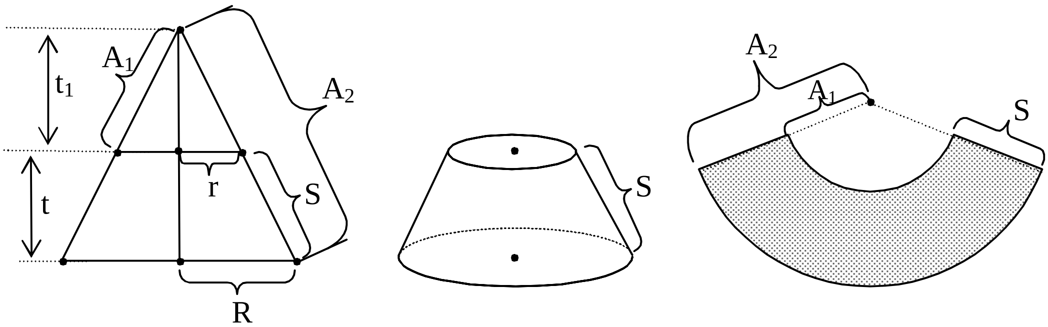
Luas selimut kerucut terpancung dengan ukuran panjang dari jari-jari lingkaran atas, jari-jari lingkaran bawah, apotemanya (garis pelukisnya) berturut-turut R, r, dan S adalah



$$L = \pi(R + r)S$$

Bukti:

Kerucut terpancung adalah bagian dari kerucut lingkaran tegak yang terpancung bagian atasnya. Sehingga untuk membuktikannya dapat diberikan ilustrasi seperti berikut.



(a) (b) (c)

(1) Mengadopsi dari teorema 7 diperoleh

$$t_1 = \frac{rt}{(R-r)}$$

(2) Luas yang diarsir $= L_{\text{juring besar}} - L_{\text{juring kecil}}$

$$= \pi RA_2 - \pi rA_1$$

$$= \pi[RA_2 - rA_1]$$

$$= \pi[R\sqrt{R^2 + (t_1 + t)^2} - r\sqrt{r^2 + t_1^2}\,]$$

$$= \pi\left[R\sqrt{R^2 + \left(\frac{rt}{(R-r)} + t\right)^2} - r\sqrt{r^2 + \left(\frac{rt}{(R-r)}\right)^2}\right]$$

$$= \pi\left[R\sqrt{R^2 + \left(\frac{rt + t(R-r)}{(R-r)}\right)^2} - r\sqrt{\frac{r^2(R-r)^2 + r^2t^2}{(R-r)^2}}\right]$$

$$= \pi\left[R\sqrt{\frac{R^2(R-r)^2 + (\cancel{rt} + Rt - \cancel{rt})^2}{(R-r)^2}} - r\sqrt{\frac{r^2(R-r)^2 + r^2t^2}{(R-r)^2}}\right]$$

$$= \pi\left[\frac{R}{(R-r)}\sqrt{R^2(R-r)^2 + R^2t^2} - \frac{r}{(R-r)}\sqrt{r^2(R-r)^2 + r^2t^2}\right]$$

$$= \pi\left[\frac{R^2}{(R-r)}\sqrt{(R-r)^2 + t^2} - \frac{r^2}{(R-r)}\sqrt{(R-r)^2 + t^2}\right]$$

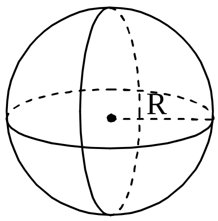
$$= \pi\left[\frac{R^2 - r^2}{(R-r)}\sqrt{(R-r)^2 + t^2}\right]$$

$$= \pi\left[\frac{R^2 - r^2}{R-r}\right]S$$

$$= \pi\left[\frac{(R-r)(R+r)}{(R-r)}\right]S$$

$$= \pi(R + r)S \quad \blacksquare$$

Teorema 9



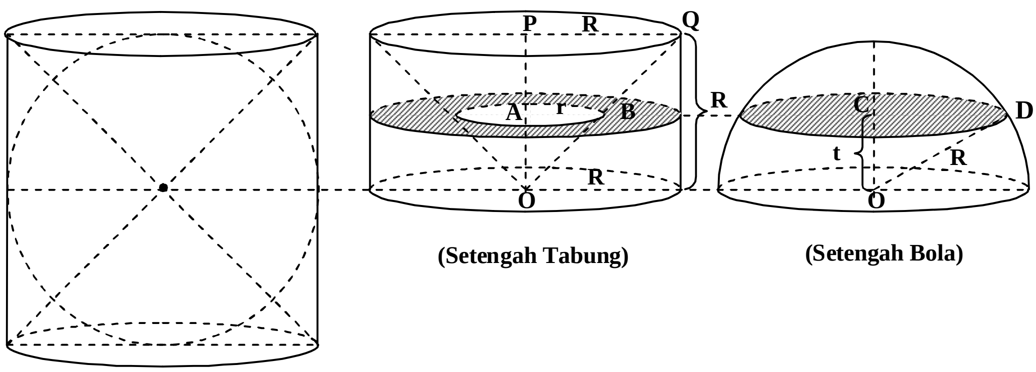
Apabila sebuah bola ukuran panjang jari-jarinya R, maka

a. Volum bola itu adalah $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$

b. Luas permukaan (kulit) bola itu $\boxed{L = 4\pi R^2}$

Bukti a

Untuk membuktikan kita perhatikan bola berikut tabung pasangannya (tabung yang melingkupi bola), dan sepasang kerucut lingkaran tegak yang titik puncaknya di titik pusat bola dan lingkaran alasnya pada tutup alas dan tutup atas tabung (lihat gambar)



(Setengah Tabung) (Setengah Bola)

Sekarang kita ambil sebagian dari bangun itu, yakni setengah tabung dan setengah bola. Suatu bidang yang berjarak t dari alas setengah bola (sekaligus sebagai alas setengah tabung) tentu akan memotong bangun ruang di dalam setengah tabung dan di luar kerucut dalam bentuk mirip cincin dan akan memotong bangun setengah bola dalam bentuk lingkaran (lihat bagian-bagian yang diarsir).

I. Untuk bangun setengah tabung

Δ OAB ~ Δ OPQ, maka

$$\frac{\text{alas}\,\Delta\,\text{OAB}}{\text{alas}\,\Delta\,\text{OPQ}} = \frac{\text{tinggi}\,\Delta\,\text{OAB}}{\text{tinggi}\,\Delta\,\text{OPQ}}\text{, yakni}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{t}{R} \Leftrightarrow r = t$$

$$\begin{aligned}\text{Luas cincin} &= L_{\odot\text{besar}} - L_{\odot\text{kecil}}\\ &= \pi R^2 - \pi r^2\\ &= \pi R^2 - \pi t^2\end{aligned}$$

II. Untuk bangun setengah bola

Δ OCD adalah Δ siku-siku, maka

$$CD = \sqrt{R^2 - t^2}$$

$$\begin{aligned}\text{Luas lingkaran} &= \pi\, CD^2\\ &= \pi\,(\sqrt{R^2 - t^2})^2\\ &= \pi(R^2 - t^2)\\ &= \pi R^2 - \pi t^2\end{aligned}$$

Karena luas permukaan bidang potongnya sama, yaitu luas cincin = luas lingkaran (dalam hal ini = $\pi R^2 - \pi t^2$), maka menurut Postulat Cavalieri,

$$\begin{aligned}V_{\frac{1}{2}\text{bola}} &= V_{\frac{1}{2}\text{tabung}} - V_{\text{ker ucut}}\\ &= \text{L alas} \times \text{tinggi} - \frac{1}{3}\text{L alas} \times \text{tinggi}\\ &= \pi R^2 \times R - \frac{1}{3}\pi R^2 \times R\\ V_{\frac{1}{2}\text{bola}} &= \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3\text{, maka}\end{aligned}$$

$$\boxed{V_{\text{bola}} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

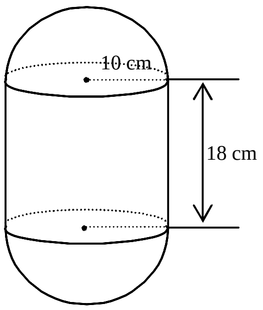
Bukti b

Untuk membuktikan luas permukaan bola = $4\pi R^2$, pandanglah volum bola itu sebagai jumlah volum kerucut-kerucut kecil yang alasnya di permukaan bola dan titik-titik puncak kerucutnya terletak di titik pusat bola. Cobalah untuk membuktikannya.

Latihan

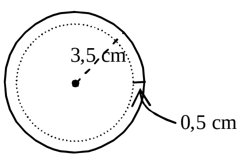
1. Tentukan
   a. volume bola yang jari-jarinya 7 cm
   b. luas permukaan bola yang jari-jarinya 7 cm
   c. volume bola yang jari-jarinya 15 cm
   d. luas permukaan bola yang diameternya 20 cm
   e. jari-jari bola (dalam cm) yang luas permukaannya sekitar $1m^2$
   f. jari-jari bola (dalam cm) yang volumenya sekitar $1m^3$.

2. Tentukan



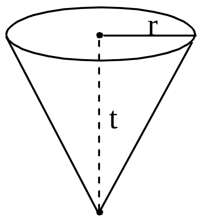
   a. volume bangun ruang seperti pada gambar
   b. luas permukaan bangun ruang seperti pada gambar
   c. volume bola yang luas permukaannya 144π satuan
   d. luas permukaan bola yang volumenya 36π satuan
   e. jari-jari bola yang banyak satuan luasnya dalam cm^2 sama dengan banyak satuan volumenya dalam cm^3.

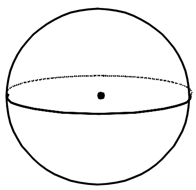
3. Sebuah bola baja berjari-jari 3,5 cm memiliki ketebalan 0,5 cm.



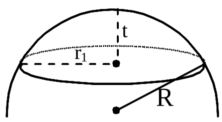
   Tentukan berapa cc baja yang diperlukan.

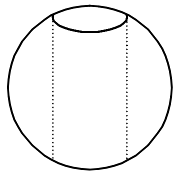
4. Sebuah kerucut mempunyai ukuran jari-jari lingkaran alas yang sama dengan ukuran jari-jari dari sebuah bola. Tinggi kerucut adalah 2 kali jari-jari bola.
   Tentukan perbandingan volume antara kerucut dan bola itu.





5. Sebuah manik-manik berbentuk bola dengan jari-jari 5 mm. Manik-manik itu dilubangi untuk memasukkan benang. Jika diameter lubangnya 6mm.





   a. Tunjukkan bahawa rumus volume tembereng bola (gambar sebelah kiri) dinyatakan dalam R, r_1, dan t adalah

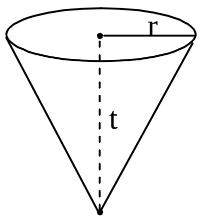
   $$V_{\text{tembereng bola}} = \frac{1}{3}\pi t\,(Rt + r_1^2)$$

   <u>*Petunjuk*</u>
   Perhatikan gambar pada bukti deduktif dari volume bola di atas. Karena luas bidang irisan dengan setengah tabung yang berbentuk seperti cincin sama dengan luas bidang irisan dengan

setengah bola yang berbentuk lingkaran, maka menurut postulat Cavalieri volume tembereng bola di atas bidang irisan sama dengan volume setengah tabung di atas bidang irisan dikurangi dengan volume kerucut terpancung (ember) yang ada di atas bidang irisan

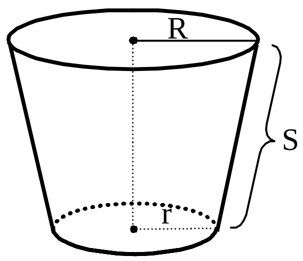
b. Berapa volume bahan pembuat manik-manik itu dalam mm^3. Nyatakan volume bahan itu dalam satuan cc.

6. Tentukan



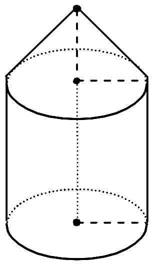
a. berapa m^2 bahan seng yang diperlukan untuk membuat takaran berupa kerucut tanpa tutup dengan ukuran jari-jari r dan tingginya t masing-masing adalah 5 cm dan 12 cm. Berapa volume air maksimal yang dapat ditampung oleh takaran itu.
b. pertanyaan sama dengan nomor a jika kerucutnya berukuran jari-jari dan tinggi masing-masing adalah 8 cm dan 15 cm.
c. berapa takar air yang diperlukan untuk mengisi toples berkapasitas 5 liter menggunakan masing-masing takaran?

7. Misalkan kita membeli sebuah ember. Ember itu kemudian kita ukur diameter lingkaran alas dan lingkaran atasnya, sesudah itu kita ukur panjang garis pelukisnya. Jika hasil pengukuran kita untuk diameter lingkaran alas, lingkaran atas, dan garis pelukisnya masing-masing adalah 30 cm, 44 cm, dan 25 cm. Tentukan



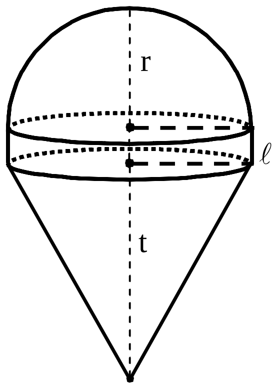
a. volume air maksimum yang dapat ditampung oleh ember itu.
b. Jika bak mandi di rumah mempunyai ukuran panjang, lebar, dan tinggi masing-masing 1,2 m, 80 cm, dan 1 m, berapa ember kira-kira isi bak mandi itu?

8. Sebuah anak timbangan tak berongga memiliki bentuk gabungan dari sebuah tabung dan sebuah kerucut. Tinggi bagian kerucutnya $\frac{1}{2}$ dari tinggi bagian tabungnya, tinggi bagian tabungnya 2 kali ukuran jari-jari tabung. Jika diameter tabung 28 mm, tentukan



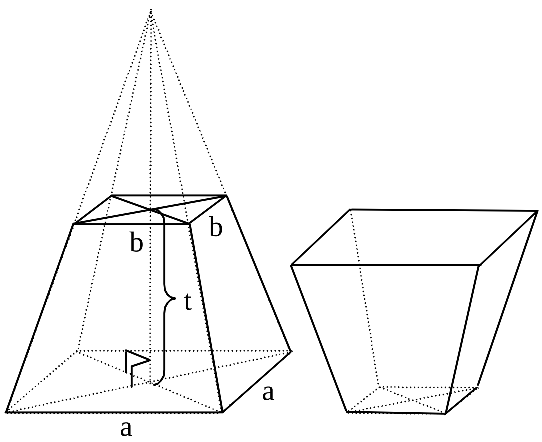
a. volume bahan pembuat anak timbangan itu
b. berat anak timbangan itu jika bahan pembuatnya dari logam yang memiliki berat jenis 5 gram per sentimeter kubiknya
c. diameter tabung (dalam satuan milimeter) untuk anak timbangan seberat 1 kg menggunakan bahan logam yang sama.

9. Permukaan dari kemasan eskrim merupakan bentuk gabungan dari setengah bola, tabung, dan kerucut. Misalkan r, ℓ, dan t masing-masing menyatakan ukuran dari jari-jari bagian setengah bola, ketebalan bagian tabung, dan tinggi bagian kerucut.



a. Nyatakan volume skrim itu dalam r, ℓ, dan t
b. Jika r, ℓ, dan t masing-masing mempunyai ukuran 3,5 cm, 1cm, dan 6 cm, tentukan volume eskrim itu dalam satuan mililiter.
c. Jika perbandingan antara r, ℓ, dan t adalah 7:1:6 dan tebal bagian yang berbentuk tabung adalah 1 cm, tentukan volume eskrim itu dalam mililiter.

10. Sebuah limas segiempat beraturan terpancung ukuran panjang rusuk alas, rusuk atas, dan tingginya masing-masing adalah a, b, dan t.



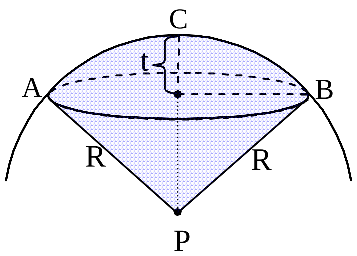
a. Tunjukkan bahwa volume limas terpancung itu dalam a, b, dan t adalah

$$V = \frac{1}{3} t\,(a^2 + ab + b^2)$$

b. Jika suatu bak mandi berbentuk limas segiempat beraturan terpancung dengan ukuran rusuk alas, atas, dan tingginya masing-masing adalah 50cm, 1 m, dan 70 cm, berapa liter air maksimal yang dapat ditampung dalam bak itu?

11. Tunjukkan secara deduktif berdasarkan penalaran bukti b halaman 32 bahwa luas permukaan bola yang berjari-jari R adalah $L = 4\pi R^2$.

12. Suatu juring bola PACB pada bola yang berjari-jari R (lihat gambar) mempunyai bagian tembereng bola yang tingginya t. Tunjukkan bahwa

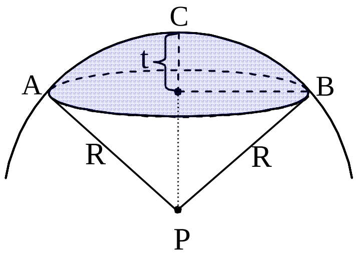


a. Volume juring bola PACB itu adalah

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 t$$

Petunjuk

1. *Gunakan cara pembuktian seperti pada pembuktian luas permukaan bola yakni dengan memandang volume tembereng bola sebagai jumlah volume kerucut-kerucut kecil yang alasnya pada permukaan bola dan puncaknya di titik pusat bola*



2. *Gunakan rumus volume tembereng bola yang telah dibuktikan pada soal nomor 5.*

b. Luas permukaan tembereng bola yang tingginya t pada bola yang berjari-jari R itu adalah

$$\boxed{L = 2\pi Rt.}$$

BAB IV
PENUTUP

A. KESIMPULAN

Geometri, khususnya geometri ruang di SMP materi yang dianggap urgen bagi guru adalah volum dan luas permukaan bangun ruang. Penurunan rumus-rumusnya dilakukan secara induktif agar siswa tertarik dan merasa mudah menerimanya. Namun bukti secara induktif itu sebenarnya belum syah secara matematika. Bukti dinyatakan syah jika sudah terbukti secara deduktif. Menurut psikologi perkembangan *kognitif* (intelektual) anak oleh Piaget (1896 – 1980), bukti secara deduktif semacam itu secara psikologis sudah dapat diterima oleh siswa di atas 11 tahun. Karena siswa SMP pada umumnya sudah berumur 11 tahun jadi sudah tentu mereka sudah dapat menerima bukti secara deduktif. Bagi guru semuanya ternyata dapat dilalui secara menarik dan menyenangkan. Resep apa sebenarnya sehingga yang membuat matematika yang dibahas pada kegiatan diklat dapat menarik dan menyenangkan? Jawabnya tidak lain adalah karena sajian materinya diawali secara kontekstual (berangkat dari konteks kehidupan siswa sehari-hari) dan mengikuti teori Bruner, yakni pembelajaran berangkat dari kongkrit, ditindaklanjuti dengan gambar-gambar (semi kongkrit), dan barulah diakhiri dengan lambang yang sifatnya abstrak. Menurut Bruner (1915 –), jika pembelajaran berjalan seperti itu, maka siswa akan dapat mengembangkan pengetahuannya jauh lebih luas dari apa yang pernah mereka terima dari gurunya. Apabila itu semua dialami oleh peserta diklat (guru), mengapa siswa tidak mengalaminya?. Semuanya tentu tergantung kepada komitmen (niat baik) dan realisasi (pelaksanaan riil/ sesungguhnya) saat kembali ke tempat tugas masing-masing.

B. SARAN

Bagi para alumni diklat yang berkomitmen untuk merealisasikan kepada anak didik, agar mereka menyenangi pelajaran matematika diberikan saran-saran sebagai berikut.

1. Laporkan kepada atasan langsung tentang pengalaman apa saja yang menarik selama menerima sajian akademik dalam kegiatan pelatihan
2. Pikirkan perangkat kerja apa saja yang mendesak untuk dibuat dan segera diterapkan/diimplementasikan di lapangan, jika sebagai guru pertama adalah yang untuk diterapkan di kelas yang diampunya, kemudian kepada sesama guru di sekolahnya, kemudian lagi pada kegiatan MGMP dan terakhir barulah cita-cita ke lingkup yang lebih luas
3. Ciptakan segera perangkat tersebut dengan niat baik, tulus, dan iklas demi anak bangsa di masa depan
4. Diskusikan rencana tindak lanjut Anda pasca pelatihan kepada kepala sekolah dan kepada kolega-kolega anda yang bekompeten di daerah
5. Bersemboyanlah “ Apa yang terbaik yang saya miliki dan dapat saya perbuat untuk kemajuan bangsa ini sebagai andil dalam rangka mencerdaskan bangsa”. Tuhan maha mengetahui dan pasti akan memberikan ganjaran yang patut disyukuri berupa sesuatu yang tak terduga di masa depan.

Amin.

DAFTAR PUSTAKA

Biggs, Edith. (1985). ***Macmillian Junior Mathematics***. London: Macmillian Education Ltd.

Bitter, GG. Cs. (1981). ***Mc Graw-Hill Mathematics.*** New York: Mc Graw-Hill Book Company.

Clemens, Stanley R. Cs. (1984). ***Geometry.*** USA: Addison-Westley Publishing Company, inc.

Depdiknas. (2003). ***Kurikulum 2004 (Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika SMP dan MTs).*** Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.

Raharjo, Marsudi. (2000). ***Pengukuran (Konsep-konsep Dan Beberapa Penurunan Rumus).*** Paket Pembinaan Penataran. Yogyakarta: PPPG Matematika.