DIKLAT GURU PENGEMBANG MATEMATIKA SMK
JENJANG LANJUT TAHUN 2009

LOGIKA

Oleh: FADJAR SHADIQ, M.App.Sc.

PPPPTK MATEMATIKA YOGYAKARTA

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK
DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
2009

Quality System
Quality Endorsed Company
ISO 9001: 2000
Lic no:QEC 23961
SAI Global

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas karunia-Nya, bahan ajar ini dapat diselesaikan dengan baik. Bahan ajar ini digunakan pada Diklat Guru Pengembang Matematika SMK Jenjang Lanjut Tahun 2009, pola 120 jam yang diselenggarakan oleh PPPPTK Matematika Yogyakarta.

Bahan ajar ini diharapkan dapat menjadi salah satu rujukan dalam usaha peningkatan mutu pengelolaan pembelajaran matematika di sekolah serta dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat di dalam maupun di luar kegiatan diklat.

Diharapkan dengan mempelajari bahan ajar ini, peserta diklat dapat menambah wawasan dan pengetahuan sehingga dapat mengadakan refleksi sejauh mana pemahaman terhadap mata diklat yang sedang/telah diikuti.

Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah berpartisipasi dalam proses penyusunan bahan ajar ini. Kepada para pemerhati dan pelaku pendidikan, kami berharap bahan ajar ini dapat dimanfaatkan dengan baik guna peningkatan mutu pembelajaran matematika di negeri ini.

Demi perbaikan bahan ajar ini, kami mengharapkan adanya saran untuk penyempurnaan bahan ajar ini di masa yang akan datang. Saran dapat disampaikan kepada kami di PPPPTK Matematika dengan alamat: Jl. Kaliurang KM. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, DIY, Kotak Pos 31 YK-BS Yogyakarta 55281. Telepon (0274) 881717, 885725, Fax. (0274) 885752. email: p4tkmatematika@yahoo.com

Kepala,

Kasman Sulyono
NIP. 130352806

Daftar Isi

KOMPETENSI

Memiliki kemampuan untuk mengembangkan keterampilan siswa dalam melakukan penalaran secara logis dan kritis.

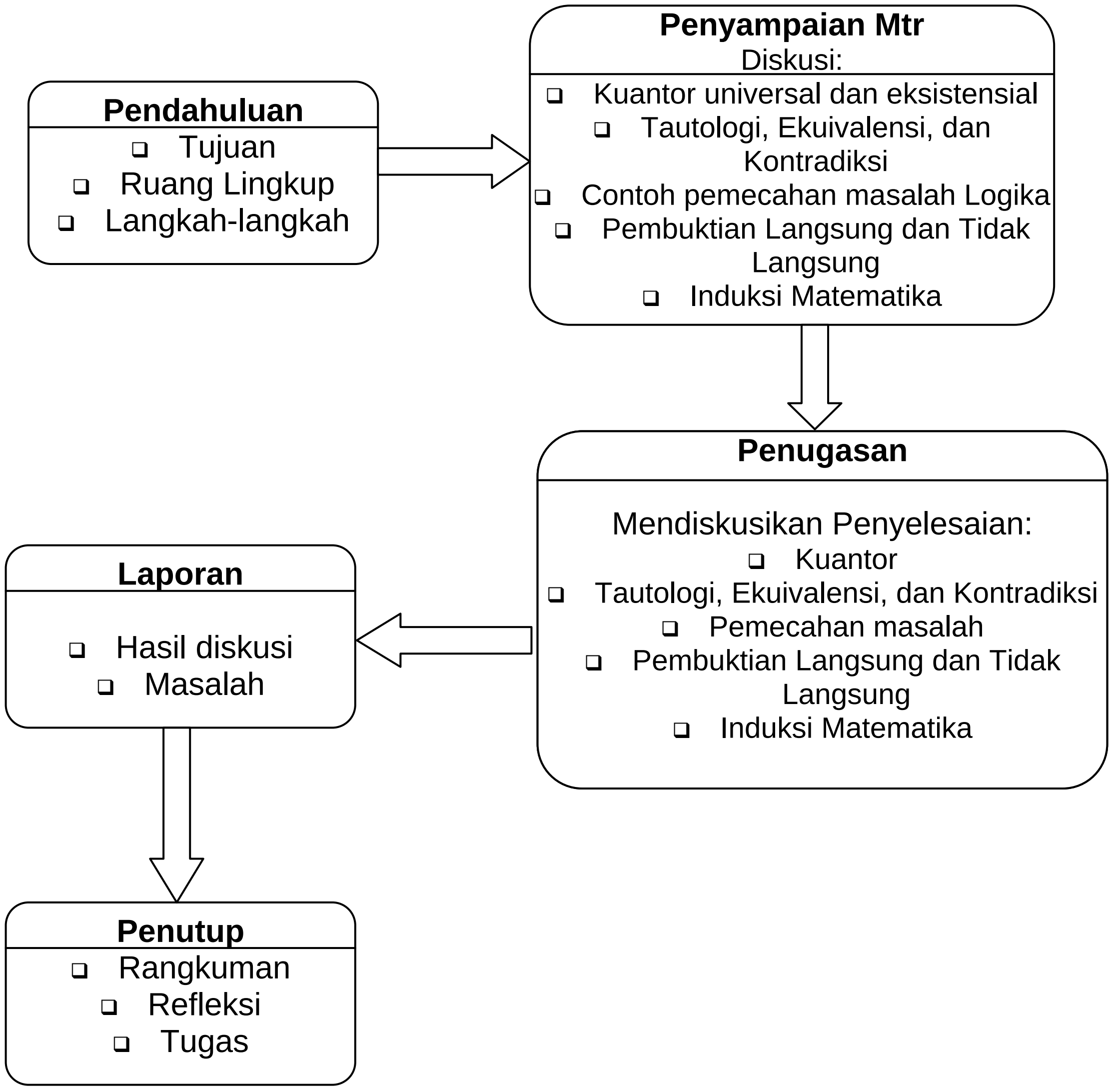
SUB KOMPETENSI

- Memiliki kemampuan menentukan nilai kebenaran pernyataan berkuantor dan negasinya.
- Memiliki kemampuan menjelaskan perbedaan antara tautologi, ekuivalensi, dan kontradiksi dan dapat menerapkan rumus-rumus ekuivalensi dalam proses penyelesaian soal-soal logika matematika.
- Memiliki kemampuan memecahkan masalah atau soal yang berkait dengan logika matematika dengan menerapkan teori-teori logika.
- Memiliki kemampuan memberi contoh pembuktian langsung dan tidak langsung dan dapat membuktikan rumus-rumus matematika secara langsung maupun tidak langsung.
- Memiliki kemampuan membuktikan rumus-rumus matematika yang pembuktiannya menggunakan induksi matematika.

PETA BAHAN AJAR

Mata diklat untuk jenjang lanjut ini membutuhkan pengetahuan prasyarat yang sudah dipelajari pada diklat jenjang dasar, seperti nilai kebenaran suatu pernyataan tunggal dan majemuk, implikasi beserta konvers, invers, dan kontraposinya; negasi dari bentuk-bentuk tadi; pernyataan berkuantor dan negasinya. Selama diklat, secara bertahap diharapkan para peserta diklat akan meningkat kemampuannya sehingga mereka akan memiliki pijakan yang kuat ketika membantu para guru matematika di daerah.

SKENARIO PEMBELAJARAN



Bab I
Pendahuluan

A. Latar Belakang

Paket atau modul pembelajaran ini dirancang untuk para peserta pendidikan dan pelatihan (Diklat) Instruktur/Pengembang Matematika SMK (Sekolah Menengah Kejuruan) jenjang lanjut. Para peserta Diklat Instruktur/Pengembang Matematika jenjang lanjut ini sudah dirancang (*by design*) bagi peserta yang sudah mengikuti Diklat jenjang dasar dengan kualifikasi minimal 'Baik'. Untuk itu, materi Diklat Instruktur/Pengembang Matematika jenjang lanjut ini akan melanjutkan ataupun memperdalam materi diklat jenjang dasar yang sudah pernah diikuti Bapak dan Ibu guru. Karenanya, tidak salah jika penulis mengucapkan selamat mengikuti diklat jenjang lanjut ini.

Pembahasan pada modul jenjang dasar lebih menitik beratkan pada pengertian pernyataan (baik tunggal maupun majemuk) beserta nilai kebenaran dan negasinya; pengertian nilai kebenaran konvers, invers, dan kontraposisi suatu implikasi; membahas hukum atau rumus yang berkaitan dengan logika; serta membahas pengertian serta cara menarik kesimpulan yang sahih dan yang tidak sahih. Karena itu, modul jenjang lanjut kali ini akan membahas pengembangan dan penunjang materi-materi di atas.

B. Tujuan

Modul ini disusun dengan maksud untuk memberikan tambahan pengetahuan berupa wawasan bagi guru SMK yang mengikuti pelatihan di PPPPTK Matematika Yogyakarta, dengan harapan dapat digunakan sebagai salah satu sumber untuk memecahkan masalah-masalah pengajaran Logika Matematika SMK dan dapat digunakan juga sebagai bahan pengayaan wawasan para guru sehingga bahan yang disajikan dapat lebih mudah dicerna para siswa.

C. Ruang Lingkup

Pembahasan pada modul ini, akan lebih menitik-beratkan pada pemenuhan kebutuhan guru matematika SMK agar memiliki dasar dan pijakan yang lebih kuat, sehingga para lulusan diklat jenjang lanjut ini diharapkan akan dapat membantu teman-teman guru matematika di daerahnya masing-masing dengan lebih mantap. Karenanya, ruang lingkup pembahasan paket atau modul ini akan mencakup materi berikut.

1. Kuantor; yang akan membahas dua macam kuantor, yaitu kuantor eksistensial maupun kuantor universal. Kuantor sendiri merupakan salah satu cara untuk mengubah kalimat terbuka yang tidak memiliki nilai kebenaran menjadi suatu pernyataan yang memiliki nilai benar saja atau salah saja.
2. Tautologi, ekuivalensi, dan kontradiksi; sehingga dengan bekal ini, para lulusan diklat jenjang lanjut ini akan dapat membuktikan sendiri tentang benar tidaknya suatu rumus logika.
3. Contoh-contoh masalah ataupun soal yang berkait dengan materi logika matematika

SMK; sehingga para lulusan diklat jenjang lanjut ini akan dapat merasakan pentingnya pemecahan masalah dalam peningkatan pemahaman konsep dan teori logika.

4. Membuktikan sifat matematika dengan bukti langsung maupun dengan bukti tidak langsung (kontradiksi)
5. Membuktikan sifat dengan induksi matematika.

Pembahasan pada modul ini lebih menitik-beratkan pada beberapa hal di atas. Setiap bagian modul ini dimulai dengan teori-teori, diikuti beberapa contoh dan diakhiri dengan latihan. Di samping itu, dikemukakan juga tentang hal-hal penting yang perlu mendapat penekanan para guru di saat membahas pokok bahasan ini di kelasnya. Karenanya, para pemakai modul ini disarankan untuk membaca lebih dahulu teorinya sebelum mencoba mengerjakan latihan yang ada, yang untuk mempermudahnya telah disiapkan juga kunci jawabannya. Jika para pemakai modul ini mengalami kesulitan maupun memiliki saran, sudi kiranya menghubungi penulisnya, melalui *email:* fadjar_p3g@yahoo.com, fadjarp3g.wordpress.com; HP 08156896973 atau melalui PPPPTK Matematika, Kotak Pos 31 YKBS, Yogyakarta.

Bab II
Pernyataan Berkuantor dan Negasinya

Bab II ini akan dimulai dengan membahas perbedaan antara kalimat terbuka dan pernyataan sebagai suatu pengetahuan prasyarat. Soal-soal berikutnya adalah menyusun beberapa kalimat yang didapat dengan menambahkan kata-kata tertentu terhadap suatu kalimat terbuka. Kata-kata tertentu yang ditambahkan terhadap suatu kalimat terbuka itulah yang dikenal sebagai kuantor *(quantifier)*, sehingga didapat pernyataan berkuantor yang bernilai benar saja atau salah saja. Dari contoh-contoh tersebut, pengertian kuantor yang terdiri atas dua macam yaitu kuantor universal dan kuantor eksistensial secara terinci akan dibahas. Pembahasan materi ini akan menggunakan pertanyaan-pertanyaan sehingga memungkinkan bagi Anda untuk mengalami sendiri proses pembelajaran 'Kuantor' yang berbasis pada pemecahan masalah (*problem-solving*), dengan harapan pengalaman itu dapat diaplikasikan langsung di dalam proses pembelajaran tentang 'Kuantor' ini di kelasnya masing-masing.

A. Kalimat Terbuka, Pernyataan, dan Kuantor

Perhatikan tiga kalimat berikut:

1. $31 + 24 = 155$
2. $x^2 - 5x + 6 = 0, x \in A$
3. $2x + 5 > 4, x \in A$

Ada beberapa pertanyaan berkait dengan kalimat di atas, diantaranya:

1. Mengapa kalimat pertama disebut dengan pernyataan? Mengapa kalimat kedua dan ketiga disebut dengan kalimat terbuka?
2. Dapatkah Anda mengubah kalimat terbuka menjadi pernyataan? Bagaimana caranya?

Kalimat 1 jelas bernilai salah, sedangkan kalimat 2 dan 3 belum dapat ditentukan nilai kebenarannya sebelum peubah atau *variabel* x-nya diganti dengan salah satu anggota semesta pembicaraannya. Karenanya, kalimat pertama dapat dikategorikan sebagai pernyataan, sedangkan kalimat kedua dan ketiga dikategorikan sebagai kalimat terbuka.

Yang perlu mendapat perhatian adalah, kalimat terbuka $x^2 - 5x + 6 = 0, x \in A$ akan bernilai benar hanya jika peubahnya diganti dengan $x = 2$ atau $x = 3$. Artinya, hanya ada dua anggota bilangan asli A yang jika digantikan atau disubstitusikan ke kalimat terbuka tersebut akan menyebabkan kalimat terbuka tersebut menjadi bernilai benar. Sedangkan kalimat terbuka $2x + 5 > 4, x \in A$ akan bernilai benar jika peubah x-nya diganti oleh setiap anggota semesta pembicaraannya.

Cara lain mengubah kalimat terbuka menjadi suatu pernyataan adalah dengan menambahkan kata-kata yang berkait dengan banyaknya pengganti variabel atau peubah x-nya, seperti contoh berikut.

Untuk setiap bilangan asli x, $x^2 - 5x + 6 = 0$.

1. Terdapat bilangan asli x sedemikian sehingga $x^2 - 5x + 6 = 0$.
2. Tidak ada bilangan asli x, sedemikian sehingga $x^2 - 5x + 6 = 0$.

3. Untuk semua bilangan asli x, $2x + 5 > 4$
4. Ada beberapa bilangan asli x sedemikian sehingga $2x + 5 > 4$
5. Tidak ada bilangan asli x sedemikian sehingga $2x + 5 > 4$

Perhatikan sekali lagi ke-enam kalimat di atas. Beberapa pertanyaan yang dapat diajukan kepada siswa adalah:

1. Dapatkah Anda menentukan nilai kebenaran ke-enam kalimat di atas?
2. Tentukan nilai kebenaran setiap kalimat di atas. Jelaskan jawaban Anda.

Dari beberapa contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa terhadap suatu kalimat terbuka dapat ditambahkan kata-kata seperti:

"Untuk semua x … " atau "Untuk setiap x … ";
"Beberapa x … "; "Terdapat x … "; ataupun "Ada x …".
"Tidak ada x …"

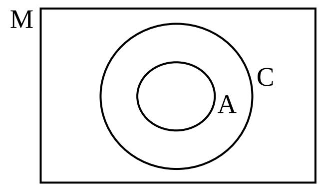
Karena itulah Wheeler (1977:23) menyatakan: *"Quantifiers are most useful in rewriting assertions that cannot be classified as true or false … so that they can be classified either as true or false."* yang dapat diterjemahkan menjadi: "Kuantor sangat berguna dalam mengubah kalimat berita yang tidak dapat dinyatakan bernilai benar atau salah … sedemikian sehingga kalimat berita tersebut dapat dikategorikan sebagai kalimat yang bernilai benar saja atau salah saja."

Menurut jenisnya kuantor dibedakan menjadi 2, yaitu Kuantor Universal (Kuantor Umum) yang menggunakan kata "untuk setiap" atau "untuk semua" dan Kuantor Eksistensial (Kuantor Khusus) yang menggunakan kata "beberapa", "terdapat'" atau "ada". Sedangkan kuantor "tidak ada x" dapat diubah ke bentuk "semua x tidak" atau "setiap x tidak". Secara lengkap kedua macan kuantor tersebut akan dibahas pada bagian berikut ini.

Kuantor universal mempunyai lambang $\forall$ dan dibaca "untuk setiap" atau "untuk semua". Misalkan p(x) adalah suatu kalimat terbuka, pernyataan $\forall x.p(x)$ dibaca "untuk setiap x berlaku p(x)" atau "untuk semua x berlaku p(x)". Pernyataan berkuantor universal: '*Semua* artis adalah cantik,' ini menggambarkan adanya dua himpunan, yaitu himpunan artis dan himpunan orang cantik. Di samping itu, pernyataan tadi menjelaskan tentang semua artis namun tidak menjelaskan tentang semua orang cantik. Pernyataaan itu menjelaskan bahwa setiap anggota himpunan artis adalah merupakan anggota himpunan orang cantik, namun pernyataan itu tidak menjelaskan bahwa setiap anggota himpunan orang cantik adalah merupakan anggota himpunan artis. Hal terpenting yang pada akhirnya didapat adalah, pernyataan berkuantor: "*Semua* artis adalah orang cantik," menunjukkan bahwa himpunan artis termuat atau menjadi himpunan bagian dari himpunan orang cantik.

Pernyataan "*Semua* artis adalah cantik," ini akan bernilai benar jika telah ditentukan kriteria artis dan kriteria cantik serta dapat ditunjukkan bahwa setiap artis yang merupakan anggota himpunan artis adalah cantik. Namun pernyataan berkuantor universal tadi akan bernilai salah jika dapat ditunjukkan adanya satu atau beberapa orang yang dapat dikategorikan sebagai artis namun ia tidak termasuk pada kriteria cantik. Contoh yang menunjukkan tentang salahnya suatu pernyataan berkuantor universal ini disebut dengan *counterexample* atau contoh sangkalan sebagaimana dinyatakan Clemens, O'daffer, dan Cooney (1984: 49) berikut: "*A counterexample is a single example that shows a generalization to be false.* "

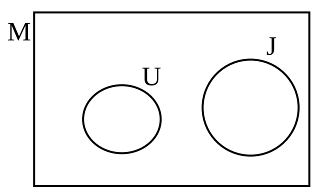
Jika pernyataan berkuantor universal, seperti "*Semua* artis adalah cantik" bernilai benar maka pernyataan itu dapat ditunjukkan dengan Diagram Venn berikut. Sebagaimana dijelaskan di bagian depan, himpunan artis A harus termuat atau menjadi himpunan bagian dari himpunan manusia cantik C; atau $A \subset C$. Paling tidak, A dan C bisa saja sama atau $A = C$.



M = {semua manusia}
A = {artis}
C = {cantik}.

Berdasarkan Diagram Venn di atas, para siswa diharapkan dapat menyimpulkan bahwa suatu pernyataan berkuantor universal dapat diubah menjadi suatu implikasi. Pada contoh di atas, pernyataan berkuantor universal: "Semua artis adalah cantik." adalah ekivalen dengan implikasi: "Jika x adalah artis maka x adalah cantik."

Sebagaimana dinyatakan di bagian depan, pernyataan berkuantor dengan kata awal "Tidak ada… ." dapat diubah ke bentuk pernyataan berkuantor universal. Contohnya, jika pernyataan berkuantor "Tiada murid SMK yang senang mendapat nilai ulangan jelek," bernilai benar, maka pernyataan tersebut dapat digambarkan dengan Diagram Venn berikut:



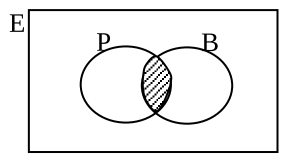
M = {semua manusia}
U = {murid SMK}
J = {manusia yang senang mendapat nilai jelek}.

Dengan demikian, jika pernyataan "Tiada murid SMK yang senang mendapat nilai ulangan jelek," bernilai benar dan jika digambarkan dengan Diagram Venn, pernyataan itu akan menyebabkan $U \cap J = \phi$. Alasannya, tidak ada satupun siswa SMK yang senang mendapat nilai jelek, sehingga kedua himpunan tersebut akan saling asing. Karenanya, pernyataan "Tiada murid SMK yang senang mendapat nilai ulangan jelek," itu adalah sama dengan pernyataan berkuantor universal: "Semua murid SMK tidak senang mendapat nilai ulangan jelek."

Kuantor eksistensial mempunyai lambang $\exists$ dan dibaca "beberapa", "terdapat", atau "ada". Jika dimisalkan p(x) adalah suatu kalimat terbuka maka $\exists x\ p(x)$ dibaca "untuk beberapa x berlaku p(x)" atau "ada x sedemikian sehingga berlaku p(x)". Contohnya adalah: "Terdapat bilangan asli x sedemikian sehingga $x^2 - 5x + 6 = 0$," atau "Beberapa bilangan asli x memenuhi $x^2 - 5x + 6 = 0$."

Kata "beberapa" atau "*some*" menurut Copi (1978:179) adalah *indefinite* atau tidak terdefinisikan secara jelas. Apakah kata "beberapa" berarti "paling sedikit satu", "paling sedikit dua", ataukah berarti "paling sedikit seratus"?. Karena itu, meskipun dapat berbeda dengan pengertian sehari-hari, kata 'beberapa' adalah berarti "paling sedikit satu". Itulah sebabnya, ada beberapa buku di Indonesia yang mengubah kata 'beberapa' menjadi kata 'ada' atau 'terdapat'. Dengan demikian, untuk menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan berkuantor eksistensial adalah cukup dengan menunjukkan adanya satu anggota Himpunan Semesta yang memenuhi. Karena dapat ditunjukkan bahwa untuk x = 2 atau x = 3 memenuhi persamaan $x^2 - 5x + 6 = 0$ sehingga dapat disimpulkan bahwa pernyataan berkuantor eksistensial "Beberapa bilangan asli x memenuhi $x^2 - 5x + 6 = 0$," memiliki nilai benar. Selanjutnya, jika p(x) adalah "$x^2 + 4x + 3 = 0$ dengan x bilangan asli A, " maka $(\exists x \in A)\ p(x)$ adalah $(\exists x \in A)\ x^2 + 4x + 3 = 0$ yang dibaca "Ada bilangan asli x sedemikian sehingga $x^2 + 4x + 3 = 0$". Pernyataan ini bernilai salah. Mengapa?

Pernyataan berkuantor eksistensial "Ada pria yang baik," menunjukkan adanya himpunan manusia sebagai himpunan semestanya (E), adanya himpunan pria (P) dan adanya himpunan manusia yang baik (B). Jika pernyataan berkuantor eksistensial "Ada pria yang baik," bernilai benar maka dapat ditarik suatu kesimpulan akan adanya anggota Himpunan Semesta (minimal satu anggota) yang merupakan anggota himpunan pria dan juga merupakan anggota manusia yang baik. Artinya, kedua himpunan tersebut tidak saling asing. Dengan demikian, $P \cap B \neq \phi$, yang dapat ditunjukkan dengan Diagram Venn berikut.



E = {semua manusia}
P = {semua pria}
B = {semua orang baik}.

Berdasar Diagram Venn di atas yang menunjukkan $P \cap B \neq \phi$, maka pernyataan berkuantor eksistensial dapat dinyatakan dalam bentuk konjungsi. Contohnya, pernyataan berkuantor eksistensial: "Ada pria yang baik," adalah sama dengan konjungsi berikut: "Ada x sedemikian sehingga x adalah pria dan x adalah baik".

Latihan Bab II.1

1. Dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan bulat, gunakan kuantor dengan urut-urutan: "Semua…", "Beberapa…", "Tidak ada…", pada kalimat terbuka di bawah ini, sehingga didapat pernyataan berkuantor yang bernilai benar.
   a. $2x - 4 = -5$
   b. $x + 2 = -5$
   c. $x^2 - 16 = 0$
   d. $x + 3 = 3 + x$
2. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan berikut ini.
   a. Setiap perwira TNI adalah laki-laki.
   b. Beberapa Gubernur di Indonesia adalah perempuan.
   c. Setiap bilangan jika dipangkatkan 0 akan bernilai sama dengan 1.
   d. Setiap bilangan memiliki lawan (invers penjumlahan).
   e. Setiap bilangan memiliki kebalikan (invers perkalian).
   f. Setiap persegi adalah jajargenjang.
   g. Setiap jajargenjang adalah trapesium.
   h. Terdapat bilangan sedemikian sehingga setiap bilangan jika ditambahkan ke bilangan tersebut akan menghasilkan bilangan itu sendiri.
   i. Terdapat bilangan sedemikian sehingga setiap bilangan jika dibagi dengan bilangan tersebut akan menghasilkan bilangan itu sendiri.
   j. Setiap jajargenjang memiliki simetri setengah putaran.
   k. Beberapa siswa menganggap matematika sulit.
3. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan berikut ini dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan real.

a. $\exists x\ (x^2 = x)$ e. $\exists x\ (x^2 - 2x + 1 = 0)$
b. $\exists x\ (|x| = 0)$ f. $\forall x\ (x^2 + 2x + 1 > 0)$
c. $\forall x\ (x < x + 1)$ g. $\exists x\ (|x| \geq 0)$
d. $\forall x\ (x - 1 = x)$ h. $\forall x\ (x^2 - 3x + 2 = 0)$

4. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan di atas dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan asli.
5. Dengan menggunakan huruf yang disarankan, buatlah Diagram Venn-nya lalu tulis implikasi atau konjungsi yang sesuai dengan pernyataan-pernyataan berikut:
   a. Senua anjing mempunyai empat kaki (A, K).
   b. Beberapa matriks tidak memiliki invers (M, I).
   c. Semua laki-laki dapat dipercaya (L, P).
   d. Ada segitiga sama kaki yang bukan segitiga sama sisi (K, S).
   e. Tidak semua pulau di Indonesia didiami oleh penduduk (P, D).
6. Tentukan nilai kebenaran setiap pernyataan di bawah ini dengan semesta pembicaraannya adalah $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
   a. $\forall x\ (4 + x < 10)$ c. $\forall x\ (4 + x \leq 7)$
   b. $\exists x\ (4 + x = 7)$ d. $\exists x\ (4 + x > 8)$

B. Negasi Pernyataan Berkuantor

Perhatikan pernyataan berkuantor universal r berikut: "*Semua Guru Indonesia kaya*." Mungkin ada Bapak atau Ibu yang akan menyatakan "Yang benar saja, masak saya yang berprofesi guru sampai saat ini belum punya rumah termasuk orang kaya?" Hal ini menunjukkan bahwa satu orang gurupun yang tidak termasuk kategori kaya dapat dijadikan dasar untuk mengingkari atau menegasikan pernyataan berkuantor tadi. Dengan demikian, negasi dari pernyataan berkuantor universal tadi adalah pernyataan berkuantor eksistensial yang dapat dipenuhi oleh minimal satu orang saja yang tidak memenuhi kriteria kaya tadi. Dengan demikian, negasi atau ingkaran "Semua Guru Indonesia kaya" adalah pernyataan berkuantor eksistensial yang tidak memenuhi kriteria kaya, yaitu "Beberapa Guru Indonesia tidak kaya". Secara umum negasi pernyataan berkuantor universal $\forall x\ p(x)$ adalah $\sim (\forall x\ p(x)) \equiv \exists x \sim p(x)$

Negasi pernyataan berkuantor eksistensial: "Beberapa Guru Indonesia memiliki mobil," yang bernilai benar adalah: "Tidak benar bahwa beberapa Guru Indonesia memiliki mobil," yaitu: "Semua Guru Indonesia tidak memiliki mobil." Secara umum negasi pernyataan kuantor eksistensial $\exists x\ p(x)$ adalah $\sim (\exists x\ p(x) \equiv \forall x \sim p(x)$.

Latihan Bab II.2.

1. Tentukan negasi dari pernyataan berikut:
   a. $\exists x\ (x^2 = x)$ e. $\exists x\ (x^2 - 2x + 1 = 0)$
   b. $\exists x\ (|x| = 0)$ f. $\forall x\ (x^2 + 2x + 1 > 0)$
   c. $\forall x\ (x < x + 1)$ g. $\exists x\ (|x| \geq 0)$
   d. $\forall x\ (x - 1 = x)$ h. $\forall x\ (x^2 - 3x + 2 = 0)$
2. Tuliskan negasi pernyataan-pernyataan berikut :
   a. Semua laki-laki dapat dipercaya.
   b. Ada segitiga sama kaki yang bukan segitiga sama sisi.
   c. Beberapa matriks tidak memiliki invers.
   d. Setiap perwira TNI adalah laki-laki.

e. Beberapa Gubernur di Indonesia adalah perempuan.
f. Setiap bilangan jika dipangkatkan 0 akan bernilai sama dengan 1.
g. Setiap bilangan memiliki kebalikan (invers perkalian).
h. Setiap jajargenjang adalah trapesium.
i. Tidak semua pulau di Indonesia didiami oleh penduduk.

3. Tentukan negasi pernyataan-pernyataan berikut, lalu tentukan nilai kebenaran negasi pernyataan itu dengan semesta pembicaraannya adalah $X = \{1,2,3,4,5\}$.
   a. $\forall x\ (4 + x < 10)$
   b. $\exists x\ (4 + x = 7)$
   c. $\forall x\ (4 + x \leq 7)$
   d. $\exists x\ (4 + x > 8)$
4. Tentukan negasi pernyataan-pernyataan berikut ini.
   a. $\exists x\ p(x) \wedge \forall y\ q(y)$
   b. $\forall x\ p(x) \Rightarrow \forall y\ q(y)$
   c. $\forall x\ p(x) \vee \exists y\ q(y)$
   d. $\exists x\ p(x) \Rightarrow \exists y\ {\sim}q(y)$

C. Pernyataan Berkuantor Yang Memuat Lebih Dari Satu Peubah

Ada empat variasi untuk pernyataan berkuantor dengan dua peubah (Bunarso Tanuatmodjo, 1987:45–46) beserta artinya yaitu:

- $\forall x\ \forall y\ p(x, y)$: "Untuk setiap x dan untuk setiap y berlaku p(x, y)."
- $\forall x\ \exists y\ p(x, y)$: "Untuk setiap x, ada y sehingga berlaku p(x, y)."
- $\exists x\ \forall y\ p(x, y)$: "Ada x sehingga untuk setiap y berlaku p(x, y)."
- $\exists x\ \exists y\ p(x, y)$: "Ada x dan ada y sehingga berlaku p(x, y)."

Contoh :

1. $(\forall x \in A)(\exists y \in A)\ x < y$.
   Dibaca "Untuk setiap bilangan asli x ada bilangan asli y sedemikian sehingga $x < y$". Untuk $x = 10$ misalnya dapat ditentukan $y = 12$ yang memenuhi $x < y$. Begitu juga untuk nilai x lainnya, dapat ditentukan nilai y yang memenuhi $x < y$. Dengan demikian, untuk setiap nilai x, dapat ditentukan satu atau lebih nilai y yang memenuhi $x < y$. Karena itu, pernyataan ini bernilai benar.
2. $(\exists x \in A)(\forall y \in A)\ x < y$.
   Dibaca: "Ada bilangan asli x sehingga untuk setiap bilangan asli y berlaku $x < y$." Pernyataan ini bernilai salah, Anda tahu sebabnya?

Latihan Bab II.3.

1. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan berikut ini dengan semesta pembicaraan $A = \{1, 2, 3\}$.
   a. $\forall x\ \exists y\ (x + y = 4)$
   b. $\exists x\ \forall y\ (x + y = 4)$
   c. $\exists x\ \exists y\ \forall z\ (x^2 + y^2 < z^2)$
   d. $\exists x\ \forall y\ (x^2 < y + 1)$
   e. $\forall x\ \exists y\ (x^2 < y + 1)$
   f. $\forall x\ \exists y\ \exists z\ (x^2 + y^2 < z^2)$
2. Tentukan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan berikut dengan semesta himpunan bilangan real R.
   a. $\forall x\ \exists y\ (x + y = 6)$
   b. $\exists x\ \forall y\ (x + y = 6)$
   c. $\forall x\ \forall y\ (x + y = 6)$
   d. $\exists x\ \exists y\ (x + y = 6)$
   e. $\forall x\ \exists y\ (x + y = x)$
   f. $\exists x\ \forall y\ (x + y = x)$

Bab III
Tautologi, Ekuivalensi, dan Kontradiksi

A. Tautologi dan Kontradiksi

Jika bujangan diartikan sebagai orang yang belum menikah, lalu dimisalkan:

p : Pythagoras adalah seorang bujangan

~p : Pythagoras adalah bukan seorang bujangan (sudah menikah).

Dari dua pernyataan tunggal di atas, jika dirangkaikan akan didapat dua pernyataan berikut:

1. Pythagoras adalah seorang bujangan atau Pythagoras sudah menikah ($p \vee \sim p$)
2. Pythagoras adalah seorang bujangan dan Pythagoras sudah menikah ($p \wedge \sim p$)

Tabel kebenaran dari dua pernyataan majemuk di atas adalah:

p	~p	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
B	S	B	S
S	B	B	S

Perhatikan kolom ke-3 tabel di atas, yaitu pernyataan majemuk $p \vee \sim p$ akan selalu bernilai benar. Alasannya, jika p bernilai benar maka ~p akan bernilai salah dan jika p bernilai salah maka ~p akan bernilai benar, sehingga salah satu dari dua pernyataan tunggal yang ada di pernyataan majemuk $p \vee \sim p$ akan bernilai benar yang akan berakibat pada pernyataan $p \vee \sim p$ yang selalu bernilai benar. Pernyataan $p \vee \sim p$ merupakan contoh dari tautologi, yaitu suatu pernyataan majemuk yang selalu bernilai benar untuk setiap kombinasi nilai-nilai kebenaran dari pernyataan tunggal pembentuknya.

Kolom ke-4 tabel di atas, yaitu pernyataan majemuk $p \wedge \sim p$ akan selalu bernilai salah. Tidak ada pengaruh dari nilai kebenaran p terhadap pernyataan majemuk $p \wedge \sim p$. Alasannya, jika p bernilai benar maka ~p akan bernilai salah dan jika p bernilai salah maka ~p akan bernilai benar, sehingga salah satu dari dua pernyataan tunggal yang ada di pernyataan majemuk $p \wedge \sim p$ akan bernilai salah. Karena setiap pernyataan majemuk $p \wedge q$ hanya akan bernilai benar jika kedua pernyataan tunggalnya bernilai benar, maka hal ini berakibat bahwa pernyataan $p \wedge \sim p$ akan selalu bernilai salah. Pernyataan $p \wedge \sim p$ yang selalu bernilai salah ini merupakan contoh dari kontradiksi, yaitu suatu pernyataan majemuk yang selalu bernilai salah untuk setiap kombinasi nilai-nilai kebenaran dari pernyataan tunggal pembentuknya.

Kontingensi (*contingency*) adalah suatu pernyataan majemuk yang bernilai benar untuk beberapa pergantian nilai kebenaran dari pernyataan tunggalnya dan bernilai salah untuk pergantian nilai kebenaran dari pernyataan tunggal lainnya. Contoh dari kontingensi adalah pernyataan $(\sim p \wedge r) \wedge (\sim r \Rightarrow q)$. Untuk menunjukkan bahwa pernyataan tersebut adalah suatu kontingensi dapat digunakan tabel kebenaran.

B. Ekuivalensi

Jika p adalah pernyataan "Saya sudah makan.", maka ~p adalah pernyataan "Saya belum makan." atau "Tidak benar bahwa saya sudah makan.", dan ~(~p) adalah pernyataan "Tidak benar bahwa saya belum makan.". Jika p bernilai B, maka ~p bernilai S, dan ~(~p) akan bernilai B. Dengan demikian jelaslah bahwa nilai kebenaran ~(~p) adalah sama dengan nilai kebenaran p sendiri. Hal yang sama akan terjadi juga jika p bernilai S. Hal ini akan mengakibatkan nilai kebenaran dari ~(~p) akan bernilai S juga.

Dua pernyataan disebut ekuivalen (dengan notasi '≡') jika kedua pernyataan tersebut mempunyai nilai kebenaran yang sama. Pada contoh di atas, didapatkan: $p \equiv \sim(\sim p)$ karena baik p maupun ~(~p) akan memiliki nilai kebenaran yang sama seperti ditunjukkan tabel kebenaran di bawah ini.

p	~ p	~ (~ p)
B	S	B
S	B	S

Beberapa contoh ekuivalensi yang sangat penting di antaranya adalah:

a. $p \vee q \equiv q \vee p$; $p \wedge q \equiv q \wedge p$ (Komutatif)
b. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$; $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ (Asosiatif)
c. $p \equiv \sim(\sim p)$; $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$; $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$; (Negasi)
d. $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ dan $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ (Kontraposisi)
e. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ (Biimplikasi)
f. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$; $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$; (Distributif)
g. $p \vee S \equiv p$; $p \vee B \equiv B$; $p \wedge S \equiv S$; $p \wedge B \equiv p$.
h. $p \wedge \sim p \equiv S$; $p \vee \sim p \equiv B$; di mana B suatu tautologi dan S suatu Kontradiksi.

Untuk membuktikan ekuivalensi-ekuivalensi di atas dapat digunakan tabel kebenaran. Ekuivalensi di atas sangat penting dikuasai Bapak dan Ibu Guru karena dapat dipakai untuk menyederhanakan bentuk-bentuk pernyataan majemuk seperti di bawah ini.

$$
\begin{aligned}
\sim[\sim p \vee \sim(\sim q)] \wedge \sim(\sim q) &\equiv \sim(\sim p \vee q) \wedge q && \text{(Ekuivalensi c)}\\
&\equiv (\sim(\sim p) \wedge \sim q) \wedge q && \text{(Ekuivalensi c)}\\
&\equiv (p \wedge \sim q) \wedge q && \text{(Ekuivalensi c)}\\
&\equiv p \wedge (\sim q \wedge q) && \text{(Ekuivalensi b)}\\
&\equiv p \wedge S && \text{(Ekuivalensi h)}\\
&\equiv S && \text{(Ekuivalensi g)}
\end{aligned}
$$

Contoh: Pernyataan $(\sim p \wedge r) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow q)$ ini termasuk tautologi, kontradiksi ataukah kontingensi?
Cara 1. Dengan menggunakan tabel kebenaran.

p	q	r	~p	~r	(~p ∧ r)	(~r ⇒ q)	(~p ∧ r) ⇒ (~r ⇒ q)
B	B	B	S	S	S	B	B
B	B	S	S	B	S	B	B
B	S	B	S	S	S	B	B
B	S	S	S	B	S	S	B
S	B	B	B	S	B	B	B
S	B	S	B	B	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B	B
S	S	S	B	B	S	S	B

Cara 2. Dengan menggunakan rumus.

$$
\begin{aligned}
(\sim p \wedge r) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow q) &\equiv \sim(\sim p \wedge r) \vee (\sim r \Rightarrow q) && \text{(Ekuivalensi d)}\\
&\equiv \sim(\sim p \wedge r) \vee [\sim(\sim r) \vee q] && \text{(Ekuivalensi d)}\\
&\equiv [\sim(\sim p) \vee \sim r)] \vee [\sim(\sim r) \vee q] && \text{(Ekuivalensi c)}\\
&\equiv p \vee \sim r \vee r \vee q && \text{(Ekuivalensi c)}
\end{aligned}
$$

$\equiv p \vee (\sim r \vee r) \vee q$ (Ekuivalensi b)

$\equiv p \vee B \vee q$ (Ekuivalensi h)

$\equiv B$ (Ekuivalensi g)

Karena pernyataan $(\sim p \wedge r) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow q)$ selalu bernilai benar maka pernyataan tersebut termasuk tautologi.

Latihan Bab III.1

1. Buktikan rumus-rumus logika di atas dengan tabel kebenaran.

2. Tentukan negasi dari pernyataan berikut:
   a. Andi Sose ganteng dan pintar.
   b. Jika ia tidak belajar maka ia tidak akan diterima di ITB.
   c. Fahmi disebut pintar jika dan hanya jika ia diterima di FK UGM.

3. Carilah nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan majemuk di bawah ini dengan menggunakan tabel kebenaran.
   a. $(p \Rightarrow q) \wedge \sim(p \Leftrightarrow \sim q)$
   b. $[p \Rightarrow (\sim q \vee r)] \wedge \sim[q \vee (p \Leftrightarrow r)]$

4. Sederhanakanlah pernyataan-pernyataan majemuk di bawah ini dengan menggunakan ekuivalensi-ekuivalensi pada halaman 18.
   a. $[p \Rightarrow (\sim q)] \Rightarrow [\sim (p \wedge q)]$
   b. $[\sim(p \vee q) \Rightarrow r] \vee \sim (p \wedge q)]$
   c. $p \wedge (\sim p \Rightarrow p) \wedge \sim p$
   d. $\sim[p \Rightarrow (q \vee r)] \wedge [\sim p \vee (q \vee r)] \vee p$

Bab IV
Pemecahan Masalah yang Berkait dengan Logika

A. Pengertian Masalah

Berikut ini adalah contoh masalah yang cocok untuk pengayaan bagi siswa SMA dengan kemampuan di atas rata-rata. Cobalah untuk menyelesaikan masalah di bawah ini terlebih dahulu untuk menguji kemampuan memecahkan masalah Anda. Akan diperlukan kesabaran, keuletan, kreativitas, dan pengetahuan matematika yang prima untuk memecahkan masalah-masalah tadi.

Tiga penumpang bus dari Surabaya ke Yogyakarta adalah Abdullah, Burhanuddin, dan Chandra. Secara kebetulan, nama ketiga penumpang tersebut sama dengan nama awak bus yang terdiri atas: supir, kondektur, dan montir. Tentukan nama supir bus tersebut berdasar petunjuk berikut.

a. Abdullah adalah nama penumpang bus yang tinggal di Surabaya.
b. Montir bus tinggal di Solo.
c. Penumpang yang namanya sama dengan montir bus tinggal di Yogyakarta.
d. Penumpang yang tinggal di Klaten belum beristeri.
e. Penumpang dengan nama Burhanuddin sudah berputera dua orang.
f. Abdullah, salah seorang awak bus bertengkar dengan kondektur bus di tempat makan.

Apa yang Anda dapatkan ketika menyelesaikan soal di atas? Apa bedanya jika anda diminta menentukan hasil dari 3456789×87965? Tidak seperti ketika menyelesaikan soal rutin yang sudah dipelajari langkah-langkahnya, seperti ketika menentukan hasil dari 3456789×87965, masalah dalam kotak di atas, kemungkinan besar belum Anda pelajari langkah-langkahnya, dan menurut definisi akan terkategori sebagai masalah. Namun bisa terjadi juga, soal tersebut sudah dipelajari dan sudah diketahui langkah-langkah penyelesaiannya sehingga tidak lagi terkategori sebagai masalah, namun sudah menjadi soal biasa.

Sebagian besar ahli Pendidikan Matematika menyatakan bahwa masalah merupakan pertanyaan atau soal yang harus dijawab atau direspon. Namun mereka menyatakan juga bahwa tidak semua pertanyaan otomatis akan menjadi masalah. Suatu pertanyaan akan menjadi masalah hanya jika pertanyaan itu menunjukkan adanya suatu tantangan (*challenge)* yang tidak dapat dipecahkan oleh suatu prosedur rutin (*routine procedure)* yang sudah diketahui si pelaku, seperti yang dinyatakan Cooney, et al. (1975: 242) berikut: "*… for a question to be a problem, it must present a challenge that cannot be resolved by some routine procedure known to the student.*"

B. Langkah Penyelesaiannya

Berikut ini adalah alternatif langkah-langkah penyelesaian soal atau masalah di atas.

1. Pernyataan (a) menunjukkan bahwa penumpang dengan nama Abdullah tinggal di Surabaya.
2. Pernyataan (d) menunjukkan bahwa penumpang yang tinggal di Klaten belum beristeri. Penumpang yang tinggal di Klaten jelas bukan Abdullah yang sudah diketahui tinggal di Surabaya dan juga bukan Burhanuddin karena menurut pernyataan (e) si Burhanuddin ini

sudah sudah berputera dua orang. Kesimpulannya, orang yang tinggal di Klaten ini pastilah Chandra.

3. Pernyataan (c) menunjukkan bahwa salah seorang penumpang tinggal di Yogyakarta. Karena tinggal tersisa satu orang, maka orang yang tinggal di Yogyakarta ini adalah Burhanuddin.
4. Jika data ini diorganisasikan dengan lebih rapi akan didapat tabelnya seperti berikut ini.

Nama Penumpang	Abdullah	Burhanuddin	Chandra
Tempat Tinggal	Surabaya	Yogyakarta	Klaten

5. Pernyataan (c) menginformasikan bahwa penumpang yang tinggal di Yogyakarta namanya sama dengan montir bus. Karena penumpang yang tinggal di Yogyakarta adalah Burhanuddin maka dapat disimpulkan bahwa nama montir bus tersebut adalah Burhanuddin.
6. Perhatikan sekarang pernyataan (f) yang menginformasikan bahwa Abdullah, salah seorang awak bus bertengkar dengan kondektur bus di tempat makan. Hal ini menunjukkan bahwa Abdullah bukanlah kondektur bus tersebut. Di samping itu, Abdullah bukanlah montir, karena montir bus tersebut adalah Burhanuddin. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa Abdullah adalah supir bus tersebut.

Penyelesaian masalah di atas menunjukkan bahwa penggunaan teori-teori logika, seperti implikasi dan nilai kebenaran. Pada soal atau masalah lainnya, dapat digunakan juga pembuktian dengan kontradiksi (*reductio ad absurdum*).

C. Beberapa Contoh Masalah Logika

1. Diandaikan bahwa politisi selalu berbohong dan ulama selalu berkata benar. Tiga orang sedang berbincang-bincang. Mereka adalah A, B dan C yang menjadi politisi atau ulama namun tidak ada yang merangkap sebagai ulama sekaligus politisi. Perbincangan mereka adalah sebagai berikut

   A: “Kami bertiga ulama.”
   B: “Si A berkata benar.”
   C: “Tidak. Si A berbohong.”

   Yang mana dari ketiga orang tersebut yang politisi dan mana yang ulama.
   Petunjuk: Perhatikan pernyataan B dan C. Apakah mungkin keduanya adalah guru?
2. Diandaikan bahwa politisi selalu berbohong dan ulama selalu jujur.
   P, Q, dan R sedang berbincang-bincang. Mereka ada yang menjadi politisi atau ulama namun tidak ada yang merangkap sebagai ulama sekaligus politisi.

   P: “Kami bertiga adalah politisi”
   Q: “Tidak. Ada satu orang di antara P, Q atau R yang ulama”.
   R tidak berkomentar.

   Manakah dari ketiga orang tersebut yang ulama dan mana yang politisi.
   Petunjuk: Perhatikan pernyataan P. Apakah mungkin dia ulama?
3. Tiga orang siswa SMUN Nusa, bernama Tomo, Dirjo dan Harso sedang berjalan menuju sekolahnya. Tomo, siswa terpandai di sekolahnya selalu berkata benar. Dirjo kadang-kadang berkata benar dan kadang-kadang berbohong. Sedangkan Harso, siswa ternakal di kelasnya selalu berbohong. Satu dari tiga siswa itu berbaju putih, satu lagi berbaju hijau dan yang satu lagi berbaju biru.
   Siswa yang berbaju putih menyatakan bahwa siswa yang berbaju hijau adalah Harso.
   Siswa yang berbaju hijau menyatakan bahwa dirinya adalah Dirjo.

Siswa yang berbaju biru menyatakan bahwa siswa yang berbaju hijau adalah Tomo.
Tentukan warna baju yang dipakai Tomo, Dirjo dan Harso.
Petunjuk: Tentukan lebih dahulu si Tomo karena ia tidak pernah berbohong. Mungkinkah Tomo berbaju hijau? Mungkinkah Tomo berbaju biru?

4. Tiga orang sahabat, yaitu A, B dan C yang baru saja menyaksikan pertandingan PERSEBAYA melawan PERSIB bertemu temannya, si D. Si D lalu menanyakan hasil pertandingan tersebut. Jawaban ketiga sahabatnya adalah:
   A: "Persebaya yang menang. Persib kebobolan lebih dahulu."
   B: "Saya tidak pernah berkata benar. Persebaya yang kebobolan lebih dahulu."
   C: "Pernyataan B salah. Pertandingan tersebut berakhir seri."

   Setelah mengetahui hasil pertandingan yang sebenarnya, tahulah si D bahwa kedua pernyataan dari A, B maupun C sama-sama benar atau sama-sama salah. Tentukan hasil pertandingan yang sebenarnya. Jelaskan jalan pikiran Anda secara runtut dan jelas.
   Petunjuk: Perhatikan pernyataan B. Mungkinkah pernyataan B bernilai benar?
5. Setelah menyelesaikan perlombaan tenis, lima peserta melaporkan hasilnya di mana setiap orang membuat dua pernyataan berikut.
   Alim: "Dodi nomor dua."; "Saya nomor tiga."
   Budi: "Saya juaranya."; "Cici nomor dua."
   Cici : "Saya nomor tiga."; "Budi di urutan terakhir."
   Dudi: "Saya berada di urutan ke-dua."; "Edna di urutan keempat."
   Edna: "Saya hanya ada di nomor empat."; "Alim yang menjadi juara."
   Tentukan uarut-urutan juaranya jika setiap pemain di atas membuat satu pernyataan yang benar dan satu pernyataan lainnya salah.

   Petunjuk: Lengkapi tabel yang menunjukkan pernyataan setiap orang di atas. Tabel di bawah menunjukkan bahwa Alim menyatakan bahwa Dodi berada di peringkat 2 dan dirinya sendiri berada di peringkat 3. Lalu analisis tabel tersebut.

	Alim	Budi	Cici	Dodi	Edna
Alim	3				
Budi					
Cici					
Dodi	2				
Edna					

6. Pada suatu perusahaan, tiga orang wanita, yaitu Lili, Mimi dan Nini masing-masing bekerja di bagian keuangan, kasir dan di bagian pembukuan. Tidak ada satupun dari mereka yang bekerja di dua bagian. Diketahui juga bahwa:
   a. Jika Nini bekerja sebagai kasir maka Mimi bekerja di bagian pembukuan.
   b. Jika Nini bekerja di bagian pembukuan maka Mimi bekerja di bagian keuangan.
   c. Jika Mimi tidak bekerja sebagai kasir maka Lili bekerja di bagian pembukuan.
   d. Jika Lili bekerja di bagian keuangan maka Nini bekerja di bagian pembukuan.

   Tentukan pekerjaan masing-masing orang tersebut.

   Petunjuk
   Apa yang akan terjadi jika Nini bekerja sebagai kasir?
   Apa yang akan terjadi jika Nini bekerja di bagian pembukuan?

Bab IV
Bukti Langsung Dan Bukti Tak Langsung

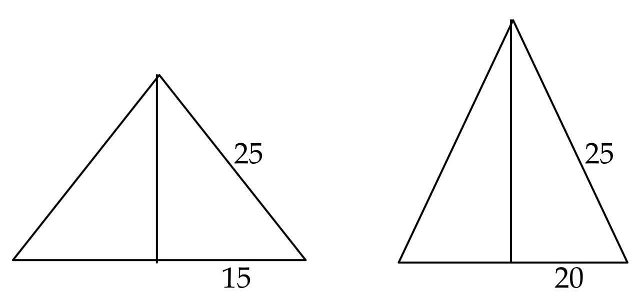
Matematikawan Yunani dikenal luas sebagai pengembang pembuktian (*proof*) yang handal dalam Matematika. Geometri Euclides dikenal sebagai contoh nyata tentang matematika yang bersifat deduktif aksiomatis. Hal ini menunjukkan bahwa suatu pengetahuan baru merupakan akibat dari pernyataan lain yang telah diterima kebenarannya seperti postulat atau aksioma, maupun teorema lain yang telah dibuktikan kebenarannya seperti dalil atau rumus. Sebagai akibatnya, peran bukti menjadi sangat penting dalam matematika. Bukti (*proof*) adalah argumen dari suatu premis ke suatu kesimpulan sedemikian sehingga dapat meyakinkan orang lain untuk menerima kesimpulan baru tersebut. Karenanya, pembuktian dalam matematika harus didasarkan pada dua hal yang sangat penting. Yang pertama pembuktian itu harus didasarkan pada pernyataan serta definisi yang jelas. Yang kedua, pembuktian tersebut harus didasarkan pada prosedur penarikan kesimpulan yang valid. Dikenal dua prosedur pembuktian, yaitu bukti langsung *(direct proof)* dan bukti tak langsung *(indirect proof).* Di samping handal dalam pembuktian langsung (*direct proof*), Matematikawan Yunani dikenal juga sebagai pengembang pembuktian tidak langsung (in*direct proof*), sebagaimana dinyatakan Bergamini (1965: 10): "*The Greeks devised still another technique for achieving a proof, the method which we call its Latin terms reductio ad absurdum (reduction to the absurd).*"

A. Pembuktian Langsung

Perhatikan soal berikut.

Panjang sisi-sisi suatu segitiga pertama adalah 25 m, 25 m, dan 30 m. Panjang sisi-sisi suatu segitiga kedua adalah 25 m, 25 m, dan 40 m. Segitiga mana yang lebih luas daerahnya? Buktikan.

Jika Anda yang mendapat masalah atau soal di atas, apa yang akan Anda lakukan? Mungkin Anda akan menyatakan bahwa segitiga kedua yang lebih luas daerahnya. Namun benarkah? Bagaimana membuktikannya? Berhentilah membaca untuk beberapa saat, cobalah untuk menyelesaikan soal tersebut terlebih dahulu. Mungkin yang Anda lakukan adalah membuat gambar atau diagramnya seperti gambar berikut.



Tinggi segitiga pertama dapat dihitung dengan menggunakan teorema Pythagoras, sehingga didapat tingginya adalah 20 cm. Akibatnya, luas segitiga pertama adalah 300 cm^2. Dengan cara yang sama, akan dapat dihitung tinggi segitiga kedua adalah 15 cm; sehingga luas segitiga kedua adalah 300 cm^2 juga. Jadi terbukti sekarang bahwa luas segitiga pertama dan kedua adalah sama, yaitu 300 cm^2.

Pembuktian di atas merupakan contoh pembuktian langsung yang dilakukan untuk meyakinkan orang lain tentang kebenaran suatu pernyataan. Pembuktian langsung biasanya menggunakan sillogisma berbentuk:

$$p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r,\ r \Rightarrow s,\ \ldots,\ y \Rightarrow z$$

sehingga dapat disimpulkan $p \Rightarrow z$. z merupakan pernyataan yang harus dibuktikan

Contoh:

1. Buktikan bahwa jika a + c = b + c, maka a = b

<u>Bukti :</u>

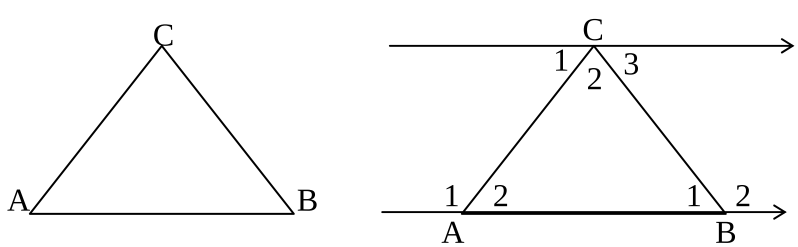
a + c	= b + c	[diketahui]
(a + c) + (– c)	= (b + c) + (– c)	[menambah kedua ruas dengan – c]
[a + {c + (– c)}]	= [b + {c + (– c)}]	[assosiatif]
a + 0	= b + 0	invers]
a	= b	[identitas penjumlahan]

Pembuktian langsung di atas menunjukkan bahwa dimulai dengan a + c = b + c dan dengan langkah yang runtut, sesuai dengan aksioma yang ada, pada akhirnya akan didapat a = b. Hal terseut menunjukkan juga bahwa dari suatu pernyataan dapat dibuktikan pernyataan lain yang jika pernyataan awalnya (a + c = b + c) bernilai benar akan didapat pernyataan lain (a = c) yang tidak mungkin bernilai salah. Teorema atau dalil tersebut dapat digunakan untuk membentuk pernyataan, rumus, teorema atau dalil lainnya.

2. Buktikan bahwa jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^o.

<u>Bukti:</u>

Misalkan segitiga ABC-nya adalah seperti gambar dibawah ini



Jika ditarik garis *l* // AB, akan didapat gambar seperti di kanan atas. Dengan menggunakan teorema atau dalil tentang dua garis sejajar yang dipotong garis lain, akan didapat:

$\angle A_2 = \angle C_1$ (dalam berseberangan)

$\angle B_1 = \angle C_3$ (dalam berseberangan)

Karena jumlah besar sudut-sudut segitiga ABC adalah

$$\angle A_2 + \angle B_1 + \angle C_2 = \angle C_1 + \angle C_3 + \angle C_2 = 180°$$

Besar sudut 180° ini didapat dari definisi bahwa sudut lurus besarnya 180°. Dengan demikian terbuktilah bahwa jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180°. Pembuktian ini dilakukan dengan runtut, dimulai dari segitiga ABC, lalu dengan menggunakan dalil ataupun teorema yang sudah dibuktikan kebenarannya serta definisi yang sudah ditentukan; dan diakhiri dengan kesimpulan yang menunjukkan tentang jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga seperti yang diharapkan.

B. Pembuktian Tak Langsung

Jika Anda diminta untuk membuktikan secara deduktif seperti yang sering digunakan di matematika bahwa bendera putih dengan bulatan merah bukanlah bendera Indonesia, apa yang akan Anda lakukan? Sekali lagi, bagaimana cara Anda membuktikannya secara deduktif?

Didalam kehidupan nyata sehari-hari pemanfaatan pembuktian tak langsung *(indirect proof)* sering digunakan meskipun tidak disadari sebagai pembuktian tak langsung. Sebagai contoh ketika Anda sedang asyik bembaca lalu tiba-tiba saja listrik mati. Jika Anda ingin menentukan sumber matinya listrik tersebut, apa yang akan Anda lakukan? Yang terpikir pertama kali adalah, penyebab matinya listrik tersebut terletak di gardu dengan alasan: "jika listrik di gardu mati maka listrik dirumah dan listrik tetangga akan mati juga" namun dengan melihat listrik tetangga-tetangga yang masih hidup semua Anda akan menyimpulkan bahwa penyebab matinya listrik tersebut adalah bukan di gardu listriknya. Jadi sumber matinya listrik terletak di rumah sendiri.

Menurut Cooney, Davis, dan Henderson (1975:313), pembuktian tak langsung adalah strategi yang sangat hebat karena penalaran tersebut dapat digunakan untuk membuktikan kebenaran hampir semua pernyataan. Ketiganya (1975:313) menyatakan: *"A special form of indirect proof is reductio ad absurdum"*. Borrowski dan Borwein (1989:289) menyatakan bahwa : *"Indirect proof is a common mathematical term for reductio ad absurdum"*. Bentuk *reductio ad absordum* ini dikenal juga sebagai penalaran melalui kontradiksi. Untuk membuktikan kebenarannya pernyataan p, maka dimisalkan negasi atau ingkaran tersebut yang terjadi yaitu ~p. Lalu dibuktikan bahwa ~p ini mengarah kepada suatu kontradiksi. Karena ~p mengarah kesuatu keadaan yang kontradiksi, maka pemisalan ~p dianggap salah. Jadi, kesimpulan bahwa p benar seperti yang akan dibuktikan. Berikut ini contoh-contoh pembuktian tak langsung.

1. Buktikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan rasional

<u>Bukti:</u>

Misalkan $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional. Dengan demikian $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. sebagai akibatnya baik p maupun q merupakan bilangan asli dan keduanya tidak memiliki faktor persekutuan selain 1. Dengan mengkuadratkan $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ didapat: $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$

Karena $2q^2$ adalah bilangan genap, maka p^2 nya juga genap. Karena p telah dinyatakan sebagai bilangan asli maka didapat p sebagai bilangan asli genap. Dengan demikian, p memiliki faktor 2.

Jika sekarang dimisalkan $p = 2r$; sedangkan $p^2 = 2q^2$; sehingga didapat:

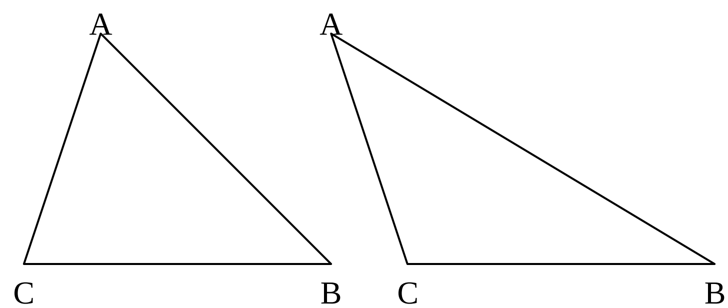
$$(2r)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4r^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2p^2$$

Dengan argumen yang sama seperti yang disampaikan di atas tadi; dapatlah disimpulkan bahwa q adalah bilangan asli genap, yang memiliki faktor 2 juga seperti p. Hal ini merupakan suatu keadaan yang tidak masuk di akal sehat kita. Suatu keadaan yang kontradiksi. Yaitu p dan q pada tahap awal pembuktian dinyatakan tidak memiliki faktor persekutuan selain 1, namun pada akhir pembuktian p dan q dinyatakan sama-sama memiliki faktor persekutuan 2. Keadaan yang tidak masuk akal ini pada akhirnya menunjukkan tentang salahnya pemisalan $\sqrt{2}$ sebagai bilangan rasional. Kesimpulannya $\sqrt{2}$ bukan bilangan rasional atau $\sqrt{2}$ merupakan bilangan irrasional.

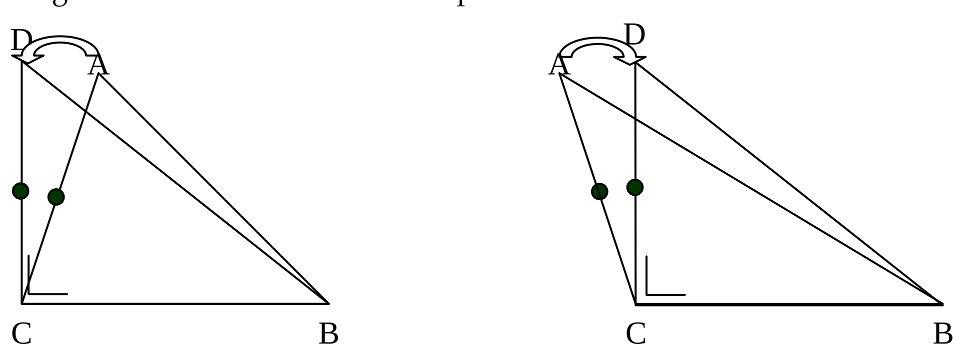
Dengan contoh di atas, jelaslah kiranya bahwa pembuktian tak langsung (terbalik) adalah pembuktian dengan pemisalan ingkaran pernyataan yang akan dibuktikan tadi sebagai hal yang benar, namun dengan langkah-langkah yang logis, pemisalan ini mengarah ke suatu keadaan yang kontradiksi, sehingga pemisalan tersebut dinyatakan sebagai hal yang salah. Artinya negasi dari negasi pernyataan tersebut sebagai hal yang benar. Kesimpulan akhirnya, pernyataan yang akan dibuktikan tersebut merupakan pernyataan yang benar.

2. Dengan memengandaikan bahwa siswa sudah tahu kebenaran teorema Pythagoras; buktikan kebenaran kebalikan teorema Pythagoras, yaitu jika a, b, dan c merupakan ukuran sisi-sisi suatu segitiga ABC yang memenuhi $BC^2 + AC^2 = AB^2$, maka segitiga ABC tersebut adalah segitiga siku-siku di C.

<u>Bukti:</u>
Dimisalkan segitiga ABC tersebut bukan segitiga siku-siku di C. Dengan demikian, $\angle C < 90^o$ atau $\angle C > 90^o$ seperti terlihat pada dua gambar di bawah ini.



Tarik segmen garis CD = CA dan CD $\perp$ CB seperti terlihat di bawah ini



Berdasar terorema Pythagoras akan didapat: $BD^2 = BC^2 + CD^2$. Padahal diketahui bahwa $BC^2 + AC^2 = AB^2$. Dengan demikian BD = AB.
Dengan demikian didapat dua segitiga yang samakaki, yaitu ΔACD dan ΔABD. Akibatnya:

$$\angle CDA = \angle CAD \quad ... 1)$$
$$\angle BDA = \angle DAB \quad ... 2)$$

Pernyataan 1) dan 2) saling bertentangan karena jika dilihat pada gambar sebelah kiri, yaitu $\angle CDA = \angle CAD$ pada pernyataan 1) akan mengakibatkan $\angle BDA < \angle CDA$ sedangkan $\angle DAB > \angle CAD$, sehingga tidaklah mungkin $\angle BDA = \angle DAB$ seperti dinyatakan pada pernyataan 2).
Kesimpulannya, pemisalan bahwa segitiga ABC bukan segitiga siku-siku di C adalah salah, sehingga didapat segitiga ABC merupakan segitiga siku-siku di C.

3. Buktikan $\phi \subset A$

Bukti:

Misalkan $\phi \not\subset A$. Langkah ini memisalkan ingkaran atau negasi yang akan dibuktikan, sehingga disebut pembuktian tak langsung. Apa yang dapat Anda katakan tentang $\phi \subset A$? Pernyataan $\phi \not\subset A$, mengandung arti bahwa ada anggota himpunan kosong ϕ yang tidak menjadi anggota himpunan A. Suatu keadaan yang tidak mungkin terjadi, karena ϕ tidak mempunyai anggota. Dengan keadaan yang kontradiksi ini, dapat disimpulkan bahwa pemisalan tadi bernilai salah. Artinya pernyataan $\phi \not\subset A$ bernilai salah, yang benar adalah $\phi \subset A$.

Latihan Bab V.1

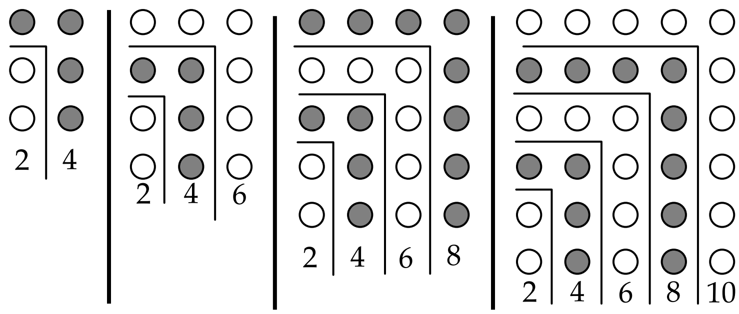
1. Buktikan dengan cara langsung:
    a. Jika a dan b adalah dua bilangan rasional, maka a + b merupakan bilangan rasional.
    b. Jika a dan b adalah dua bilangan real, maka $a^2 + b^2 \geq 2ab$
    c. Jika a adalah suatu bilangan bulat yang habis dibagi 4, maka a merupakan selisih dari dua bilangan kuadrat sempurna.
2. Buktikan dengan cara tidak langsung bahwa:
    a. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
    b. Tidak ada pasangan bilangan (x, y) dengan x dan y merupakan bilangan asli yang memenuhi $a^2 - b^2 = 10$
    c. Garis-garis p, q, dan r merupakan tiga garis yang berbeda; p//q; dan q//r. Buktikan bahwa p//r.
3. Buktikan dengan cara langsung dan tidak langsung bahwa:
    Jika ab = 0 maka paling tidak salah satu dari a atau b bernilai 0
4. Buktikan:
    a. Pada segitiga ABC siku-siku di A, maka diameter lingkaran dalam segitiga ABC = b + c – a
    b. Jika dua garis a dan b sejajar dan dipotong garis p maka sudut-sudup sehadapnya sama besar.
    c. Besar sudut pusat adalah dua kali besar sudut keliling
    d. Jika pada segitiga ABC, $\angle A = 90°$ dan $\angle C = 30°$ maka A = 2C
    e. Banyaknya bilangan prima tidak terbatas.
5. Dimisalkan bahwa hogog selalu berbohong dan guru berkata benar.
    A. “Kita bertiga hogog”
    B. “Diantara tiga orang ini, hanya seorang saja yang guru”
    C. Diam saja tidak berkomentar.

    Dari ketiga orang tersebut, tentukan yang menjadi hogog dan yang menjadi guru.

Bab VI
Induksi Matematika

A. Pentingya Induksi Matematika

Perhatikan gambar berikut. Apa yang menarik dari gambar ini?



Gambar di atas menunjukkan bahwa:

$$2 + 4 = 2 \times 3$$
$$2 + 4 + 6 = 3 \times 4$$
$$2 + 4 + 6 + 8 = 4 \times 5$$

Pertanyaan yang dapat diajukan.

1. Apakah benar $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = (n)(n + 1), n \geq 1$?
2. Bagaimana membuktikannya?

Diagram di atas sering ditemukan pada buku-buku SD maupun SMP untuk meyakinkan para siswa bahwa penjumlahan n buah bilangan genap pertama sama dengan bilangan persegi panjang ke-n. Diagram di atas menunjukkan juga bahwa $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 5 \times 6$. Namun pertanyaannya, apakah hal tersebut sudah membuktikan secara formal bahwa penjumlahan n buah bilangan genap pertama sama dengan bilangan persegi-panjang ke-n? Contohnya; apakah rumus itu benar untuk n = 999.999 maupun untuk n = 100.100.100? Karena adanya sikap ke hati-hatian para matematikawan, pernyataan tersebut masih dikategorikan sebagai suatu dugaan (*conjecture*) sebelum dibuktikan kebenarannya melalui induksi matematika.

Menurut Abrahamson dan Gray (1971 : 117) induksi matematika muncul di dalam berbagai karya matematikawan besar dunia, dimulai sekitar akhir abad enam belas. Tetapi, matematikawan besar Perancis, yaitu Blause Pascal (1623 – 1662) yang pertama kali memberikan penjelasan ini secara lebih jelas dan terinci. Pascal melakukan hal ini pada tahun 1654, di dalam suatu pengkajian yang kini dikenal sebagai segitiga Pascal sedangkan instilah induksi matematika digunakan pertama kali oleh matematikawan Inggris Augustus de Morgan pada 1838.

B. Prinsip Induksi Matematika

Abrahamson dan Gray (1971: 116) menyatakan hal berikut: *"The technique of mathematical induction, in spite of its name, is a deductive – not an inductive–method of reasoning"*. Hal ini menunjukkan bahwa, tidak seperti istilahnya, induksi matematika adalah langkah deduktif dan bukan langkah induktif. Secara umum, induksi matematika digunakan untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan yang berkait dengan bilangan asli.

Jika P(n) merupakan pernyataan yang didefinisikan untuk setiap bilangan asli $n \geq p$. Jika dapat ditunjukkan P(p) bernilai besar, dan dapat dibuktikan bahwa P(k + 1) bernilai benar jika P(k) bernilai benar, maka P(n) adalah benar untuk semua $n \geq k$.

Secara skematis, langkah-langkah pembuktian menggunakan induksi matematika adalah sebagai berikut.

1. Ditunjukkan P(p) benar [Langkah I]
2. $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ [Langkah Induktif]

Untuk setiap n, P(n) [Kesimpulan]

C. Contoh Induksi Matematika

Contoh 1.

Buktikan dengan induksi matematika bahwa $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Bukti

Yang akan dibuktikan adalah pernyataan atau rumus yang berkait dengan bilangan asli n, yaitu tentang jumlah n bilangan asli pertama akan bernilai sama dengan bilangan persegi ke-n.
Sebagaimana dinyatakan di atas, langkah induksi matematika adalah sebagai berikut.

1) Harus ditunjukkan bahwa pernyataan benar untuk n = p, di sini akan diambil p = 1. Untuk n = 1, akan didapat.

   Ruas kiri $= 2n - 1$
   $= 2\times1 - 1$
   $= 1$

   Ruas kanan $= n^2$
   $= 1 \times 1$
   $= 1$

   Karena ruas kiri dan kanan sama maka sudah dapat ditunjukkan bahwa P(n) bernilai benar untuk n = 1. Dengan demikian P(1) bernilai benar.

2) Langkah kedua ini dikenal dengan langkah induktif.

   Misalkan P(n) benar untuk n = k, sehingga didapat:
   $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) = k2$.

   Yang harus dibuktikan sekarang adalah pernyataan benar untuk n = k + 1, yaitu:

   Ruas kiri $= 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1)$
   $= k^2 + (2k + 1)$
   $= (k + 1)^2$

   Ruas kanan $= (k + 1)^2$.

   Karena ruas kiri dan kanan sama maka sudah dapat dibuktikan bahwa , jika dimisalkan rumus atau pernyataan benar untuk n = k maka benar pula untuk n = k + 1. Dengan demikian, $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

3) Kesimpulannya, rumus benar untuk setiap n bilangan asli k.

Pembuktian secara induksi matematika ini menunjukkan bahwa pada langkah pertama rumus ditunjukkan benar untuk n = 1. Pada langkah kedua dibuktikan bahwa rumus benar untuk n = k + 1 berdasar pemisalan bahwa rumus benar untuk n = k.

Berdasar dua langkah tersebut dapat disimpulkan bahwa rumus tersebut benar untuk setiap bilangan asli n. Sebagian siswa mengalami kesulitan untuk memahami pembuktian dengan menggunakan induksi matematika ini. Diantaranya adalah:

- Mengapa rumus harus dimisalkan benar untuk n = k lalu dibuktikan rumus benar untuk n = k + 1?
- langkahnya seperti berputar-putar.

Perhatikan langkah pertama, yang menunjukkan bahwa rumus tersebut benar untuk n = 1. Pada langkah kedua, jika rumus benar untuk n = 1 (lihat langkah 1) maka rumus akan benar juga untuk n = 2. Akibat selanjutnya rumus akan benar untuk n = 3, n = 4, n = 5 dan seterusnya untuk setiap bilangan asli n. Jadi, langkah kedua jangan dilihat sepotong-potong, tetapi harus dikaitkan dengan langkah pertama, sehingga tidak muncul pemikiran siswa bahwa pembuktian ini seperti berputar-putar.

Contoh 2
Buktikan bahwa $n^3 + 5n$ habis dibagi 6, $n \geq 1$.
Bukti:
Rumus yang akan dibuktikan adalah P(n) yang berbunyi: "$n^3 + 5n$ habis dibagi 6".

1) Tunjukkan bahwa P(1) adalah benar. P(1) = 1 + 5 = 6 yang memang benar habis dibagi 6. Jadi P(1) adalah benar.

2) Dimisalkan P(k) benar, jadi $k^3 + 5k$ habis dibagi 6. Harus dibuktikan P(k + 1) bernilai benar juga. Untuk n = k + 1.

   $(k + 1)^3 + 5(k + 1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (5k + 5) = (k^3 + 5k) + (3k^2 + 3k + 6)$

   $= \underbrace{(k^3 + 5k)}_{\mathrm{I}} + \underbrace{3k(k + 1)}_{\mathrm{II}} + \underbrace{6}_{\mathrm{III}}.$

   Bentuk I, II, dan III habis dibagi 6. Mengapa? Jelaskan.

3) Dengan demikian rumus benar untuk setiap bilangan asli n.

Latihan Bab VI.1

1. Buktikan benar atau salahnya pernyataan atau rumus ini:

   "Jika $a_1 = 11$ dan $a_{n+1} = a_n + 2n$ untuk setiap $n \geq 1$, maka a_n adalah bilangan prima untuk setiap bilangan asli n".

2. Buktikan bahwa

   a) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = n(n + 1)$

b) $7 + 10 + 13 + 16 + \ldots + \{7 + 3(n - 1)\} = \frac{1}{2}n[14 + 3(n - 1)]$

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2 (n + 1)^2$

d) $3^{3n} + 2^{n+2}$ habis dibagi 5

e) $2^{4n+3} + 3^{3n+1}$ habis dibagi 11

f) $a^{4n} - b^{4n}$ habis dibagi $(a^2 + b^2)$.

3. Buktikan bahwa:

a) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

b) $1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$ untuk $r \neq 1$.

c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$

d) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$

e) $\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \frac{3^2}{5.7} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

4. Suatu bidang datar memuat n buah garis lurus. Setiap dua garis tidak pernah sejajar dan setiap tiga titik tidak pernah segaris. Buktikan bahwa banyaknya daerah yang terbentuk oleh n buah garis tersebut adalah $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$.

Bab VII
Penutup

Paket atau modul pembelajaran ini dirancang khusus untuk para peserta Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SMK jenjang lanjut. Modul ini disusun dengan maksud untuk memberikan tambahan pengetahuan bagi guru SMK engan harapan dapat digunakan sebagai salah satu sumber untuk memecahkan masalah-masalah pembelajaran Logika. Secara umum, pembahasan pada modul ini, lebih menitik-beratkan pada pemenuhan kebutuhan guru matematika SMK agar memiliki dasar dan pijakan yang lebih kuat, sehingga para lulusan diklat jenjang lanjut ini diharapkan akan dapat membantu teman-teman guru matematika di daerahnya masing-masing dengan lebih mantap.

Selanjutnya, dengan memiliki pijakan pengetahuan yang lebih kuat tersebut, diharapkan Bapak dan Ibu guru matematika peserta diklat jenjang lanjut ini akan dapat mengembangkan sendiri kemampuannya; sehingga pada akhirnya dapat mengembangkan soal atau masalah maupun inovasi-inovasi pembelajaran lainya di bidang logika pada khususnya dan bidang matematika pada umumnya. Memang harus diakui tentang kurangnya buku sumber di daerah-daerah. Namun pengalaman penulis ketika berada di Kupang (NTT) adalah dengan sering berkunjung ke Perpustakaan Daerah di Kupang. Beberapa buku di Perpustakaan Daerah di Kupang telah menjadi daftar pustaka paket ini. Pada akhirnya, untuk seluruh peserta Diklat jenjang lanjut, penulis ucapkan selamat berjuang untuk membantu teman-teman guru matematika di daerah.

Daftar Pustaka

Abrahamson, D; Gray, M.C. (1971). *The Art of Algebra*. Adelaide: Rigby Limited.

Bergamini, D. (1965). *Life Science Library. Mathematics*. Nederland: Time-Life International.

Borowski, E.J.; Borwein, J.M. (1989). *Dictionary of Mathematics.* London: Collins

Clemens, S.R; O'daffer, P.G.; Cooney, T.J. (1984) *Geometry.* California: Addison-Wesley Publishing Co.

Cooney, T.J., Davis, E.J., Henderson, K.B. (1975). *Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics*. Boston : Houghton Mifflin Company.

Copi, I.M. (1978) *Introduction to Logic.* New York: Macmillan.

Giere, R. N. (1984). *Understanding Scientific Reasoning (2nd Edition).* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Soekardijo, R.G. (1988). *Logika Dasar, Tradisionil, Simbolik dan Induktif.* Jakarta:: Gramedia.

Wheeler, R.E. (1977). *Modern Mathematics. An Elementary Approach (4th Ed).* Monterey: Brooks/Cole Publishing Company