DIKLAT GURU PENGEMBANG MATEMATIKA SMK
JENJANG DASAR TAHUN 2009

Irisan Kerucut

Oleh: Fadjar Shadiq, M.App.Sc.

PPPPTK MATEMATIKA
YOGYAKARTA

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK
DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
2009

Quality System
Quality Endorsed Company
ISO 9001: 2000
Lic no:QEC 23961
SAI Global

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas karunia-Nya, bahan ajar ini dapat diselesaikan dengan baik. Bahan ajar ini digunakan pada Diklat Guru Pengembang Matematika SMK Jenjang Dasar Tahun 2009, pola 120 jam yang diselenggarakan oleh PPPPTK Matematika Yogyakarta.

Bahan ajar ini diharapkan dapat menjadi salah satu rujukan dalam usaha peningkatan mutu pengelolaan pembelajaran matematika di sekolah serta dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat di dalam maupun di luar kegiatan diklat.

Diharapkan dengan mempelajari bahan ajar ini, peserta diklat dapat menambah wawasan dan pengetahuan sehingga dapat mengadakan refleksi sejauh mana pemahaman terhadap mata diklat yang sedang/telah diikuti.

Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah berpartisipasi dalam proses penyusunan bahan ajar ini. Kepada para pemerhati dan pelaku pendidikan, kami berharap bahan ajar ini dapat dimanfaatkan dengan baik guna peningkatan mutu pembelajaran matematika di negeri ini.

Demi perbaikan bahan ajar ini, kami mengharapkan adanya saran untuk penyempurnaan bahan ajar ini di masa yang akan datang.
Saran dapat disampaikan kepada kami di PPPPTK Matematika dengan alamat: Jl. Kaliurang KM. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, DIY, Kotak Pos 31 YK-BS Yogyakarta 55281. Telepon (0274) 881717, 885725, Fax. (0274) 885752. email: p4tkmatematika@yahoo.com

Sleman, 11 Mei 2009
Kepala,

Kasman Sulyono
NIP. 130352806

DAFTAR ISI

KOMPETENSI

Memiliki kemampuan untuk mengembangkan keterampilan siswa dalam memahami konsep irisan kerucut dan menerapkannya.

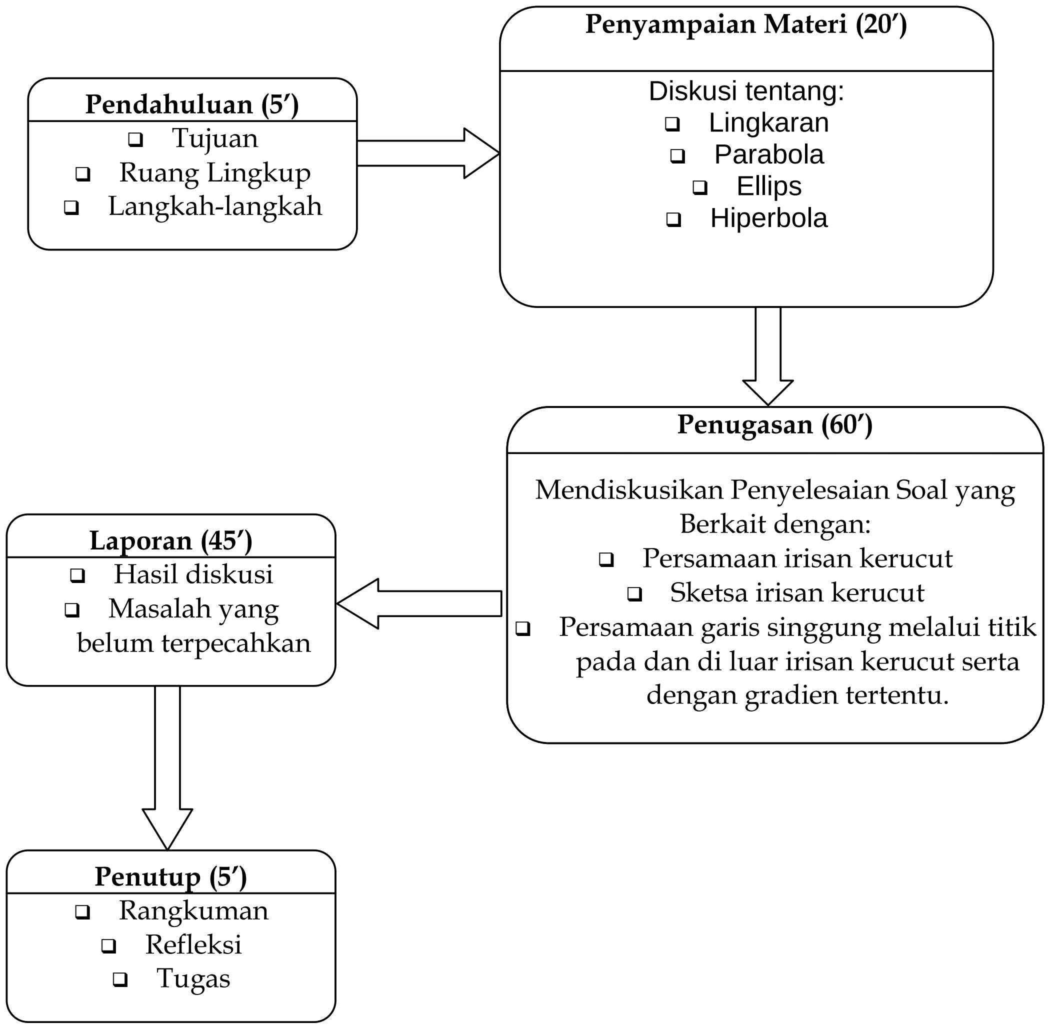
SUB KOMPETENSI

- Menentukan persamaan irisan kerucut jika diketahui beberapa unsurnya (seperti pusat dan fokusnya).
- Menentukan sketsa irisan kerucutnya jika diketahui persamaannya.
- Menentukan persamaan garis singgung melalui suatu titik pada irisan kerucut tertentu.
- Menentukan persamaan garis singgung melalui suatu titik yang terletak di luar suatu irisan kerucut tertentu.
- Menentukan persamaan garis singgung dengan gradien tertentu terhadap suatu irisan kerucut tertentu.

PETA KOMPETENSI GURU MATEMATIKA SMK

Jenjang Dasar
Umum • Menjelaskan wawasan pendidikan di sekolah menengah kejuruan • Menjelaskan Standar Nasional Pendidikan
Spesialisasi/Substansi: • Menjelaskan konsep-konsep dasar materi/pokok bahasan matematika yang akan diajarkan kepada siswa
Manajemen KBM: • Menjelaskan kajian materi matematika SMK yang sesuai dengan KTSP. • Menyusun rencana dan mempraktekkan interaksi pembelajaran kepada siswa yang mengacu pada PAKEM (antara lain Missouri, Mathematical Project, dan Realistik Mathematics Education/CTL) • Menjelaskan penggunaan ICT dan Alat Peraga sebagai media pembelajaran kepada para siswa
Litbang: • Menjelaskan karakteristik penelitian tindakan kelas
Evaluasi Proses dan Hasil Belajar: • Menjelaskan prinsip-prinsip dasar penilaian • Menjelaskan penilaian berbasis sekolah • Menjelaskan alat penilaian • Menjelaskan penyekoran • Menganalisis hasil ulangan harian
Program Tindak Lanjut • Menyusun program tindak lanjut pasca diklat

SKENARIO PEMBELAJARAN



Bab I
Pendahuluan

A. Latar Belakang

Irisan kerucut merupakan salah satu kompetensi yang harus dikuasai siswa SMK ketika mereka mempelajari matematika. Kompetensi ini banyak kaitannya dan juga penggunaannya pada mata pelajaran lain, seperti pada aljabar dan kalkulus. Khusus untuk Matematika Kelompok Teknologi, Kesehatan, dan Pertanian SMK/MAK maka salah satu Standar Kompetensi Lulusan (SKL)-nya berbunya: "Memahami konsep irisan kerucut dan penerapannya dalam pemecahan masalah." Secara khusus, Kompetensi Dasar (KD) dan Indikatornya untuk siswa adalah sebagai berikut.

KD	Indikator
1. Menerapkan konsep Lingkaran	▪ Unsur-unsur lingkaran dideskripsikan sesuai ciri-cirinya ▪ Persamaan lingkaran ditentukan berdasarkan unsur-unsur yang diketahui ▪ Garis singgung lingkaran dilukis dengan benar ▪ Panjang garis singgung lingkaran dihitung dengan benar
2. Menerapkan konsep parabola	▪ Unsur-unsur parabola dideskripsikan sesuai ciri-cirinya ▪ Persamaan parabola ditentukan berdasarkan unsur-unsur yang diketahui ▪ Grafik parabola dilukis dengan benar
3. Menerapkan konsep elips	▪ Unsur-unsur elips dides-kripsikan sesuai ciri-cirinya ▪ Persamaan elips ditentukan berdasarkan unsur-unsur yang diketahui ▪ Grafik elips dilukis dengan benar

Meskipun materi untuk siswa tidak memuat tentang garis singgung, namun materi garis singgung ini dibahas juga pada bahan ajar ini sebagai bahan pengayaan.

B. Tujuan

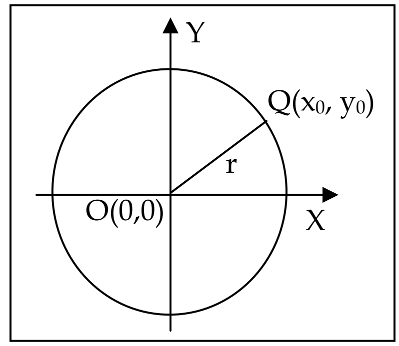
Tujuan penulisan bahan ajar ini adalah untuk membantu para peserta diklat untuk guru matematika SMK di PPPPTK Matematika Yogyakarta; namun dapat juga digunakan pada Diklat di tingkat propinsi atau pada Lembaga Pejaminan Mutu Pendidikan (LPMP) di tingkat Provinsi maupun di tingkat Kabupaten/Kota (pada Badan Diklat Daerah).

C. Ruang Lingkup

Bahan ajar ini berisi tentang irisan kerucut yang terdiri atas lingkaran, parabola, ellips, dan hiperbola. Pada setiap bagian akan dibahas tentang irisan kerucut yang berpusat di titik asal 0(0,0) dan yang berpusat di titik P(a,b); mementukan sketsa maupun persamaan irisan kerucutnya jika diketahui beberapa kriteria tertentu; dan menentukan garis singgung terhadap suatu irisan kerucut jika diketahui koordinat titik yang dilalui garis singgung itu maupun diketahu gradiennya.

Bab II
Lingkaran

A. Definisi dan Persamaan Umum Lingkaran



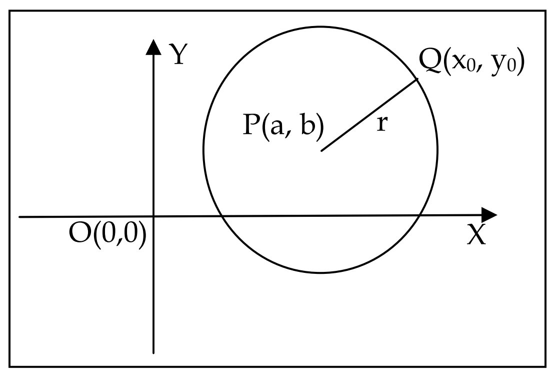
Gambar di sebelah kanan ini yang bentuknya seperti roda disebut lingkaran. Mengapa ketika kita menggambar lingkaran, kita biasanya menggunakan jangka? Lingkaran didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik. Titik tersebut disebut pusat lingkaran dan jarak yang sama tersebut disebut jari-jari lingkaran. Pada gambar, pusat lingkarannya adalah O(0,0) dan salah satu contoh jari-jarinya adalah r = OQ.

Pada gambar di kanan atas, titik $Q(x_0,y_0)$ terletak pada lingkaran, sehingga menurut definisi harus dipenuhi:

$$\text{Jari-jari} = OQ = r$$
$$\sqrt{(x_0-0)^2+(y_0-0)^2} = r$$
$$(x_0-0)^2+(y_0-0)^2 = r^2$$
$$x_0^2+y_0^2 = r^2$$

Jika titik $Q(x_0,y_0)$ dijalankan untuk seluruh lingkaran; diperoleh $x^2 + y^2 = r^2$ yang merupakan persamaan lingkaran dengan pusat O(0,0) dan jari-jari r.

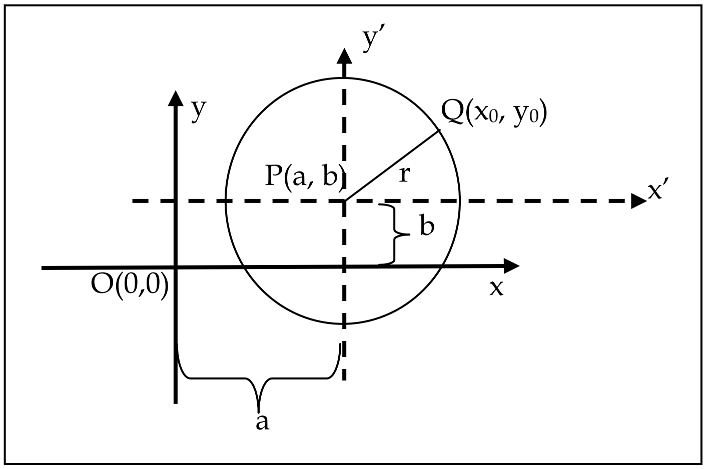
Latihan Bab II.1



1. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat O(0,0) dan panjang jari-jari: (a) 7 dan (b). $4\sqrt{3}$.
2. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang persamaannya $x^2 + y^2 = 25$
3. Gunakan gambar di sebelah kanan ini untuk membuktikan bahwa persamaan lingkaran dengan pusat P(a,b) dan jari-jari r adalah $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
4. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat P(2,3) dan panjang jari-jarinya 9.
5. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat P(2,–3) dan panjang jari-jarinya 7.
6. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat P(–2,–3) dan panjang jari-jarinya 5.
7. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 81$.
8. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 5$.
9. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang persamaannya $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$
10. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang persamaannya $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

Perhatikan gambar di sebelah kanan atas yang menunjukkan persamaan lingkaran dengan pusat P(a,b) dan jari-jari r adalah $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Sumbu yang digunakan adalah sumbu x dan y. Sekarang perhatikan gambar di bawah ini yang menunjukkan adanya dua sumbu, yaitu sumbu x dan y serta sumbu x′ dan y′. Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa:

1. jika menggunakan sumbu x dan y; maka persamaan lingkaran dengan pusat P(a,b) dan jari-jari r adalah $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ seperti ditunjukkan pada pengerjaan soal-soal di atas.
2. jika menggunakan sumbu x′ dan y′; maka persamaan lingkaran dengan pusat P(a,b) dan jari-jari r adalah $(x')^2 + (y')^2 = r^2$.



Contoh ini menunjukkan tentang penggunaan rumus translasi. Nampak jelas bahwa sumbu x dan y telah ditranslasi atau digeser dengan translasi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, di mana a dan b merupakan absis dan ordinat dari pusat lingkaran yang baru. Hubungannya ditentukan dengan rumus:

$$x' = x - a$$
$$y' = y - b$$

Sebagai contoh, jika lingkaran yang memiliki persamaan $x^2 + y^2 = 4$ digeser dengan translasi $\begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix}$; maka jika menggunakan sumbu baru x′ dan y′; maka persamaan adalah $(x')^2 + (y')^2 = 2^2$ di mana $x' = x - 7$ dan $y' = y + 9$; sehingga jika menggunakan sumbu lama x dan y; maka persamaan adalah $(x - 7)^2 + (y + 9)^2 = 4$. Persamaan terakhir menunjukkan juga suatu persamaan dengan pusat (7, –9) dan jari-jari 2.

Anda sudah menyelesaikan soal nomor 9 dan 10 di atas? Bentuk umum persamaannya adalah:

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

Persamaan lingkaran di atas ekivalen dengan bentuk berikut.

$$\Leftrightarrow x^2 + 2Ax + A^2 + y^2 + 2By + B^2 + C - A^2 - B^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + A)^2 + (y + B)^2 = A^2 + B^2 - C$$
$$\Leftrightarrow (x + A)^2 + (y + B)^2 = \left(\sqrt{A^2 + B^2 - C}\right)^2$$

Perhatikan dua bentuk yang ekivalen ini.

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \Leftrightarrow (x + A)^2 + (y + B)^2 = \left(\sqrt{A^2 + B^2 - C}\right)^2$$

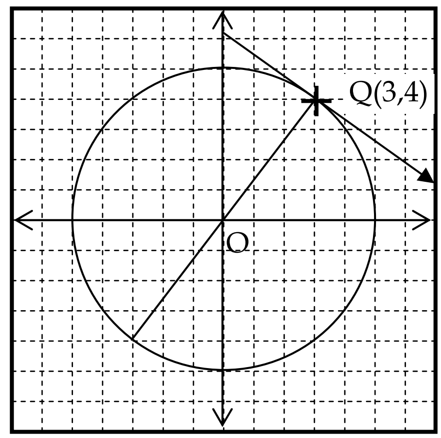
Bentuk terakhir adalah persamaan lingkaran dengan pusat P(–A,–B) dan jari-jari r = $\sqrt{A^2 + B^2 - C}$. Dengan demikian dapatlah disimpulkan bahwa:

Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$
berpusat di P(–A,–B) dan berjari-jari r = $\sqrt{A^2 + B^2 - C}$

Latihan Bab II. 2

1. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran pada soal nomor 9 dan 10 pada Latihan Bab II.1 di atas dengan dua cara.
2. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$

B. Garis Singgung Terhadap Lingkaran



Gambar di sebelah kanan ini menunjukkan suatu lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 5^2$ yang berpusat di titik O(0,0) dan berjari-jari 5 satuan panjang. Pada gambar terlihat jelas bahwa lingkaran tersebut melalui titik (3,4). Sebutkan titik-titik (a,b) lainnya yang dilalui lingkaran di mana a dan b merupakan bilangan bulat. Jika ada yang bertanya tentang persamaan garis singgung di titik Q(3,4), lalu bagaimana cara menjawabnya? Tentunya, yang perlu diperhatikan bahwa garis singgung tersebut harus tegak lurus pada OQ. Dengan demikian, hasil kali gradien garis singgung tersebut (m_2) dengan gradien garis OQ ($m_{OQ} = m_1$) harus bernilai –1.

Dengan mudah dapat dihitung bahwa $m_1 = m_{OQ} = \frac{(y_Q - y_o)}{(x_Q - x_o)} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$.

Karena $m_1 \times m_2 = -1$; sehinggadidapat $m_2 = -\frac{3}{4}$. Dengan demikian, didapat persamaan garis singgung pada lingkaran yang melalui titik Q dengan koordinat (3,4) = (x_Q,y_Q) yang terletak pada lingkaran adalah:

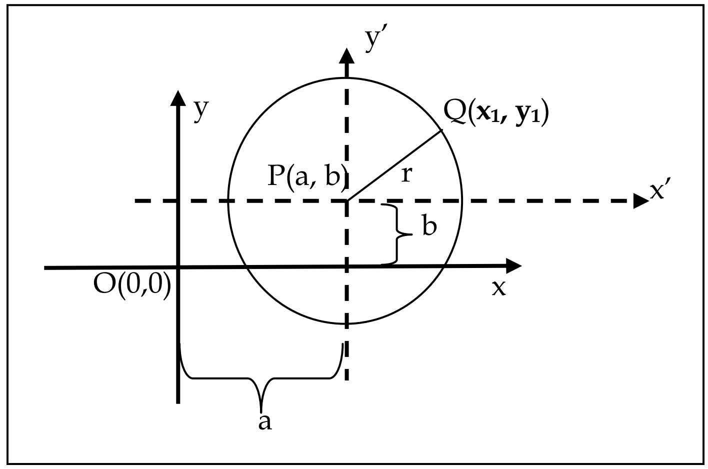
$$(y - y_Q) = m_{OQ}(x - x_Q)$$
$$\Leftrightarrow (y - 4) = -\frac{3}{4}(x - 3)$$
$$\Leftrightarrow 4y - 16 = -3x + 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 4y = 5^2$$

Sekarang bandingkan antara persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 5^2$, titik (3,4) yang terletak pada lingkaran dan persamaan garis singgung $3x + 4y = 5^2$. Adakah yang menarik pada ketiga hal tersebut?

Latihan Bab II. 3

1. Tunjukkan bahwa persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 5^2$ yang melalui titik (–4,3) yang terletak pada lingkaran tersebut adalah $-4x + 3y = 5^2$.
2. Tunjukkan bahwa persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 5^2$ yang melalui titik (p,q) yang terletak pada lingkaran tersebut adalah $px + qy = 5^2$.
3. Tunjukkan bahwa persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ yang melalui titik (x_1,y_1) yang terletak pada lingkaran tersebut adalah $x_1x + y_1y = r^2$.

Gambar di sebelah kanan ini menunjukkan suatu lingkaran berpusat di titik P(a,b) dan berjari-jari r. Jika menggunakan sumbu lama x dan y Persamaan lingkarannya adalah $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
Namun jika menggunakan sumbu baru x′ dan y′; maka persamaan lingkaran dengan pusat P(a,b) dan jari-jari r tersebut adalah $(x')^2 + (y')^2 = r^2$.
Pada gambar terlihat jelas juga bahwa lingkaran tersebut melalui titik $Q(x_1, y_1)$ jika menggunakan sumbu lama dan akan melalui titik $Q'(x'_1, y'_1)$ jika menggunakan sumbu baru.



Hubungan kedua sumbu (lama dan baru) ditentukan oleh rumus:

$$x' = x - a \text{ dan } \mathbf{x_1'} = \mathbf{x_1} - a$$
$$y' = y - b \text{ dan } \mathbf{y_1'} = \mathbf{y_1} - b$$

Jika ada yang bertanya tentang persamaan garis singgung di titik $Q(x_1, y_1)$, lalu bagaimana cara menjawabnya?

Tentunya, jika menggunakan sumbu baru x′ dan y′; maka persamaan garis singgung terhadap lingkaran di titik $Q(x_1', y_1')$ yang terletak pada lingkaran dengan pusat P(a,b) dan jari-jari r adalah sangat mudah, yaitu $x_1'.x' + y_1'.y' = r^2$. Dengan demikian, jika digunakan sumbu lama x dan y; maka persamaan garis singgung terhadap lingkaran di titik $Q(x_1', y_1')$ yang terletak pada lingkaran dengan pusat P(a,b) dan jari-jari r adalah suatu rumus yang disebut dengan rumus 'pembagian adil', yaitu:

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$$

Sangat mudah mendapatkan rumusnya bukan? Berkait dengan pembagian adil ini, menyatakan: "Pada pembagian adil, setiap bentuk yang memuat variabel berderajat dua diubah ke bentuk perkalian dua variabel yang sama. Yang berderajat satu diubah menjadi dua suku yang sama (masing-masing setengahnya)."

Sudah dibahas pada bagian sebelumnya bahwa $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ merupakan persamaan lingkaran berpusat di $P(-A,-B)$ dan berjari-jari $r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$. Pertanyaan selanjutnya adalah, bagaimana menentukan persamaan garis singgung terhadap lingkaran yang melalui titik $Q(x_1, y_1)$ yang terletak pada lingkaran?

Bentuk $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ dapat diubah menjadi bentuk $(x + A)^2 + (y + B)^2 = A^2 + B^2 - C$. Dengan demikian, persamaan garis singgung lingkaran pada titik $Q(x_1, y_1)$ yang terletak pada lingkaran adalah:

$$(x + A)(x_1 + A) + (y + B)(y_1 + B) = A^2 + B^2 - C$$
$$\Leftrightarrow x_1.x + A(x + x_1) + A^2 + y_1.y + B(y + y_1) + B^2 = A^2 + B^2 - C$$
$$\Leftrightarrow x_1.x + y_1.y + A(x + x_1) + B(y + y_1) + C = 0$$

Dengan demikian, persamaan garis singgung terhadap lingkaran yang melalui titik Q(1, 2) yang terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 21 = 0$ adalah:

$$x_1.x + y_1.y + A(x + x_1) + B(y + y_1) + C = 0$$

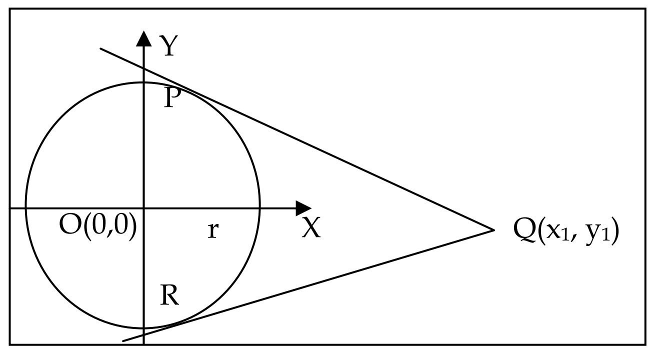
Dengan $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, A = 2, dan B = 3; sehingga didapat persamaan gars singgungnya adalah:

$$1.x + 2.y + 2(x + 1) + 3(y + 2) - 21 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x + 5y - 13 = 0$$

Latihan Bab II. 4

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik yang disebutkan berikut ini

1. Lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 55 = 0$; titik (–3,4)
2. Lingkaran $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 54 = 0$; titik (1,–5)



Gambar di sebelah kanan ini menunjukkan suatu lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$. Dari titik $Q(x_1, y_1)$ yang terletak di luar lingkaran, dapat digambar dua garis singgung terhadap lingkaran tersebut, yaitu garis QP dan QR. Perhatikan bahwa garis OP ⊥ QP, sedangkan garis OR ⊥ QR. Pertanyaan yang dapat diajukan adalah: Bagaimana cara menentukan persamaan garis singgungnya? Sebagai contoh, tentukan persamaan garis singung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ melalui titik (1, 7).

Ada beberapa cara untuk menjawab soal tersebut, di antaranya:

1. Dapat dibuktikan bahwa titik Q(1, 7) terletak di luar lingkaran. Alasannya, jika koordinat titik Q disubstitusikan ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$; akan didapat $x^2 + y^2 = 1^2 + 7^2 = 50 > 25$. Dimisalkan garis singgungnya adalah garis yang melalui titik $Q(x_1, y_1) = Q(1, 7)$ dan bergradien m, sehingga didapat persamaannya adalah:

$$(y - 7) = m(x - 1)$$
$$\Leftrightarrow y = mx - m + 7$$

Garis tersebut memotong lingkaran, sehingga didapat.

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$\Leftrightarrow x^2 + (mx - m + 7)^2 = 25$$
$$\Leftrightarrow (m^2 + 1)x^2 + (-2m^2 + 14m)x + m^2 - 14m + 24 = 0$$

Pada persamaan terakhir, didapat persamaan kuadrat dengan nilai:

$$a = m^2 + 1$$
$$b = -2m^2 + 14m$$
$$c = m^2 - 14m + 24$$

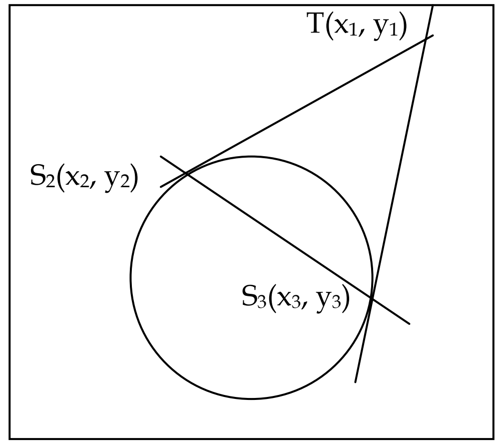
Karena garis tersebut menyinggung lingkaran, maka diskriminan persamaan kuadrat tersebut bernilai 0; sehingga didapat.

$$D = b^2 - 4.a.c = 0$$
$$\Leftrightarrow (-2m^2 + 14m)^2 - 4(m^2 + 1)(m^2 - 14m + 24) = 0$$
$$\Leftrightarrow \cancel{4m^4} - \cancel{56m^3} + 196m^2 - \cancel{4m^4} + \cancel{56m^3} - 96m^2 - 4m^2 + 56m - 96 = 0$$
$$\Leftrightarrow 196m^2 - 96m^2 - 4m^2 - 56m - 96 = 0$$
$$\Leftrightarrow 96m^2 + 56m - 96 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12m^2 + 7m - 12 = 0$$
$$(3m + 4)(4m - 3) = 0$$
$$m = -\frac{4}{3} \text{ atau } m = \frac{3}{4}$$

Untuk $m = -\frac{4}{3}$, maka persamaan garis singungnya adalah $4x + 3y - 25 = 0$

Untuk $m = \frac{3}{4}$, maka persamaan garis singungnya adalah $3x - 4y + 25 = 0$



2. Cara kedua adalah dengan menggunakan persamaan garis kutub atau garis polar (Krismanto, 2001:33). Pada gambar di sebelah kanan, persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 = r^2$. Karena S_2T adalah garis singgung pada lingkaran di $S_2(x_2, y_2)$, maka persamaan garis singgung S_2T adalah:
$$x_2x + y_2y = r^2 \text{ --- } (1)$$
Karena S_3T adalah garis singgung pada pada lingkaran di $S_3(x_3, y_3)$, maka persamaan garis singgung S_3T adalah:
$$x_3x + y_3y = r^2 \text{ --- } (2)$$

Selanjutnya, T terletak pada S_2T sehingga pada (1) didapat $x_2x_1 + y_2y_1 = r^2$ --- (3)
Begitu juga T terletak pada S_3T sehingga pada (2) didapat $x_3x_1 + y_3y_1 = r^2$ --- (4)

Perhatikan persamaan (3). Hal ini menunjukkan bahwa $S_2(x_2, y_2)$ terletak pada $x.x_1 + y.y_1 = r^2$. Selanjutnya, persamaan (4) menunjukkan bahwa $S_3(x_3, y_3)$ juga pada $x.x_1 + y.y_1 = r^2$. Karena baik $S_2(x_2, y_2)$ maupun $S_3(x_3, y_3)$ terletak pada $x.x_1 + y.y_1 = r^2$, sehingga dapat dikatakan bahwa jika titik $T(x_1, y_1)$ terletak di luar lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, maka bentuk $x.x_1 + y.y_1 = r^2$ yang merupakan persamaan garis kutub atau garis polar S_2S_3, yaitu garis yang menghubungkan kedua titik singgungnya.

Sudah ditunjukkan bahwa titik $Q(x_1, y_1) = Q(1, 7)$ terletak di luar lingkaran. Dengan demikian, persamaan $x_1x + y_1y = r^2$ merupakan persamaan garis kutub atau garis polar PR, yaitu garis yang menghubungkan kedua titik singgungnya. Karena koordinat Q adalah (1, 7) maka persamaan garis kutub titik P adalah $1.x + 7.y = 5^2 \Leftrightarrow x + 7y = 25 \Leftrightarrow x = 25 - 7y$. Jika garis kutub tersebut dipotongkan dengan lingkarannya, akan didapat:
$$x^2 + y^2 = 25$$
$$\Leftrightarrow (25 - 7y)^2 + y^2 = 25$$
$$\Leftrightarrow 49y^2 - 350y + 625 + y^2 = 25$$
$$\Leftrightarrow y^2 - 7y + 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow (y - 3)(y - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 3 \text{ atau } y = 4$$
Untuk $y = 3$, maka $x = 4$. Garis singgungnya harus melalui titik (1, 7) dan (4, 3); sehingga persamaannya adalah:
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y - 7}{3 - 7} = \frac{x - 1}{4 - 1}$$
$$\Leftrightarrow 3y - 21 = -4x + 4$$
$$\Leftrightarrow 4x + 3y - 25 = 0$$

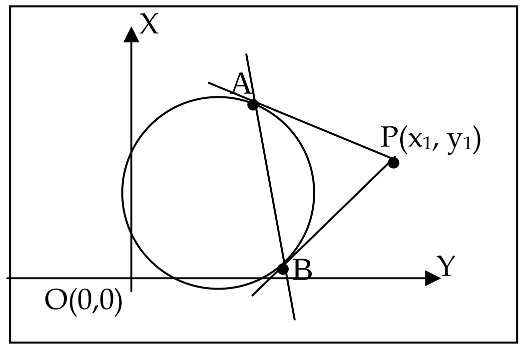
Untuk y = 4, maka x = – 3. Garis singgungnya harus melalui titik (1, 7) dan (–3, 4); sehingga persamaannya adalah:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{y-7}{4-7}=\frac{x-1}{-3-1}$$
$$\Leftrightarrow -4y+28=-3x+3$$
$$\Leftrightarrow 3x-4y+25=0$$

Latihan Bab II. 5

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik yang disebutkan berikut ini

1. Lingkaran $x^2 + y^2$ $x^2 + y^2 = 25$ dan titik (3, –4)
2. Lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ dan titik (2, 1)
3. Lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ dan titik (–7, 1)
4. Lingkaran $x^2 + y^2 = 50$ dan titik (– 1, 7)
5. Lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ dan titik (4,1)



Bagaimana cara menentukan persamaan garis singgung yang melalui titik (x_1,y_1) di luar lingkaran $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$. Cara tercepat yang dapat dilakukan sampai saat ini adalah dengan menggunakan garis kutub atau garis polar AB

Cobalah untuk menyelesaikan soal ini dengan menggunakan garis kutub AB untuk menentukan persamaan garis singgung yang melalui titik (2,3) terhadap lingkaran $x^2 + y^2 -2x - 2y + 1 = 0$.

Dengan mencek titik (2,3) terletak terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Ternyata, jika koordinat titik (2,3) disubstitusikan terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$; didapati bahwa $2^2 + 3^2 - 2.2 - 2.3 + 1 = 4 > 0$; sehingga dapat disimpulkan bahwa titik (2,3) berada di luar lingkaran. Dengan demikian persamaan garis kutub titik (2,3) adalah:

$$x_1.x + y_1.y + A(x + x_1) + B(y + y_1) + C = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x + 3y - 1(x + 2) - 1(y + 3) + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x + 3y - x - 2 - y - 3 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x + 2y - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$$

Dengan memotongkan garis kutub di atas terhadap lingkaran; akan didapat:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + (-\frac{1}{2}x + 2\ )^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4\ - 2x + x - 4 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 5x^2 - 12x + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (5x - 2)(x - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (5x - 2) = 0 \text{ atau } (x - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5} \text{ atau } x = 2$$

Untuk $x = \frac{2}{5}$ didapat $y = 1\frac{4}{5}$; sehingga didapat titik singgung $(\frac{2}{5}, 1\frac{4}{5})$. Persamaan garis singgung yang melalui titik $(\frac{2}{5}, 1\frac{4}{5})$ adalah $x_1.x + y_1.y + A(x + x_1) + B(y + y_1) + C = 0$; yaitu: $3x - 4y + 6 = 0$.

Untuk $x = 2$ didapat $y = 1$; sehingga didapat titik singgung (2,1). Persamaan garis singgung yang melalui titik $(2,1) = (x_1 + y_1)$ adalah $x_1.x + y_1.y + A(x + x_1) + B(y + y_1) + C = 0$; yaitu: $x = 2$

Jadi, persamaan garis singgung yang melalui titik (2,3) terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ adalah $3x - 4y + 6 = 0$ dan $x - 2 = 0$.

Bagaimana cara mencari persamaan garis singgung dengan gradien m terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$? Pertama dimisalkan garis singgungnya melalui titik Q(0,n) dengan gradien m; sehingga persamaan garis tersebut adalah $y = mx + n$. Persamaan ini jika disubstitusikan terhadap lingkaran akan didapat:

$$x^2 + y^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 + (mx + n)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (m^2x^2 + 2mx + n^2) = r^2 \Rightarrow (1 + m^2)x^2 + 2mx + n^2 - r^2 = 0$$

Pada persamaan ini, didapat persamaan kuadrat dengan $a = (1 + m^2)$; $b = 2m$; dan $c = n^2 - r^2$. Agar garis tersebut menyinggung lingkaran; maka disyaratkan $D = b^2 - 4ac = 0$. Didapat:

$$D = 4m^2 - 4(1 + m^2)(n^2 - r^2) = 0 \Leftrightarrow n^2 = r^2(1 + m^2 + 1) \Leftrightarrow n = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

Jadi, persamaan garis singgung dengan gradien m terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$. Jika digunakan translasi $x' = x - a$ dan $y' = y - b$; akan didapat persamaan garis singgung dengan gradien m terhadap lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ adalah:

$$(y - b) = (x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}.$$

Latihan Bab II. 6

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik yang disebutkan berikut ini.

1. Lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$; titik (1,6)
2. Lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 55 = 0$; titik (–3,5)
3. Lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$; titik (1,1)
4. Lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 12 = 0$; titik (0,–2)
5. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu Y di titik O(0,0) dan melalui titik (6,3)
6. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu X, panjang jari-jari = 2 dan pusatnya pada garis $2x + y = 4$
7. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu X, panjang jari-jari = 2 dan pusatnya pada garis $4y = -3x + 16$
8. Tentukan persamaan lingkaran luar segitiga ABC jika A(3,2); B(-1,0); C(0,3). Tentukan pula koordinat pusat dan panjang jari-jarinya.
9. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik A(2,-1); B(4,5) dan C(–3,–2). Tentukan pula koordinat pusat dan panjang jari-jarinya.
10. Tentukan persamaan lingkaran yang memotong sumbu x dan sumbu y positip sepanjang 2 dan 4, dan yang melalui titik asal.
11. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu x positip dan sunbu y positip dengan panjang jari-jari r.
12. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik asal, pusatnya pada garis $x + 2y = 5$, dan jari-jarinya 5.

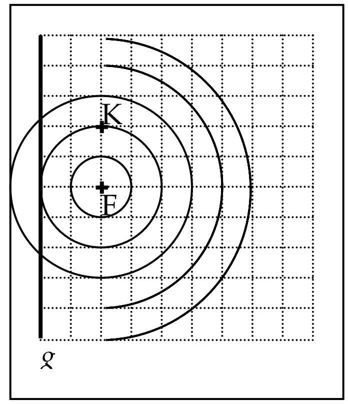
13. Tentukan persamaan lingkaran yang memotong sumbu x dan sumbu y dimana panjang tali busurnya 20 dan 36, dan jari-jarinya $5\sqrt{13}$.
14. Tentukan persamaan kingkaran luar segitiga ABC yang sisi-sisinya mempunyai persamaan garis x = -2y; x = 2; dan y = -2.
15. Sama dengan no. 18 jika sisi-sisinya adalah garis-garis: $y = -2x + 5$; $3x - y = -5$; dan $x - 7y = 25$.
16. Diketahui A(8,0): B(0,4). Carilah persamaan lingkaran yang melalui tengah-tengah ketiga sisi segitiga ABO.

Soal Pilihan Ganda

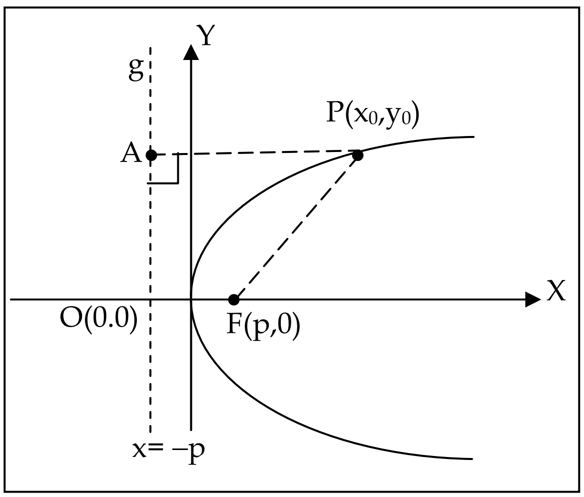
17. Persamaan garis yang melalui pusat lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ dan tegak lurus pada garis $x + y = 1$ adalah … .
    A. $y = x - 1$
    B. $y = x + 7$
    C. $y = -x - 1$
    D. $y = -x + 1$
    E. $y = -x + 7$
18. Garis singgung lingkaran $x2 + y2 = 25$ di titik (–3,4) menyinggung lingkaran dengan pusat (10,5) dan jarijari r. Nilai r = ….
    A. 3 B. 5 C. 7 D. 9 E. 11
19. Persamaan garis singgung melalui titik (9,0) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ adalah ….
    A. $2x + y\sqrt{5} = 18$ & $2x - y\sqrt{5} = 18$
    B. $2x + y\sqrt{5} = 18$ & $-2x - y\sqrt{5} = 18$
    C. $2x + y\sqrt{5} = -18$ & $-2x - y\sqrt{5} = -18$
    D. $x\sqrt{5} + 2y = 18$ & $x\sqrt{5} - 2y = 18$
    E. $x\sqrt{5} + 2y = -18$ & $x\sqrt{5} - 2y = -18$
20. Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ yang tegak lurus pada garis $5x - 12y + 15 = 0$ adalah ….
    A. $12x + 5y - 41 = 0$ & $12x + 5y + 37 = 0$
    B. $12x + 5y + 41 = 0$ & $12x + 5y - 37 = 0$
    C. $5x + 12y + 41 = 0$ & $5x + 12y + 37 = 0$
    D. $5x + 12y - 41 = 0$ & $5x + 12y - 37 = 0$
    E. $12x - 5y - 41 = 0$ & $12x - 5y + 37 = 0$
21. Lingkaran $x^2 + y^2 + 2ax = 0$, dengan a bilangan real konstan, selalu menyinggung ….
    A. sumbu x saja
    B. sumbu y saja
    C. sumbu x dan sumbu y
    D. garis $x = a$ dan garis $x = -a$
    E. garis $y = 2a$ dan garis $y = 2a$
22. Lingkaran yang menyinggung sumbu-sumbu koordinat dan melalui titik T(–1, –2) mempunyai persamaan ….
    A. $x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0$
    B. $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$
    C. $x^2 + y^2 - 2x - y - 9 = 0$
    D. $x^2 + y^2 - 2x + 5y + 18 = 0$
23. Pusat lingkaran L berada di kuadran I dan berada di sepanjang garis $y = 2x$. Jika L menyinggung sumbu y di titik (0, 6) maka persamaan L adalah ….
    A. $x^2 + y^2 - 3x - 6y = 0$
    B. $x^2 + y^2 + 6x + 12y - 108 = 0$
    C. $x^2 + y^2 + 12x + 6y - 72 = 0$
    D. $x^2 + y^2 - 12x - 6y = 0$
    E. $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 36 = 0$
24. Lingkaran $x^2 + y^2 - 2px + q = 0$ yang mempunyai jari-jari 2, akan menyinggung garis $x - y = 0$ bila nilai p yang positip sama dengan ….
    A. 2
    B. $2\sqrt{2}$
    C. 4
    D. $4\sqrt{2}$
    E. 8
25. Jarak terdekat antara titik (7 , –2) ke lingkaran $x2 + y2 - 10x - 14x - 151 = 0$ sama dengan …
    A. 2
    B. 4
    C. 3
    D. 8
    E. 13

Bab III
Parabola

A. Definisi dan Persamaan Umum Parabola



Perhatikan gambar di sebelah kanan ini. Jarak titik K ke titik F dan ke garis *g* adalah sama, yaitu 2 satuan panjang. Carilah atau tentukanlah beberapa titik lainnya yang berjarak sama ke titik F dan ke garis *g*. Ada berapa titik yang Anda dapatkan? Jika himpunan atau tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap satu garis dan satu titik tetap tersebut maka akan didapat suatu parabola. Garis yang tetap itu disebut direktriks dan titik yang tetap itu disebut titik api (*fokus*). Perhatikan parabola di bawah ini. F(p,0) adalah fokus-nya, sedangkan garis g adalah direktriks –nya.



Misalkan titik $P(x_0,y_0)$ terletak pada parabola, maka menurut definisi
Jarak PF = jarak PA

$$\sqrt{(x_P - x_F)^2 + (y_P - y_F)^2} =$$
$$\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2}$$
$$\sqrt{(x_0 - p)^2 + (y_0 - 0)^2} =$$
$$\sqrt{(x_0 + p))^2 + (y_0 - y_0)^2}$$

Kedua ruas di kuadratkan, diperoleh:

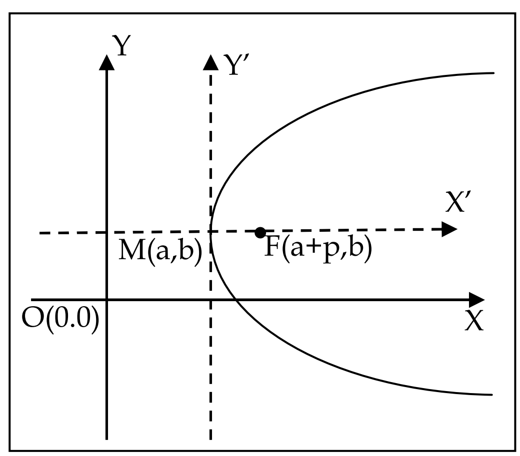
$\Leftrightarrow (x_0 - p)^2 + y_0^2 = (x_0 + p)^2 + 0^2$

$\Leftrightarrow x_0^2 - 2px_0 + p^2 + y_0^2 = x_0^2 + 2px_0 + p^2$

$\Leftrightarrow y_0^2 = 4px_0$, dijalankan diperoleh $y^2 = 4px$.

Perlu diperhatikan bahwa p adalah parameter atau jarak antara puncak ke fokus. Garis $x = -p$ disebut direktriks, sumbu x sebagai sumbu simetri. Jadi persamaan parabola yang puncaknya O(0,0) dan fokusnya F(p,0) adalah $y^2 = 4px$.

Berdasar rumus di atas dapat disimpulkan bahwa $y^2 = 12x$ merupakan persamaan parabola yang puncaknya O(0,0). Karena bentuk umum parabola adalah $y^2 = 4px$, sehingga didapat $4p = 12 \Rightarrow p = 3$. Dengan demikian didapat fokusnya F(p,0) = F(3,0). Sebaliknya, parabola yang puncaknya pada O(0,0) dan fokusnya di F(–4,0) di mana $p = -4$; sehingga persamaannya adalah $y^2 = -16x$.



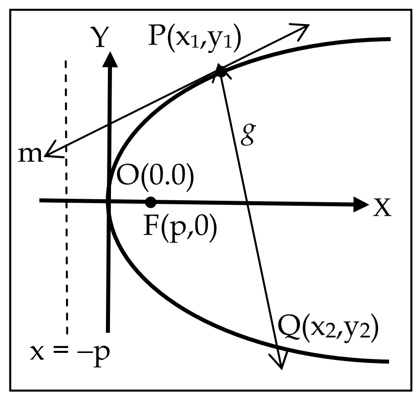
Gambar di sebelah kanan ini menunjukkan parabola yang puncaknya M(a,b) dan fokusnya F(a+p,b). Jika digunakan sumbu baru dengan translasi $x' = x - a$ dan $y' = y - a$;

maka akan didapat persamaan parabola $y'^2 = 4px'$. Jika digunakan sumbu lama, maka akan didapat persamaan parabola $(y - b)^2 = 4p(x - a)$ yang puncaknya pada titik M(a,b) dan fokusnya di F(a+p, b).
Berdasar rumus $(y - b)^2 = 4p(x - a)$ di atas, maka dapat disimpulkan bahwa $(y - 2)^2 = 4.3(x - 5)$ merupakan persamaan parabola yang puncaknya di M(5, 2) dan fokusnya di F(5 + 3, 2). Begitu juga sebaliknya, parabola yang puncaknya pada M(–4,3) dan fokusnya di F(–6, 3) di mana $a = -4$, $b = 3$, dan $p = -2$; sehingga persamaannya adalah $(y - 3)^2 = 4.(-2)(x + 4) \Leftrightarrow y^2 - 6y + 8x + 25 = 0$.

Latihan Bab III. 1

1. Tentukan persamaan parabola dengan puncak O(0,0) dan fokusnya: (a) (2,0) dan (b) (–4,0)
2. Tentukan koordinat puncak dan fokus parabola dengan persamaan: (a) $y^2 = 12x$, (b) $y^2 = -16x$, (c) $x^2 = 12y$, dan (d)) $x^2 = -12y$.
3. Buatlah kesimpulan dari kegiatan pengerjaan soal nomor 2 di atas.
4. Tentukan persamaan parabola dengan direktriks garis $x = -5$ dan puncak pada O(0,0)
5. Tentukan persamaan parabola dengan puncak (2,-5) dan nilai $p = 3$, sumbu simetri sejajar sumbu x.
6. Tentukan koordinat puncak dan fokus dari parabola $y^2 - 2y - 8x - 39 = 0$.

B. Persamaan Garis Singgung terhadap Parabola



Parabola di sebelah kanan ini memiliki puncak di O(0,0) dan fokusnya F(p,0); sehingga persamaannya adalah $y^2 = 4px$. Garis g memotong (terletak pada) parabola di titik $P(x_1,y_1)$ dan $Q(x_2,y_2)$; sehingga didapat $y_1^2 = 4px_1$ dan $y_2^2 = 4px_2$. Dengan demikian didapat selisih kuadratnya adalah:

$$y_2^2 - y_1^2 = 4p(x_2 - x_1)$$
$$\Leftrightarrow (y_2 - y_1)(y_2 - y_1) = 4p(x_2 - x_1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4p}{y_2 + y_1} \quad \text{--- (1)}$$

Persamaan garis g adalah:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1)$$
$$y - y_1 = \frac{4p}{y_2 + y_1}.(x - x_1)$$

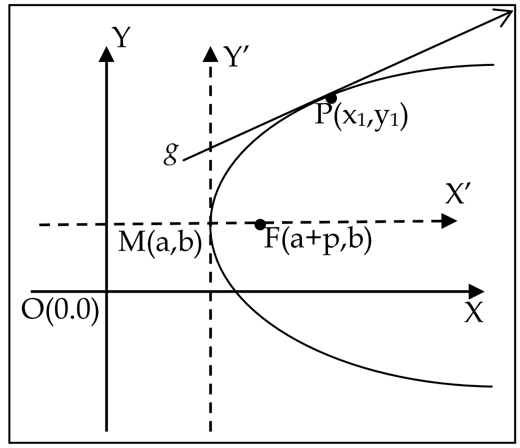
Jika titik $Q(x_2,y_2)$ didekatkan lalu diimpitkan ke titik $P(x_1,y_1)$ akan didapat $x_2 = x_1$ dan $y_2 = y_1$; sehingga persamaan terakhir itu menjadi persamaan garis singgung di titik $P(x_1,y_1)$ pada parabola $y^2 = 4px$, yaitu:

$$y - y_1 = \frac{4p}{2y_1}.(x - x_1)$$
$$\Leftrightarrow y_1.y - y_1^2 = 2px - 2px_1$$
$$\Leftrightarrow y_1.y - 4px = 2px - 2px_1$$
$$\Leftrightarrow y_1.y = 2p(x + x_1)$$

Sebagai contoh, persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = 8x$ pada titik (18,12) yang terletak pada lingkaran adalah $y_1.y = 2p(x + x_1)$ di mana $x_1 = 18$ dan $y_1 = 12$; sehingga didapat persamaan garis singgungnya adalah $12y = 4(x + 18) \Leftrightarrow 4x - 12y + 72 = 0$

Latihan Bab III. 2

1. Tentukan persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = 8x$ dengan absis $x = 2$
2. Tentukan persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = 8x$ yang berordinat $y = 2$
3. Diketahui persamaan garis $y = x - 3$ dan persamaan parabola $y^2 = 4x$. Tentukan persamaan garis singgung pada parabola yang melalui titik potong antara garis dan parabola tadi. [$2x - 6y + 18 = 0$ dan $x + y + 1 = 0$]



Gambar di sebelah kanan ini menunjukkan parabola yang puncaknya M(a,b) dan fokusnya F(a+p,b). Jika digunakan sumbu baru dengan translasi $x' = x - a$ dan $y' = y - b$; maka akan didapat persamaan parabola $y'^2 = 4px'$. Jika digunakan sumbu lama, maka akan didapat persamaan parabola $(y - b)^2 = 4p(x - a)$ yang puncaknya pada titik M(a,b) dan fokusnya di F(a+p, b).

Garis g menyinggung lingkaran di titik $P(x_1,y_1)$. Jika menggunakan sumbu baru akan didapat persamaan $x_1' = x_1 - a$ dan $y_1' = y_1 - b$ maka akan didapat persamaan garis singgung pada parabola di titik $P(x_1,y_1)$:

1. Jika menggunakan sumbu baru (x' dan y') adalah $y_1'.y' = 2p(x' + x_1')$
2. Jika menggunakan sumbu lama (x dan y) adalah $(y_1 - b)(y - b) = 2p[(x - a)(x_1 - a)]$.

Jadi, persamaan garis singgung di titik $P(x_1,y_1)$ pada parabola $(y - b)^2 = 4p(x - a)$ adalah:

$$(y_1 - b)(y - b) = 2p[(x - a)(x_1 - a)]$$

Sebagai contoh, persamaan garis singgung pada parabola $(y - 2)^2 = 8(x - 3)$ pada titik (21,14) yang terletak pada lingkaran adalah $(y_1 - b)(y - b) = 2p[(x - a)(x_1 - a)]$ di mana $x_1 = 21$ dan $y_1 = 14$; sehingga didapat persamaan garis singgungnya adalah:

$$(14 - 2)(y - 2) = 4[(x - 3)(21 - 3)] \Leftrightarrow 4x - 12y + 36 = 0$$

Sebagaimana pada lingkaran, maka dapat dibuktikan bahwa jika titik $T(x_1, y_1)$ terletak di luar parabola $y^2 = 4px$; maka bentuk $y_1.y = 2p(x + x_1)$ merupakan persamaan garis kutub atau garis polar titik T, yaitu garis yang menghubungkan kedua titik singgungnya. Dapat dibuktikan juga bahwa jika titik $T(x_1, y_1)$ terletak di luar parabola $(y - b)^2 = 4p(x - a)$; maka bentuk $(y_1 - b)(y - b) = 2p[(x - a)(x_1 - a)]$ merupakan persamaan garis kutub atau garis polar titik T, yaitu garis yang menghubungkan kedua titik singgungnya. Ketentuan ini dapat digunakan untuk menentukan garis singgung dari suatu titik yang tidak terletak pada parabola.

Jika diketahui sebuah garis g dengan gradien m, maka dapat dimisalkan persamaan garisnya dimisalkan melalui titik (0,n) yaitu: $y = mx + n$. Jika garis tersebut dipotongkan dengan parabola $y^2 = 4px$ maka akan didapat persamaan kuadrat:

$$(mx + n)^2 = 4px \Leftrightarrow m^2x^2 + 2mnx + n^2 = 4px \Leftrightarrow m^2x^2 + (2mn - 4p)x + n^2 = 0.$$

Garis g akan menyinggung parabola jika:

$$D = (2mn - 4p)^2 - m^2x^2 = 0 \Leftrightarrow 4\, m^2x^2 - 16\, mnp + 16p^2 - 4.\, m^2x^2 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{16p^2}{16mp} = \frac{p}{m}$$

Dengan demikian didapat persamaan garis singgung dengan gradien m terhadap parabola adalah

$$y = mx + \frac{p}{m}$$

Dengan mengunakan sumbu baru x′ dan y′; maka persamaan garis singgung dengan gradien m terhadap parabola dengan pusat P(α,β) adalah

$$(y - b) = m(x - a) + \frac{p}{m}$$

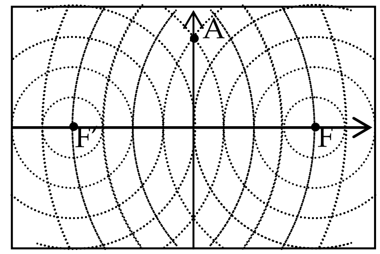
Latihan Bab III. 3

Tentukan:

1. Persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = 8x$ dengan absis $x = 2$.
2. Persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = -4x$, yang berabsis $x = -1$.
3. Persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = 8x$ yang berordinat $y = 2$.
4. Persamaan garis singgung pada parabola $y^2 = 4x$ yang melalui titik potong antara garis $y = x - 3$ dengan parabola tadi. [$2x - 6y + 18 = 0$ dan $x + y + 1 = 0$].
5. Persamaan garis singgung yang melalui titik P(4,3) terhadap parabola $y^2 = 2x$.
6. Persamaan garis singgung yang melalui titik (2,1) terhadap parabola $y^2 = -4x$.
7. Persamaan garis singgung yang melalui titik (1,1) terhadap parabola $(y - 2)^2 = 4(x - 4)$.
8. Tentukan persamaan garis singgung terhadap parabola $y^2 = -8x$ dan sejajar dengan garis $2x - y + 4 = 0$
9. Tentukan persamaan garis singgung terhadap parabola $y^2 = 8x$ yang membentuk sudut 30° terhadap sumbu x positip
10. Tentukan persamaan garis singgung terhadap parabola $y^2 - 4y - 4x + 20 = 0$ dan tegak lurus pada garis gradien $x + 3y = 2009$.
11. Tentukan persamaan garis singgung terhadap parabola $y^2 - 6y - 6x + 15 = 0$ dan membentuk sudut 135° terhadap sumbu x positip.

Bab IV
Ellips

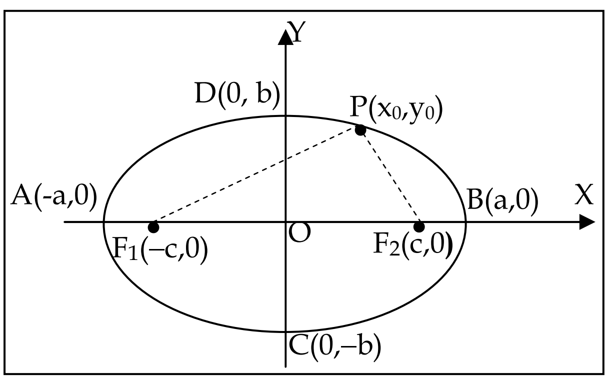
A. Definisi dan Persamaan Umum Ellips



Gambar di sebelah kanan ini menunjukkan beberapa lingkaran atau bagian lingkaran yang berpusat di F atau F′. Jarak titik A ke F dan ke F′ adalah sama, yaitu 5 satuan panjang; sehingga jumlah jarak dari titik A ke dua titik tetap alinnya, yaitu F dan F′ adalah 10 satuan. Tentukan beberapa titik lain yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tetap adalah sama.

Beberapa titik tersebut jika dihubungkan sehingga membentuk kurva yang disebut ellips. Dengan demikian, Ellips adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tetap adalah sama. Dua titik tetap itu disebut fokus dan jumlah jarak yang sama itu dinyatakan dengan 2a.

Dalam kehidupan nyata, banyak dijumpai bentuk-bentuk benda yang berbentuk ellips. Misalnya lintasan komet, yupiter, uranus dan bumi ketika mengelilingi matahari. Contoh lainnya adalah irisan telor asin yang dibagi dua sama besar membujur maupun bayangan roda sepeda oleh sinar matahari yang condong.



Jika dimisalkan titik $P(x_0,y_0)$ adalah titik yang terletak ada ellips, maka menurut definisi

$PF_1 + PF_2 = 2a$

$$\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}+\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=2a$$

Kedua ruas dikuadratkan didapat:

$$\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}=2a-\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}$$

Jika kedua ruas dikuadratkan didapat.

$$\Leftrightarrow (x_0+c)^2+y_0^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}+(x_0-c)^2+y_0^2$$

$$\Leftrightarrow x_0^2+2cx_0+c^2+y_0^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}+x_0^2-2cx_0+c^2$$

$$\Leftrightarrow 4a\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2} = 4a^2-4cx_0$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2} = (a^2-cx_0)$$

Jika kedua ruas dikuadratkan lagi didapat.

$$\Leftrightarrow a^2(x_0-c)^2+y_0^2=(a^2-cx_0)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2x_0^2-2a^2cx_0+a^2c^2+a^2y_0^2=a^4-2cx_0a^2+c^2x_0^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2-c^2)x_0^2+a^2y_0^2=a^2(a^2-c^2)$$

Jika kedua ruas dibagi dengan $a^2(a^2 - c^2)$ didapat

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{(a^2-c^2)}=1$$

Pada ellips ada ketentuan bahwa $a^2 - c^2 = b^2$, sehingga persamaan di atas menjadi

$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$ yang jika titik $P(x_0,y_0)$ dijalankan akan didapat $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

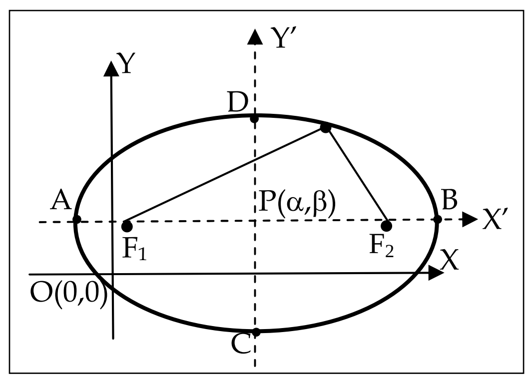
Perhatikan persamaan dan gambar ellips di atas sehingga dapat disimpulkan beberapa hal ini.

1. Pusatnya adalah titik O(0,0).
2. Fokusnya adalah titik $F_1(-c,0)$ dan $F_2(c,0)$
3. Sumbu–x adalah sumbu mayor dan dan sumbu–y adalah sumbu minor jika a > b.
4. Persamaan sumbu mayor adalah y = 0 dan persamaan sumbu minor adalah x`= 0 jika a > b.
5. Sumbu–x dan sumbu-y merupakan sumbu-sumbu simetri.
6. Ellips ini memotong sumbu-x di titik-titik A(–a,0) dan B(a,0) dan memotong sumbu–y di titik-titik C(0,–b) dan D(0,b). Keempat titik itu masing-masing disebut puncak ellips.
7. AB = 2a disebut sumbu-panjang dan CD = 2b disebut sumbu-pendek.

Ttik-titik pada parabola merupakan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik dan suatu garis tetap. Dengan demikian, perbandingan jarak ke suatu titik dan suatu garis adalah tetap nilainya, yaitu = 1. Pada ellips, ternyata bahwa $\frac{c}{a}$ nilainya adalah tetap dengan $0<\frac{c}{a}<1$, dan disebut eksentrisitet ellips. Fokus $F_1(-c,0)$ memiliki kawan *direktriks* $f \equiv x = -\frac{a^2}{c}$, sedangkan fokus $F_2(c,0)$ memiliki kawan *direktriks* $g \equiv x = +\frac{a^2}{c}$.

Ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dengan pusat di O(0,0) telah digeser sehingga pusatnya berada di $P(\alpha,\beta)$. Jika menggunakan sumbu baru $x' = x - \alpha$ dan $y' = y - \beta$; maka akan didapat persamaan ellips $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$ yang jika digunakan sumbu lama, maka akan didapat persamaan ellips

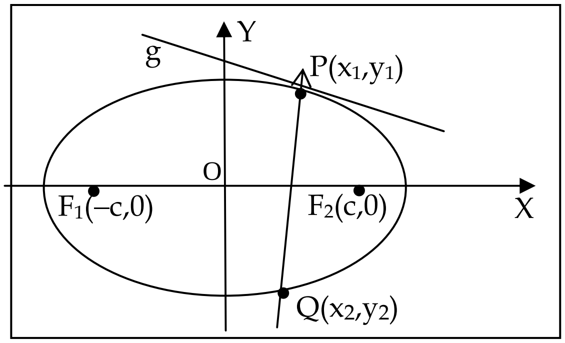
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$



Latihan Bab IV.1

1. Gambarlah sketsa garafik ellips dengan persamaan: (a) $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ dan (b) $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{13^2}=1$
2. Tentukan persamaan ellips dengan pusat O(0,0),
   a. panjang sumbu-panjang 10 dan panjang sumbu-pendek 6.
   b. Jarak kedua fokus pada sumbu-x adalah 6, dan puncaknya (–4,0) dan (4,0).
3. Gambarlah sketsa garafik ellips dengan persamaan: (a) $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$
4. Tentukan persamaan ellips dengan pusat O(2,3), panjang sumbu-panjang 10 dan panjang sumbu-pendek 6.
5. Tentukan pusat, folus-fokus, puncak-puncak serta direktriks dari ellips dengan persamaan $9x^2 + 25y^2 - 54x + 50y - 119 = 0$.

B. Persamaan Garis Singgung terhadap Ellips



Misalkan persamaan di sebelah kanan ini adalah $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2.\,x^2 + a^2.\,y^2 = a^2.b^2$. Dimisalkan titik $P(x_1,y_1)$ dan $Q(x_2,y_2)$ terletak pada ellips, sehingga didapat.

$$m_{PQ} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{--- (1)}$$

Juga didapat:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2.\,x_1^2 + a^2.\,y_1^2 = a^2.b^2 \quad \text{--- (2)}$$

$$b^2.\,x_2^2 + a^2.\,y_2^2 = a^2.b^2 \quad \text{--- (3)}$$

Jika persamaan (2) dikurangi dengan (3); akan didapat:

$$b^2(x_1^2 - x_2^2) + a^2(y_1^2 - y_2^2) = 0$$

$$b^2(x_1^2 - x_2^2) = -\,a^2(y_1^2 - y_2^2)$$

$$b^2(x_1 - x_2)\,(x_1 + x_2) = -\,a^2(y_1 - y_2)\,(y_1 + y_2)$$

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}\right) \quad \text{--- (4)}$$

Bandingkan sekarang persamaan (1) dan (4). Dengan demikian, didapat persamaan garis PQ adalah:

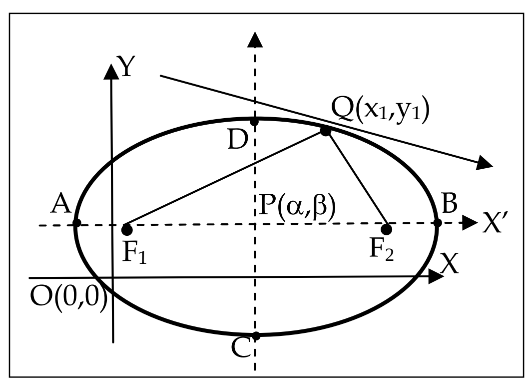
$$y - y_1 = m_{PQ}\,(x - x_1) \Leftrightarrow y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}\right)(x - x_1)$$

Jika titik $Q(x_2,y_2)$ didekatkan ke sehingga berimpit dengan titik $P(x_1,y_1)$ akan didapat $x_2 = x_1$ dan $y_2 = y_1$; sehingga persamaan garis singgungnya menjadi:

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x_1 + x_1}{y_1 + y1}\right)(x - x_1) \Leftrightarrow y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{2x_1}{2y_1}\right)(x - x_1) \Leftrightarrow \frac{y_1(y - y_1)}{b^2} + \frac{x_1(x - x_1)}{a^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{y_1 y}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{x_1^2}{a^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

Berdasar (2), maka ruas kanan persamaan terakhir adalah 1; sehingga didapat persamaan garis singgung di titik $P(x_1,y_1)$ yang terletak pada ellips dengan persamaan $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ adalah $\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}=1$. Agar mudah mengingat rumus tersebut, dapat digunakan aturan pembagian adil.



Gambar di sebelah kanan ini menunjukkan suatu ellips dengan persamaan $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$.

Ellips tersebut berpusat di $P(\alpha,\beta)$. Jika digunakan sumbu baru $x' = x - \alpha$ dan $y' = y - \beta$; maka akan didapat persamaan ellips dan persamaan garis singgung pada ellips di titik $Q(x_1,y_1)$ adalah:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \text{ dan } \frac{x_1'x'}{a^2}+\frac{y_1'y'}{b^2}=1$$

Jika digunakan sumbu baru; maka $x_1' = x_1 - \alpha$ dan $y_1' = y_1 - \beta$; maka pada akhirnya akan didapat persamaan garis singgung di titik $P(x_1,y_1)$ pada ellips dengan pusat $P(\alpha,\beta)$ adalah:

$$\frac{(x_1-\alpha)(x-\alpha)}{a^2}+\frac{(y_1-\beta)(y-\beta)}{b^2}=1$$

Sebagaimana pada lingkaran dan parabola, maka dapat dibuktikan bahwa jika titik $T(x_1, y_1)$ terletak di luar ellips dengan persamaan $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; maka bentuk $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ merupakan persamaan garis kutub atau garis polar titik T, yaitu garis yang menghubungkan kedua titik singgungnya. Dapat dibuktikan juga bahwa jika titik $T(x_1, y_1)$ terletak di luar ellips dengan persamaan $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$; maka bentuk $\frac{(x_1-\alpha)(x-\alpha)}{a^2}+\frac{(y_1-\beta)(y-\beta)}{b^2}=1$ merupakan persamaan garis kutub atau garis polar titik T, yaitu garis yang menghubungkan kedua titik singgungnya. Ketentuan ini dapat digunakan sebagai salah satu alternatif untuk menentukan garis singgung dari suatu titik yang tidak terletak pada ellips.

Jika diketahui sebuah garis g dengan gradien m, maka dapat dimisalkan persamaan garisnya, yaitu: $y = mx + n$. Jika garis tersebut dipotongkan dengan ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ maka akan didapat persamaan kuadrat $(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$. Garis g akan menyinggung ellips jika:

$$D = 4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - n^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2m^2 + b^2 - n^2) = 0 \Leftrightarrow n^2 = a^2m^2 + b^2 \Leftrightarrow n = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

Dengan demikian didapat persamaan garis singgung dengan gradien m terhadap ellips adalah

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$$

Dengan mengunakan sumbu baru x′ dan y′; maka persamaan garis singgung dengan gradien m terhadap ellips dengan pusat $P(\alpha,\beta)$ adalah $(y - b) = m(x - a) \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$

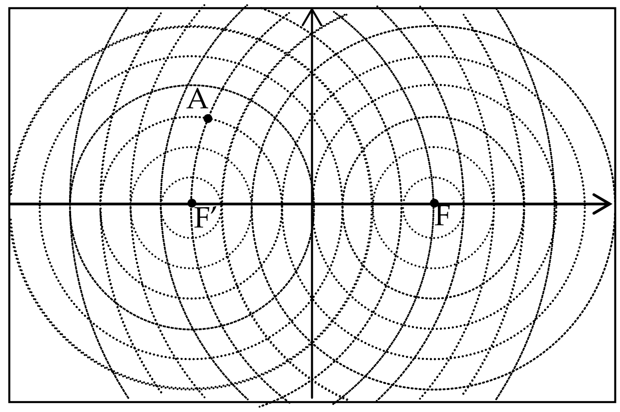
Latihan Bab IV.2

1. Tentukan persamaan garis singgung ellips $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$ melalui titik dengan absis x = 2.
2. Tentukan persamaan garis singgung ellips $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$ dan melalui titik $(2\sqrt{2}, 2)$.
3. Tentukan persamaan garis singgung ellips $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ yang melalui titik (6, 0).
4. Tentukan persamaan garis singgung pada ellips $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ yang membentuk sudut 30° dengan sumbu-x positip.

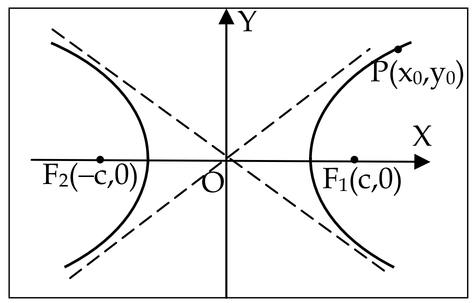
5. Tentukan apakah garis 2x + 3y – 12 dan ellips $4x^2 + 9y^2 = 72$ berpotongan hanya pada satu titik saja, jika 'ya' tentukan titik tersebut.
6. Tentukan persamaan garis singgung pada ellips $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ yang mempunyai gradien $\frac{1}{3}\sqrt{6}$.
7. Tentukan persamaan garis singgung pada ellips $4x^2 + 9y^2 = 72$ yang tegak lurus pada garis 2x + 3y = 29.
8. Tentukan persamaan garis singgung pada ellpis $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ yang melalui titik (3, 1).
9. Tentukan Panjang talibusur yang dapat ditarik melalui fokus dan tegaklurus pada sumbu panjang suatu ellips $b^2x^{2+}a^2y^2 = a^2b^2$ (talibusur ini disebut latus rectum).
10. Tentukan dua buah persamaan garis singgung pada ellips $16x^2 + 25y^2 = 400$ di suatu titik yang berordinat y = 2. Dimanakah kedua garis singgung itu berpotongan?

Bab V
Hiperbola

A. Definisi dan Persamaan Umum Hiperbola



Titik A berjarak 3 satuan jarak ke titik F′. Titik A berjarak 8 satuan ke titik F. Selisih jarak titik A ke titik F′ dan ke F adalah 8 – 3 = 5 satuan. Tentukan beberapa titik lain yang selisih jaraknya ke titik F′ dan ke F adalah 5 satuan. Hubungan titik-titik tersebut untuk membentuk sebuah hiperbola. Jadi, hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya ke dua titik tetap adalah sama. Dua titik tetap itu disebut focus dan selisih jarak yang sama dinyatakan dengan 2a.



Dimisalkan titik $P(x_0,y_0)$ adalah sebuah titik yang terletak pada hiperbola. Menurut definisi didapat $PF_2 – PF_1 = 2a$

$$\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}-\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}=2a+\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_0+c)^2+y_0^2=4a^2+4a\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}+(x_0-c)^2+y_0^2$$

$$\Leftrightarrow x_0^2+2cx_0+c^2+y_0^2=4a^2+4a\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}+x_0^2-2cx_0+c^2$$

$$\Leftrightarrow 4a\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=4cx_0-4a^2$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=(cx_0-a^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2(x_0-c)^2+y_0^2=(cx_0-a^2)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2x_0^2-2a^2cx_0+a^2c^2+a^2y_0^2=a^4-2cx_0a^2+c^2x_0^2$$

$$\Leftrightarrow (c^2-a^2).x_0^2-a^2.y_0^2=a^2(c^2-a^2)$$

Jika kedua ruas dibagi dengan $a^2(c^2 – a^2)$; akan didapat

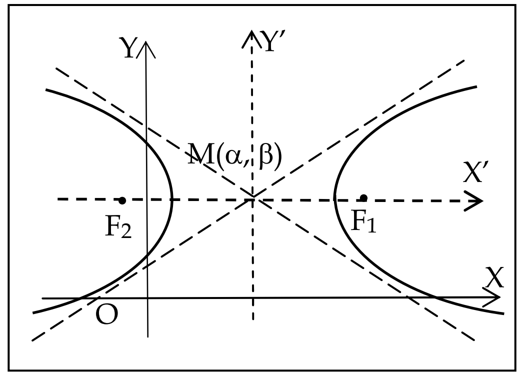
$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{(c^2-a^2)}=1$$

Pada hiperbola ada ketentuan bahwa $(c^2 – a^2) = b^2$, dan jika titik $P(x_0,y_0)$ dijalankan akan didapat persamaan (1) menjadi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ yang merupakan persamaan hiperbola dengan sumbu-x (sumbu nyata) dan sumbu-y (sumbu imaginer) sebagai sumbu simetrinya. Hiperbola memotong sumbu nyata di dua titik, yang disebut puncak-puncak hiperbola, yaitu titik (–a, 0) dan (a, 0). Jarak kedua puncaknya adalah 2a. Fokus-fokusnya adalah $F_1(–c, 0)$ dan $F_2(c, 0)$. Asimtot-asimtotnya adalah $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ atau $y=\frac{b}{a}x$ dan $y=-\frac{b}{a}x$ dimana $(c^2 – a^2) = b^2$.

Hiperbola di sebelah kanan ini berpusat di M(α, β). Dibuat sumbu baru X′ dan Y′ yang berpotongan di M. Hubungan sumbu baru dan sumbu lama adalah:

$$x' = x - \alpha \text{ dan } y' = y - \beta;$$

Jika menggunakan sumbu baru, maka akan didapat persamaan hiperbolanya adalah $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ yang jika digunakan sumbu lama, akan didapat persamaan hiperbolanya adalah $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$



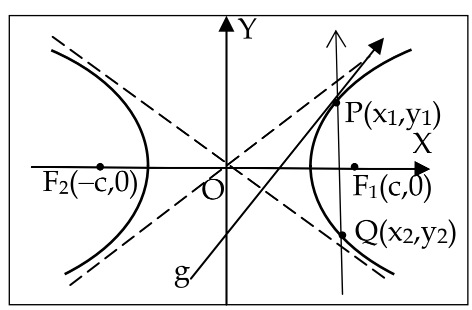
Sudah dibahas di depan bahwa tempat kedudukan titik-titik yang perbandingan jaraknya terhadap sebuah titik tertentu dan sebuah garis tertentu adalah tetap nilainya, yaitu e = 1, maka TK tersebut berupa . Jika 0 < e < 1′ maka TK tersebut berupa ellips. Ternyata bahwa untuk suatu hiperbola didapat e > 1 dan e = $\frac{c}{a}$; sehingga definisi lain untuk hiperbola adalah: "Tempat kedudukan titik-titik yang perbandingan jaraknya ke suatu titik tertentu (fokus) dan ke suatu garis tertentu (direktriks) tetap nilainya, yaitu lebih dari 1." Nilai yang tetap itu adalah ialah e = $\frac{c}{a}$ >1 yang disebut eksentrisitet. Garis f dan g yang dinamakan direktriks mempunyai persamaan masing-masing x = $-\frac{a^2}{c}$ dan x = $\frac{a^2}{c}$.

Latihan Bab V.1

1. Tentukan persamaan hiperbola dengan pusat O(0,0); dan:
   a. Jarak kedua puncaknya 8 dan jarak kedua fokusnya 10 dan fokus terletak pada sumbu-x.
   b. Jarak kedua puncaknya 16, persamaan asimtot-asimtotnya $y = \pm\frac{3}{4}x$
2. Tentukan persamaan hiperbola yang pusatnya pada titik (4,–3); jarak kedua puncaknya 10, dan salah satu fokusnya (17, –3).
3. Diketahui hiperbola dengan persamaan $x^2 - 4y^2 + 2x - 24y - 31 = 0$
   Tentukan
   a. Koordinat pusatnya
   b. Koordinat puncak-puncaknya
   c. Koordinat fokus-fokusnya
   d. Persamaan simtot-asimtotnya
   e. Direktriksnya
   f. Gambar sketsanya
4. Tentukan persamaan hiperbola dengan titik pusat P(3, 5) dan salah satu titik puncaknya adalah (7, 5) dan panjang sumbu imajinernya adalah 6 satuan.
5. Gambarlah grafik $9x^2 - 16y^2 = 144$, juga grafik $16x^2 - 9y^2 = 144$.
   Dimanakah letak fokus dan direktriks hiperbola-hiperbola itu?

B. Persamaan Garis Singgung terhadap Hiperbola

Perhatikan gambar di samping ini. Garis g menyingung hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2.x^2 + a^2.y^2 = a^2.b^2$ di titik $P(x_1,y_1)$.



Bagaimana mencari persamaan garis singgungnya? Diketahui bahwa baik P maupun Q terletak pada hiperbola sehingga didapat beberapa hal berikut.

Titik $P(x_1,y_1)$ pada hiperbola; sehingga $b^2 . x_1^2 - a^2 . y_1^2 = a^2 . b^2$ ---- (1).

Titik $Q(x_2,y_2)$ pada hiperbola; sehingga $b^2 . x_2^2 - a^2 . y_2^2 = a^2 . b^2$ ---- (2).

Gradien garis PQ = $m_{PQ} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ---- (3)

Jika persamaan (1) dikurangi dengan (2); akan didapat:

$$b^2(x_1^2 - x_2^2) - a^2(y_1^2 - y_2^2) = 0$$
$$b^2(x_1^2 - x_2^2) = a^2(y_1^2 - y_2^2)$$
$$b^2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = a^2(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)$$
$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}\right) \text{ --- (4)}$$

Bandingkan sekarang persamaan (3) dan (4). Dengan demikian, didapat persamaan garis PQ adalah:

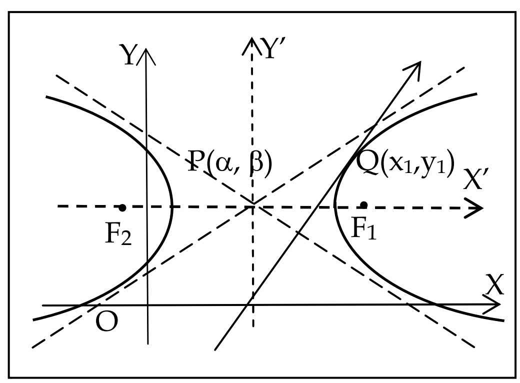
$$y - y_1 = m_{PQ}(x - x_1) \Leftrightarrow y - y_1 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}\right)(x - x_1)$$

Jika titik $Q(x_2,y_2)$ didekatkan ke sehingga berimpit dengan titik $P(x_1,y_1)$ akan didapat $x_2 = x_1$ dan $y_2 = y_1$; sehingga persamaan garis singgungnya menjadi:

$$y - y_1 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x_1 + x_1}{y_1 + y1}\right)(x - x_1) \Leftrightarrow y - y_1 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{2x_1}{2y_1}\right)(x - x_1) \Leftrightarrow \frac{y_1(y - y_1)}{b^2} - \frac{x_1(x - x_1)}{a^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{y_1 y}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{x_1^2}{a^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}$$

Berdasar (2), maka ruas kanan persamaan terakhir adalah 1; sehingga didapat persamaan garis singgung di titik $P(x_1,y_1)$ yang terletak pada hiperbola dengan persamaan $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ adalah $\dfrac{x_1 x}{a^2} - \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1$. Agar mudah mengingat rumus tersebut, dapat digunakan aturan pembagian adil.



Gambar di sebelah kanan ini menunjukkan suatu hiperbola dengan persamaan $\dfrac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$.

Hiperbola tersebut berpusat di $P(\alpha,\beta)$. Jika digunakan sumbu baru $x' = x - \alpha$ dan $y' = y - \beta$; maka akan didapat persamaan hiperbola $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ dan persamaan garis singgung pada hiperbola di titik $Q(x_1,y_1)$ adalah $\dfrac{x_1'x'}{a^2} - \dfrac{y_1'y'}{b^2} = 1$

Jika digunakan sumbu lama; maka pada akhirnya akan didapat persamaan garis singgung pada hiperbola dengan pusat $P(\alpha,\beta)$ adalah:

$$\frac{(x_1-\alpha)(x-\alpha)}{a^2}-\frac{(y_1-\beta)(y-\beta)}{b^2}=1$$

Sebagaimana pada lingkaran, , dan ellips; maka dapat dibuktikan bahwa jika titik T(x_1, y_1) berada di luar suatu hiperbola dengan persamaan $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; maka bentuk $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$ merupakan persamaan garis kutub atau garis polar titik T, yaitu garis yang menghubungkan kedua titik singgungnya. Dapat dibuktikan juga bahwa jika titik T(x_1, y_1) terletak di luar hiperbola dengan persamaan $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$; maka bentuk $\frac{(x_1-\alpha)(x-\alpha)}{a^2}-\frac{(y_1-\beta)(y-\beta)}{b^2}=1$ merupakan persamaan garis kutub atau garis polar titik T, yaitu garis yang menghubungkan kedua titik singgungnya. Ketentuan ini dapat digunakan sebagai salah satu alternatif untuk menentukan garis singgung dari suatu titik yang tidak terletak pada hiperbola.

Berikut ini adalah penjelasan tentang mencari persamaan garis singgung pada hiperbola jika disyaratkan gradien garis singgungnya m. Dapat dimisalkan persamaan garisnya adalah y = mx + n. Jika garis tersebut dipotongkan dengan hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ maka akan didapat persamaan kuadrat $(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mnx - a^2n^2 - a^2b^2 = 0$. Garis g ini akan menyinggung hiperbola jika:

$$D = 4a^2b^2(a^2m^2 - b^2 - n^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2m^2 - b^2 - n^2) = 0 \Leftrightarrow n^2 = a^2m^2 - b^2 \Leftrightarrow n = \pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$$

Dengan demikian didapat persamaan garis singgung dengan gradien m terhadap hiperbola adalah

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2-b^2}$$

Dengan mengunakan sumbu baru x′ dan y′; maka persamaan garis singgung dengan gradien m terhadap hiperbola dengan pusat P(α,β) adalah $(y - b) = m(x - a) \pm \sqrt{a^2m^2-b^2}$

Latihan Bab V.2

1. Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik dengan absis x = 5 pada hiperbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. [5x – 4y = 1 dan 5x + 4 y = 16]
2. Tentukan persamaan garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ yang tegak lurus garis x – 2y + 5 = 0
3. Tentukan persamaan garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{64}=1$ yang membentuk sudut 30° dengan sumbu-x positif. [y = x $\pm$ 6]
4. Tentukan persamaan garis singgung pada hiperbola $10x^2 - 4y^2 - 40x - 8y - 4 = 0$ di titik (4, –1).
5. Tentukan persamaan garis singgung pada hiperbola $2x^2 - 5y^2 + 4x + 20y - 38 = 0$ dengan gradien m = –2.

Bab VI
Penutup

Bahan ajar ini membahas tentang irisan kerucut yang terdiri atas lingkaran, parabola, ellips, dan hiperbola. Pada setiap bagian telah dibahas tentang persamaan irisan kerucut yang berpusat di titik asal 0(0,0). Selanjutnya, dengan menggunakan sumbu baru X' dan Y' di mana X' = X – a dan Y' = Y – b akan didapat persamaan irisan kerucut yang berpusat di titik P(a,b). Penggunaan sumbu baru ini menjadi sangat penting; karena persamaan garis singgung pada irisan kerucut dengan pusat P(a,b) dapat ditentukan berdasar persamaan garis singgung pada irisan kerucut dengan pusat 0(0,0). Di samping itu, setelah mempelajari bahan ajar ini, para guru matematika SMK diharapkan dapat mengaplikasikan pengetahuannya yang berkait dengan persamaan garis melalui titik (0, c) dan dengan gradien m, persamaan garis yang melalui dua titik, serta dapat menggunakan pengetahuan tentang gradien. Pada akhirnya, para peserta Diklat dapat mencobakan hasil yang didapat dan menyesuaikan pengetahuan yang didapat selama Diklat ini dengan keadaan nyata di lapangan. Jika mengalami kesulitan, mohon untuk mendiskusikan dengan kami melalui fadjar_p3g@yahoo.com atau fadjarp3g.wordpress.com. Kami akan selalu berusaha membantu Bapak dan Ibu Guru Matematika SMK. Selamat bertugas dan berjuang mencerdaskan kehidupan bangsa.

DAFTAR PUSTAKA

Al Krismanto (2001). *Garis Singgung pada Irisan Kerucut.* Yogyakarta: PPPG Matematika.

Danuri (2008). *Irisan Kerucut untuk Guru Matematika SMK*. Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

Depdiknas (2006). *Permendiknas Nomor 22 Tahun 2006 Tentang Standar Isi Sekolah Menengah Kejuruan.* Jakarta: Depdiknas.

Jacobs, H.R. (1982). *Mathematics, A Human Endeavor (2nd Ed)*. San Fransisco: W.H. Freeman and Company.

Purcell, E. J. & Varberg, D. (1991). *Kalkulus dan Geometri Analitis.* Jakarta: Erlangga.

Tim Matematika (1990). *Matematika Program Ilmu-Ilmu Fisik untuk Kelas 3 Semester 5 SMA*. Klaten: Intan Pariwara.