DIKLAT GURU PENGEMBANG MATEMATIKA SMK
JENJANG DASAR TAHUN 2009

Kalkulus

Oleh: Drs. Setiawan, M.Pd.

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK
DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
2009

Quality Endorsed Company
ISO 9001: 2000
Lic no:QEC 23961
SAI Global

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas karunia-Nya, bahan ajar ini dapat diselesaikan dengan baik. Bahan ajar ini digunakan pada Diklat Guru Pengembang Matematika SMK Jenjang Dasar Tahun 2009, pola 120 jam yang diselenggarakan oleh PPPPTK Matematika Yogyakarta.

Bahan ajar ini diharapkan dapat menjadi salah satu rujukan dalam usaha peningkatan mutu pengelolaan pembelajaran matematika di sekolah serta dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat di dalam maupun di luar kegiatan diklat.

Diharapkan dengan mempelajari bahan ajar ini, peserta diklat dapat menambah wawasan dan pengetahuan sehingga dapat mengadakan refleksi sejauh mana pemahaman terhadap mata diklat yang sedang/telah diikuti.

Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah berpartisipasi dalam proses penyusunan bahan ajar ini. Kepada para pemerhati dan pelaku pendidikan, kami berharap bahan ajar ini dapat dimanfaatkan dengan baik guna peningkatan mutu pembelajaran matematika di negeri ini.

Demi perbaikan bahan ajar ini, kami mengharapkan adanya saran untuk penyempurnaan bahan ajar ini di masa yang akan datang.
Saran dapat disampaikan kepada kami di PPPPTK Matematika dengan alamat: Jl. Kaliurang KM. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, DIY, Kotak Pos 31 YK-BS Yogyakarta 55281. Telepon (0274) 881717, 885725, Fax. (0274) 885752. email: p4tkmatematika@yahoo.com

Sleman, 11 Mei 2009
Kepala,

Kasman Sulyono
NIP. 130352806

DAFTAR ISI

PETA KOMPETENSI

KALKULUS DASAR

1. Kompetensi

Memiliki kemampuan untuk mengembangkan kompetensi siswa dalam menggunakan konsep-konsep limit fungsi, turunan dan integral, serta menggunakannya dalam pemecahan masalah.

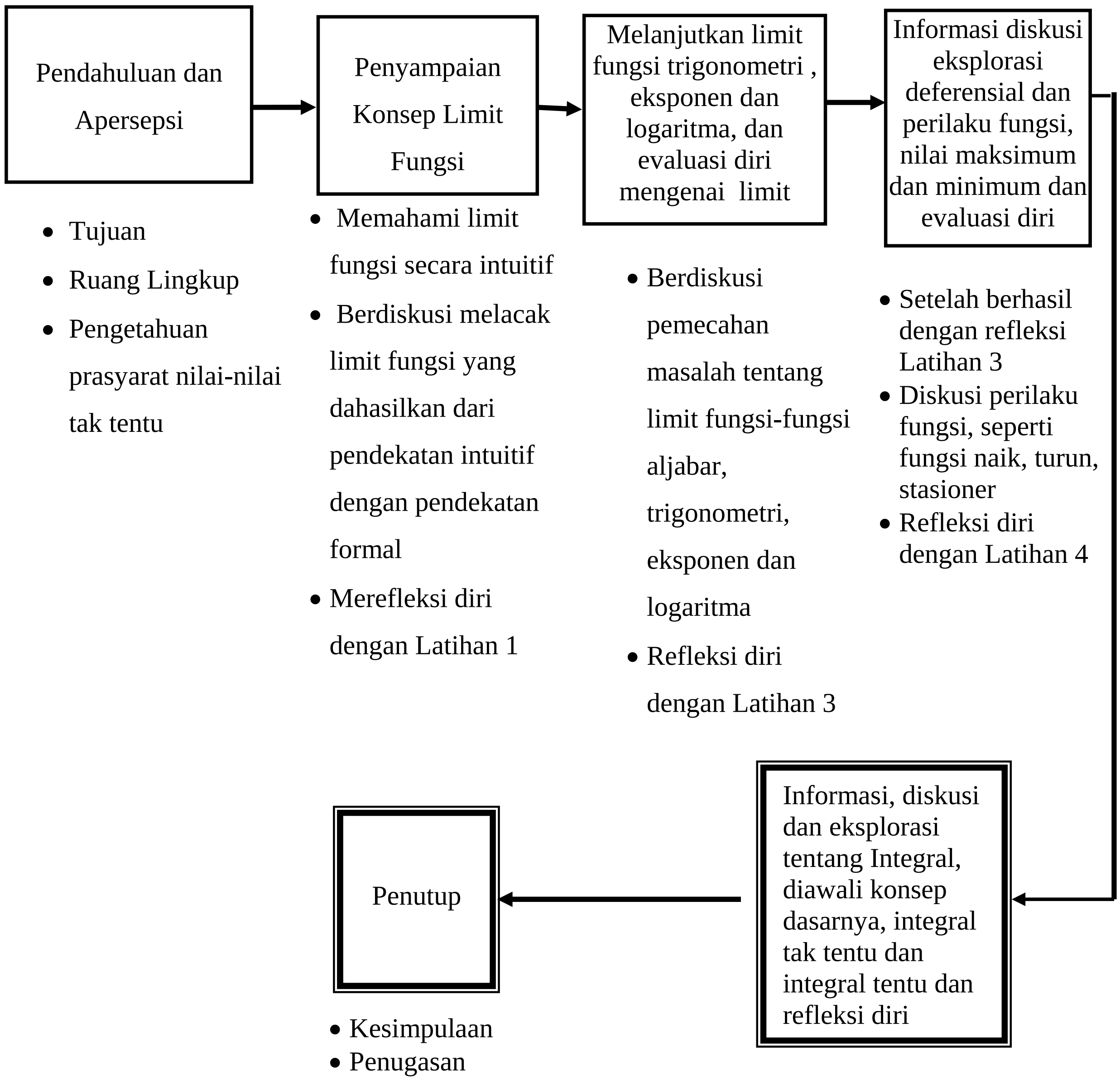
2. Sub Kompetensi

- Mampu mengembangkan keterampilan siswa dalam menentukan limit suatu fungsi dengan pendekatan intuitif dan menggunakannya dalam pemecahan masalah.
- Mampu mengembangakan ketrampilan siswa dalam menentukan turunan suatu fungsi, maksimum dan minimum dan memecahkan persoalan maksimum dan minimum
- Mampu mengembangakan ketrampilan siswa dalam menentukan integral tentu dan tak tentu dan menggunakannya dalam pemecahan masalah

3. Lingkup Materi

- Limit fungsi baik secara intuitif maupun formal
- Fungsi turunan, perilaku fungsi, maksimum dan minimum
- Integral baik integral tentu maupun integral tak tentu

SKENARIO PEMBELAJARAN



BAGIAN I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang.

Mengacu pada Permendiknas no 22 tahun 2006 tentang Standar Isi, disebutkan bahawa mata pelajaran Matematika bertujuan agar peserta didik memiliki kemampuan sebagai berikut.

1. Memahami konsep Matematika, menjelaskan keterkaitan antar konsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma, secara luwes, akurat, efisien, dan tepat, dalam pemecahan masalah
2. Menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika
3. Memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh.
4. Mengkomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah
5. Menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah

Memperhatikan butir-butir tujuan di atas, maka kedudukan kalkulus dalam Standar Isi Mata Pelajaran Matematika, akan menjadi cukup sentral, sehingga materi ini harus mendapatkan perhatian yang cukup serius menyangkut masalah penguasaan materi, pemilihan metoda pembelajaran yang pas dan penentuan strategi serta teknik mengajar yang serasi.

Namun demikian melihat kenyataan di lapangan baik lewat monitoring dan evaluasi bagi para alumnus penataran di P4TK Matematika maupun diskusi-diskusi di MGMP, ternyata materi ini kadang-kadang masih dijumpai kendala di lapangan. Oleh karena itu pembahasan mengenai materi kalkulus ini perlu mendapatkan porsi yang memadai pada penataran-penataran guru matematika, terutama yang diselengggarakan oleh P4TK Matematika Yogyakarta.

Di samping itu kalkulus merupakan salah satu materi yang memiliki cakupan aplikasi yang sangat luas, baik dalam tubuh matematika itu sendiri, maupun dalam cabang-cabang lmu-ilmu yang lain, seperti dalam bidang sains, teknologi, ekonomi dan sebagainya. Oleh karena itu para siswa terlebih-lebih guru matematika SMK harus mendapat bekal materi kalkulus ini sebaik-baiknya.

B. Tujuan Penulisan

Tulisan ini disusun dengan maksud untuk memberikan tambahan pengetahuan berupa wawasan kepada guru matematika SMK dengan harapan :

1. lebih memahami materi kalkulus untuk SMK dan beberapa pengembangannya, terutama masalah limit fungsi, integral dengan substitusi dan integral parsial yang ternyata nasih banyak dijumpai kendala di lapangan.
2. dapat digunakan sebagai salah satu referensi masalah-masalah pengajaran matematika SMK pada pertemuan-pertemuan MGMP Matematika SMK di daerah.
3. memperluas wawasan keilmuan dalam matematika, dan khusunya masalah kalkulus SMK, sehingga guru dapat memilih strategi pembelajaran yang sesuai dengan kondisi di lapangan, sehingga mudah diterima oleh siswa.

C. Sasaran

Tulisan ini disusun untuk menjadikan bahan penambah wawasan :

a. para peserta penataran diklat guru-guru pengembang matematika SMK, oleh P4TK Matematika Yogyakarta.
b. para rekan guru matematika SMK pada umunya dan juga para pemerhati pengajaran matematika.

D. Ruang Lingkup Penulisan.

Ruang lingkup bahan penataran ini meliputi

a. limit fungsi dan kontinuitas.
b. kalkulus diferensial.
c. kalkulus integral

E. Pedoman Penggunaan.

Bahan penataran ini merupakan salah satu acuan dalam memahami materi tentang kalkulus, untuk memahami isi paket ini dengan baik hendaknya terlebih dulu dicermati uraian materi beserta contoh-contohnya dengan seksama, kemudian baru mencoba soal-soal latihan yang telah disediakan, sesuai dengan topik yang tengah dipelajarinya.

Bab II
LIMIT FUNGSI

A. Latar Belakang

Kalkulus adalah salah satu cabang dari matematika yang sangat penting dan banyak diterapkan secara luas pada cabang-cabang ilmu pengetahuan yang lain, misalnya pada cabang sains dan teknologi, pertanian, kedokteran, perekonomian dan sebagainya. Pada makalah ini akan dibahas tiga pokok bahasan, pokok utama dari kalkulus yakni limit fungsi, diferensial fungsi dan integral fungsi. Sebenarnya ada dua cabang dalam kalkulus itu sendiri, yakni kalkulus diferensial dan kalkulus integral, dan jika diperhatikan inti dari pelajaran kalkulus adalah memakai dan menentukan limit suatu fungsi. Bahkan secara ekstrim kalkulus dapat didefinisikan sebagai pengkajian tentang limit. Oleh karena itu pemahaman tentang konsep dan macam-macam fungsi diberbagai cabang ilmu pengetahuan serta sifat-sifat dan operasi limit suatu fungsi merupakan syarat mutlak untuk memahami kalkulus diferensial dan kalkulus integral.

B. Limit Fungsi Aljabar

1. Pengertian Menuju Limit Fungsi:

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Untuk memberi motivasi agar siswa lebih tertarik untuk mempelajari kalkulus, maka perlu diceriterakan sejarah dari Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), sesorang yang sangat besar jasanya dalam pengembangan kalulus. Menyangkut definisi limit yang kita kenal sekarang ini adalah salah satu dari hasil yang andil dari Cauchy.

Augustin Louis Cauchy lahir di Paris, dan me-ngenyam pendidikan di Ecole Polytechnique. Karena kesehatannya yang buruk maka dia dinasihatkan untuk memusatkan pikirannya pada matematika. Salah satu penemuannya adalah kalkulus. Secara historis kalkulus telah ditemukan pada abad ke tujuh belas, namun demikian sampai pada masa Cauchy dirasa bahwa landasan kalulus dirasa belum mantap. Berkat upaya yang dilakukan oleh Cauchy dan para sahabatnya seperti Gauss, Abel dan Bolzano maka dapat ditentukan ketelitian baku.

Kepada Cauchy kita patut berterima kasih atas andilnya meletakkan landasan yang kokoh untuk pengembangan kalkulus yakni definisi konsep limit secara formal yang fundamental.

Untuk dapat memahami konsep limit dengan baik, perlu kiranya kita renungkan suatu paradox yang dikemukan oleh Zeno (495 – 435 SM), sebagai berikut.

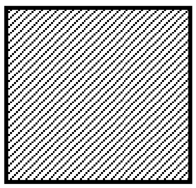
Berdasar mitologi Yunani, diceriterakan pahlawan Perang Troya yang terkenal adalah Achilles. Jago lari ini berlomba lari dengan seekor kura-kura, yang telah menempati posisi separo dari jarak yang meski ditempuh oleh Achilles. Katakan pada posisi start Achilles 0 km dari titik start, maka kura-kura berada pada posisi 1 km di depan, dan dengan kecepatan Achilles dua kali kecepatan kura-kura. Begitu Achilles sampai 1 km, maka kura-kura telah sampai pada posisi 1,5 km, dan pada saat Achilles mencapai 1,5 km, maka kura-kura telah sampai pada posisi 1,75 km, begitu Achilles sampai di posisi 1,75 km, kura-kura telah sampai pada posisi 1,875 km. Pertanyaannya kapan Achilles dapat menyusul kura-kura?. Kalau kegiatan ini diteruskan secara terus menerus maka Achilles bagaimanapun juga tidak akan pernah dapat menyusul kura-kura!. Aneh bukan?. Namun semua orang tahu bahwa dalam dunia nyata Achilles pasti mampu menyusul kura-kura. Paradox yang diketengahkan oleh Zeno ini, dapat dijadikan landasan pemikiran untuk memahami konsep tentang limit fungsi, yang menjadi landasan dari kaluklus baik kalkulus diferensial, maupun kalkulus integral.

C. Memahami Limit Fungsi Secara Intuitif

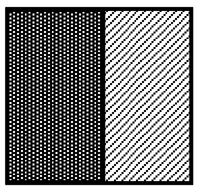
1. Menggunakan persegi yang sisinya a

Kegiatan awal yang dapat digunakan untuk mengawali memahami konsep limit, adalah sebagai berikut.

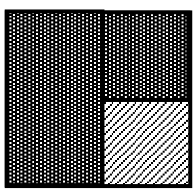
Pandanglah suatu luasan berbentuk persegi yang sisinya 1 satuan.



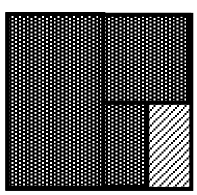
Suatu persegi yang sisinya 1 satuan, sehingga luasnva 1 satuan luas.



Luas bagian persegi yang diarsir tebal adalah $\frac{1}{2}$ stuan



Luas bagian persegi yang diarsir tebal adalah $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ satuan



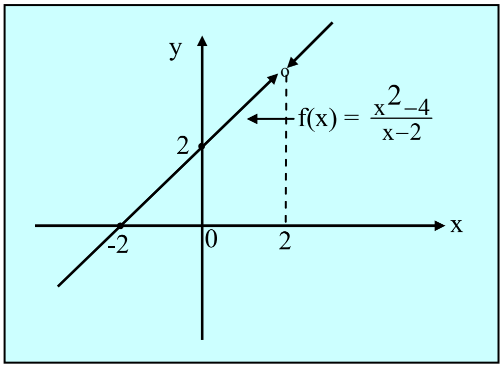
Luas bagian persegi yang diarsir tebal adalah $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ sauan

Begitu dan seterusnya, jika kegiatan ini kita lakukan terus-menerus maka jumlah luas bagian persegi yang diarsir tebal adalah mendekati 1 satuan luas.

Jadi hasil penjumlahan dari $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$ adalah **mendekati** 1

Pengertian limit secara intuitif adalah berangkat dari pengertian **mendekati** di atas.

2. Limit Fungsi secara Intuitif dengan Ilustrasi Grafik
Perhatikan contoh di bawah ini



Gb.1.1

Pandanglah fungsi

$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ dengan domain

$D_f = \{x \mid x \in R, x \neq 2\}$ untuk x = 2, jika dicari nilai fungsi

$f(2) = \dfrac{0}{0}$ = tidak tentu .

Kita cari nilai-nilai f(x) untuk x mendekati 2.

Kita dapat memperhatikan nilai fungsi f(x) di sekitar x = 2 seperti tampak pada tabel. berikut :

x	1,90	1,99	1,999	1,999	…	2	…	2,001	2,01	2,1
f(x)	3,90	3,99	3,999	3,999	…		…	4,001	4,01	4,1

Dari tabel di atas dapat disimpulkan bahwa untuk x mendekati 2 baik dari kiri maupun dari kanan, nilai fungsi tersebut makin mendekati 4, dan dari sini dikatakan bahwa limit f(x) untuk x mendekati 2 sama dengan 4, dan ditulis

$$\lim_{n\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4 .$$

Dari pengertian inilah yang disebut pengertian limit secara intuitif, sehingga :

> Definisi limit secara intuitif, bahwa yang dimaksud dengan $\lim\limits_{n\to c} f(x) = L$ adalah bilamana x dekat tetapi berlainan dari c, maka f(x) dekat ke L.

3. Limit Fungsi Secara Formal
Secara matematis dapat dimaklumi bahwa banyak yang berkeberatan dengan definisi limit secara intuitif di atas, yaitu penggunaan istilah "dekat". Apa sebenarnya makna dekat itu ?. Seberapa dekat itu dapat dikatakan "dekat" ?.
Untuk mengatasi masalah di atas Augustine Louis Cauchy berhasil menyusun definisi tentang limit seperti di bawah ini yang masih kita gunakan sampai sekarang.
Pengertian limit secara intuitif di atas jika diberi definisi formal adalah sebagai berikut.
Definisi :

> Dikatakan $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, adalah bahwa untuk setiap ε > 0 yang diberikan berapapun kecilya, terdapat δ > 0 yang berpadanan sedemikian hingga |f(x) – L | < ε untuk setiap 0 < | x – c| < δ.

Dengan menggunakan definisi limit di atas dapat dibuktikan teorema-teorema pokok tentang limit suatu fungsi sebagai berikut :

1. $\lim_{x \to c} k = k$, jika k suatu konstanta.
2. $\lim_{x \to c} (ax + b) = ac + b$
3. $\lim_{x \to c} k\, f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$
4. $\lim_{x \to c} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x)$
5. $\lim_{x \to c} f(x).g(x) = \lim_{x \to c} f(x). \lim_{x \to c} g(x)$
6. Hukum substitusi :
   Jika $\lim_{x \to c} g(x) = L$ dan $\lim_{x \to c} f(x) = f(L)$, maka $\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(L)$
7. $\lim_{x \to c} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{L}$ jika $\lim_{x \to c} g(x) = L$ dan $L \neq 0$.
8. $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$, jika $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$.
9. Teorema Apit :
   Misalkan $f(x) \le g(x) \le h(x)$ pada setiap interval yang memuat c dan dipenuhi :
   $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$ maka $\lim_{x \to c} g(x) = L$.

Bukti-bukti dari teorema-teorema limit utama di atas di antaranya adalah :

1. Buktikan $\lim_{k \to c} k = k$.

   Bukti : Untuk setiap bilangan positip $\varepsilon > 0$ berapapun kecilnya akan didapat $\delta > 0$ sedemikian untuk setiap x pada $|x - c| < \delta$ dipenuhi $|k - k| < \varepsilon$. Dari $|k - k| = 0$, maka berapapun nilai $\delta > 0$ yang diambil yang menyebabkan $|x - c| < \delta$ akan berakibat $|k - k| < \varepsilon$.

2. Buktikan $\lim_{x \to c} (ax + b) = ac + b$.

   Bukti :
   Untuk membuktikan teorema ini, berarti jika diberikan suatu $\varepsilon > 0$ betapapun kecilnya, akan ditemukan $\delta > 0$ sedemikian hingga $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |(ax + b) - (ac + b)| < \varepsilon$.
   Sekarang dari $|(ax + b) - (ac + b)| = |ax - ac| = |a(x - x)| \le |a||x - c|$.
   Kelihatan bahwa $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ akan memenuhi persyaratan di atas.

   Sehingga jika diberikan $\varepsilon > 0$ betapapun kecilnya dan dipilih $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ maka

$0 < |x - c| < \delta$ menunjukkan :

$|(ax + b) - (ac - b)| = |ax - ac| = |a(x - c)| < |a||x - c| < |a| \dfrac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$

Dengan demikian terbuktilah teoremanya.

Dengan jalan yang sama dapat dibuktikan sifat-sifat limit yang lain.

Contoh 1.

Hitung $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 8)$

Jawab : Dengan menggunakan teorema substitusi

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x + 8) = 2^2 - 3.2 + 8 = 6$$

Contoh 2.

Tentukan $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 + x - 12}{x + 4}$

Jawab : Faktorkan dulu sebab jika disubstitusikan langsung diperoleh $\frac{0}{0}$.

$\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 + x - 12}{x + 4} = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{(x+4)(x-3)}{(x+4)}$ karena x $\neq$ - 4 maka pecahan dapat disederhana -

$= \lim\limits_{x \to -4}$ x - 3 kan.

$= -4 - 3 = -7$

Contoh 3.

Tentukan nilai $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

Penyelesaian :

Cara i

$$\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{\sqrt{4} - 2}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x} - 2} \quad \text{karen } x \neq 4$$

$$= \lim_{x \to 4} (\sqrt{x} + 2)$$

$$= \sqrt{4} + 2 = 4$$

Cara ii, misalkan $\sqrt{x} = y \to x = y^2$

untuk $x \to 4$ maka $y \to 2$, sehingga soal di atas menjadi

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{y\to 2}\frac{y^2-4}{y-2}$$
$$=\lim_{y\to 2}\frac{(y+2)(y-2)}{(y-2)}$$
$$=2+2=4$$

Contoh 4 :

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{x-2}$

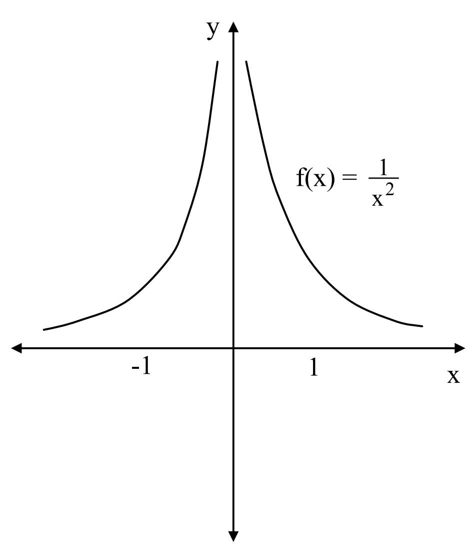
Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2x})}{(x-2)}.\frac{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x}}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2+x)-(2x)}{(x-2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(x-2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2x}}$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=-\frac{1}{4}$$

3. Pengertian Limit di Tak Hingga.

Perhatikan fungsi $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $x\neq 0$ yang domainnya semua bilangan real yang tidak nol. Jika kita cari nilai-nilai fungsi dekat dengan 0.

x	$\frac{1}{x^2}$
1	1
0,1	100
0,01	10.000
0,001	1000 10^6
0,0001	10.000 10^8
$\downarrow$	$\downarrow$
0	besar sekali disebut tak hingga
$\uparrow$	$\uparrow$
-0,0001	10.000 10^8
-0,001	1000 10^6
-0,01	100 10.000
-0,1	10 100
-1	1



Apabila x suatu bilangan baik positip maupun negatif yang sangat kecil maka nilai $\frac{1}{x^2}$ menjadi sangat besar, semakin dekat x dengan nol, maka nilai $\frac{1}{x^2}$ menjadi semakin besar sekali, sehingga dikatakan $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

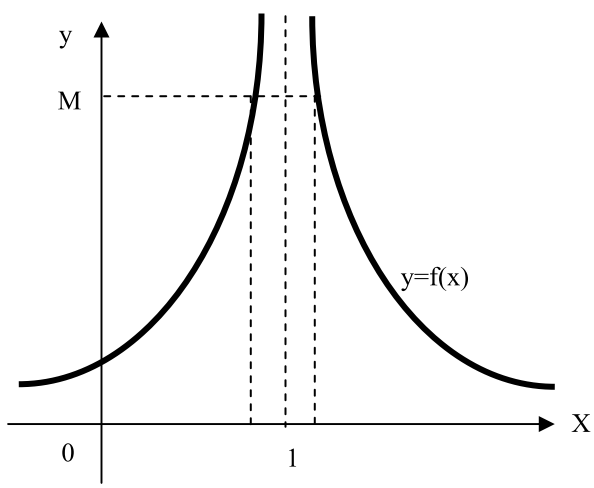
Catatan :

Simbol ∞ dibaca “tak hingga” digunakan untuk melambangkan bilangan yang sangat besar yang tak dapat ditentukan besarnya, tetapi simbol ini tidak menunjuk suatu bilangan real yang manapun.

Pengertian ketak hinggaan sebagaimana dipaparkan secara intuitif di atas secara formal didefinisikan sebagai berikut :

Definisi :

Fungsi f(x) mendekati tak hingga untuk $x \to c$ apabila untuk setiap bilangan positip M betapapun besarnya, adalah mungkin menemukan bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap x selain c jika dipenuhi $|x - c| < \delta$ akan berakibat $|f(x)| > M$ dan ditulis $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$



Contoh 1 :

Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(1 - x)^2} = +\infty$

Bukti :

Untuk membuktikan itu berarti untuk setiap M > 0 yang diberikan betapapun besarnya adalah mungkin menemukan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap x yang memenuhi $|x - 1| < \delta$ akan diperoleh $\frac{1}{(1-x)^2} > M$.

Dari $\frac{1}{(1-x)^2} > M$. berarti $(1 - x)^2 < \frac{1}{M}$.

Sehingga $|1 - x| < \dfrac{1}{\sqrt{M}}$.

Jika diambil $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$, berarti untuk setiap x pada $|x - 1| < \dfrac{1}{\sqrt{M}}$ akan dipenuhi

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 < \dfrac{1}{M}$

$\Leftrightarrow (1 - x)^2 < \dfrac{1}{M}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(1-x)^2} > M.$

Dari pertidaksamaan terakhir ini menunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty$

Contoh 2.

Tentukan $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x-1}$

Jawab : Secara intuitif jika x dekat dengan 1 maka x – 1 akan mendekati 0, sehingga dapat difahami (secara intuitif) bila $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x-1} = \infty$

Dan jika ingin dibuktikan secara formal berarti untuk setiap bilangan M > 0 betapapun besarnya, adalah mungkin ditemukan $\delta > 0$, sedemikian hingga untuk setiap x pada $|x - 1| < \delta$ akan dipenuhi $\left|\dfrac{x}{x-1}\right| > M$.

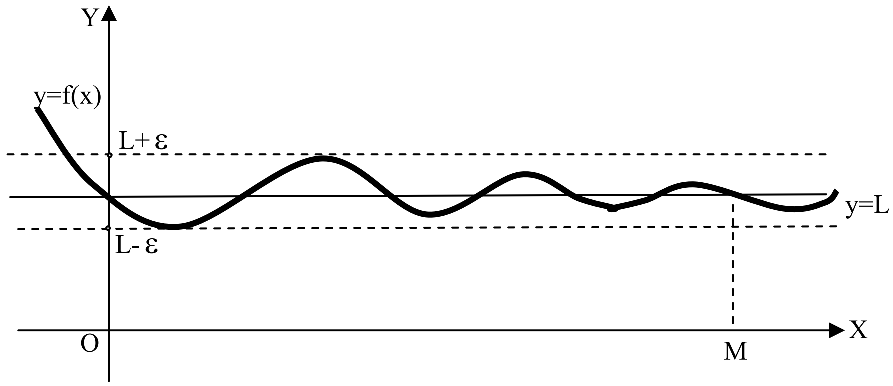
Sedangkan limit fungsi untuk x yang bernilai besar dapat didefinisikan sebagai berikut :

Definisi :

Jika f(x) terdefinisi untuk x yang bernilai besar, kita katakan bahwa f(x) mendekati L sebagai limit untuk x mendekati tak hingga, dan ditulis :

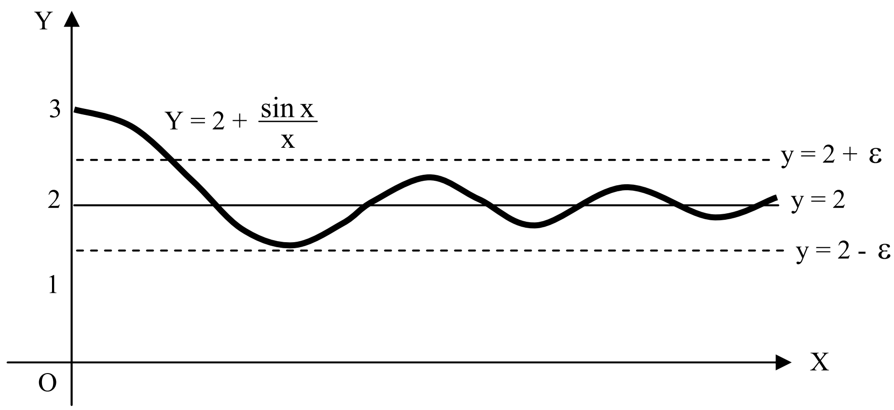
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$, bahwa apabila diberikan $\varepsilon > 0$ maka akan ditemukan suatu bilangan M sedemikian hingga dipenuhi $|f(x) - L| < \varepsilon$ apabila $x > M$.

Ilustrasi geometris dari pengertian di atas adalah sebagai berikut :



Contoh 1.

Pandanglah fungsi $f(x) = 2 + \frac{\sin x}{x}$



Grafiknya beroskilasi terhadap garis y = 2.

Amplitudo dari oskilasinya semakin kecil menuju nol.

Untuk $x \to \infty$, dan kurvanya terletak di antara $y = 2 + \varepsilon$ dan $y = 2 - \varepsilon$ jika $x > M$

Atau dengan kata lain :

Jika x besar, $\frac{\sin x}{x} \to 0$ dan $f(x) \to L = 2$

Contoh 2

Tentukan $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 3x})$

Jawab :

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x})}{(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x})}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-(x^2+3x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x}}$$

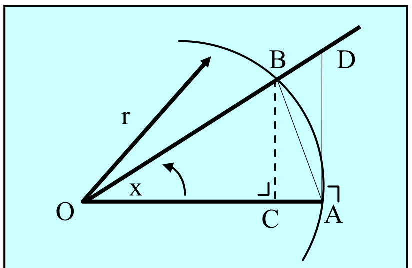
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

D. Limit Fungsi Trigonometri



Gb.1.3

Misalkan x dalam radian, dan $0 < x < \frac{\pi}{2}$, maka

BC = r sin x dan AD = r tan x.

Untuk mencari luas sektor ⊙ AOB

$$\frac{\text{Luas sektor ⊙ AOB}}{\text{Luas seluruh lingkaran}} = \frac{x}{2\pi}$$

$$\frac{\text{Luas sektor ⊙ AOB}}{\pi r^2} = \frac{x}{2\pi}$$

Sehingga luas sektor ⊙ AOB = $\frac{x}{2\pi}.\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2x$

Dari bangun di atas diperoleh :

Luas Δ AOB < luas juring AOB < luas Δ AOD

½ . OA . BC < ½ r^2x < ½ . OA . AD

½ . r . r sin x < ½ r^2x < ½ . r . r tan x

½ r^2 sin x < ½ r^2x < ½ r^2 tan x

sin x < x < tan x ………………….. (i)

Dari (i) diperoleh :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} 1 \le \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} \le \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$1 \le \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{1} = 1$$

Jadi $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$

Dari sini dapat dikembangkan :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Dan untuk $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x.\cos x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$= 1.1 = 1$$

Demikian juga dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x} = 1$

Kesimpulan :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x} = 1$

Contoh

Hitunglah :

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}$ b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{5x}$ c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$

Penyelesaian :

a. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$$

b. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right).\frac{3}{5}$$

$$= 1.\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

c. $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 3x}{3x}\right)\left(\frac{5x}{\sin 5x}\right).\frac{3}{5}$$

$$= 1.1.\frac{3}{5}$$

$$= \frac{3}{5}.$$

E. Limit Fungsi Eksponensial

a. Bilangan e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{1}.\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}.\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-1)}{3!}.\frac{1}{n^3}+...+\frac{1}{n^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)+ ... +\frac{1}{n^n}\right)$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+ ...$$

Jika diambil sampai sepuluh tempat desimal diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818284$$

Nilai limit ini disebut bilangan e atau bilangan Euler (diambil nama sang penemu yaitu Leonard Euler matematikawan Austria 1707 – 1783).

Sehingga :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Limit ini dapat dikembangkan untuk setiap x $\in$ R dipenuhi

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Jika disubstitusikan u = $\frac{1}{x}$ maka diperoleh rumus

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

Contoh tentukan $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+3}$

Jawab : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x.\left(1+\frac{2}{x}\right)^3$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}.2}\left(1+\frac{2}{x}\right)^3$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^2.\left(1+\frac{2}{x}\right)^3$$

$$= e^2 . (1+0)^3$$

$$= e^2.$$

Logaritma yang mengambil e sebagai bilangan pokok disebut logaritma naturalis atau logaritma Napier, dan ditulis dengan notasi "ln", sehingga ln x = $^{e}\log x$.

Dari $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, maka $^{a}\log\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = {}^{a}\log e$

$$\lim_{x\to 0} {}^{a}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = {}^{a}\log e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{^{a}\log(1+x)}{x} = \frac{\ln e}{\ln a}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{^{a}\log(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \qquad \ldots\ldots\ldots..\text{(i)}$$

Misalkan $^{a}\log(1+x) = y$

$1 + x = a^{y} \rightarrow x = a^{y} - 1$

Untuk $x \rightarrow 0$, maka $a^{y} \rightarrow 1$ yang berarti $y \rightarrow 0$, sehingga persamaan (i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{y}{a^{y}-1} = \frac{1}{\ln a}$$

Sehingga : $\lim\limits_{y\to 0} \frac{a^{y}-1}{y} = \ln a$

Atau secara umum : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^{x}-1}{x} = \ln a}$

Jika disubstitusikan a dengan e

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = \ln e$ atau $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1}$

Contoh : Tentukan $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

Jawab : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1-e^{bx}+1}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{ax}-1}{x} - \frac{e^{bx}-1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}\,.\,a - \frac{e^{bx}-1}{bx}\,.\,b\right)$$

$= 1\ .\ a - 1\ .\ b$

$= a - b$

Latihan 1

Tentukan nilai limitnya

1. $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 - 7x + 4)$

2. $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{2}{x} + x \right)$

3. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{9 + x^2}}{x - 3}$

4. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$

5. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^5 - 1}{x^2 + x + 1}$

6. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

7. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$

8. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 3x + 10}{x + 2}$

9. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

10. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x} - 5}$

11. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2x}}{x - 2}$

12. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x - 2} - \sqrt{3x - 5}}{x - 3}$

13. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2x - 1}}{2x - 3 - \sqrt{x}}$

14. $\lim\limits_{x \to 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$ $\quad$ (misal: $\sqrt[3]{x} = y^2$)

15. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - 3}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{2}}$

16. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - 2\sqrt{x}}{x}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\sqrt{5} - \sqrt{5 - x}}$

18. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x + 2})$

19. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

20. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$

21. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(1 + 2 + 3 + ... + n)}{n^2}$

22. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1)}{n^2 + 2}$

23. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} \right)$

24. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \frac{7}{n^2} + ... + \frac{3n - 2}{n^2} \right)$

25. Hitung $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}}}$ $\quad$ Petunjuk : kuadratkan x

26. Tentukan limit U_n dari barisan

 0,3 ; 0,33 ; 0,333 ; 0,3333

27. Tentukan limit U_n dari barisan
 0,2 , 0,23 , 0,233 , 02333 , …

28. Tentukan limit suku U_n dari barisan

 $\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}},\ ...$

29. Tentukan limit suku U_n dari barisan

 $\sqrt{6},\ \sqrt{6\sqrt{6}},\ \sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6}}},\ \sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6}}}},\ ...$

30. Tentukan limit U_n dari barisan berikut

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \ldots, \frac{2n}{2n-1}, \ldots$$

31. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x}$
32. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$
33. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2}$
34. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$
35. $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{cotg} x$
36. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$
37. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$
38. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 + \cos x - \sin x}{\cos x - 1 + \sin x}$
39. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\tan \pi x}{x + 2}$
40. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$
41. $\lim\limits_{x \to \sim} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+5}$
42. $\lim\limits_{x \to \sim} \left(1 + \dfrac{7}{x}\right)^{x}$
43. $\lim\limits_{x \to \sim} \left(1 - \dfrac{3}{x}\right)^{x}$

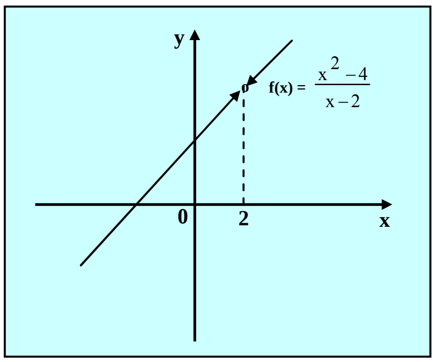
47. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4^x - 2^x}{3x}$
48. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{3x}}{x}$
49. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^{2x} - b^{3x}}{x}$
50. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$

44. $\lim\limits_{x \to \sim} \left(\dfrac{x+3}{x-1} \right)^{x}$

45. $\lim\limits_{x \to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$

46. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x - 4^x}{x}$

F. Kontiunitas



Gb.1.4

Perhatikan fungsi pada bilangan real $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ seperti pada grafik di samping.

Untuk $x = 2$ diperoleh $f(2) = \dfrac{0}{0}$ (tak tentu) sehingga grafiknya terputus di $x = 2$ dalam hal ini dikatakan f(x) diskontinu di x = 2.

Sedangkan untuk interval $\{x|x < 2, x \in R\}$ dan interval $\{x|x > 2, x \in R\}$ grafiknya berkesinambungan, dalam hal ini dikatakan f(x) kontinu di $x \neq 2$.

Secara formal suatu fungsi dikatakan kontinu di x = c, jika dipenuhi :

a. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ada

b. f(c) ada

c. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

Jika pada suatu fungsi f(x) diskontinu di x = c, maka dapat dibuat sedemikian hingga $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$, maka dikatakan diskontuinitas di x = c ini dapat dihapuskan.

Contoh :

Tentukan diskontuinitas fungsi pada bilangan real $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

Jawab : fungsi rasional di atas akan diskontinu jika penyebutnya nol atau

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ atau } x = 2$$

Sehingga f(x) diskontinu di x = -2 atau x = 2.

Selanjutnya untuk $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}$

$$= \frac{12}{4} = 3$$

Diskontinu di x = 2 dapat dihapuskan dengan menetapkan definisi f(2) = 3.
Selanjutnya untuk x = -2 diperoleh

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$$

$$= \frac{\to 4}{\to 0} = \infty\text{, sedangkan } f(-2) = \frac{(-2)^3 - 8}{(-2)^2 - 4} = \frac{-16}{0} \text{ tidak terdefinisi.}$$

Sehingga diskontinu di x = -2 tidak dapat dihapuskan.

Latihan 2

Selidiki kontinuitas fungsi-fungsi berikut

1. $f(x) = x^2 + x$ di $x = -1$
2. $f(x) = 4x^2 - 2x + 12$ di $x = 2$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ di $x = -1$
4. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2}$ di $x = 2$
5. $f(x) = \dfrac{6t-9}{t-3}$ di $t = 3$
6. $f(x) = \begin{cases} -3x + 4 & \text{untuk } x \le 2 \\ -2 & \text{untuk } x > 2 \end{cases}$ di x = 2
7. Di titik mana saja $f(x) = \dfrac{5x+4}{x^2 - 3x - 10}$ diskontinu dan selidiki macam diskontinuitasnya.
8. Di titik mana saja $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ diskontinu dan selidiki macam diskontinuitasnya.
9. Dengan grafik di titik mana saja (jika ada) fungsi ini diskontinu

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{untuk } x < 0 \\ x^2 & \text{untuk } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{untuk } x > 1 \end{cases}$$

10. Tentukan a dan b agar fungsi :

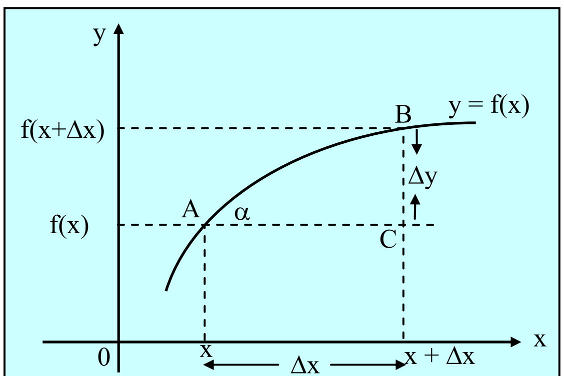
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & \text{untuk } x < -2 \\ a & \text{untuk } x = 2 \\ bx + 1 & \text{untuk } x > -2 \end{cases} \quad \text{kontinu di } x = 2$$

Bab III
TURUNAN SUATU FUNGSI

A. Turunan Fungsi Aljabar

Sesuatu yang bersifat tetap di dunia ini adalah perubahan itu sendiri, banyak kejadian-kejadian yang melibatkan perubahan. Misalnya gerak suatu obyek (kendaraan berjalan, roket bergerak, laju pengisian air suatu tangki), pertumbuhan bibit suatu tanaman, pertumbuhan ekonomi, inflasi mata uang, berkembangbiaknya bakteri, peluruhan muatan radioaktif dan sebagainya.

Studi tentang garis singgung dan penentuan kecepatan benda bergerak yang dirintis oleh Archimedes (287 – 212 SM), Kepler (1571 – 1630), Galileo (1564 – 1642), Newton (1642 – 1727) dan Leibniz (1646 – 1716) dapat dipandang sebagai peletak dasar dari kalkulus diferensial ini. Namun para ahli berpendapat bahwa Newton dan Leibniz-lah dua orang yang paling banyak andilnya pada pertumbuhan kalkulus. Konsep dasar dari turunan suatu fungsi adalah laju perubahan nilai fungsi.



Gb.2.1

Perhatikan fungsi y = f(x) pada domain (x, x + Δx) nilai fungsi berubah dari f(x) pada x sampai dengan f(x + Δx) pada x + Δx.

$$\begin{array}{rl} y + \Delta y & = f(x + \Delta x) \\ y & = f(x) \quad - \\ \hline \Delta y & = f(x + \Delta x) - f(x) \end{array}$$

Δy : disebut diferensi antara $f(x + \Delta x)$ dengan $f(x)$

Δx : disebut diferensi x

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ disebut hasil basi diferensi.

Jika B bergerak sepanjang kurva y = f(x) mendekati A, maka diperoleh limit :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Nilai limit ini disebut derivatif f (turunan, laju perubahan nilai fungsi, hasil bagi diferensial) dari y = f(x), dan biasa ditulis dengan notasi $\dfrac{dy}{dx}$ atau y'. (Notasi $\dfrac{dy}{dx}$ dan dibaca “dy dx” inilah yang kita kenal dengan istilah notasi Leibniz)

Jadi : $\dfrac{dy}{dx} = y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Secara geometris, kita lihat bahwa perbandingan diferensi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ adalah gradien tali busur AB = tan α. Jika $\Delta x \to 0$ maka tali busur AB akan menjadi garis singgung di A sehingga :

$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ adalah gradien garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di $(x, f(x))$.

Contoh 1

Diketahui kurva dengan persamaan $y = x^2 + 2x$.

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dan persamaan garis singgung kurva di $x = 1$.

Jawab :

$$y = x^2 + 2x$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x)$$

$$= x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x$$

$$\Delta y = (2x + 2)\,\Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x+2)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{(2x+2) + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x+2)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} ((2x+2) + \Delta x)$$

$$= 2x + 2$$

Untuk $x = 1 \to$ gradien garis singgung $m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 2.1 + 2 = 4$

$x = 1 \to y = 1^2 + 2.1 = 3 \to$ titik singgung (1, 3).

Sehingga persamaan garis singgungnya :

$$y - 3 = 4(x - 1)$$

$$y = 4x - 1$$

Contoh 2

Tentukan fungsi turunan dari $f(x) = \frac{3}{x^2}$

Jawab :

$$y = \frac{3}{x^2}$$

$$y + \Delta y = \frac{3}{(x+\Delta x)^2}$$

$$\Delta y = \frac{3}{(x+\Delta x)^2} - \frac{3}{x^2} = \frac{3.x^2 - 3(x+\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2.x^2}$$

$$= \frac{-6x.\Delta x - 3\Delta x^2}{(x+\Delta x)^2.x^2} = \frac{\Delta x(-6x - 3\Delta x)}{(x+\Delta x)^2 x^2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6x - 3\Delta x}{(x+\Delta x)^2 . x^2}$$

Sehingga $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-6x - 3\Delta x}{(x+\Delta x)^2 . x^2}$

$$= \frac{-6x}{x^2 x^2} = \frac{-6}{x^3}$$

Rumus-rumus turunan (derivatif) fungsi y = f(x).

1) Fungsi konstanta y = f(x) = c

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

$$\boxed{f(x) = c \;\to\; f'(x) = 0}$$

2) Derivatif f(x) = x^n

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}.\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n) - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} . \Delta x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} . \Delta x^2 + \ldots + (\Delta x)^{n-1} \right)$$

$= nx^{n-1}$.

$$\boxed{f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}}$$

3) Jika c suatu konstanta dan y = c f(x), maka

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= c.f'(x) = c.\frac{dy}{dx}$$

Contoh 2 : $y = 4x^5 \Rightarrow y' = 4.\frac{dy}{dx}(x^5) = y.5x^4 = 20x^4$.

4) Jika u = f(x) dan v = g(x), maka turunan fungsi y = f(x) ± g(x) dapat dicari sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - (f(x) + g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right.$$

$= f'(x) + g'(x)$.

Dengan jalan yang sama dapat ditunjukkan bahwa

$y = f(x) - g(x) \rightarrow y' = f'(x) - g'(x)$

Jadi :

$$\boxed{y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)}$$

5) Jika $u = f(x)$ dan $v = g(x)$ dan $y = u.v$ maka

$y = u.v = f(x) . g(x)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x+\Delta x) + f(x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\left(\frac{f(x+\Delta x - f(x)}{\Delta x}\right).g(x+\Delta x) + f(x)\left(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right.\right.$$

$= f'(x).g(x) + f(x) . g'(x)$

$= u'v + uv'$

Jadi $\quad y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$

6) Jika $u = f(x)$ dan $v = g(x)$, sedemikian hingga $g(x) \neq 0$ pada intervalnya dan $y = \frac{u}{v} = \frac{f(x)}{g(x)}$, maka

$$y' = \lim_{\Delta x \to x} \frac{\left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to x} \frac{f(x+\Delta x).g(x) - f(x).g(x+\Delta x)}{\Delta x.g(x+\Delta x).g(x)}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to x} \frac{f(x+\Delta x).g(x) - f(x).g(x) - f(x).g(x+\Delta x) + f(x).g(x)}{\Delta x.g(x+\Delta x).g(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to x} \frac{\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right).g(x) - f(x)\left(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right.}{g(x+\Delta x).g(x)}$$

$$= \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x)^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Jadi $\quad y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Contoh 3

Tentukan f′(x) untuk $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2}$

Jawab : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2}$ maka mengingat $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ diperoleh

$$f(x) = \frac{2.x^2 - (2x+3).2x}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x^2 - 6x}{x^4}$$

$$= \frac{-2x^2 - 6x}{x^4}$$

B. Turunan Fungsi Trigonometri

a. $y = \sin x \Rightarrow y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right) . \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$= 1. \cos(x + 0) = \cos x$

Analog $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$.

b. $y = \tan x \Rightarrow y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ dengan mengingat $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\Rightarrow y' = \frac{\cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Analog $y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x$

c. $y = \sec x \Rightarrow y = \dfrac{1}{\cos x}$

$$y' = \frac{0.\cos x - 1.(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} . \frac{1}{\cos x}$$

$= \tan x . \sec x$

Analog $y = \csc x \Rightarrow y' = -\cot x \csc x$.

Jadi :

$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$	$y = \cot x \Rightarrow y' = -\csc^2 x$
$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$	$y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \tan x$
$y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x$	$y = \text{cosec } x \Rightarrow y' = -\csc x \cot x.$

C. Turunan Fungsi Tersusun (Fungsi Komposisi)

Misalkan y = f(x) di mana u = g(x), menentukan fungsi tersusun $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ dan apabila g mempunyai turunan di x, dan f mempunyai turunan di u = g(x) maka turunan fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$ ditentukan dengan rumus :

$$\mathbf{(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)}$$

atau dengan notasi Leibniz :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

Rumus ini dikenal dengan nama **aturan rantai** .
Cara yang mudah untuk mengingat aturan rantai adalah :

Variabel kiri   Variabel antara   Variabel kanan

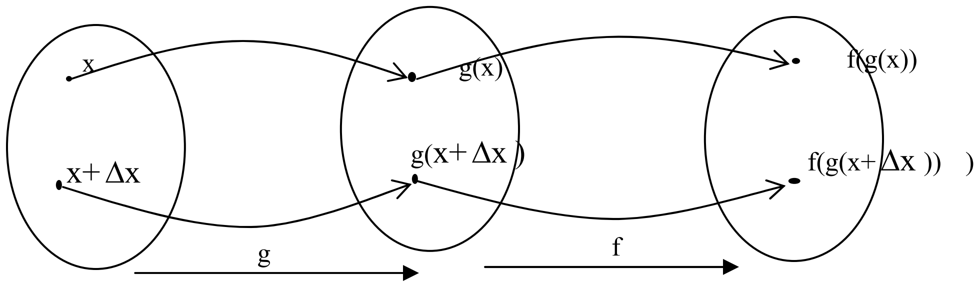
$$y = f(u) \quad \text{dan} \quad u = g(x)$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Turunan variabel kiri terhadap variabel kanan	=	Turunan variabel kiri terhadap variabel antara	•	Turunan variabel antara terhadap variabel kanan

Aturan rantai tersebut dapat dibuktikan sebagai berikut :
Bukti :

Misalkan y = f(u) dan u = g(x); g mempunyai turunan di x dan f mempunyai turunan di u = g(x). Apabila variabel x bertambah dengan Δx yang berubah menjadi $(x + \Delta x)$, maka u = g(x) bertambah menjadi $g(x + \Delta x)$ dan y = f(g(x)) bertambah menjadi $f(g(x + \Delta x))$, sebagaimana diagram di bawah ini :



Pertambahan untuk u = g(x) adalah $g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta g(x)$, dan dari hubungan ini akan diperoleh $\Delta g(x) \to 0$ apabila $\Delta x \to 0$

$\Rightarrow \Delta f(g(x)) = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))$

Berdasar definisi umum turunan fungsi, maka turunan dari fungsi komposisi :

$$(fog)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f \circ g)(x+\Delta x) - (f \circ g)(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x) - \Delta g(x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x) + \Delta g(x)) - f(g(x))}{\Delta g(x)} \bullet \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta g(x) \to 0} \frac{f(g(x) - \Delta g(x))}{\Delta g(x)} \bullet \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(g(x)).g'(x) \qquad \text{(terbukti)}$$

Dan apabila aturan rantai di atas kita tulis dengan notasi Leibniz akan diperoleh :

Jika y = f(x) dan u = g(x) maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Contoh 3

Tentukan turunan fungsi $f(x) = (2x^3 - 4)^7$

Jawab :

Misal, $u = 2x^3 - 4 \Rightarrow u' = 6x^2$

$f(x) = u^7 \Rightarrow f'(x) = 7u^6 \cdot u'$

Jadi $f(x) = (2x^3 - 4)^7 \Rightarrow f'(x) = 7(2x^3 - 4)^6 \cdot 6x^2$.

$= 42x^2(2x^2 - 4)^6$.

Dalil Rantai di atas dapat dikembangkan lebih lanjut.

Jika y = f(u), u = g(v) dan v = h(x), maka

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{d}{dv}.\frac{dv}{dx}}$$

Begitu dan seterusnya.

Contoh 4

Jika $f(x) = \sin^3(2x - 5)$, maka tentukan $f'(x)$.

Jawab :

Misal $u = \sin(2x - 5)$ dan $v = 2x - 5$, sehingga

$$v = 2x - 5 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 2$$

$$u = \sin v \rightarrow \frac{du}{dv} = \cos v$$

$$y = u^3 \rightarrow \frac{dy}{du} = 3u^2$$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df(x)}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx}$$

$$= 3 \,.\, u^2 \,.\, \cos v \,.\, 2$$

$$= 6 \sin^2(2x - 5) \,.\, \cos(2x - 5)$$

D. Turunan Fungsi Logaritma

a. Pandanglah fungsi $f(x) = \ln x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\ln(x + \Delta x)}{\Delta x}}{x.\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.1 = \frac{1}{x}$$

Jadi $\boxed{f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}}$

b. Jka $f(x) = {}^a\log x$, maka

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Jadi $\boxed{f(x) = {}^a\log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}}$

E. Turunan Fungsi Eksponensial

a. Jika $f(x) = e^{g(x)}$, maka

$\ln f(x) = \ln e^{g(x)} = g(x) \cdot \ln e$

$\ln f(x) = g(x)$ jika kedua ruas diturunkan

$\frac{1}{f(x)}.f'(x) = g'(x)$, sehingga $f'(x) = f(x) \cdot g'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

Jadi $\boxed{f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)}$

Contoh 5

Jika $y = e^x$, maka $y' = e^x \cdot 1 = e^x$

Sehingga $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

b. Untuk fungsi eksponensial $y = a^{g(x)}$, maka

$\ln y = \ln a^{g(x)}$

$\ln y = g(x) \cdot \ln a$ jika kedua ruas diturunkan, maka

$\frac{1}{y}.y' = g'(x) \cdot \ln a \Rightarrow y' = y \cdot g'(x) \cdot \ln a$

$= a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a$

Jadi $y = a^{g(x)} \Rightarrow y' = a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a$

Contoh 6

Jika $y = 2^{2x^3-3}$, maka $y' = 2^{2x^3-3}.6x.\ln 2$

$= 6x \cdot 2^{2x^3-3}.\ln 2$

F. Turunan Fungsi Implisit

Jika $y = f(x)$, maka turunan fungsi implisit $F(x,y) = c$ adalah dengan memandang y fungsi dari x.

Contoh 7

Tentukan y' jika $x^2 + 3xy + y^2 = 4$

Jawab :

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 3xy + y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$

$2x + 3y + 3xy' + 2y \cdot y' = 0$

$(3x + 2y)y' = -2x - 3y$

$$y' = -\frac{3x + 3y}{3x + 2y}.$$

G. Turunan Jenis Lebih Tinggi

Andaikan fungsi turunan pertama $f'(x)$ atau $\frac{df(x)}{dx}$ dari suatu fungsi adalah suatu fungsi yang dapat didiferensialkan pada x, maka turunan dari turunan pertama ini, disebut turunan kedua, dan ditulis dengan notasi $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$.

Demikian juga andaikan turunan kedua ini fungsi yang dapat didiferensialkan, maka turunan dari turunan kedua ini disebut turunan ketiga dan ditulis dengan notasi $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$.

Begitu dan seterusnya turunan dari turunan ke n-1 disebut turunan ke-n dan ditulis dengan notasi $f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n}$.

Contoh 8

Tentukan $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ jika $f(x) = x^5 - 5x^2$

Jawab :

$$\begin{aligned} f(x) = x^5 - 5x^2 \Rightarrow f'(x) &= 5x^4 - 10x \\ f''(x) &= 20x^3 - 10 \\ f'''(x) &= 60x^2 \end{aligned}$$

Contoh 9

Tentukan $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$ jika $f(x) = \sin x$

Jawab :

$$f(x) = \sin x \to \frac{df(x)}{dx} = \cos x = \sin(x + 1 . \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\sin x = \sin(x + 2 . \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^3f(x)}{dx^3} = -\cos x = \sin(x + 3 . \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^4f(x)}{dx^4} = \sin x = \sin(x + 4 . \frac{\pi}{2})$$

………..

$$\frac{d^nf(x)}{dx^n} = \sin(x + n . \frac{\pi}{2}).$$

Latihan 3

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 14 tentukan f′(x) dari

1. $f(x) = 6 - 4x^3 + x^5$
2. $f(x) = (3x - 2)^2$
3. $f(x) = (x^3 - 2x)^2$
4. $f(x) = x - \frac{1}{x}$
5. $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{6x^3}$
6. $f(x) = (3x^2 + 6)(2x - \frac{1}{4})$
7. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{3x}$
8. $f(x) = (x^2 + \frac{2}{x^2})^2$
9. $f(x) = (2x + \frac{1}{x})(2x - \frac{1}{x})$
10. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x}}$
11. $f(x) = \sqrt[5]{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
12. $f(x) = \sqrt{x}\,(3x + \frac{1}{3x})(3x - \frac{1}{3x})$
13. $f(x) = (5x^2 - 1)(x^2 + 4x - 2)$.
14. $f(x) = \frac{4x^2 + 3}{x^3 + 2x^2}$

16. Diketahui $f(x) = x^2 - 6x - 16$. Tentukan gradien garis singgung kurva di $x = 1$, dan persamaan garis singgungnya.
17. Diketahui fungsi $f : x \to (2x + 3)^2$
    a) Tentukan rumus untuk turunan fungsi f′(x)
    b) Tentukan laju perubahan fungsi pada $x = -1$ dan pada $x = -2$.
18. Jarak s meter yang ditempuh oleh bola golf yang menggelinding pada waktu t detik dinyatakan dengan $s = 15t - t^2$.
    a) Hitung kecepatan bola golf pada t = s
    b) Kapan bola golf tersebut berhenti.
19. Tentukan persamaan garis singgung kurva dengan persamaan $y = (x - 2)^2$ di titik yang absisnya $x = 2$.
20. Tentukan f′(x) dari fungsi-fungsi di bawah ini
    a. $f(x)\ 6 \sin x + 3 \cos x$
    b. $f(x) = 3 \sin x \cos x$
    c. $fx) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$
    d. $f(x) = \frac{\text{tg } x}{\sin x - \cos x}$
    e. $f(x) = x^2 \sec x$
    f. $f(x) = \frac{x^2}{\cos x}$
    h. $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$
    i. $F(x) = \sin^3(x - 5)$
    j. $f(x) = \sin x^0$
    (x^0 = … radian dengan menggunakan kesamaan $180^o = \pi$ radian), $\to x^o$ = … radian
    k. $f(x) = \tan(3 - \sin x)$.
21. Jika $y = f(x)$, maka tunjukkan bahwa $\Delta y = f'(x).\Delta x + \varepsilon.\Delta x$, di mana jika $\Delta x \to 0$ maka $\varepsilon \to 0$

    Catatan :

    Sifat ini dapat digunakan untuk membuktikan aturan rantai :

    Jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ maka $\Delta y = f'(x).\Delta x + \varepsilon.\Delta x$, di mana $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du}.\frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon.\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du}.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon.\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}}$$

22. Tentukan $f'(x)$ jika $f(x) = x^7 \sin(2x - 5))$

23. Tentukan $g'(x)$ jika $g(x) = \sqrt{2x + 5x^2}$

22. Jika $y = \sin x$ maka $\frac{d^2y}{dx^2} + y = ...$

23. Jika $y = x^5 \sin 3x$, maka tentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$

24. Tentukan $\frac{d^ny}{dx^n}$ jika $y = e^{kx}$

25. Tentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$ jika $x^2 - y = 0$

26. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika diketahui $x^3 + y^3 = x^3y^3$.

27. Jika xy + sun y = x^2, maka tentukanlah y'.

28. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika diketahui :

   a. $x^2y + 3xy^3 - x = 3$

   b. $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$

   c. $xy = 8$

   d. $3x^2 - 2xy + y^2 = 0$

   e. $3x^2 - 6y^2 = 4$

29. Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut :

   a. $y = 3e^{-4x}$

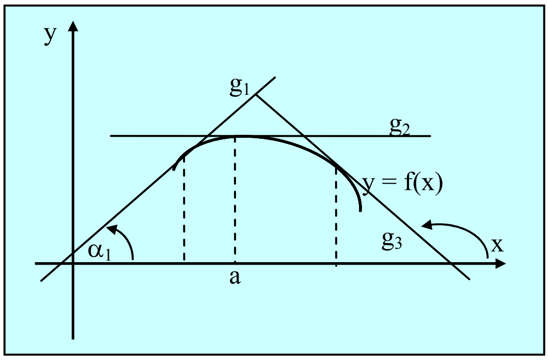
   b. $y = (x - 2)e^{5x}$

c. $y = x \ln 3x$

d. $y = \log (2x + 3)$

e. $y = 3^{\sin x + 3x^2}$

H. Fungsi Naik dan Fungsi Turun



Misalkan kurva disamping menyajikan grafik fungsi y = f(x), sehingga terlihat bahwa untuk x < a, diperoleh f′(x) > 0, dikatakan f naik pada interval itu, karena gradien garis-garis singgung selalu positip di interval tersebut. Untuk x > 0, gradien garis singgung-garis singgung selalu negatif sehingga f′(x) < 0 dikatakan f turunan pada interval tersebut.

Gb.2.3

Sedang untuk x = a, gradien garis singgung dititik tersebut = 0, garis singgungnya sejajar sumbu x, sehingga f′(x) = 0, dalam hal ini f tidak naik dan tidak turun dan dikatakan f stasioner di x = a.

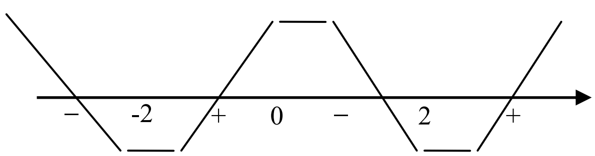
Sehingga kurva y = f(x) akan :
(i) naik jika f′(x) > 0
(ii) turun jika f′(x) < 0
(iii) stasioner jika f′(x) = 0.

Contoh

Tentukan internal dimana fungsi f(x) = $\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 7$ naik atau turun.

Jawab :

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 7 \rightarrow f'(x) = x^3 - 4x = x\,(x + 2)(x - 2)$



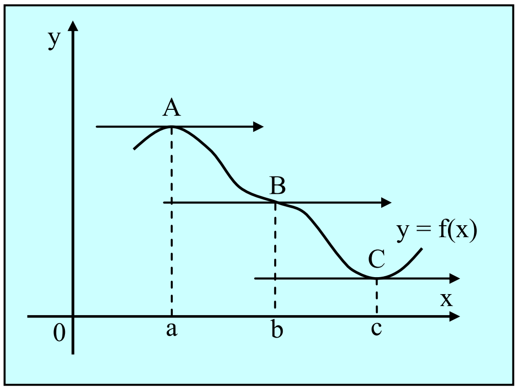
x(x + 2)(x – 2)

Gb.2.4

Melihat nilai positip dan negatifnya amsing-masing interval, dapat disimpulkan bahwa pada fungsi f(x) = $\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 7$ kurvanya
naik pada interval $-2 < x < 0$ atau $x > 2$
turun pada interval $x < -2$ atau $0 < x < 2$.

I. Nilai Stasioner Fungsi

Misal grafik fungsi y = f(x) seperti tersaji dalam diagram berikut :



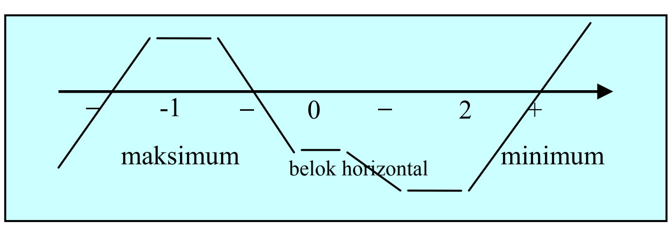
Gb.2.5

Pada ketiga titik A, B dan C diperoleh f′(a) = f′(b) = f′(c) = 0 ketiga garis singgungnya sejajar sumbu x, dan f stasioner pada ketiga titik tersebut. Untuk titik A, f′(x) berubah tanda dari positip – nol – negatif, dikatakan f mempunyai – nilai balik maksimum f(a) pada x = 0.
Untuk titik B, f′(x) berubah tanda dari negatif – nol – negatif, dikatakan f mempunyai nilai belok hozontal f(b) pada x = b.

Untuk titik C, f′(x) berubah tanda dari negatif – nol – positif, dikatakan f mempunyai nilai balik negatif f(c) pada x = c.
<u>Kesimpulan</u> :

> Jika f′(c) = 0, maka f(c) disebut nilai stasioner (kritis) dari f pada x = c, dan nilai stasioner mungkin berupa nilai balik maksimum, nilai balik minimum atau nilai belok horizontal.

Contoh
Tentukan nilai stasioner fungsi $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ dan tentukan pula macamnya.
Jawab :
$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x + 1)(x - 1)$.



Gb. 2.6

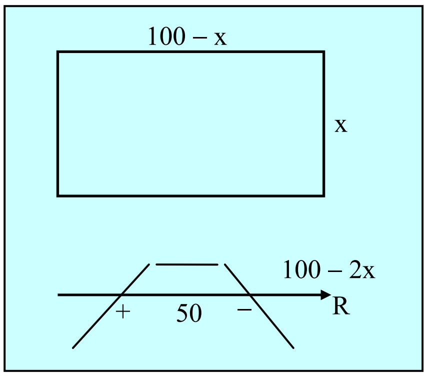
Stasioner dicapai untuk $f'(x) = 0 \Rightarrow 15x^2(x + 1)(x - 1) = 0$
$x = 0$ atau $x = -1$ atau $x = 1$.
Untuk $x = 0 \Rightarrow f(0) = 3.0^5 - 5.0^3 = 0$ maka f(0) = 0 adalah nilai belok horizontal.
Untuk $x = 1 \Rightarrow f(1) = 3.1^5 - 5.1^3 = -2$ maka f(1) = -2 adalah nilai balik minimum.

Untuk x = -1 $\Rightarrow$ $f(-1) = 3.(-1)^5 - 5.(-1)^3 = 2$ maka $f(-1) = 2$ adalah nilai balik maksimum.

Contoh

Dengan menggunakan kawat sepanjang 200 meter akan dibangun suatu kandang ayam yang berbentuk persegipanjang. Tentukan ukuran kandang agar luas kandang ayam tersebut maksimum.

Jawab :



Gb.2.7

Misalkan sisi panjang adalah x dan 100 – x maka luas kandangnya.

$L(x) = x(100 - x) = 100x - x^2$

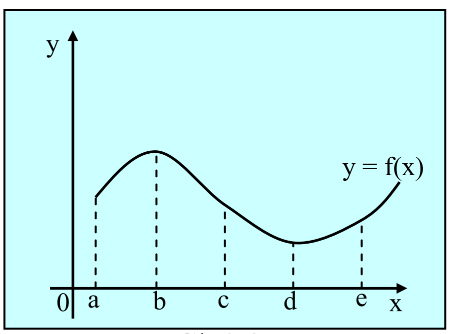
$L'(x) = 100 - 2x$.

Nilai stasioner dicapai jika $L'(x) = 0$

$\Rightarrow 100 - 2x = 0 \Rightarrow x = 50$.

Jadi agar luas kandang maksimum, ukurannya panjang satu sisi 50 m sedang sisi satunya (100 – 50) meter = 50 meter. Sehingga bentuk kandangnya persegi.

J. Penentuan Maksimum dan Minimum Dengan Menggunakan Turunan Kedua



Gb.2.8

Misalkan kurva y = f(x) seperti pada gambar disamping, dikatakan kurva y = f(x) terbuka ke bawah untuk $a < x < c$ dan kurva y = f(x) terbuka ke atas untuk $c < x < e$.

Untuk kurva yang terbuka ke atas, pada setiap titiknya nilai $f'(x)$ atau gradien garis singgungnya bertanda sama dan naik atau berubah tanda dari negatif ke positif.

Hal ini menunjukkan bahwa fungsi turunan pertama $f'(x)$ adalah fungsi yang naik, yang berarti $f''(x) > 0$. Sedangkan untuk kurva yang terbuka ke bawah, pada setiap titiknya nilai $f'(x)$ atau gradien garis singgungnya bertanda sama dan turun atau berubah tanda dari positif ke negatif. Hal ini menunjukkan bahwa fungsi turunan pertama $f'(x)$ adalah fungsi yang turun, yang berarti $f''(x) < 0$. Dari kecembungan atau kecekungan kurva di atas dapat ditarik kesimpulan.

> Jika f(a) adalah nilai stasioner maka
> (i) f(a) adalah nilai balik maksimum bila $f'(a) = 0$ dan $f''(a) < 0$
> (ii) f(a) adalah nilai balik minimum bila $f'(a) = 0$ dan $f''(a) > 0$.

Contoh

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = x(12 - 2x)^2$ dengan metoda derivatif kedua.

Jawab :
$f(x) = x(12 – 2x)^2 = ux^3 – 48x^2 + 144x$
$f(x) = 12x^2 – 96x + 144 = 12(x – 2)(x – 6)$
$f(x) = 24x – 96 = 24(x – 4)$.
Stasioner jika $f'(x) = 0$
$\Rightarrow 12(x – 2)(x – 6) = 0$
$\Rightarrow x = 2$ atau $x = 6$
Untuk $x = 2$ maka $f(2) = 2(12 – 22)^2 = 128$ dan $f''(2) = 24(2 – 4) = -48$ (negatif)
Untuk $x = 6$ maka $f(6) = 6(12 – 2.6)^2 = 0$
$f''(6) = 24(6 – 4) = 48$ (positif).
Jadi $f(2) = 128$ adalah nilai balik maksimum untuk $x = 2$ dan
$f(6) = 0$ adalah nilai balik minimum untuk $x = 6$.

Latihan 4

1. Tentukan interval dimana fungsi-fungsi di bawah ini naik ataukah turun.
   a. $f(x) = x^2 – 4x + 6$
   b. $f(x) = x^3$
   c. $f(x) = 12x – x^3$
   d. $f(x) = x(x + 2)^2$
   e. $f(x0 = 1 + 2x – 2x^2 – 2x^3$
2. Tentukan nilai stasioner dan jenisnya dari fungsi-fungsi di bawah ini
   a. $f(x) = 9 – x^2$
   b. $f(x) = x(x + 2)^2$
   c. $f(x) = x + \dfrac{9}{x^2}$
   d. $f(x) = -x^4 + 2x^2$
   e. $f(x) = \cos x + 7$
3. Jumlah dua buah bilangan adalah 30. Tentukan masing-masing bilangan tersebut agar hasil kalinya maksimum.
4. Dengan mengambil tembok sebagai salah satu sisi, akan dibuat kandang ayam berbentuk persegipanjang dari pagar kawat sepanjang 30 m. tentukan ukuran kandang agar luas kandang maksimal.
5. Suatu bak penampung air yang direncanakan dibuat dari pelat aluminium yang cukup tebal yang harus menampung 64 dm^3. Tentukan ukuran tabung agar luas seluruh permukaannya minimum, jika
   a. tabung itu tanpa tutup
   b. tabung itu dengan tutup.
6. Diketahui parabol $y = 5 - \frac{1}{2}x^2$, $y \geq 0$. Suatu titik P(x, y) terletak pada parabol tersebut. Tentukan jarak OP terpendek jika O pangkal koordinat.
7. Suatu kotak tanpa tutup yang alasnya berbentuk persegi, jumlah luas kelima sisinya 432 dm^2.
   Tentukan ukuran kotak tersebut agar volumnya maksimum.

8. Diketahui kurva dengan persamaan y = $\sqrt{x}$. Tentukan jarak terpendek titik A(3, 0) ke kurva tersebut.
9. Suatu persegipanjang mempunyai luas 900 cm^2. Tentukan ukuran persegipanjang agar kelilingnya minimum.
10. Suatu proyek direncanakan selesai dalam x hari yang akan menelan biaya $(3x + \frac{1200}{x} - 60)$ ribu rupiah. Berapa harikah proyek tersebut harus selesai, agar biaya minimum?

K. Penerapan Diferensial dalam Bidang Ekonomi

Banyak masalah-masalah hubungan perekonomian merupakan hubungan fungsi, oleh karena itu pendiferensialan fungsi juga banyak diterapkan dalam bidang perekonomian.

Berikut adalah beberapa penggunaan diferensial dalam bidang perekonomian yang bersifat sederhana.

1. Elastisitas Permintaan.

Seperti diketahui di dalam hukum permintaan bahwa naik/turunnya harga mempengaruhi naik/turunnya permintaan.

Jika harga suatu barang berubah, maka permintaan akan barang tersebut juga berubah.

Yang dimaksud dengan **elastisitas permintaan** suatu barang terhadap harga adalah **rasio** antara perubahan relatif barang yang diminta terhadap perubahan relatif harga barang tersebut.

Misalnya harga suat barang turun a% dan mengakibatkan naiknya permintaan b%, maka elastisitas permintaan akan barang tersebut adalah = $\frac{b\%}{a\%}$.

Secara matematis :

Jika fungsi permintaan adalah $Q_D = f(P)$ maka

$$e_D = \frac{E_{Q_D}}{E_P} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\left[\frac{\Delta Q_D}{Q_D}\right]}{\left[\frac{\Delta P}{P}\right]} = \frac{dQ_D}{dP} \cdot \frac{P}{Q_D}$$

di mana : e_D = elastisitas permintaan

E_{Q_D} = persentase perubahan permintaan

E_P = persentase perubahan harga.

Secara umum :

Elastisitas fungsi y = f(x) adalah e = $\frac{Ey}{Ex}$ di mana :

$$\boxed{e = \frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta y}{y}\right)}{\left[\frac{\Delta x}{x}\right]} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}}$$

Contoh

Fungsi permintaan akan suatu barang adalah : $Q_D = 40 - 2p^2$

Hitunglah elastisitas barang pada tingka harga P = 5

Jawab :

$$Q_D = 40 - 2P^2$$
$$Q'_D = -4P$$
$$Q_D = \frac{dQ_D}{dP}.\frac{P}{Q_D} = -4P.\frac{P}{40 - 2P^2}$$

Elastisitas permintaan pada tingkat harga : P = 5 adalah :

$$e_D = -4.5.\frac{5}{40 - 2.5^2} = 10$$

Dengan cara yang sama kita dapat menentukan elastisitas penawaran dan elastisitas produkai dengan menggunakan rumus :

Jika **fungsi penawaran** : $Q_S = f(P)$

maka $$\boxed{e_S = \frac{\%\Delta Q_S}{\%\Delta P} = \frac{E_{Q_S}}{E_P} = \lim_{\Delta P \to 0}.\frac{\left(\frac{\Delta Q_s}{Q_S}\right)}{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)} = \frac{dQ_S}{dP}.\frac{P}{Q_S}}$$

Jika **fungsi produksi :** P = f(x), P = out put dan x = input

maka :

$$e_P = \frac{\%\Delta Q_p}{\%\Delta P} = \frac{E_P}{E_x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)} = \frac{dP}{dx}\cdot\frac{x}{P}$$

$$\boxed{e_P = \frac{dP}{dx}.\frac{x}{P}}$$

Contoh

Fungsi produksi suatu komoditi adalah P = 2x - 3x ^{2}

Hitunglah elastisitas produksinya pada tingkat penggunaan input sebanyak 4 unit dan 9 unit.

Jawab :

$$P = 2x - 3x^2 \Rightarrow P' = 2 - 6x$$
$$e_P = \frac{dP}{dx}.\frac{x}{P} = (2 - 6x).\frac{x}{2x - 3x^2}$$

Pada x = 4 $\longrightarrow$ $e_P = (2 - 6.4).\frac{4}{2.4 - 3.4^2}$

$$e_P = -22.\frac{4}{-40} = 2,2$$

Pada x = 9 $\longrightarrow$ $e_P = (2-6.9).\dfrac{6}{(2.6-3.6^2)}$

$$= -52.\frac{6}{-96} = 3{,}25$$

2. Analisis Marginal

Dalam ekonomi istilah marginal adalah istilah yang digunakan pada laju perubahan atau turunan fungsi.

Jika C(x) = biaya total untuk memproduksi x unit suatu produk.

R(x) = pendapatan total dari penjualan x unit produk

P(x) = keuntungan total yang diperoleh dari penjualan x unit produk.

Dari sini kita dapatkan hubungan :

$$\boxed{P(x) = R(x) - C(x)}$$

sehingga :

$$P'(x) = R'(x) - C'(x)$$

P′(x), R′(x) dan C′(x) berturut-turut menunjukkan laju perubahan dari keuntungan, pendapatan dan biaya dari produksi dan penjualan x unit produksi.

Dalam istilah ekonomi :

P′(x) = disebut **keuntungan marginal**.
(suatu keuntungan tambahan berkenaan dengan tambahan satu unit output)

R′(x) = disebut **penerimaan marginal**
(keuntungan tambahan berkenaan satu unit berkenaan dengan adanya satu unit tambahan output yang diproduksi atau dijual)

C′(x) = disebut **biaya marginal**
(biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit out put)

Catatan :

Jika biaya total c = f(x), maka biaya marginal c′ = MC = f"(x), dan rata-rata

$$c' = MC = f'(x) \text{ dan biaya rata-rata (ACD)} = \frac{C}{X}$$

Contoh 1

Jika diketahui bahwa fungsi biaya total untuk memproduksi suatu barang komoditi adalah $c = 4 + 2x + x^2$

Tentukan :

a. Biaya marginal

b. Biaya rata-rata, dan biaya rata-rata marginal.

Jawab :

a. $C = 4 + 2x + x^2$

$C' = 2 + 2x$

b. Biaya rata-rata (AC) = $\frac{C}{x} = \dfrac{4+2x+x^2}{x} = \frac{4}{x} + 2 + x$

$$AC = \frac{4}{x} + 2 + x$$

$$AC' = -\frac{4}{x^2} + 1$$

Contoh 2

Suatu perusahaan pharmasi memproduksi suatu jenis obat dengan harga Rp 200,00 per unit. Jika biaya totalnya adalah :

$$C(x) = 5000.000 + 80x + 0{,}003x^2$$

dan kapasitas produksi adalah 30.000 unit, berapakah unit produk yang harus dijual agar mendapatkan keuntungan yang sebesar-besarnya?

Jawab :

Banyaknya produk yang terjual misalnya x buah, maka R(x) = 200x.

Keuntungan $P(x) = R(x) - C(x) = 200x - (5000.000 + 80x + 0{,}003x^2)$.

Karena kapasitas produksi adalah 30.000, maka interval x : (0, 30.000).

$$\frac{dP}{dx} = 200 - (80 + 0{,}006x) = 120 - 0{,}006x$$

Keuntungan maksimum diperoleh untuk $\frac{dP}{dx} = 0$,

$$120 - 0{,}006x = 0 \Rightarrow x = 20.000$$

x	0	20.000	30.000
P(x)	-500.000	700.000	400.000

$\therefore$ Keuntungan maksimum diperoleh ketika barang produksinya terjual 20.000 unit.

Latihan 4

1. Fungsi biaya total sebuah perusahaan elektronik adalah $C(x) = 0{,}04x^3 - 0{,}3x^2 + 2x + 1$ dan fungsi permintaannya : $D = 3{,}5 - 0{,}5x$. Berapakah harga dan kwantitas barang sehingga memberikan laba maksimum ?
2. Diketahui fungsi permintaan $D= 4 - 3x$ dan biaya rata-rata $AC = 5$. Tentukan keuntungan maksimum yang diperoleh perusahaan tersebut !
3. Diketahui fungsi permitaan $D = 6 - 3x$ dan fungsi biaya total : $C(x) = x^2 + 3x + 4$ Berapa jumlah barang yang harus dijual dan harga perunit barang agar diperoleh laba yang maksimum dan gambarlah grafiknya.
4. Fungsi biaya total $C(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Tentukan biaya marginal ketika x = 10; x = 400; x = 100 .
5. Jika fungsi permintaan $D = 5 - 2x^2$, carilah elastisitas permintaan terhadap harga jika barang yang diterima adalah 10 unit; 5 unit; 2 unit.
6. Fungsi penjualan terhadap suatu produk industri adalah $R = 400x - x^2$ dan fungsi biaya totalnya $C = 1200 + 200x - 2x^2 + x^3$. Tentukan besarnya hasil penjualan, biaya marginal dan jumlah barang yang terjual ketika laba maksimum.
7. Bila C(x) dola adalah biaya total memproduksi x pelindung kertas dan

   $C(x) = 200 + \frac{50}{x} + \frac{x^2}{5}$ Tentukan :

   a. tentukan fungsi biaya marginal.
   b. fungsi marginal untuk x = 10

c. biaya sebenarnya memproduksi pelindung kertas yang ke sebelas.

8. Bila C(x) dolar menyatakan biaya total memproduksi x satuan barang dan C(x) = $3x^2 - 6x + 4$. Tentukan :.
   a. fungsi biaya rata-rata.
   b. fungsi biaya marginal.
   c. tentukan minimum mutlaknya biaya rata-rata.
9. Fungsi biaya total C diberikan oleh C(x) = $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + 2$. Tentukan :
   a. jelajah C
   b. fungsi biaya marginal
   c. selang di mana biaya turun dan di mana naik.
10. Bila R(x) menyatakan pendapatan total yang diterima dari penjualan x buah televisi dan R(x) = $600x - \frac{1}{20}x^3$. Tentukan :
   a. fungsi pendapatan marginal
   b. pendapatan marginal untuk x = 20
   c. pendapatan sebenarnya dari penjualan televisi ke duapuluh satu.

Bab IV
KALKULUS INTEGRAL

Kegunaan integral sebagai ilmu bantu dalam geometri, teknologi, biologi dan ekonomi tak dapat disangkal lagi. Orang yang tercatat dalam sejarah pertama kali mengemukakan ide tentang integral adalah Archimedes seorang ilmuwan bangsa Yunani yang berasal dari Syracusa (287 – 212 SM). Archimedes menggunakan ide integral tersebut untuk mencari luas daerah suatu lingkaran, daerah yang dibatasi oleh parabola dan tali busur dan sebagainya. Sejarah mencatat orang yang paling berjasa dalam hal pengembangan kalkulus integral adalah Georg Friederich Benhard Riemann (1826 – 1866).

A. Integral Taktentu

1. Integral sebagai operasi invers dari turunan.

Misalkan fungsi f adalah turunan dari fungsi F, yang berarti

$F(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

Pandanglah pendiferensialan fungsi-fungsi di bawah ini

$F(x) = x^3 \quad \Rightarrow F'(x) = f(x) = 3x^2$

$F(x) = x^3 + 5 \quad \Rightarrow F'(x) = f(x) = 3x^2$

$F(x) = x^3 - \sqrt{17} \Rightarrow F'(x) = f(x) = 3x^2$

$F(x) = x^3 + c$ (c = konstanta) $\Rightarrow F'(x) = f(x) = 3x^2$

Sekarang timbul pertanyaan apakah dari hubungan $F'(x) = f(x)$ ini jika f(x) dikethui maka f(x) pasti dapat ditentukan ?

Suatu operasi mencari F(x) jika f(x) diketahui yang merupakan invers dari operasi pendiferensialan disebut operasi anti derivatif, anti diferensial, anti turunan yang biasa disebut Operasi integral.

Dari contoh di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa anti turunan dari $f(x) = 3x^2$ adalah $F(x) = x^3 + c$, c = konstanta.

Dari pengertian bahwa integral adalah invers dari Operasi pendiferensialan, maka apabila terdapat fungsi F(x) yang diferensial pada interval [a, b] sedemikian hingga $\frac{df(x)}{dx} = F^{'}(x) = f(x)$ maka anti turunan dari f(x) adalah F(x) + c, dan biasa kita tulis dengan notasi.

$\int f(x)dx = = F(x) + c$ Notasi $\int$ adalah notasi integral tak tentu.

Catatan :

Orang yang pertama kali memperkenalkan lambang $\int$ sebagai lambang integral adalah Leibniz, yang disepakati sebagai slah seorang penemu dari Kalkulus.

Dari contoh di atas diperoleh hasil $\int 3x^2\, dx = x^3 + c$

Dengan memperhatikan diferensial-diferensial di bawah ini:

$F(x) = x + c \quad \Rightarrow F'(x) = 1$

$F(x) = ax + c \quad \Rightarrow F'(x) = a$

$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \quad \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{n+1}(n+1)^{x^n} = x^n\ 1$

$F(x) = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c \quad \Rightarrow F'(x) = \frac{a}{n+1}(n+1)^{x^n} = ax^n$

maka diperoleh integral fungsi-fungsi aljabar :

(1) $\int dx = x + c$

(2) $\int a dx = ax + c$

(3) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, n \neq -1$

(4) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, n \neq -1$

Dari integral adalah invers diferensial maka

(5) $\int \left(f(x) \pm f(x)\right)^{dx} = \int f(x) \pm \int g(x) dx$

(6) $\int a\ f(x) dx = a \int f(x) dx$

Contoh 1. Tentukan $\int \left(x^3 - 2x\right) dx$

Jawab: $\int \left(x^3 - 2x\right) dx = \frac{1}{4} x^4 - 2.\frac{1}{2} x^2 + c$

$= \frac{1}{4} x^4 - x^2 + c$

Contoh 2. Integralkanlah $\left(3x^3 - 4\right)^2$

Jawab: $\int \left(3x^3 - 4\right)^2 dx = \int \left(gx^6 - 24x^3 + 16\right) dx$

$= 9.\frac{1}{7} x^7 - 24.\frac{1}{4} x^4 + 16x + c$

$= \frac{9}{7} x^7 - 6x^4 + 16x + c$

Mengingat pendiferensialan fungsi-fungsi yang lain; yaitu:

Jika f(x) sin x maka f′(x) = cos x

Jika f(x) cos x maka f′(x) = -sin x

Jika f(x) tg x maka f′(x) = $\sec^2$ x

Jika f(x) cotg x maka f′(x) = -cosec^2 x

Jika f(x) sec x maka f′(x) = sec x tgx

Jika f(x) cosec x maka f′(x) = -cosec x cotg x

Jika f(x) e^x maka f′(x) = e^x

Jika f(x) ln x maka f′(x) = $\frac{1}{x}$

Dengan mengingat integral adalah operasi invers dari pendiferensialan, maka akan diperoleh rumus-rumus pengintegralan.

(7)	$\int \cos x \, dx = \sin x + c$
(8)	$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
(9)	$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$
(10)	$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$
(11)	$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$
(12)	$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$
(13)	$\int e^x \, dx = e + c$
(14)	$\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert + c$

Contoh 3. Gradien pada titik (x,y) dari suatu kurva y = f(x) diketahui memenuhi hubungan $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$ dan melalui (3, 5).

Tentukan persamaan kurvanya.

Jawab:

Gradien kurva y = f(x) adalah $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$

Sehingga y = $\int (2x - 3) dx$

$y = 2.\frac{1}{2}x^2 - 3x + c$

$\Leftrightarrow y = x^2 - 3x + c$

Melalui (3, 5) $\rightarrow 5 = 3^2 - 3.3 + c$

$5 = c$

Jadi persamaannya : $y = x^2 - 3x + 5$

Jika suatu soal integral tak dapat diselesaikan dengan integral langsung, mungkin dengan mensubstitusi variabel baru soal tersebut dapat dipecahkan.

2. Pengintegralan Dengan Substitusi

Menentukan integral fungsi yang dapat disederhanakan menjadi bentuk

$\int (f(x))^n \, d(f(x))$.

Mengacu pada rumus pengintegralan bentuk $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \; n \neq -1$,

maka pengintegralan $\int u^n \, dx = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c, \; n \neq -1$

Contoh 1.

Tentukan $\int \sqrt{x^3 + 2} \;\; x^2 \, dx$

Jawab : Misalkan u = x^3 + 2 maka du = $3x^2 \rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}du$.

$$\text{Sehingga } \int \sqrt{x^3+2}\;\; x^2dx = \int \sqrt{u}\,.\frac{1}{3}du$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{9}(x^3+2)^{\frac{9}{2}} + c.$$

Contoh 2. : $\displaystyle\int \frac{(x+3)dx}{(x^2+6x)^{\frac{1}{9}}}$

Jawab : Misalkan u = x^2 + 6x $\rightarrow$ du = (2x + 6)dx

$$\rightarrow (x + 3)dx = \frac{1}{2}du.$$

$$\text{Sehingga : } \int \frac{(x+3)dx}{(x^2+6x)^{\frac{1}{9}}} = \int \frac{\frac{1}{2}du}{u^{\frac{1}{9}}}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{9}}du$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\frac{1}{2}}{3}u^{\frac{2}{9}} + c$$

$$= \frac{3}{4}(x^2+6x)^{\frac{2}{9}} + c.$$

Contoh 3.

Integralkanlah $\int \sin^5 3x\, dx$

Jawab : $\int \sin^5 3x\, dx = \int (\sin^2 3x)^2 \sin 3x\, dx$

Misalkan u = cos 3x $\rightarrow$ du = -3 sin 3x dx

$$\sin 3x\, dx = -\frac{1}{3}du$$

$$\text{Sehingga } \int (\sin^2 3x)^2 \sin 3x\, dx = \int (1 - \cos^2 3x)^2 \sin 3x\, dx$$

$$= \int (1-u^2)^2(-\frac{1}{3}du)$$

$$= -\frac{1}{3}\int (1-2u^2+u^4)du$$
$$= -\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{2}{9}\cos^3 3x - \frac{1}{15}\cos^5 3x + c.$$

Contoh 4.

$\int \sin^5 5x \cos^3 5x\, dx$

Jawab : Misalkan u = sin 5x $\rightarrow$ du = 5 cos 5x dx

$$\frac{1}{5}du - \cos 5x\, dx$$

$$\int \sin^6 5x \cos^3 5x\, dx = \int \sin^6 5x\,.(1-\sin^2 6x).\cos 5x\, dx$$

$$= \int \sin^6 5x.(1-\sin^2 6x)\cos 5xdx$$

$$= \int u^6(1-u^2)\tfrac{1}{5}du$$

$$= \frac{1}{5}\int (u^6 - u^3)du$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{9}u^9) + c$$

$$= \frac{1}{35}\sin^7 5x - \frac{1}{45}\sin^9 5x + c$$

Latihan 5.

Tentukanlah :

1. $\int (x^3+2)^2 3x^2 dx$
2. $\int (x^3+2)^{\frac{1}{2}} x^2 dx$
3. $\int \dfrac{8x^2 dx}{(x^3+2)^3}$
4. $\int \dfrac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+2}}$
5. $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\, dx$

9. $\int \dfrac{\sin x\, dx}{\cos^3 x}$
10. $\int \dfrac{\cos x\, dx}{\sin^2 x}$
11. $\int \dfrac{\text{tg } x\, dx}{\cos^3 x}$
12. $\int \dfrac{\text{cotg } x\, dx}{\sin^2 x}$
13. $\int \dfrac{\text{tg}(3x+2)dx}{\cos(3x+2)}$

6. $\int x\sqrt[3]{1-2x^2}\ dx$

7. $\int x^3\sqrt{3-2x^4}\ dx$

8. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$

14. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{(1-\cos 2x)^2}$

15. $\int \frac{\cos 3x\,dx}{(3+2\sin 3x)}$

16. $\int \frac{\sqrt{\tan x - 1}}{\cos^2 x}dx$

Tentukan pula antiderivatif dari soal-soal di bawah ini !

17. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+3}}dx$

18. $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\ dx$

19. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

20. $\int \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{1}{3}}}\ dx$

21. $\int \frac{xdx}{(a+bx)^{\frac{2}{3}}}$

22. $\int \cos^5 x\ dx$

23. $\int \sin^2 x\cos^3 xdx$

24. $\int \cos^4 2x\sin^3 2xdx$

25. $\int \sin^3 3x\cos^5 3x\ dx$

26. $\int \cos^3 \frac{x}{3}\ dx$

27. $\int \sin^4 x\ dx$

28. $\int \sin^4 3x\cos^2 3x\ dx$

29. $\int (1+\cos 3x)^{\frac{3}{2}}\sin 3x\ dx$

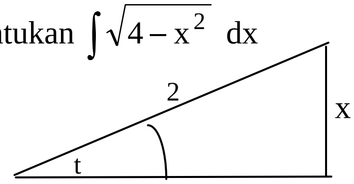
30. $\int (\tan^3 3x\sec^4 3x)dx$

3. Menentukan Hasil dari $\int \sqrt{a^2-x^2}$ dx dengan Substitusi x = sin t atau y=cost

Bentuk-bentuk integral di atas dapat digunakan substitusi dengan menggunakan bantuan sketsa geometri.

Contoh 1

Tentukan $\int \sqrt{4-x^2}\ dx$



Misalkan $\sin t = \frac{x}{2} \longrightarrow x = 2\sin t$

$dx = 2\cos t$

$\cos t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \longrightarrow \sqrt{4-x^2} = 2\cos t$

Sehingga $\int \sqrt{4-x^2}\ dx = \int 2\cos t . 2\cos tdt$

$= 2\int 2\cos^2 tdt$

$= 2\int (1+\cos 2t)dt$

$$= 2(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + c$$

Untuk mengembalikan hasil dalam t ini kembali ke variabel x digunakan fungsi invers dari fungsi trigonometri, yang biasa kita kenal sebagai fungsi siklometri.

Bahwa jika $f(x) = \sin x$ maka $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x = \text{arc} \sin x$

$f(x) = \cos x$ maka $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x = \text{arc} \cos x$

$f(x) = \tan x$ maka $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x = \text{arc} \tan x$

Dengan hubungan jika $y = \sin x$ maka $x = \text{arc} \sin y$

Dari persoalan di atas, dari

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = 2t + \sin 2t + c$$

$$= 2t + 2\sin t.\cos t + c$$

$\sin t = \frac{x}{2} \longrightarrow t = \text{arc} \sin \frac{x}{2}$ yang berarti :

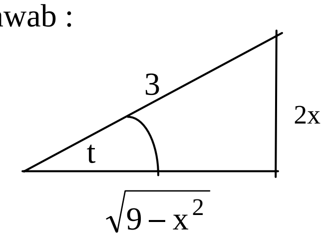
$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = 2 \text{ arc} \sin \frac{x}{2} + 2.\frac{x}{2}.\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} + c$$

$$= 2 \text{ arc} \sin \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + c$$

Contoh 2 .

Tentukan $\int \sqrt{9 - 4x^2}\, dx$

Jawab :



Misalkan $\sin t = \frac{2x}{3} \longrightarrow x = \frac{3}{2}\sin t$

$dx = \frac{3}{2}\cos t\, dt$

dan $t = \text{arc} \frac{2x}{3}$

$\cos t = \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{3} \longrightarrow \sqrt{9 - 4x^2} = 3 \cos t$

Sehingga : $\int \sqrt{9 - 4x^2}\, dx = \int 3\cos t.\frac{3}{2}\cos t dt$

$$= \frac{9}{4}\int \cos^2 t dt$$

$$= \frac{9}{4}\int (1 + \cos 2t)\, dt$$

$$= \frac{9}{4}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + c$$

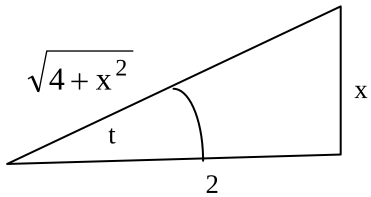
$$= \frac{9}{4}(t + \sin t.\cos t) + c$$

$$= \frac{9}{4}\left(\arc \sin \frac{2x}{3} + \frac{2x}{3} \cdot \frac{\sqrt{9-4x^2}}{3}\right) + c$$

$$= \frac{9}{4} \arc \sin \frac{2x}{3} + \frac{3x}{2}\sqrt{9-4x^2} + c$$

Contoh 3.

Tentukanlah $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$



Misalkan $\tan t = \frac{x}{2} \longrightarrow x = 2 \tan t$

$dx = 2 \sec^2 t \, dt$

$\sec t = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} \longrightarrow \sqrt{4+x^2} = 2 \sec t$

Sehingga $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2 t dt}{(2\tan t)^2 \sec t}$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sec t dt}{\tan^2 t}$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^{-2} t \cos t \, dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^{-2} d(\sin t)$$

$$= -\frac{1}{4} \sin^{-1} t + c$$

$$= \frac{-1}{4\sin t} + c$$

$$= \frac{-1}{4\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}} + c$$

$$= \frac{-\sqrt{4+x^2}}{4x} + c$$

Latihan 6

Tentukanlah integral dari soal-soal di bawah ini !

1. $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$
2. $\int \sqrt{25-x^2}\ dx$
3. $\int \sqrt{3-x^2}\ dx$
4. $\int \sqrt{5-x^2}\ dx$
5. $\int \sqrt{9-4x^2}\ dx$
6. $\int \sqrt{3-4x^2}\ dx$
7. $\int \sqrt{5-3x^2}\ dx$
8. $\int \frac{(16-9x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}\ dx$
9. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}}$
10. $\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{\frac{3}{2}}}$
11. $\int \frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$
12. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$
13. $\int \frac{x^2 dx}{(4-x^2)^{\frac{5}{2}}}$
14. $\int \frac{x^2 dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$
15. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$
16. $\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\ dx$
17. $\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$
18. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\ dx$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$

4. Integral Parsial

Misalkan u dan v masing-masing fungsi yang diferensiabel dalam x, maka diferensial dari y = u.v adalah :

$$d(u.v) = u.dv + v.du$$

dan jika kedua ruas diintegralkan, akan diperoleh :

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

$$uv = \int udv + \int vdu$$

atau :

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Rumus integral ini disebut rumus **integral parsial** dimana rumus ini biasa digunakan apabila $\int v\,du$ mudah dicari dalam upaya mencari penyelesaian dari $\int u\,dv$ yang secara langsung sulit.

Contoh 1.

Tentukan integral-integral :

a. $\int x\sqrt{3+x}\ dx$

b. $\int x\sin 3x\ dx$

Jawab :

a. Misalkan u = x maka du = dx

$$\text{dan } dv = \sqrt{3+x} \qquad \text{maka } v = \int \sqrt{3+x}\ dx = \int (3+x)^{\frac{1}{2}}\, d(3+x) = \frac{2}{3}(3+x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } \int x\sqrt{3+x}\ dx &= x.\ \frac{2}{3}(3+x)^{\frac{3}{2}} - \int \tfrac{2}{3}(3+x)^{\frac{3}{2}}\ dx \\ &= \tfrac{2}{3}x(3+x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3}\int (3+x)^{\frac{3}{2}}\, d(3+x) \\ &= \tfrac{2}{3}x(3+x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3}.\tfrac{2}{5}(3+x)^{\frac{5}{2}} + c \\ &= \tfrac{2}{3}x(3+x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{4}{15}(3+x)^{\frac{5}{2}} + c \end{aligned}$$

b. Misal u = x $\longrightarrow$ du = dx

dv = sin 3x dx $\longrightarrow$ $v = \int \sin 3x dx = -\tfrac{1}{3}\cos 3x + c$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } \int x\sin 3x\ dx &= x(-\tfrac{1}{3}\cos 3x) - \int (-\tfrac{1}{3}\cos 3x)dx \\ &= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + c \end{aligned}$$

Untuk soal-soal tertentu kadang-kadang diperlukan lebih dari sekali memparsialkan.

Contoh 2.

Tentukanlah $\int x^2 \cos(2x+3)dx$

Jawab : Misalkan u = x^2 maka du = 2x dx dan dv = cos(2x + 3) dx

Maka $v = \int \cos(2x+3)dx = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + c$

Sehingga :

$$\begin{aligned} \int x^2\cos(2x+3)dx &= x^2(\frac{1}{2}\sin(2x+3) - \int \frac{1}{2}\sin(2x+3).2xdx \\ &= \frac{1}{2}x^2\sin(2x+3) - \int x\sin(2x+3)dx \quad \ldots.\ (i) \end{aligned}$$

Integral $\int x\sin(2x+3)dx$ dapat dicari dengan memparsialkan sekali lagi

$$\int x\sin(2x+3)dx = \int x(-\tfrac{1}{2}d(\cos(2x+3)) = -\tfrac{1}{2}\int xd(\cos(2x+3))$$

$$= -\tfrac{1}{2}(x\cos(2x+3) - \int \cos(2x+3)dx)$$

$$= -\ \tfrac{1}{2}x\cos(2x+3) + \tfrac{1}{4}\sin(2x+3) + c \quad \text{……..(ii)}$$

Dari (i) dan (ii) diperoleh :

$$\int x^2\cos(2x+3)dx = \tfrac{1}{2}x^2\sin(2x+3) - (-\tfrac{1}{2}x\cos(2x+3) + \tfrac{1}{4}\sin(2x+3)) + c$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2\sin(2x+3) + \tfrac{1}{2}x\cos(2x+3) - \tfrac{1}{4}\sin(2x+3)) + c$$

Pengembangan :

Khusus untuk pengintegralan parsial berulang bentuk $\int udv$ yang turunan ke-k dari u adalah 0 (nol), dan integral ke-k dari v ada, maka integral berulang di atas dapat ditempuh cara praktis sebagaimana contoh di bawah ini.

Contoh 2

Tentukanlah $\int x^2\cos(2x+3)dx$

Jawab :

diturunkan		diintegralkan
x^2		$\cos(2x+3)$
$2x$	+	$\frac{1}{2}\sin(2x+3)$
2	−	$-\frac{1}{4}\cos(2x+3)$
0	+	$-\frac{1}{8}\sin(2x+3)$

Sehingga :

$$\int x^2\cos(2x+3)dx = \tfrac{1}{2}x^2\sin(2x+3) + \tfrac{1}{2}x\cos(2x+3) - \tfrac{1}{2}\sin(2x+3) + c$$

Contoh 3

Integralkanlah : $\int x^4\sin(2x+3)dx$

Jawab :

diturunkan		diintegralkan
x^4		$\sin(2x+3)$
$4x^3$	+	$-\frac{1}{2}\cos(2x+3)$
$12x^2$	−	$-\frac{1}{4}\sin(2x+3)$
$24x$	+	$\frac{1}{8}\cos(2x+3)$
24	−	$\frac{1}{16}\sin(2x+3)$
0	+	$-\frac{1}{32}\cos(2x+3)$

Sehingga :

$$\int x^4 \sin(2x+3)dx = -\frac{1}{2}x^4\cos(2x+3) + x^3\sin(2x+3) + \frac{3}{2}x^2\cos(2x+3) -$$
$$-\frac{3}{2}x\sin(2x+3) - \frac{3}{4}\cos(2x+3) + c$$

Latihan 7

Dengan menggunakan integral parsial, carilah integral berikut ini :

1. $\int x(2x-3)^5 dx$
2. $\int x(3x+4)^6 dx$
3. $\int \frac{3x}{2}(x-2)^{\frac{3}{2}} dx$
4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-3}}$
5. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{3x-1}}$
6. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-4}}$
7. $\int 3x\cos 3xdx$
8. $\int x\sin(\frac{1}{5}x)dx$
9. $\int (3x+4)\cos(4x-3)dx$
10. $\int x^2\cos xdx$
11. $\int x^2\sin(3x-3)dx$
12. $\int x^2\sin(3x+2)dx$
13. $\int x^2\sqrt{9-x}dx$
14. $\int x^3\cos(2x-3)dx$
15. $\int \sin^3 xdx$ (petunjuk ubah kebentuk $\int \sin^2 x\sin xdx$)
16. $\int \cos^4 xdx$
17. $\int \frac{xdx}{x-1}$
18. $\int x\sqrt{2-x}dx$
19. $\int x\cos xdx$
20. $\int x\cos(2x-\frac{5}{3})dx$

5. Pengintegralan $\int \frac{du}{u}$

Dari f(x) = ln x $\to f'(x) = \frac{1}{x}$ maka $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

Yang berarti $\boxed{\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c.}$

Contoh 1.

Tentukanlah $\int (1-e^{2x})^2 e^{2x}dx$

Jawab : Misalkan u = 1 – e^{2x} maka

du = -2e^{2x} dx $\to$ e^{2x} dx = $-\frac{1}{2}du$

Sehingga $\int (1-2^{2x})e^{2x}dx = \int u^2(-\frac{1}{2}du) = -\frac{1}{2}\int u^2 du$

$$= -\frac{1}{2}.\frac{1}{3}u^3 + c$$

$$= -\frac{1}{6}(1-e^{2x}) + c$$

Contoh 2.

Tentukanlah $\int \sin x\, e^{3\text{-}\cos x}dx$

Jawab misalkan u = 3 – cos x

du = sin x dx

sehingga $\int \sin x\, e^{3\text{-}\cos x}dx = \int e^u du$

$= e^u + c$

$= e^{3\text{-}\cos x} + c$

Contoh 3.

Integralkanlah $\int \frac{dx}{x(5+\ln x)}$

Jawab : Misalkan u = 5 + ln x

$du = \frac{dx}{x}$

Sehingga $\int \frac{dx}{x(3+\ln x)} = \int \frac{du}{u}$

= ln |u| + c

= ln(5 + ln |x|) + c

Contoh 4.

Integralkanlah $\int \log(2x+3)\, dx$

Jawab : Misalkan u = log (2x + 3) = $\frac{\ln(2x+3)}{\ln 10}$

$\rightarrow du = \frac{2.dx}{(2x+3)\ln 10}$

$du = dx = \frac{1}{2}d\ (2x+3) \rightarrow u = \frac{1}{2}(2x+3)+c$

Sehingga :

$$\int \log(2x+2)dx = \frac{1}{2}(2x+3)\log(2x+3) - \int \frac{1}{2}(2x+3).\frac{2\,dx}{(2x+3)\ln 10}$$

$$= \frac{1}{2}(2x+3)\log(2x+3) - \frac{1}{\ln 10}\int dx$$

$$= \frac{1}{2}(2x+3)\log(2x+3) - \frac{x}{\ln 10} + c.$$

Contoh 5.

Integralkanlah $\int e^x \sin x\, dx$

Jawab : $\int e^x \sin x\, dx = -\int ex^x d(\cos x)$

$$= -\left(e^x \cos x - \int \cos x\, d(e^x)\right).$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x\, d(\sin x)$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x\, d(e^x)$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

$$= 2\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + c$$

Jadi $\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c.$

Latihan 9.

Tentukanlah integral dari :

1. $\int \frac{x\,dx}{x^2-1}$
2. $\int \frac{x+2\,dx}{x+1}$
3. $\int e^{-x}dx$
4. $\int e^{3-4x}dx$
5. $\int \frac{dx}{u^x+1}$
6. $\int \frac{x^2dx}{1-2x^3}$
7. $\int tg(3x-4)\,dx$
8. $\int x^2 ctg(x^2+4)\,dx$
11. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}-3}$
12. $\int \frac{(e^x-1)dx}{e^x-1}$
13. $\int \frac{(e^{2x}-1)dx}{e^{2x}-3}$
14. $\int \frac{\sec^2 5x\,dx}{tg\,5x}$
15. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
16. $\int \frac{e^{2x}dx}{1+e^{2x}}$
17. $\int \sqrt{x^2-16}\,dx$
18. $\int \sqrt{x^2-36}\,dx$

9. $\int \sec x \, dx \begin{pmatrix} \text{Petunjuk mis.} \\ u = \sec x + \text{tg } x \end{pmatrix}$

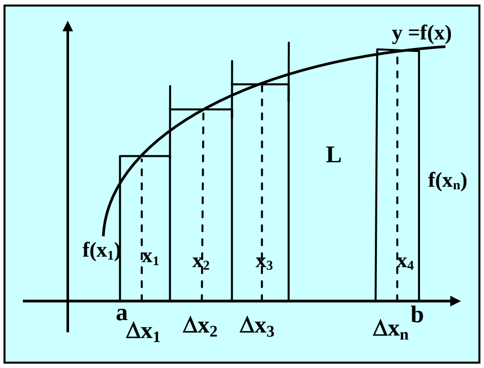
10. $\int \cos 3x \, dx$

19. $\int \sqrt{3x^2 + 5} \; dx$

20. $\int \sqrt{3x^2 - 4x + 5} \; dx$

B. Integral Tentu

1. Pengertian Integral Tentu (Integral Riemann)



Gb.3.1

Gambar disamping memperlihatkan daerah L yang dibatasi oleh y = f(x), sumbu x dari x = a sampai dengan x = b.

Untuk mencari luas daerah L ditempuh langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah pertama, interval [a,b] dibagi menjadi n interval dengan panjang masing-masing interval bagian Δx_1, Δx_2, Δx_3, …, Δx_n. Sedang pada masing-masing interval ditentukan titik-titik x_1, x_2, x_3, …, x_n. Selanjutnya dibuat persegipanjang-persegipanjang dengan panjang masing-masing $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, …, $f(x_n)$ dan lebar masing-masing Δx_1, Δx_2, Δx_3, …, Δx_n sehingga :

Luas persegipanjang pertama	$= f(x_1).\Delta x_1$
Luas persegipanjang kedua	$= f(x_2).\Delta x_2$
Luas persegipanjang ketiga	$= f(x_3).\Delta x_3$
…	= …
Luas persegipanjang ke-n	$= f(x_n).\Delta x_n$
	+
Jumlah luas seluruh persegipanjang	$= f(x_1).\Delta x_1 + f(x_2).\Delta x_2 + f(x_3).\Delta x_3 + \ldots + f(x_n).\Delta x_n$
	$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i .$

Dan untuk menekankan bahwa pengambilan jumlah tersebut meliputi daerah pada interval [a,b], notasi sigma di atas sering kita tulis dengan notasi.

Jumlah semua luas persegipanjang = $\sum_{x=a}^{b} f(x).\Delta x.$

Jika n dibuat cukup besar maka jumlah luas diatas mendekati luas daerah L. Sehingga luas daeah L adalah nilai limit jumlah di atas.

$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{b} f(x).\Delta x.$$

Notasi tersebut di atas biasa ditulis dengan notasi integral tertentu atau integral Riemann :

$$L = \int_a^b f(x)dx.$$

$\int_a^b$: notasi integral tertentu

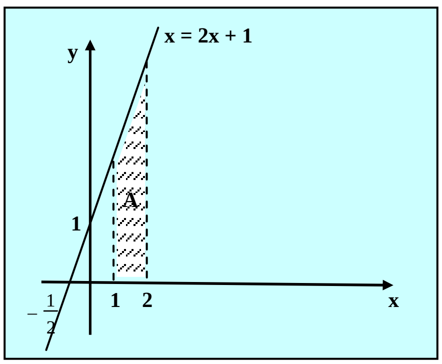
a : batas bawah integral

b : batas atas integral

Contoh 8

Tunjukkan dengan jalan mengarsir daerah yang ditunjukkan oleh $\int_1^3 (2x+1)dx$.

Jawab : Persamaan kurva y = 2x + 1

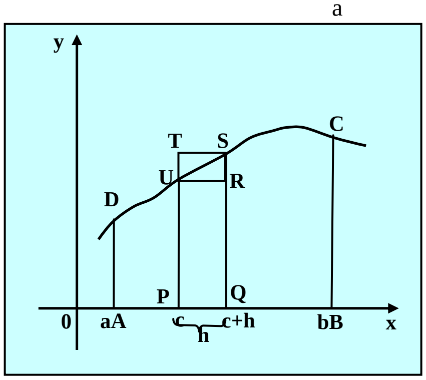


Gb.3.2

Integral di atas menyajikan daerah yang dibatasi oleh kurva y = 2x + 1, sumbu x, dengan garis-garis x = -1 dan x = 2, seperti daerah yang diarsir disamping.

2. Menentukan nilai $\int_a^b f(x)dx$

Untuk menentukan nilai $\int_a^b f(x)dx$ dicari sebagai berikut :



Andaikan akan dicari luas daerah yang dibatasi oleh y = f(x), sumbu x dari x = a sampai dengan x = b.

Misalkan luas daerah yang dicari adalah L(b), maka

$$L(b) = \int_a^b f(x)dx, \quad \text{dan}$$

$$L(c) = \int_a^c f(x)dx$$

$$L(c+h) = \int_a^{c+h} f(x)dx$$

$$L(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

Luas PQRU < luas PQSU < luas PQST

$f(c).h < L(c + h) - L(c) < f(c + h).h$

$f(c) < \dfrac{L(c+h)-L(c)}{h} < f(c+h), h \neq 0$

Jika $h \to 0$ maka

$\lim\limits_{h\to 0} f(c) \leq \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{L(c+h)-L(c)}{h} \leq \lim\limits_{h\to 0} f(c+h)$

$f(c) \leq L'(c) \leq f(c) \Rightarrow L'(c) = f(c)$.

Oleh karena hasil tersebut berlaku untuk setiap c pada interval [a,b] maka setiap $x \in [a,b]$ berlaku :

$L'(x) = f(x)$ sehingga

$L(x) = \int f(x)dx$.

Jika F(x) adalah anti turunan dari f(x) maka

$L(x) = F(x) + c$ ………. (1)

Dari L(a) = 0, berarti F(a) + c = 0, sehingga c = -F(a)

(1) $\to$ L(b) = F(b) + c = F(b) – F(a).

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Contoh 9

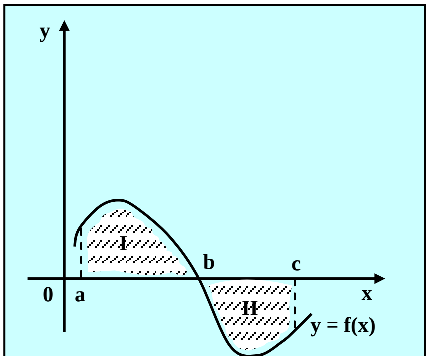
Tentukan nilai integral dari $\int_1^3 (2x+3)dx$.

Jawab : $\int_1^3 (2x+3)dx = [x^2+3x]_1^3$

$= (3^2 + 3.3) - (1^2 + 3.1) = 18 - 4$

$= 14$.

Untuk menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = f(x), sumbu x dan garis x = a dan garis x = b.



Gb.3.5

Untuk daerah di atas sumbu x atau pada interval $a \le x < b$, $f(x) > 0$ untuk setiap x, sehingga $\sum_{x=a}^{b} f(x).\Delta x > 0$ yang berarti $\int_a^b f(x)dx$ adalah positip.

Sedang daerah yang terletak di bawah sumbu x atau $b < x \le c$, maka $f(x) < 0$ untuk setiap x.

Sehingga $\sum_{x=b}^{c} f(x).\Delta x < 0$ yang berarti $\int_b^c f(x)dx$ adalah negatif. Sehingga nilai integral $\int_b^c f(x)dx$ untuk daerah di bawah sumbu x bernilai **negatif**.

Contoh 10

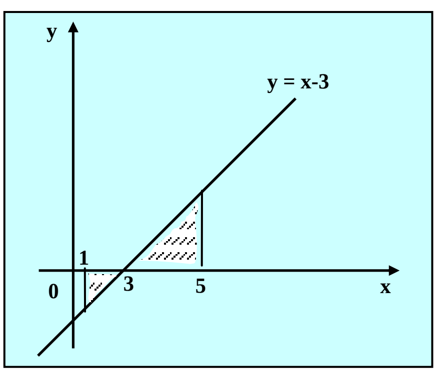
a. Hitung $\int_1^5 (x-3)dx$

b. Hitung luas daerah yang disajikan oleh integral di atas.

Penyelesaian : $\int_1^5 (x-3)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_1^5$

$$= \left(\frac{1}{2}.5^2 - 3.5\right) - \left(\frac{1}{2}.1^2 - 3.1\right) = \left(12\frac{1}{2} - 15\right) - \left(\frac{1}{2} - 3\right)$$

$$= -2\frac{1}{2} - \left(-2\frac{1}{2}\right) = 0 .$$



Gb.3.6

Karena ada daerah yang terletak di bawah sumbu x, maka nilai integral tertentunya negatif, sehingga luas daerah yang diarsir

L = –I + II, atau

$$L = -\int_{1}^{3}(x-3)dx + \int_{3}^{5}(x-3)dx$$

$$= -\left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_1^3 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_3^5$$

$$= -\left[\left(\frac{1}{2}.3^2 - 3.3\right) - \left(\frac{1}{2}.1^2 - 3.1\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{2}.5^2 - 3.5\right) - \left(\frac{1}{2}.3^2 - 3.3\right)\right]$$

$$= -\left[\left(4\frac{1}{2} - 9\right) - \left(\frac{1}{2} - 3\right)\right] + \left[\left(12\frac{1}{2} - 15\right) - \left(4\frac{1}{2} - 9\right)\right]$$

$$= -\left(-4\frac{1}{2} - \left(-2\frac{1}{2}\right)\right) + \left(\left(-2\frac{1}{2}\right) - \left(-4\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= -(-\tfrac{1}{2}^{-2}) + 2$$

$$= 2 + 2 = 4$$

Jadi luas daerahnya = 4 satuan luas.

Latihan 10.

Tentukan nilai integral tertentu dari soal-soal di bawah ini

1. $\int_{-2}^{1}(x-1)dx$
2. $\int_{-2}^{2}x^2 dx$
3. $\int_{0}^{9}x\sqrt{x}\,dx$
4. $\int_{-1}^{3}(3x-2)dx$
5. $\int_{1}^{2}(x-1)(3x-1)dx$
6. Tentukan p sedemikian hingga $\int_{0}^{p}x(2-x)dx = 0$
7. $\int_{0}^{p}(x^{\frac{1}{2}}+1)^3 dp$

8. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

9. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x + \cos 2x)dx$

10. $\int_{0}^{\frac{1}{4}\pi} \cos^3 x \sin x \, dx$

11. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh f(x) = 6 - 2x, sumbu x dari x = 1 samapai dengan x = 3.

12. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh f(x) = $x^2 + 2$, sumbu X dari x = 1 sampai dengan x = 4

13. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh f(x) = $16 - x^2$ dari x = 0 sampai dengan x = 4

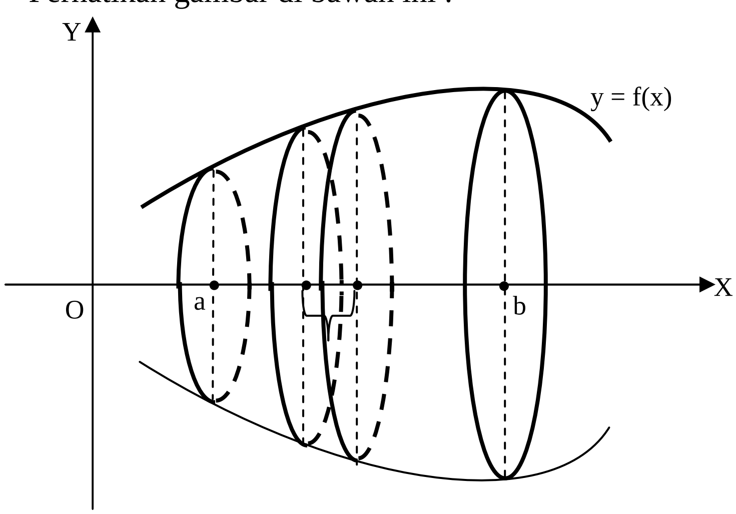
14. Tunjukkan bahwa luas daerah lingkaran dengan jari-jari r adalah πr^2

15. Tunjukkan bahwa luas daerah ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ adalah πab.

16. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva berikut :
    a. $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$
    b. $y = x^2 + 4$ dan $x + y = 6$
    c. y = sin x dan y = cos x dari $x = \frac{\pi}{4}$ sampai dengan $x = 1\frac{1}{4}\pi$

3 Menentukan Volum Benda Putar

Perhatikan gambar di bawah ini :



Untuk menentukan volum benda putar yang dibentuk oleh y = f(x) yang diputar mengelilingi sumbu-X pada interval [a,b] kita bagi-bagi benda tersebut menjadi keratan-keratan, di mana setiap keratan mempunyai volum :

$$v_i = \pi f(x_i)^2.\Delta x_i$$

Sehingga volum keseluruhan :

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i = a}^{b} \pi f(x_i)^2.\Delta x_i = \pi \sum_{a}^{b} f(x_i)^2.\Delta x_i \quad \text{atau :}$$

$$\boxed{v = \pi\int_a^b f(x)^2 dx \quad \text{atau} \quad v = \pi\int_a^b y^2 dx}$$

4. Penerapan Integral Dalam Bidang Usaha dan Perekonomian.

Banyak penerapan kaonsep integral yang amat bermanfaat bagi kehidupan manusia dalam berbagai bidang termasuk dalam hal perindustrian dan perekonomian.

Berikut ini beberapa contoh penerapannya :

Contoh 1

Fungsi biaya marginal dari suatu pabrik dalam produksinya adalah :

$c'(x) = \frac{1}{100}x^2 - 2x + 120$, di mana x adalah banyaknya unit produksi setiap hari. Pabrik tersebut mengeluarkan biaya tetap Rp 2.000.000,00 setiap hari. Tentukan biaya produksi setiap harinya.

Penyelesaian :

Biaya produksi = C(x) = $\int (\frac{1}{100}x^2 - 2x + 120)dx$

$= \frac{1}{300}x^3 - x^2 + 120x + c$

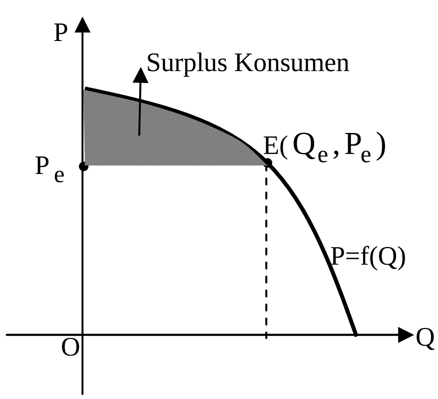
Biaya tetap = C(0) = 2.000.000, sehingga:

2.000.000 = $\frac{1}{300}.0 - 0 + 0 + c \Rightarrow c = 2.000.000$

Jadi biaya produksi setiap harinya adalah :

$$C(x) = \frac{1}{300}x^3 - x^2 + 120x + 2.000.000$$

5. Menghitung Surplus Konsumen.



Surplus konsumen merupakan keuntungan lebih yang dinikmati konsumen berkenaan dengan tingkat harga pasar tertentu.

Bagi konsumen yang sebenarnya mampu membayar harga di atas harga pasar E akan mendapatkan untung sebesar :

$$SK = \int_0^{Q_e} f(Q)dQ - Q_e.P_e$$

Contoh 2:

Diketahui fungsi permintaan : $P = 12 - 2Q^2$

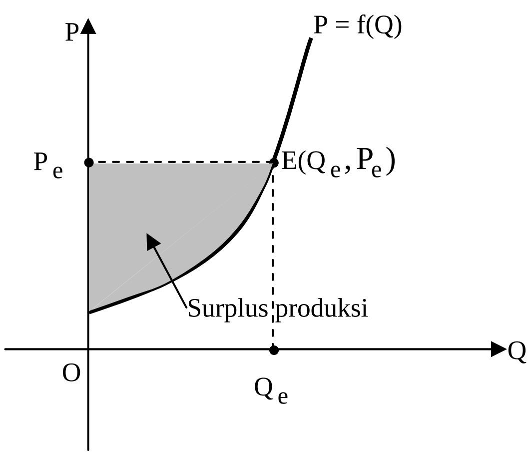
Carilah surplus konsumen jika Q = 2

Penyelesaian : $p = 12 - 2.2^2 = 4$

$$SK = \int_0^2 (10 - 2Q^2)dQ - P.Q$$

$$= \left[10Q - \tfrac{2}{3}Q^3\right]_0^2 - 4.2 = 6\tfrac{2}{3}$$

6. Menghitung Surplus Konsumen.



Dengan jalan yang mirip dengan surplus konsumen, maka surplus produksi (SP) dihitung dengan menggunakan rumus

$$SP = P_e.Q_e - \int_0^{Q_e} f(Q)dQ$$

di mana P = f(Q) adalah fungsi penawaran.

Latihan 11.

1. Tentukan volum benda yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva di bawah ini diputar sekeliling sumbu X.
   a. $y = 9 - x^2$
   b. $y = x^2$ dan $y = 4x$
   c. $y = x^2$ dan $y = x^3$
2. Hitung panjang busur dari kurva y = 2x + 3 dari x = 1 sampai dengan x = 5
3. Hitung panang busur kurva $y = x^{\frac{3}{2}}$ dari x = 1 hingga x = 5

4. Hitung panjang busur kurva y = $2x^{\frac{3}{2}}$ dari x = 0 hingga x = 5
5. Tentukan panjang busur kurva $24xy = x^4 + 48$ dari x = 2 sampai dengan x = 4
6. Tentukan panjang busur sikloida $x = \theta - \sin\theta$; $y = 1 - \cos\theta$ dari $\theta = 0$ dan $\theta = 2\pi$
7. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $6xy = x^4 + 3$ dari x = 1 sampai dengan x = 2
8. Fungsi biaya marginal suatu produk adalah : $P' = \frac{1}{30}Q^2 - 2Q - 450$. Jika diketahui biaya tetapnya adalah Rp 1.000.000,00.
   Carilah fungsi biayanya dan biaya total untuk produksi 40 unit.
9. Diketahui fungsi permintaan : $P = 50 - 4Q^2$
   a. Carilah surplus konsumsen jika Q = 3
   b. Gambarlah fakta itu.
10. Fungsi permintaan penawaran suatu barang adalah : $P = 12 - \frac{x}{50}$ dan $P = \frac{x}{20} + 5$
    Tentukan besarnya surplus konsumen dan surplus produsen dan gambarkan pada suatu diagram.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank Jr. (1972), *Theory and Problem of Differensial and Integral Calculus.* Mc Graw Hill : New York.

Fatah Asyarie, dkk. (1992), *Kalkulus untuk SMA.* Pakar Raya : Bandung.

Herry Sukarman. (1998), *Kalkulus*, Makalah Penataran Guru Matematika MGMP SMU. PPPG matematika : Yogyakarta.

Johannes, H dan Budiono Sri Handoko. (1988), *Pengantar Matematika untuk Ekonomi.* LP3ES : Jakarta.

Piskunov, N. (1974), *Differensial and Integral Calculus.* Mir Publishers : Moscow.

Purcell, Edwin Jaud Dale Varberg. *Kalkulus dan Geometri Analitik.* PT. Penerbit Erlangga : Jakarta.

Sri Kurnianingsih, dkk. (1995), *Matematika SMU*, Yudhistira : Jakarta.

Sumadi, dkk. (1997), *Matematika SMU*, PT. Tiga Serangkai : Surakarta.

Thomas, George B. Jr. (1977), *Calculus and Analytic Geometry,* Addison-Werley Publishers Company.