DIKLAT INSTRUKTUR PENGEMBANG MATEMATIKA SMA
JENJANG LANJUT

PELUANG

JENJANG LANJUT

Drs. Marsudi Raharjo, M.Sc.Ed

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIDK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
YOGYAKARTA
2009

Daftar Isi

PELUANG SMA LANJUT

KOMPETENSI

Memiliki kemampuan mengembangkan pengetahuan dan ketrampilan siswa SMA menggunakan konsep-konsep pencacahan (prinsip perkalian), ruang sampel, titik sampel, peristiwa dan peluang munculnya suatu peristiwa dalam pemecahan masalah.

SUB KOMPETENSI

Menjelaskan dan memberi contoh:

- Pemecahan masalah peluang yang berkenaan dengan distribusi peluang
  1. Disribusi Binomial untuk peluang sukses dalam pengundian dan peristiwa pengambilan sampel beberapa kali dengan pengembalian (antar pengambilan sampel saling bebas, dan hasil pengundiannya hanya dibedakan dalam 2 kategori: **sukses** atau **gagal** (**tidak sukses**)
  2. Disribusi Hipergeometri yang berkenaan dengan peluang pada pengambilan sampel sekaligus dan pengambilan sampel satu demi satu tanpa pengembalian
  3. Disribusi Multinomial yang berkenaan dengan peluang pada pengambilan sampel satu demi satu dengan pengembalian
- Pemecahan masalah peluang berkenaan dengan soal-soal Ebtanas
- Pemecahan masalah peluang berkenaan dengan rumus Bayes.

PETA BAHAN AJAR

No.	Pokok Bahasan	Sub Pokok Bahasan
1	Distribusi Peluang	1.1 Distribusi Binomial (sukses dan gagal) pada pengundian dan pada pengambilan sampel satu demi satu tanpa pengembalian 1.2 Distribusi Hipergeometri pada pengambilan sampel sekaligus dan pengambilan sampel satu demi satu tanpa pengembalian 1.3 Distribusi Multinomial pengambilan sampel satu demi satu dengan pengembalian
2	Rumus Bayes	1.1 Peluang terambilnya suatu obyek eksperimen berasal dari kelompok tertentu, jika obyek eksperimrnnya terdiri dari beberapa kelompok

BAB I

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Peluang merupakan bagian matematika yang membahas tentang ukuran ketidakpastian terjadinya suatu peristiwa yang ada dalam kehidupan (Smith, 1991:3). Memang banyak peristiwa yang tidak dapat dipastikan terjadi atau tidak terjadi di suatu saat. Namun dengan mengetahui ukuran berhasil dan tidaknya suatu peristiwa yang diharapkan akan terjadi kemudian, orang akan lebih yakin dapat mengambil keputusan terbaik dan bijaksana tentang apa yang seharusnya ia lakukan.

Materi peluang secara sederhana mulai dikenalkan di SMP lebih diperdalam di SMA dan ditingkatkan lagi di perguruan tinggi. Karena luasnya terapan peluang baik dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam pengembangan statiska dan kebutuhan dalam kegiatan diklat, maka dipandang perlu untuk menyediakan modul lanjut untuk bahan diklat peluang.

Melalui kesempatan ini penulis berupaya menyusun materi diklat lanjut peluang yang bersifat memberikan tuntunan pemahaman kepada peserta Diklat Guru Matematika SMA jenjang lanjut yang dipandang perlu diketahui untuk memperkaya pengetahuan.

Sajian materinya diusahakan dapat memberikan kecakapan hidup (life skill) yang bersifat akademik menggunakan prinsip *learning to know, learning to do, learning to be, learning to live together dan learning to cooperate* (Depdiknas, 2001:11). Diharapkan para pembaca (guru matematika SMA) dalam memahami modul ini dapat bekerjasama dengan teman-teman seprofesi: saling membaca, mencoba soal, berdiskusi dan mengadakan konfirmasi (menyampaikan argumentasi/alasan pemecahan masalahnya).

B. TUJUAN

Bahan ajar ini ditulis sebagai bahan rujukan pelatihan di seluruh Indonesia dengan maksud untuk memberikan bahan pemahaman pendalaman materi peluang yang perlu dikuasai guru matematika SMA agar lebih berhasil dalam mengajarkan materi itu kepada para siswanya.

Kepada para alumni penataran guru inti MGMP matematika SMA diharapkan untuk dapat menggunakannya sebagai bahan tindak lanjut penataran dengan paradigma baru sesuai anjuran pemerintah saat ini. Setelah dipelajarinya materi ini diharapkan agar para alumni dapat:

1. mengimbaskan pengetahuannya kepada guru-guru di wilayah MGMP-nya dan rekan-rekan seprofesi lainnya
2. mengajarkan kepada para siswanya secara lancar, lebih baik dan lebih jelas
3. mengembangkan soal-soal yang lebih variatif dan menyentuh kehidupan nyata.

C. RUANG LINGKUP

Materi peluang yang ditulis ini merupakan materi minimal yang harus dikuasai oleh guru SMA. Materi yang dibahas meliputi:

1. Pemahaman konsep peluang lanjut berupa distribusi peluang: distribusi binomial, distribusi hipergeometri, dan distribusi multinomial berikut contoh-contoh terapannya
2. Rumus Bayes dan penerapannya dalam perhitungan peluang

Modul ini dimaksudkan untuk dapat dibaca dan dipahami sendiri termasuk mengerjakan soal-soal latihan dan merujuknya pada kunci jawaban. Untuk itu langkah-langkah penguasaan materinya adalah

1. Pelajari materinya (bersama teman)
2. Bahas soal-soalnya dan lihat kunci jawabannya.
3. Adakan Problem Posing: Ciptakan variasi soal lainnya berikut jawabannya.

BAB II
DISTRIBUSI PELUANG

A. Distribusi Binomial

Distribusi binomial adalah **distribusi** (**sebaran**) nilai peluang untuk percobaan/ eksperimen berulang yang saling bebas yang hanya terdiri dari 2 kategori : **sukses** atau **gagal**, **merah** atau **bukan merah**, **putih** atau **bukan putih**, dan sejenisnya. Untuk memudahkan pemahaman, sebelum dibicarakan bentuk umumnya, secara khusus diberikan contoh seperti berikut.

Misalkan sebuah dadu diundi 4(empat) kali maka peristiwa munculnya salah satu muka dadu misal muka 2 pada undian pertama dan peristiwa munculnya muka 2 pada undian kedua, ketiga, hingga keempat adalah **saling bebas**, sebab **peluang munculnya hasil pada percobaan sesudahnya tidak tergantung/tidak dipengaruhi** oleh **peluang munculnya hasil sebelumnya**. Sebagai contoh misalnya peluang munculnya muka 5 pada undian pertama tidak dipengaruhi/tidak tergantung pada peluang munculnya muka 5 pada undian pertama. Peluangmasing-masing tetap $\frac{1}{6}$, yaitu P({5 pada undian I}) = P({5 pada undian II}) = P({5 pada undian III}) = P({5 pada undian IV}) = $\frac{1}{6}$.

Kini misalkan kita mengincar muka dadu 2, maka dikatakan **sukses** jika **muka 2 yang kita incar itu muncul** dan **gagal** jika **muka 2 yang kita incar itu tidak muncul**. Peluang sukses munculnya muka 2 dalam setiap kali pengundian adalah P(sukses) = P({2}) = $\frac{1}{6}$. Peluang gagal adalah peluang munculnya muka dadu selain 2, yaitu P(gagal) = P({1,3,4,5,6}) = P({1}) + P({1}) + P({3}) + P({4}) + P({5}) + P({6}) = $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ (mengingat prinsip penjumlahan bahwa peluang munculnya suatu peristiwa pada ruang sampel berhingga sama dengan jumlah peluang munculnya masing-masing titik sampel dalam peristiwa itu). Cara lain yang lebih cepat adalah P(gagal) = 1 – P(sukses) sebab sukses dan gagal adalah dua peristiwa komplemen. Sehingga jika P(sukses) = $\frac{1}{6}$, maka P(gagal) = 1 – $\frac{1}{6}$= $\frac{5}{6}$.

Masalah pertama yang harus kita ketahui adalah berapakah banyaknya anggota ruang sampel jika sebuah dadu diundi 4(empat) kali?. Jawabannya tentu 6^4 = 1296, yakni mulai dari s_1=1111, s_2=1112, …,s_6=1116, s_7=1121, s_8=1122,…, s_{12}= 1126, dan seterusnya hingga yang terakhir adalah e_{1296} = 6666.

Jadi ruang sampel dari eksperimen itu adalah S = $\{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{1296}\}$ sehingga n(S) = 1296. Nilai peluang dari masing-masing titik sampel tersebut adalah sama yaitu

$$P(\{s_1\}) = P(\{s_2\}) = P(\{s_3\}) = \ldots = P(\{s_{1296}\}) = \frac{1}{1296}.$$

Nah dari titik sampel yang berjumlah 1296 itu sebaran (distribusi) peluang munculnya muka 2 dalam 4 kali percobaan berulang adalah sebagai berikut.

$x = 0$ sukses $\rightarrow$ gggg = 1 macam = $\binom{4}{0}$ $\rightarrow$ n(g) = n({1,3,4,5,6}) = 5, sehingga

$$\begin{aligned} n(gggg) &= n(g).n(g).n(g).n(g) \\ &= 5.5.5.5 \\ &= 5^4 = 625. \end{aligned}$$

Dengan demikian $\longrightarrow$ n(x = 0 sukses) = 1×5^4 = 625

$$x = 1 \text{ sukses} \rightarrow \left.\begin{array}{l} sggg \rightarrow n(sggg) = 1.5.5.5 = 5^3 = 125 \\ gsgg \rightarrow n(gsgg) = 5.1.5.5 = 5^3 = 125 \\ ggsg \rightarrow n(ggsg) = 5.5.1.5 = 5^3 = 125 \\ gggs \rightarrow n(gggs) = 5.5.5.1 = 5^3 = 125 \end{array}\right\} n(x = 1 \text{ sukses}) = 4 \times 5^3 = 500$$

$$x = 2 \text{ sukses} \rightarrow \left.\begin{array}{l} ssgg \rightarrow n(ssgg) = 1.1.5.5 = 5^2 = 25 \\ sgsg \rightarrow n(sgsg) = 1.5.1.5 = 5^2 = 25 \\ gssg \rightarrow n(gssg) = 5.1.1.5 = 5^2 = 25 \\ gsgs \rightarrow n(gsgs) = 5.1.5.1 = 5^2 = 25 \\ ggss \rightarrow n(ggss) = 5.5.1.1 = 5^2 = 25 \\ sggs \rightarrow n(sggs) = 1.5.5.1 = 5^2 = 25 \end{array}\right\} n(x = 2 \text{ sukses}) = 6 \times 5^2 = 150$$

Sejalan dengan itu maka

$$x = 3 \text{ sukses} \rightarrow \left.\begin{array}{l} sssg \\ ssgs \\ sgss \\ gsss \end{array}\right\} 4 \text{ pola} \longrightarrow n(x = 3 \text{ sukses}) = 4 \times 5^1 = 20$$

$x = 4$ sukses $\rightarrow$ ssss = 1 pola $\longrightarrow$ n(x = 4 sukses) = 1×5^0 = 1

\+

Total = 1296
= n(S).

Banyaknya pola mulai dari 0 sukses,1sukses, hingga 4 sukses masing-masing adalah 1, 4, 6, 4, dan 1. Pola itu tidak lain adalah pola bilangan pada segitiga pascal yang merupakan pola koefisien suku dua (binom) berpangkat empat, yaitu:

$$(a + b)^4 = 1\,a^4 + 4\,a^3b + 6\,a^2b^2 + 4\,ab^3 + 1\,b^4.$$

Pola dari masing-masing koefisien yang ditandai dengan bulatan di atas adalah

$$1 = \binom{4}{0} = C_0^4,\ 4 = \binom{4}{1} = C_1^4,\ 6 = \binom{4}{2} = C_2^4\ ,\ 4 = \binom{4}{3} = C_3^4,\ \text{dan}\ 1 = \binom{4}{4} = C_4^4.$$

Karena masing-masing titik sampel dalam ruang sampel S berpeluang sama untuk muncul, maka berdasarkan data di atas, peluang sukses munculnya muka dadu 2 sebanyak 0 kali (0 sukses), 1 kali, 2kali, hingga 4 kali berturut-turut adalah

$$P(x = 0 \text{ sukses}) = \frac{n(x = 0 \text{ sukses})}{n(S)} = \frac{625}{1296} \to = \frac{(1\,\text{pola}) \times 5^4}{6^4} = C_0^4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$P(x = 1 \text{ sukses}) = \frac{n(x = 1 \text{ sukses})}{n(S)} = \frac{500}{1296} \to = \frac{(4\,\text{pola}) \times 5^3}{6^4} = C_1^4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$P(x = 2 \text{ sukses}) = \frac{n(x = 2 \text{ sukses})}{n(S)} = \frac{150}{1296} \to = \frac{(6\,\text{pola}) \times 5^2}{6^4} = C_2^4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$P(x = 3 \text{ sukses}) = \frac{n(x = 3 \text{ sukses})}{n(S)} = \frac{20}{1296} \to = \frac{(4\,\text{pola}) \times 5^1}{6^4} = C_3^4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1$$

$$P(x = 4 \text{ sukses}) = \frac{n(x = 4 \text{ sukses})}{n(S)} = \frac{1}{1296} \to = \frac{(1\,\text{pola}) \times 5^0}{6^4} = C_4^4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^0$$

+

$$\text{Total} = \frac{1296}{1296} = 1.$$

Model distribusi (penyebaran) peluang mulai dari 0 sukses, 1 sukses, dan seterusnya hingga 4 sukses dalam empat kali percobaan berulang dengan jumlah seluruhnya sama dengan 1 seperti contoh di atas disebut *distribusi binomial.*

Secara umum, misalkan x adalah banyaknya sukses dalam n percobaan yang saling bebas (antara percobaan yang satu dengan percobaan berikutnya). Misalkan **p** adalah peluang sukses munculnya peristiwa yang diinginkan dalam setiap percobaan dan **q = 1 – p** adalah peluang munculnya peristiwa yang diinginkan gagal dalam setiap kali percobaan. Maka peluang x sukses dalam n percobaan adalah :

$$\boxed{P(x \text{ sukses dalam n percobaan}) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}.}$$

Bukti :

Misal s = sukses dan g = gagal, maka peluang sukses dan gagal dalam setiap kali percobaan berturut-turut adalah P(s) = p dan P(g) = q. Untuk memudahkan dalam memberikan gambaran pembuktian rumus ini secara umum, diberikan contoh misalnya untuk n = 4 sehingga x = 0, 1, 2, 3, 4. Jika dalam empat kali percobaan itu misal muka 2 tidak pernah muncul, maka urutan hasil percobaannya adalah gggg. Karena masing-masing percobaan dari pertama, kedua, ketiga hingga keempat saling bebas maka P(gggg) = P(g).P(g).P(g).P(g) = q.q.q.q = q^4. Penalaran yang sama berlaku untuk hasil-hasil lain yang mungkin terjadi. Hasil-hasil yang mungkin selengkapnya adalah

$$x = 0 \text{ sukses} \rightarrow \text{gggg} = 1 \text{ pola} = \binom{4}{0} \rightarrow P(0 \text{ sukses}) = \binom{4}{0} p^0 \cdot q^4$$

$$x = 1 \text{ sukses} \rightarrow \left.\begin{matrix}\text{sggg}\\ \text{gsgg}\\ \text{ggsg}\\ \text{gggs}\end{matrix}\right\} = 4 \text{ pola} = \binom{4}{1} \rightarrow P(1 \text{ sukses}) = \binom{4}{1} p^1 \cdot q^3$$

$$x = 2 \text{ sukses} \rightarrow \left.\begin{matrix}\text{ssgg}\\ \text{sgsg}\\ \text{gssg}\\ \text{gsgs}\\ \text{ggss}\\ \text{sggs}\end{matrix}\right\} = 6 \text{ pola} = \binom{4}{2} \rightarrow P(2 \text{ sukses}) = \binom{4}{2} p^2 \cdot q^2$$

$$x = 3 \text{ sukses} \rightarrow \left.\begin{matrix}\text{sssg}\\ \text{ssgs}\\ \text{sgss}\\ \text{gsss}\end{matrix}\right\} = 4 \text{ pola} = \binom{4}{3} \rightarrow P(3 \text{ sukses}) = \binom{4}{3} p^3 \cdot q^1$$

$$x = 4 \text{ sukses} \rightarrow \text{ssss} = 1 \text{ pola} = \binom{4}{4} \rightarrow P(4 \text{ sukses}) = \binom{4}{4} p^4 \cdot q^0$$

$$+$$

Menurut pola sebelumnya maka P(0 sukses) + P(1 sukses) + … + (4 sukses) = 1.

Dari contoh itu dengan mudah dapat dibayangkan bahwa banyaknya macam rangkaian untuk pola x sukses dalam n percobaan adalah sama dengan $\binom{n}{x}$.

Karena setiap macam rangkaian dari x sukses dalam n percobaan itu faktor suksesnya sebanyak x dan faktor gagalnya sebanyak n – x, sedangkan percobaan pertama, kedua, hingga ke-n saling bebas maka nilai peluang untuk masing-masing rangkaian sukses-gagal dalam hal ini adalah :

$$P(ss\ldots s\ gg\ldots g) = \underbrace{P(s)\ P(s)\ \ldots\ P(s)}_{x \text{ faktor}} \cdot \underbrace{P(g)\ P(g)\ \ldots\ P(g)}_{(n-x) \text{ faktor}}$$

$$= \underbrace{p \cdot p \ldots p}_{x \text{ faktor}} \cdot \underbrace{q \cdot q \ldots q}_{(n-x) \text{ faktor}}$$

$$= p^x \cdot q^{n-x}.$$

Dengan demikian maka nilai peluang dari

P(x sukses dalam n percobaan) = banyaknya macam rangkaian dikalikan dengan nilai peluang masing-masing rangkaian

$$= \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}.$$

Contoh 1

Jika sebuah dadu diundi empat kali, berapakah peluang munculnya muka dadu 2 sebanyak

a. 1 kali b. 3 kali c. minimal 3 kali d. maksimal 2 kali

Jawab

Karena munculnya muka dadu 2 dalam setiap percobaan adalah $\frac{1}{6}$, dan hasil percobaan pertama, kedua, ketiga, dan keempat tidak saling mempengaruhi maka relasi antara percobaan pertama, kedua, ketiga, dan keempat adalah saling bebas. Karena saling bebas peluang munculnya peristiwa x sukses dalam n percobaan pada eksperimen di atas mengikuti distribusi binomial, yaitu

$$P(x \text{ sukses dalam n percobaan}) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}.$$

Dengan demikian maka peluang munculnya muka 2 sebanyak

a. 1 kali, adalah sama dengan

$$P(x=1 \text{ kali sukses dalam } n = 4 \text{ percobaan}) = \binom{4}{1}.(\frac{1}{6})^1.(1-\frac{1}{6})^{4-1}$$

$$= \frac{4!}{(4-1)!.1!}.(\frac{1}{6}).(\frac{5}{6})^3$$

$$= 4.(\frac{1}{6}).(\frac{125}{216}) = \frac{500}{1296}$$

b. 3 kali, adalah sama dengan

$$P(x=3 \text{ kali sukses dalam } n = 4 \text{ percobaan}) = \binom{4}{3}.(\frac{1}{6})^3.(1-\frac{1}{6})^{4-3}$$

$$= \frac{4!}{(4-3)!.3!}.(\frac{1}{6})^3.(\frac{5}{6})^1$$

$$= 4.(\frac{1}{216}).(\frac{5}{6}) = \frac{20}{1296}.$$

c. minimal 3 kali, adalah

$P(x \geq 3$ dalam n= 4 percobaan) = P(x=3 atau x=4)

= P(x=3 dalam n=4) + P(x=4 dalam n=4)

$$= \frac{20}{1296} + \frac{1}{1296}$$

$$= \frac{21}{1296}.$$

d. maksimal 2 kali, adalah

$P(x \leq 2$ dalam n= 4 percobaan) = P(x=0, atau x=1, atau x=2)

= P(x=0 dalam n=4) + P(x=1 dalam n=4) + P(x=2 dalam n=4)

$$= \frac{625}{1296} + \frac{500}{1296} + \frac{150}{1296}$$

$$= \frac{1275}{1296}.$$

Contoh 2

Sebuah kotak berisi 10 bola, satu diantaranya berwarna putih. Dari dalam kotak diambil 4 bola satu demi satu dengan pengembalian. Tentukan peluang terambilnya bola putih sebanyak dua kali.

Jawab

Karena percobaan dilakukan dengan pengembalian maka peluang terambilnya bola putih pada percobaan pertama, kedua, ketiga dan seterusnya tetap, yakni $\frac{1}{10}$

Dengan demikian antara **percobaan** yang satu **dengan yang lain** bersifat **independen** (bebas), dan hasil percobaannnya hanya dibedakan dalam 2 macam (**putih** dan **bukan putih**) maka distribusi peluangnya merupakan **distribusi binomial**. Untuk itu maka peluang terambilnya 2 bola putih sama artinya dengan peluang munculnya 2 kali sukses dalam 4 percobaan. Sehingga

P(2 sukses, 4 percobaan) = $\binom{4}{2}p^{x}q^{n-x}$, dengan $p = \frac{1}{10} = 0{,}1$ dan $q = 1 - 0{,}1$. Maka

P(2 sukses, 4 percobaan) = $\binom{4}{2}(0{,}1)^{2}(1-0{,}1)^{4-2}$

$= 6(0{,}01)(0{,}9)^2$

$= 6(0{,}01(0{,}81) = 0{,}0486$

B. Distribusi Hipergeometri *(Harnett, 1982 : 194)*

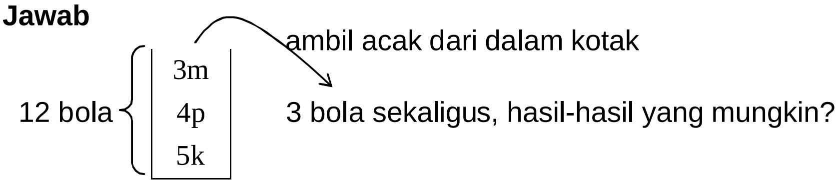
Untuk memudahkan pemahaman tentang distribusi hipergeometri yang lebih umum, secara khusus dapat diberikan gambaran sebagai berikut.

Contoh 1

PENGAMBILAN SEKALIGUS

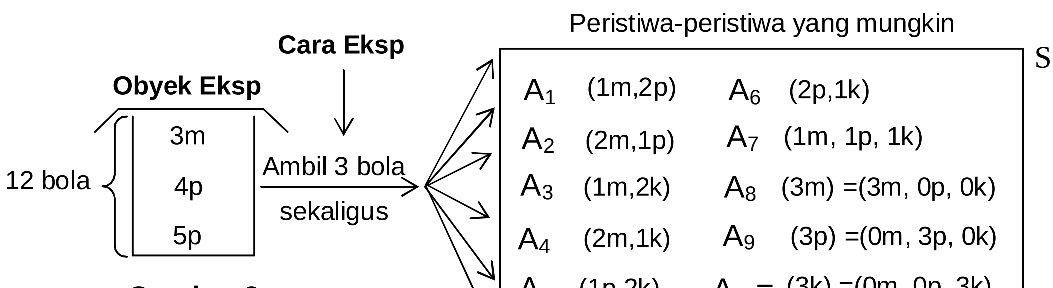
Misalkan dalam suatu kotak terdapat 3 bola merah, 4 bola putih, dan 5 bola kuning. Dari dalam Kotak diambil secara acak 3(tiga) bola sekaligus. Tentukan hasil-hasil pengambilan yang mungkin pada eksperimen tersebut.

Jawab



Gambar 1

Gambaran tentang hasil-hasil yang mungkin dari eksperimen pengambilan acak 3 bola sekaligus tersebut di atas adalah seperti berikut.



Gambar 2

Misal dalam suatu kotak terdapat n bola yang terdiri dari k warna : warna pertama, kedua, ketiga, … hingga warna ke k masing-masing sebanyak n_1, n_2, n_3, …, n_k. Sekarang jika dari dalam kotak diambil secara acak x bola sekaligus, maka peluang terambilnya x_1 bola dari n_1 bola yang ada, dan x_2 bola dari n_2 bola yang ada, dan seterusnya hingga x_k bola dari n_k bola yang ada adalah :

$$P(x_1 \text{ dari } n_1, x_2 \text{ dari } n_2, \cdots, x_k \text{ dari } n_k) = \frac{\binom{n_1}{x_1} \cdot \binom{n_2}{x_2} \cdots \binom{n_k}{x_k}}{\binom{n}{x}}$$

dengan $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$
$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$

Bukti

Misalkan:

n(S) = banyaknya cara mengambil secara acak x bola sekaligus dari n bola

$= \binom{n}{x}$ atau dengan notasi lainnya ditulis $n(S) = C_x^n$.

n(A) = banyaknya cara untuk dapat terambil x_1 bola dari n_1 bola, x_2 bola dari n_2 bola, dan seterusnya hingga x_k bola dari n_k bola.

$= \binom{n_1}{x_1} \cdot \binom{n_2}{x_2} \cdots \binom{n_k}{x_k}$ dalam bentuk lain $n(A) = C_{x_1}^{n_1} . C_{x_2}^{n_2} . C_{x_3}^{n_3}$

Karena bola-bolanya seukuran maka masing-masing titik sampel dalam peristiwa A berpeluang sama untuk muncul, sehingga:

$$P(x_1 \text{ dari } n_1, x_2 \text{ dari } n_2, \cdots, x_k \text{ dari } n_k) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{n_1}{x_1} \cdot \binom{n_2}{x_2} \cdots \binom{n_k}{x_k}}{\binom{n}{x}}\ .$$

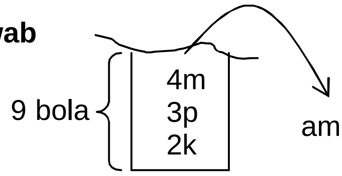
Untuk memberikan gambaran sekilas tentang distribusi hipergeometri tersebut diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2a

PENGAMBILAN SEKALIGUS

Misalkan dalam sebuah kotak terdapat 9 bola, terdiri atas bola berwarna merah sebanyak 4, putih sebanyak 3, dan kuning sebanyak 2. Dari dalam kotak **diambil 3 bola sekaligus**. Tentukan sebaran nilai peluang yang dihasilkan.

Jawab



ambil acak 3 bola sekaligus. Sebaran peluangnya?

Gambar 3

Perhatikan bahwa kalau kita mengambil **3 bola sekaligus**, peristiwa-peristiwa yang mungkin dihasilkan adalah (1m, 1p, 1k), (1m, 2p), (2m, 1p), (1m, 2k), (2m,1k), (1p, 2k), (2p, 1k) , (3m), dan (3p). Sedangkan (**3k**) **tak mungkin terjadi** sebab **bola kuningnya hanya 2 buah**. Sehingga hanya ada 9 peristiwa yang mungkin. Gambaran peluang dari masing-masing peristiwa tersebut adalah sebagai berikut.

$$A_1 = (1m, 1p,1k) \longrightarrow P(A_1) = \frac{C^{4m}_{1m} \cdot C^{3p}_{1p} \cdot C^{2k}_{1k}}{C^{9\text{ bola}}_{3\text{ bola}}} = \frac{(4)(3)(2)}{84} = \frac{24}{84}$$

$$A_2 = (1m, 2p) = (1m, 2p, 0k) \longrightarrow P(A_2) = \frac{C^{4m}_{1m} \cdot C^{3p}_{2p} \cdot C^{2k}_{0k}}{C^{9\text{ bola}}_{3\text{ bola}}} = \frac{(4)(3)(1)}{84} = \frac{12}{84}$$

$$A_3 = (2m,1p) = (2m, 1p, 0k) \longrightarrow P(A_3) = \frac{C^{4m}_{2m} \cdot C^{3p}_{1p} \cdot C^{2k}_{0k}}{C^{9\text{ bola}}_{3\text{ bola}}} = \frac{(6)(3)(1)}{84} = \frac{18}{84}$$

$$A_4 = (1m, 2k) = (1m, 0p, 2k) \longrightarrow P(A_4) = \frac{C^{4m}_{1m} \cdot C^{3p}_{0p} \cdot C^{2k}_{2k}}{C^{9\text{ bola}}_{3\text{ bola}}} = \frac{(4)(1)(1)}{84} = \frac{4}{84}$$

$$A_5 = (2m,1k) = (2m, 0p,1k) \longrightarrow P(A_5) = \frac{C^{4m}_{2m} \cdot C^{3m}_{0m} \cdot C^{2k}_{1k}}{C^{9\text{ bola}}_{3\text{ bola}}} = \frac{(6)(1)(2)}{84} = \frac{12}{84}$$

$$A_6 = (1p, 2k) = (0m, 1p, 2k) \longrightarrow P(A_6) = \frac{C^{4m}_{0m} \cdot C^{3p}_{1p} \cdot C^{2k}_{2k}}{C^{9\text{ bola}}_{3\text{ bola}}} = \frac{(1)(3)(1)}{84} = \frac{3}{84}$$

$$A_7 = (2p, 1k) = (0m, 2p, 1k) \longrightarrow P(A_7) = \frac{C^{4m}_{0m} \cdot C^{3p}_{2p} \cdot C^{2k}_{1k}}{C^{9\text{ bola}}_{3\text{ bola}}} = \frac{(1)(3)(2)}{84} = \frac{6}{84}$$

$$A_8 = (3m) = (3m, 0p, 0k) \longrightarrow P(A_8) = \frac{C^{4m}_{3m} \cdot C^{3p}_{0p} \cdot C^{2p}_{0k}}{C^{9\text{ bola}}_{3\text{ bola}}} = \frac{(4)(1)(1)}{84} = \frac{4}{84}$$

$$A_9 = (3p) = (0m, 3p, 0k) \longrightarrow P(A_9) = \frac{C^{4m}_{0m} \cdot C^{3p}_{3p} \cdot C^{2p}_{0p}}{C^{9\text{ bola}}_{3\text{ bola}}} = \frac{(1)(1)(1)}{84} = \frac{1}{84}$$

+

$$\text{Total} = \frac{84}{84} = 1.$$

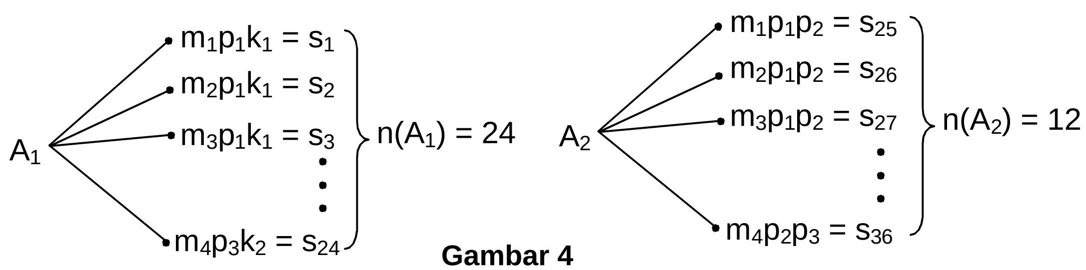
Perhatikan bahwa dari gambaran di atas, berarti ruang sampel S memuat 84 anggota atau **n**(**S**) = **84**, yakni banyaknya **banyaknya semua hasil yang mungkin** jika kita mengambil **3 bola dari** obyek eksperimen sebanyak **9 bola** berupa 4 merah, 3 putih, dan 2 kuning jika bola-bolanya diberi nomor indeks. Jika bola-bolanya diberi indeks maka himpunan obyek eksperimen yang dimaksud adalah

$$O = \{m_1, m_2, m_3, m_4, p_1, p_2, p_3, k_1, k_2\}.$$

Perhatikan bahwa peristiwa A_1, A_2, A_3, ... , A_9 masing-masing adalah peristiwa yang saling lepas, mengapa?. Sebab ambil contoh misalnya peristiwa A_1 dan A_2 dengan

$$A_1 = (1m, 1p, 1k) \text{ dan } A_2 = (1m, 2p, 0k) \text{ maka}$$
$$n(A_1) = 24 \text{ dan } n(A_2) = 12.$$

Gambaran visual masing-masing peristiwa adalah seperti berikut:



Gambar 4

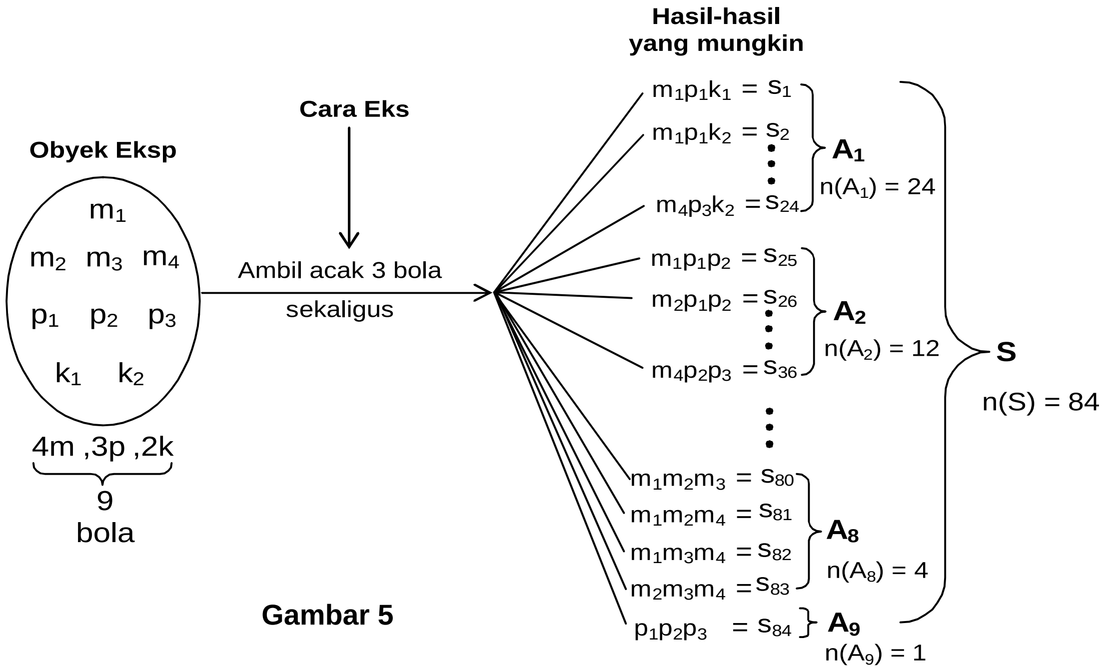
Atau secara sederhana cukup dibayangkan bahwa **pada pengambilan sekaligus**, terjadinya peristiwa:

> A_1 = (1m, 1p, 1k) = terambilnya 1 bola merah, 1 bola putih, dan 1 bola kuning,
> **tidak mungkin terjadi secara bersamaan** dengan terambilnya
> A_2 = (1m, 2p, 0k) = terambilnya 1 bola merah, 1 bola putih, dan 0 bola kuning,
>
> Dengan demikian maka A_1 dan adalah **2 (dua) peristiwa lepas**.

Sejalan dengan dengan pemikiran tersebut akan berakibat bahwa A_1, A_2, A_3, ... , A_9 adalah 9 peristiwa yang saling lepas. Karena ruang sampel S merupakan gabungan dari kesembilan peristiwa tersebut, maka

> A_1, A_2, A_3, ... , A_9
> masing-masing merupakan **partisi** dari S. Yakni
> (1) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_9 = \phi$ dan (2) $A_1 \cup A_2, \cup A_3 \cup \ldots \cup A_9 = S$

Gambaran selengkapnya yang lebih jelas lagi adalah seperti berikut.



Gambar 5

Distribusi peluang secara khusus seperti yang dicontohkan di atas, menggambarkan:

$$P(A_1) = \frac{24}{84},\quad P(A_2) = \frac{12}{84},\quad \text{dan seterusnya hingga } P(A_8) = \frac{18}{84},\quad \text{dan}\quad P(A_9) = \frac{1}{84}.$$

Selidiki bahwa jumlah nilai peluangnya sama dengan 1.

Distribusi peluang seperti itu selanjutnya disebut ***distribusi hipergeometri**.*

Permasalahan kita sekarang adalah **bagaimana** jika **obyek eksperimennya sama** sedangkan **eksperimennya** berbeda yakni pengambilan sampel **satu demi satu tanpa pengembalian**?

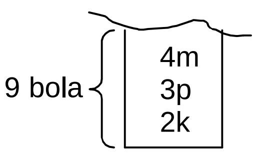
Contoh 2b

(Soal sama dengan contoh 2a hanya eksperimennya yang berbeda**)**

PENGAMBILAN SATU DEMI SATU TANPA PENGEMBALIAN

Pada sebuah kotak terdapat 9 bola, terdiri atas bola berwarna merah sebanyak 4, putih sebanyak 3, dan kuning sebanyak 2. Dari dalam kotak diambil 3 **bola satu demi satu tanpa pengembalian.** Tentukan sebaran **(distribusi) nilai peluang yang dihasilkan**.

Jawab

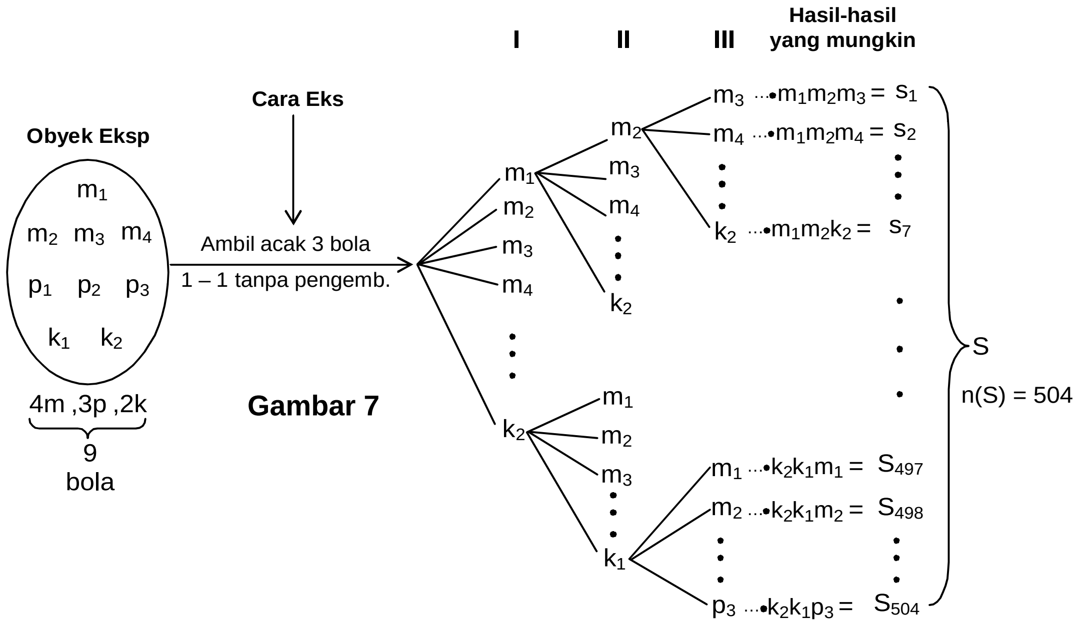


Gambar 6

Misalkan peristiwa yang terambil adalah B = (**1**p,**2**k) yakni **1** bola berwarna **putih** dan **2** bola berwarna **kuning**. Karena pengambilan **satu demi satu tanpa pengembalian** sesuai dengan **permutasi**, maka banyaknya anggota ruang sampelnya adalah S dengan

$$n(S) = P^9_3 = 9\times8\times7 \text{ (sebanyak 3 faktor)} = 504.$$

Maka gambaran tentang titik-titik sampelnya s_1, s_2, s_3, ... , s_{504} adalah seperti berikut.



Gambar 7

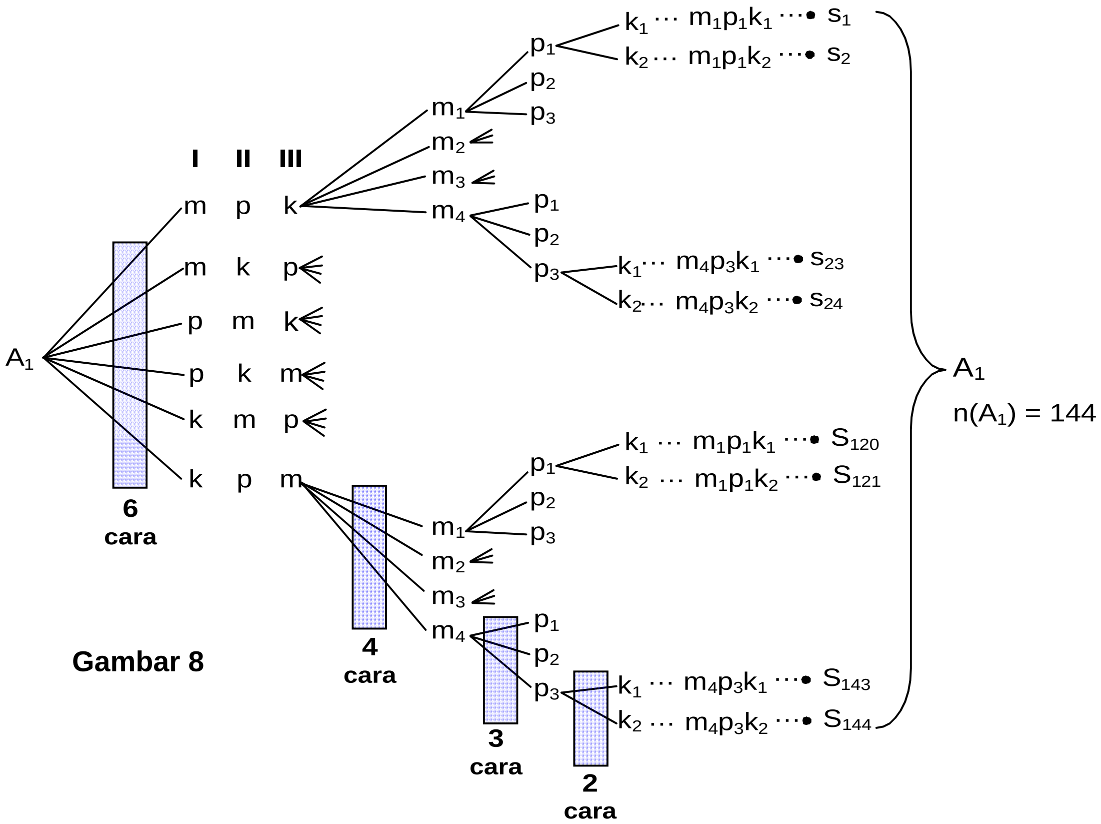
Jika peristiwa-peristiwa yang didefinisikan sama dengan contoh 1, maka

A_1 = (1m, 1p, 1k), A_2 = (1m, 2p), A_3 = (2m, 1p), A_4 = (1m, 2k), A_5 = (2m,1k),

A_6 = (1p, 2k), A_7 = (2p, 1k) , A_8 = (3m), dan A_9 = (3p).

Peristiwa terambil (**3k**) **tak mungkin terjadi** sebab **bola kuningnya hanya 2 buah**.

Perhatikan salah satu peristiwa yang muncul pada esperimen tersebut misalnya A_1 = (1m, 1p, 1k). Jika komposisi susunan bola-bola yang terambil pada peristiwa A_1 tidak diberi indeks akan terdapat 6 cara. Sedangkan jika diberi indeks masing-masing susunan mpk akan menjadi 24 cara/titik sampel (lihat gambar)



Gambar 8

Karena sebelum diberi indeks terdapat 6 cara = $\frac{3!}{1!.1!.1!}$ (permutasi dengan beberapa unsur sama) dan setelah bola-bolanya diberi indeks (menurut banyaknya warna) maka banyak anggota A_1 dengan $n(A_1) = 6$ tersebut masing-masing anggotanya akan berubah menjadi 24. Mengapa?.

Sebab dari gambar dapat disimpulkan bahwa

$$n(\{mpk\}) = 24 = n(\text{merah}) \times n(\text{putih}) \times n(\text{kuning}) = 4 \times 3 \times 2\ .$$

Karena sebelum diberi indeks $n(A_1) = 6$ dan setelah diberi indeks masing-masing anggota menjadi $4 \times 3 \times 2$, maka banyanya anggota A_1 sekarang menjadi

$$n(A_1) = 6 \times (4 \times 3 \times 2).$$

Berdasarkan diagram pohon, maka peristiwa A_1 dan banyanya anggotanya memiliki pola seperti berikut

$$A_1 = \overbrace{(1m,\ 1p,\ 1k)}^{3} \rightarrow n(A_1) = \frac{3!}{1!.1!.1!} \times n(\text{merah I}) \times n(\text{putih I}) \times n(\text{kuning I})$$

$$= 6 \times (4 \times 3 \times 2) = 144.$$

Dengan penalaran yang sama, maka 9 peristiwa selengkapnya pada ruang sampel S hasil eksperimen ”pengambilan acak 3 bola **satu demi satu tanpa pengembalian**” adalah sebagai berikut.

$A_1 = (1m, 1p, 1k) \rightarrow n(A_1) = \frac{3!}{1!.1!.1!} \times n(\text{merah I}) \times n(\text{putih I}) \times n(\text{kuning I}) = 144$

$A_2 = (1m, 2p) \rightarrow n(A_2) = \frac{3!}{1!.2!} \times n(\text{merah}) \times n(\text{putihI, putih II}) = 3 \times 4 \times (3 \times 2) = 72$

$A_3 = (2m, 1p) \rightarrow n(A_3) = \frac{3!}{2!.1!} \times n(\text{merah I, merah II}) \times n(\text{putih}) = 3 \times (4 \times 3) \times 3 = 108$

$A_4 = (1m, 2k) \rightarrow n(A_4) = \frac{3!}{1!.2!} \times n(\text{merah}) \times n(\text{kuning I, kuning II}) = 3 \times 4 \times (2 \times 1) = 24$

$A_5 = (2m,1k) \rightarrow n(A_5) = \frac{3!}{1!.2!} \times n(\text{merah I, merah II}) \times n(\text{kuning}) = 3 \times (4 \times 3) \times 2 = 72$

$A_6 = (1p, 2k) \rightarrow n(A_6) = \frac{3!}{1!.2!} \times n(\text{putih}) \times n(\text{kuning I, kuning II}) = 3 \times 3 \times (2 \times 1) = 18.$

$A_7 = (2p, 1k) \rightarrow n(A_7) = \frac{3!}{2!.1!} \times n(\text{putih I, putih II}) \times n(\text{kuning I}) = 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$

$A_8 = (3m) \rightarrow n(A_8) = \frac{3!}{3!} \times n(\text{merah I, merah II, merah III}) = 1 \times (4 \times 3 \times 2) = 24$

$A_9 = (3p) \rightarrow n(A_9) = \frac{3!}{3!} \times n(\text{putih I, putih II, putih III}) = 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$ +

Total = 504.

Selidiki bahwa nilai peluang munculnya peristiwa A_1, A_2, hingga A_9 pada pengambilan 3 bola **satu demi satu tanpa pengembalian** pada eksperimen ini **sama dengan** nilai peluangnya pada **pengambilan sekaligus** yang telah dikemukakan sebelumnya.

Menggunakan Teknik Pendataan Permutasi Dengan Beberapa Unsur sama

Cara lain untuk melihat nilai peluang munculnya **suatu peristiwa** pada **eksperimen** berupa **pengambilan sampel satu demi satu *tanpa* pengembalian** dan **pengambilan sampel satu demi satu *dengan* pengembalian** adalah dengan hanya melihat urutan susunan warna yang mungkin muncul dalam eksperimen itu.

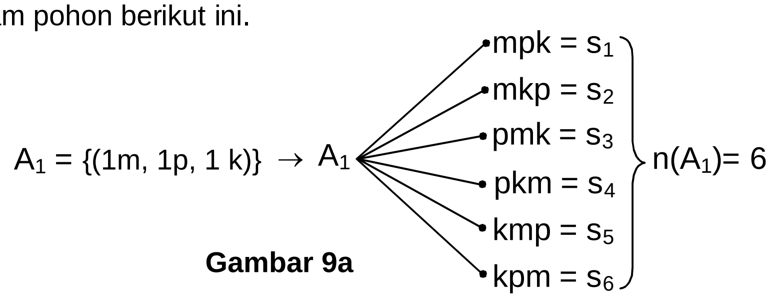
Dengan cara seperti itu maka diagram pohon yang diperhatikan hanyalah sebatas pada peristiwa berdasarkan munculnya permutasi (urutan) dari beberapa unsur sama yang mungkin terjadi pada eksperimen tersebut.

Perhatikan bahwa pada pengambilan sampel 3 bola satu demi satu tanpa pengembalian seperti yang ditunjukkan pada contoh 2b tersebut terdapat **9 peristiwa lepas** yang merupakan **partisi dari S**. Sebab A_1, A_2, A_3, ... , A_9 memenuhi 2 syarat yang didefinisian yaitu

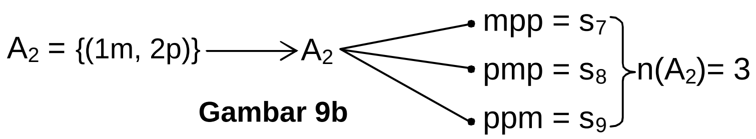
(1) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_9 = \phi$ yakni **saling lepas**, dan

(2) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_9 = S$. Yakni **gabungan seluruhnya** adalah **S**.

Untuk memahami bagaimana penalarannya dalam menentukan nilai peluang misalnya untuk peristiwa A_1 dan A_2 dengan A_1 = {(1m, 1p, 1k)} dan A_2 = {(1m,2p)} dapat dilihat pada diagram pohon berikut ini.



Gambar 9a



Gambar 9b

Sekarang bagaimana menentukan $P(A_1)$ dan $P(A_2)$?.

Penalarannya dalam menentukan peluang kedua peristiwa itu adalah seperti berikut. Perhatikan misalnya peluang munculnya titik sampel s_1. Yakni $P(\{s_1\}) = \ldots$

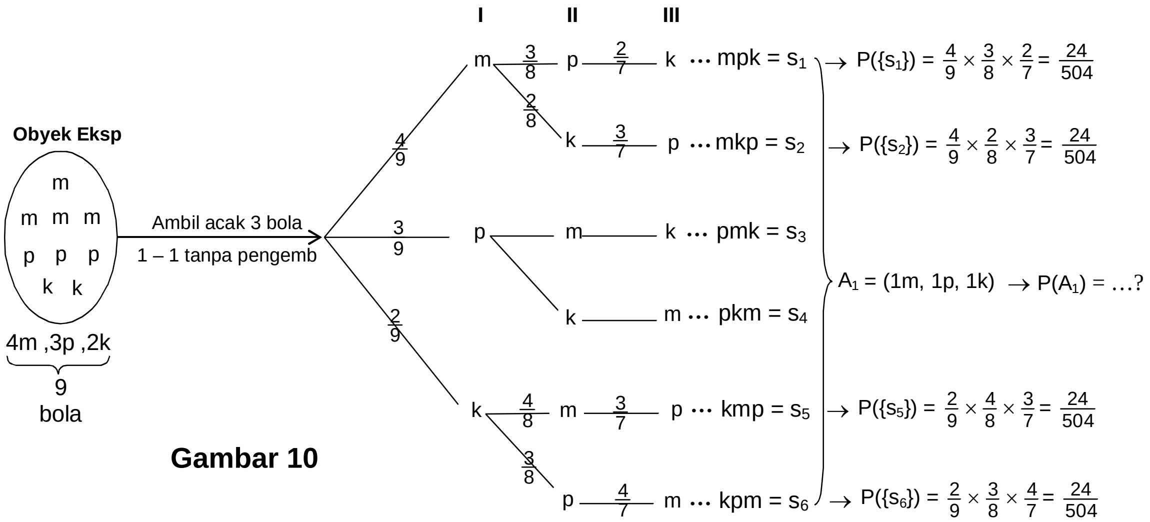
Perhatian:

s_1 = mpk artinya adalah pada pengambilan I terambil merah
pengambilan II terambil putih, dan
pengambilan III terambil kuning.

s_2 = mkp artinya adalah pada pengambilan I terambil merah
pengambilan II terambil kuning, dan
pengambilan III terambil putih.

Itulah sebabnya mengapa $s_1 \neq s_2$ (s_1 dibedakan dengan s_2 karena urutan hasil pengambilannya mempunyai makna/diperhatikan).

Selanjutnya bagaimana cara penalarannya dalam menentukan nilai-nilai peluangnya?. Misal P({s_1}) = ... , P({s_2}) = ... , P({s_7}) = ... ?. Perhatikan penalarannya dengan melihat diagram pohon dari peristiwa A_1.



Gambar 10

Perhatikan peluang munculnya titik sampel yang pertama P({s_1}) = ...

Karena pengambilannya satu demi satu tanpa pengembalian, maka jika pada pengambilan I bola dalam kotak masih utuh 9 buah, sedangkan pada pengambilan II dan III berturut-turut bolanya tinggal 8 dan 7. Selanjutnya karena bola putih dan kuning pada pengambilan II dan III jumlahnya masih utuh masing-masing 3 buah dan 2 buah. Maka peluang munculnya titik sampel s_1 adalah P({s_1}) = $\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{24}{504}$.

Bagaimana sekarang dengan P({s_2}) = ...?.

Karena bola kuning yang terambil pada pengambilan II dan bola putih yang terambil pada pengambilan III sebelumnya belum pernah terambil, maka jumlah masing-masing bola pada pengambilan II dan III berturut-turut adalah 2 dan 3. Selanjutnya karena pada pengambilan II dan III bola yang tersisa berturut-turut tinggal 8 dan 7, maka peluang terambilnya bola II berwarna kuning dan bola III berwarna putih berturut-turut adalah

P(II k) = $\frac{2}{8}$ dan P(III p) = $\frac{3}{7}$. Sehingga P({s_2}) = $\frac{4}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{24}{504}$.

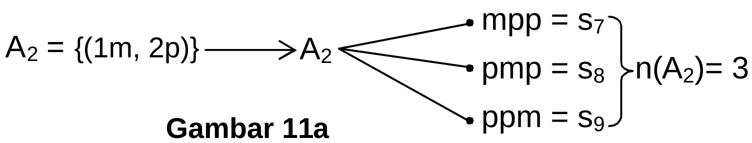
Dengan penalaran yang sama akan dipeoleh

P({s_5}) = $\frac{2}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7}$, dan P({$s_6$}) = $\frac{2}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{24}{504}$.

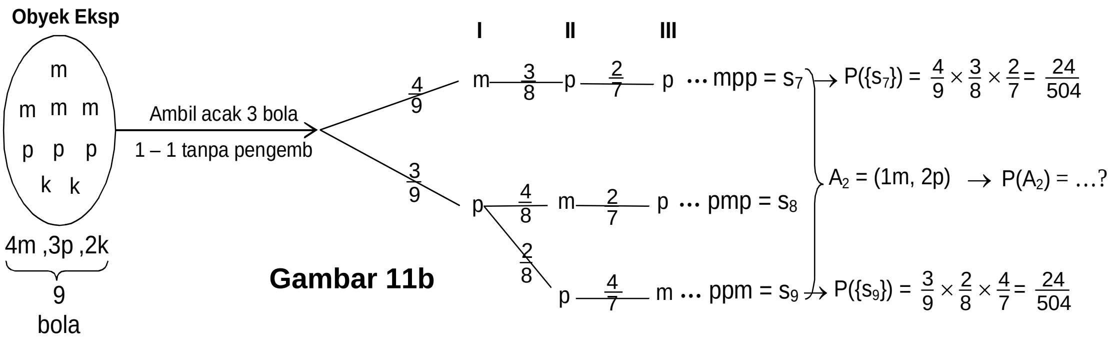
Karena nilai-nilai P({s_1}), P({s_2}), P({s_3}), ... hingga P({s_6}) masing-masing dalam bentuk pecahan yang bagian penyebutnya tetap dan hanya pembilangnya saja yang dibolak-balik, maka hasil perkaliannya tetap yakni $\frac{24}{504}$.

Karena masing-masing titik sampel dalam peristiwa A_1 berpeluang sama untuk muncul yakni $\frac{24}{504}$ dan banyaknya titik sampel 6, maka $P(A_1) = 6 \times \frac{24}{504} = \frac{144}{504}$.

Selanjutnya perhatikan peluang munculnya peristiwa kedua, yakni $P(A_2)$.



Gambar 11a

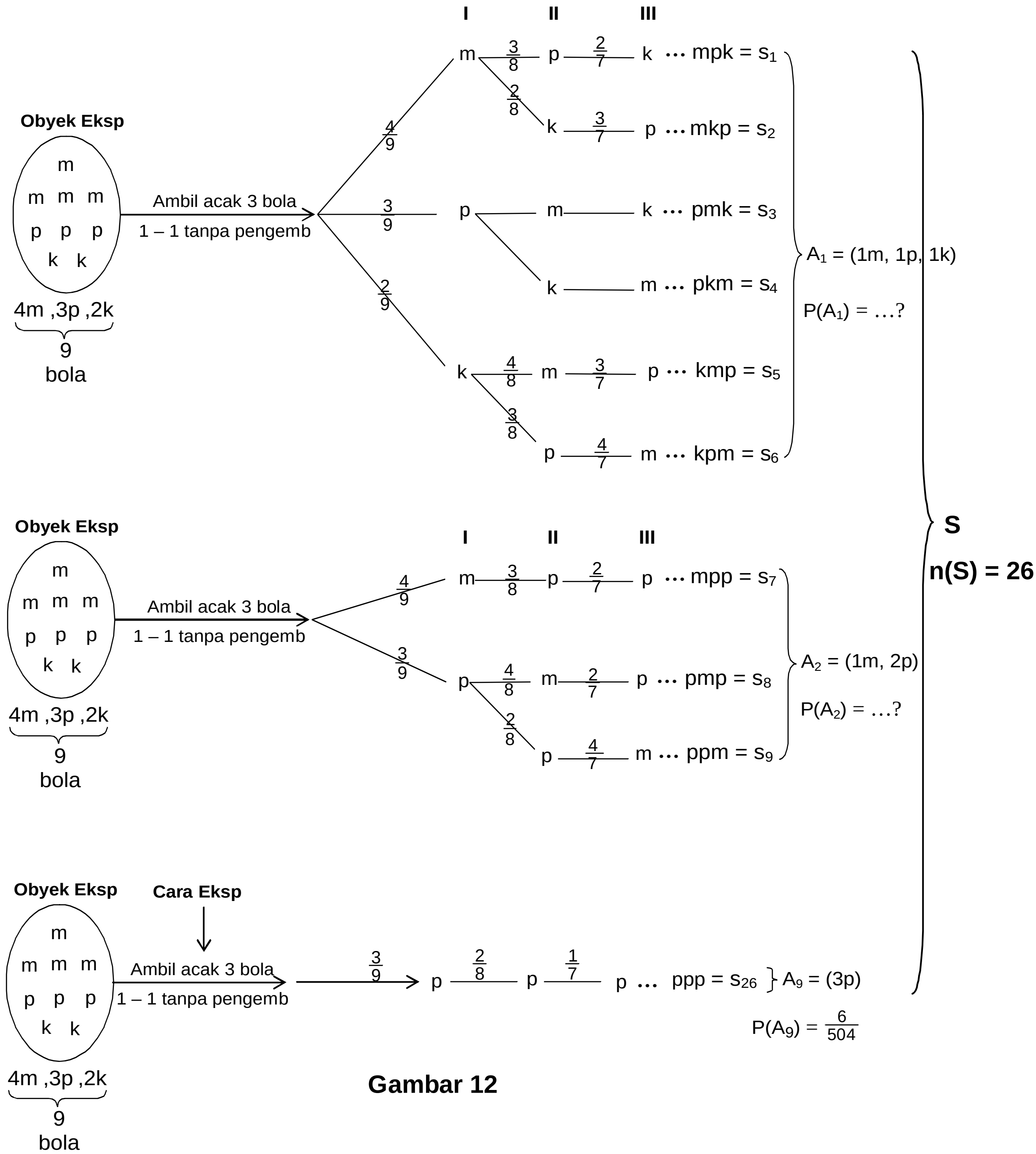


Gambar 11b

Dengan cara dan penalaran yang sama maka peluang munculnya peristiwa A_2 adalah

$$P(A_2) = 3 \times \frac{24}{504} = \frac{72}{504}.$$

Selanjutnya secara lebih lengkap untuk ruang sampel S dan beberapa peristiwa partisi yang ada di dalamnya diberikan gambaran seperti berikut ini.



Gambar 12

Gambar di atas memperlihatkan bagaimana ruang sampel S tersebar (terdistribusi) kedalam 9 peristiwa A_1, A_2 , A_3 , ... , A_9 yang saling lepas.

Kesembilan peristiwa saling lepas tersebut merupakan partisi dari S karena **saling lepas** dan **gabungan seluruhnya** sama dengan S, yakni

(1) saling lepas $\longrightarrow$ $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_9 = \phi$, dan

(2) gabungannya = S $\longrightarrow$ $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_9 = S$.

Karena pada **setiap peristiwa partisi** masing-masing titik sampelnya **bepeluang sama untuk muncul**, sedangkan bentuk titik sampelnya berupa permutasi dengan beberapa unsur sama, maka banyaknya titik sampel dihitung menggunakan rumus permutasi dengan beberapa unsue sama. Yakni

$A_1 = (1m, 1p, 1k) \to n(A_1) = \frac{(1+1+1)!}{1!.1!.1!} = \frac{3!}{1!.1!.1!} = 6 \to P(A_1) = 6 \times P(Im, Ip, Ik)$

$= 6 \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{144}{504} = \frac{6}{21}$

$A_2 = (1m, 2p) \to n(A_2) = \frac{(1+2)!}{1!.2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3 \to P(A_2) = 3 \times P(Im, Ip, IIp)$

$= 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{72}{504} = \frac{3}{21}$

$A_3 = (2m, 1p) \to n(A_2) = \frac{(2+1)!}{2!.1!} = \frac{3!}{2!.1!} = 3 \to P(A_3) = 3 \times P(Im, IIm, Ip)$

$= 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{108}{504} = \frac{3}{14}$

$A_4 = (1m, 2k) \to n(A_4) = \frac{(1+2)!}{1!.2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3 \to P(A_4) = 3 \times P(Im, Ik, IIk)$

$= 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{24}{504} = \frac{1}{21}$

$A_5 = (2m, 1k) \to n(A_4) = \frac{(2+1)!}{2!.1!} = \frac{3!}{2!.1!} = 3 \to P(A_5) = 3 \times P(Im, IIm, Ik)$

$= 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{72}{504} = \frac{3}{21}$

$A_6 = (1p, 2k) \to n(A_6) = \frac{(1+2)!}{1!.2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3 \to P(A_6) = 3 \times P(Ip, Ik, IIk)$

$= 3 \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{18}{504} = \frac{1}{28}$

$A_7 = (2p, 1k) \to n(A_7) = \frac{(2+1)!}{2!.1!} = \frac{3!}{2!.1!} = 3 \to P(A_7) = 3 \times P(Ip, IIp, Ik)$

$= 3 \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{36}{504} = \frac{1}{14}$

$A_8 = (3m) \to n(A_8) = \frac{(3)!}{3!} = 1 \to P(A_8) = 1 \times P(Im, IIm, IIIm) = 1 \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{24}{504} = \frac{1}{21}$

$A_9 = (3p) \to n(A_8) = \frac{(3)!}{3!} = 1 \to P(A_9) = 1 \times P(Ip, IIp, IIIp) = 1 \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{6}{504} = \frac{1}{84}$ +

Total $= \frac{504}{504} = 1$

Arti dari perhitungan-perhitungan di atas adalah sebagai berikut.

1. Jika unsur-unsur obyek eksperimennya **dibedakan semuanya/satu sama lain** maka
   a. Unsur-unsur obyek eksperimennya harus diberi indeks, sehingga tampak bahwa obyek eksperimen 9 bola (4 merah, 3 putih, dan 2 kuning).

   $$O = \{\underbrace{m_1, m_2, m_3, m_4}_{\substack{4 \\ \text{merah}}}, \underbrace{p_1, p_2, p_3}_{\substack{3 \\ \text{putih}}}, \underbrace{k_1, k_2}_{\substack{2 \\ \text{kuning}}}\}, \text{ yakni)}$$

   b. Jika eksperimennya adalah mengambil acak **3** bola **satu demi satu tanpa pengembalian** maka ruang sampelnya memuat **504 titik sampel**. Sehingga n(S) = 504. Ruang sampel S adalah ruang sampel **homogin** sebab **masing-masing titik sampel** dalam S **berpeluang sama untuk muncul**.

   c. Ruang sampel S hasil eksperimen itu memuat **9** macam **peristiwa partisi.** Kesembilan peristiwa pertisi itu adalah $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_9$. Banyaknya titk sampel dari masing-masing peristiwa partisi itu selengapnya adalah seperti berikut.

   A_1 = {(1m, 1p, 1k)} yakni terambilnya 1 bola merah, 1 bola putih, dan 1 bola kuning.
   $= \{m_1p_1k_1 = s_1, m_1p_1k_2 = s_2, \ldots, m_4p_3k_1 = s_{143}, m_4p_3k_2 = s_{144}\}$. Sehingga
   $n(A_1) = 144$. Secara jelas dapat dilihat pada gambar 8 halaman 15.

   Peristiwa-peristiwa partisi lainnya adalah (coba jelaskan alasannya).

   A_2 = {(1m, 2p)} dengan $n(A_2) = 72$

   A_3 = {(2m, 1p)} dengan $n(A_3) = 108$

   A_4 = {(1m, 2k)} dengan $n(A_4) = 24$

   A_5 = {(2m, 1k)} dengan $n(A_5) = 72$

   A_6 = {(1p, 2k)} dengan $n(A_6) = 18$

   A_7 = {(2p, 1k)} dengan $n(A_7) = 36$

   A_8 = {(3m)} dengan $n(A_8) = 24$

   A_9 = {(3p)} dengan $n(A_9) = 6$.

   A_{10} = {(3k)} tidak mungkin terjadi sebab bola kuningnya hanya 2 buah. Jadi $A_{10} = \phi$.

2. Jika unsur-unsur obyek eksperimennya **dibedakan menurut warnanya**, maka
   a. Obyek eksperimennya ditulis O = {4m, 3p, 2k} yakni himpunan 9 bola terdiri dari 4 bola merah, 3 bola putih, dan 2 bola kuning.

b. Eksperimen yang dilakukan sama, yakni mengambil acak **3** bola **satu demi satu tanpa pengembalian**. Eksperimen tersebut tidak lagi memuat 504 titik sampel namun hanya memuat **26 titik sampel.** Kita itulis S = { s_1, s_2, s_3, ... , s_{26}}.

c. Ruang sampel S = { s_1, s_2, s_3, ... , s_{26}} tersebut terbagi dalam **9** peristiwa **partisi** A_1, A_2, A_3, . . . , A_9 dengan banyak anggota masing-masing partisi adalah
$n(A_1) = 6$, $n(A_2) = n(A_3) = n(A_4) = n(A_5) = n(A_6) = n(A_7) = 3$, dan $n(A_8) = n(A_9) = 1$.

d. Kedua puluh enam titik sampel itu kini **tidak lagi homogin** sebab tidak semua titik sampelnya berpeluang sama untuk muncul. Perhatikan:

$\mathbf{A_1}$ = {$\mathbf{s_1, s_1, . . . , s_6}$} = { **mpk, mkp, pmk, pkm, kmp, kpm** }, n($\mathbf{A_1}$) = 6
= peristiwa terambilnya 1 bola merah, 1 bola putih, dan 1 bola kuning.

$P(\mathbf{A_1}) = \frac{144}{504}$ maka $P(\{s_1\}) = P(\{s_2\}) = \ldots = P(\{s_6\}) = \frac{1}{6} \times \frac{144}{504} = \frac{24}{504} = \frac{1}{21}$.

$\mathbf{A_2}$ = {s_7, s_8, s_9} = { **mpp, pmp, ppm** }, n($\mathbf{A_2}$) = 3
= peristiwa terambilnya 1 bola merah dan 2 bola putih.

$P(\mathbf{A_2}) = \frac{72}{504}$ maka $P(\{s_7\}) = P(\{s_8\}) = P(\{s_9\}) = \frac{1}{3} \times \frac{72}{504} = \frac{24}{504} = \frac{1}{21}$.

$\mathbf{A_3}$ = {s_{10}, s_{11}, s_{12}} = { **mmp, mpm, ppm** }, n($\mathbf{A_3}$) = 3
= peristiwa terambilnya 2 bola merah dan 1 bola putih.

$P(\mathbf{A_3}) = \frac{108}{504}$ maka $P(\{s_{10}\}) = P(\{s_{11}\}) = P(\{s_{12}\}) = \frac{1}{3} \times \frac{108}{504} = \frac{36}{504} = \frac{3}{64}$.

$\mathbf{A_4}$ = {s_{13}, s_{14}, s_{15}} = { **mkk, kmk, kkm** }, n($\mathbf{A_4}$) = 3
= peristiwa terambilnya 1 bola merah dan 2 bola kuning.

$P(\mathbf{A_4}) = \frac{24}{504}$ maka $P(\{s_{13}\}) = P(\{s_{14}\}) = P(\{s_{15}\}) = \frac{1}{3} \times \frac{24}{504} = \frac{8}{504} = \frac{1}{63}$.

$\mathbf{A_5}$ = {s_{16}, s_{17}, s_{18}} = { **mmk, mkm, kmm** }, n($\mathbf{A_5}$) = 3
= peristiwa terambilnya 2 bola merah dan 1 bola kuning.

$P(\mathbf{A_5}) = \frac{72}{504}$ maka $P(\{s_{16}\}) = P(\{s_{17}\}) = P(\{s_{18}\}) = \frac{1}{3} \times \frac{72}{504} = \frac{24}{504} = \frac{1}{21}$.

$\mathbf{A_6}$ = {s_{19}, s_{20}, s_{21}} = { **pkk, kpk, kkp** }, n($\mathbf{A_6}$) = 3
= peristiwa terambilnya 1 bola putih dan 2 bola kuning.

P($\mathbf{A_6}$) = $\frac{18}{504}$ maka P({s_{19}}) = P({s_{20}}) = P({s_{21}}) = $\frac{1}{3} \times \frac{18}{504} = \frac{6}{504} = \frac{1}{84}$.

$\mathbf{A_7}$ = {s_{22}, s_{23}, s_{24}} = { **ppk, pkp, kpp** }, n($\mathbf{A_7}$) = 3

= peristiwa terambilnya 2 bola putih dan 1 bola kuning.

P($\mathbf{A_7}$) = $\frac{36}{504}$ maka P({s_{19}}) = P({s_{20}}) = P({s_{21}}) = $\frac{1}{3} \times \frac{36}{504} = \frac{12}{504} = \frac{1}{42}$.

$\mathbf{A_8}$ = {s_{25}} = { **mmm** }, n($\mathbf{A_8}$) = 1

= peristiwa terambilnya 3 bola semuanya merah.

P($\mathbf{A_8}$) = $\frac{24}{504}$ maka P({s_{19}}) = P({s_{20}}) = P({s_{21}}) = $\frac{1}{3} \times \frac{24}{504} = \frac{8}{504} = \frac{1}{63}$.

$\mathbf{A_9}$ = {s_{26}} = { **ppp** }, n($\mathbf{A_9}$) = 1

= peristiwa terambilnya 3 bola semuanya merah.

P($\mathbf{A_9}$) = $\frac{6}{504}$ maka P({s_{19}}) = P({s_{20}}) = P({s_{21}}) = $\frac{1}{3} \times \frac{6}{504} = \frac{2}{504} = \frac{1}{252}$.

Berdasarkan uraian di atas tampak menjadi semakin jelas bahwa tidak semua titik sampel $s_i \in S$ berpeluang sama untuk muncul. Peluang munculnya masing-masing titik sampel dalam S yang bernilai sama adalah:

P({$\mathbf{s_i}$}) = $\frac{1}{21}$ untuk $\mathbf{s_i} \in$ $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, dan $\mathbf{A_5}$,

P({$\mathbf{s_i}$}) = $\frac{1}{42}$ untuk $\mathbf{s_i} \in$ $\mathbf{A_7}$,

P({$\mathbf{s_i}$}) = $\frac{1}{63}$ untuk $\mathbf{s_i} \in$ $\mathbf{A_4}$ dan $\mathbf{A_8}$

P({$\mathbf{s_i}$}) = $\frac{1}{84}$ untuk $\mathbf{s_i} \in$ $\mathbf{A_6}$,

P({$\mathbf{s_i}$}) = $\frac{1}{252}$ untuk $\mathbf{s_i} \in$ $\mathbf{A_9}$,

P({$\mathbf{s_i}$}) = $\frac{3}{64}$ untuk $\mathbf{s_i} \in$ $\mathbf{A_3}$.

Dengan kerangka berpikir seperti di atas, maka secara umum disimpulkan bahwa

	Pengambilan sekaligus x_1 dari n_1, x_2 dari n_2,..., x_k dari n_k	Pengambilan satu demi satu tanpa pengembalian x_1 dari n_1, x_2 dari n_2,..., x_k dari n_k	Fakta yang diperoleh
1	Ruang sampelnya S_1 dan banyak anggotanya $n(S_1)$	Ruang sampelnya S_2 dan banyak anggotanya $n(S_2)$	$S_1 \neq S_2$ $n(S_1) \neq n(S_2)$ $n(S_1) > n(S_2)$
2	Ruang sampel S_1 memuat peristiwa-partisi A_i sebanyak $n(A_i)$ dengan $i \in \{1, 2, 3, ..., k_1\}$	Ruang sampel S_2 memuat peristiwa-partisi A_j sebanyak $n(A_j)$ dengan $j \in \{1, 2, 3, ..., k_2\}$	$n(A_i) \neq n(A_j)$
3	$n_1(A_i) = C^{n_1}_{x_1} . C^{n_2}_{x_2} ... C^{n_k}_{x_k}$ $n(S_1) = C^{n_1+n_2+...+n_k}_{x_1+x_2+...+x_k}$ $= C^n_x$ Peluang munculnya A_i $P_1(A_i) = \frac{n_1(A_i)}{n(S_1)}$	$n_2(A_i) = \frac{x!}{z_1!.z_2!...z_k!} n(z_1)...n(z_k)$ $x = z_1+z_2+ ... + z_k$ $n(S_2) = P^n_x$ Peluang munculnya A_i $P_2(A_i) = \frac{n_2(A_i)}{n(S_2)}$	$\frac{n_1(A_i)}{n(S_1)} = \frac{n_2(A_i)}{n(S_2)}$ $P_1(A_i) = P_2(A_i)$ (nilai peluangnya sama)

Teorema Pengambilan Sampel

> *Pengambilan sampel secara acak x bola sekaligus dari dalam kotak yang berisi n bola ($x \leq n$), nilai peluangnya sama dengan pengamblan secara acak x bola satu demi satu tanpa pengembalian.*

Bukti

Untuk lebih memudahkan pemahaman, misalnya kotak itu berisi 3 kategori warna saja yaitu merah, putih, dan kuning. Dengan demikian gambaran dari isi kotak itu adalah sebagai berikut.

$$\text{n bola}\left\{\begin{array}{|l|} n_1 \text{ merah} \\ n_2 \text{ putih} \\ n_3 \text{ kuning} \end{array}\right. \quad \text{diambil x bola sekaligus, terkena} \quad \begin{array}{l} x_1 \text{ merah dari } n_1 \text{ merah} \\ x_2 \text{ putih dari } n_2 \text{ putih} \\ x_3 \text{ kuning dari } n_3 \text{ kuning} \end{array}$$

Gambar 13 $\quad x = x_1 + x_2 + x_3.$

(1) Jika x bola **diambil sekaligus** maka

$$P(x_1 \text{ dari } n_1, x_2 \text{ dari } n_2, \text{dan } x_3 \text{ dari } n_3) = \frac{\binom{n_1}{x_1}\binom{n_2}{x_2}\binom{n_3}{x_3}}{\binom{n_1+n_2+n_3}{x_1+x_2+x_3}} = \frac{\binom{n_1}{x_1}\binom{n_2}{x_2}\binom{n_3}{x_3}}{\binom{n}{x}} \qquad (1)$$

(2) Jika x bola itu diambil **satu demi satu tanpa pengembalian**, maka pada gambar diagram pohon tak lengkap, banyaknya cabang yang diperhitungkan nilai peluangnya akan sama dengan nilai permutasi beberapa unsur sama dari

$$P^{(x_1+x_2+x_3)}_{(x_1,\, x_2,\, x_3)} = P^{x}_{(x_1,\, x_2,\, x_3)} = \frac{x!}{x_1!\, x_2!\, x_3!}$$

Perhatikan lebih lanjut bahwa nilai peluang dari masing-masing cabang adalah sama yaitu sama dengan

$$\frac{P^{n_1}_{x_1}.\, P^{n_2}_{x_2}.\, P^{n_3}_{x_3}}{P^{n}_{x}} = \frac{C^{n_1}_{x_1}.\, x_1!.\, C^{n_2}_{x_2}.\, x_2!.\, C^{n_3}_{x_3}.\, x_3!}{C^{n}_{x}.\, x!} \text{ atau } = \frac{\binom{n_1}{x_1}\cdot x_1!\binom{n_2}{x_2}\cdot x_2!\binom{n_3}{x_3}\cdot x_3!}{\binom{n}{x}\cdot x!}.$$

Karena nilai peluang masing-masing cabang sama, maka nilai peluang terambilnya x_1 dari n_1, x_2 dari n_2, x_3 dari n_3 adalah sama dengan **banyaknya cabang** dikalikan **nilai peluang dari masing-masing cabang**, yakni :

$$P(x_1 \text{ dari } n_1, x_2 \text{ dari } n_2, \text{dan } x_3 \text{ dari } n_3) = \frac{x!}{x_1!\,x_2!\,x_3!} \cdot \frac{\binom{n_1}{x_1}\cdot x_1!\binom{n_2}{x_2}\cdot x_2!\binom{n_3}{x_3}\cdot x_3!}{\binom{n}{x}\cdot x!}$$

$$= \frac{\binom{n_1}{x_1}\cdot\binom{n_2}{x_2}\cdot\binom{n_3}{x_3}}{\binom{n}{x}}.$$

Terbukti sama nilainya dengan **pengambilan** sampel **sekaligus**.

Generalisasi

Secara umum untuk k kategori warna, pada pengambilan **x** bola **satu demi satu tanpa pengembalian** dari seluruhnya sebanyak **n** bola, nilai peluang terambilnya x_1 dari n_1, x_2 dari n_2, …, x_k dari n_k sama dengan

$P(x_1 \text{ dari } n_1, x_2 \text{ dari } n_2, \cdots, x_k \text{ dari } n_k)$

= **banyaknya cabang** dikalikan **nilai peluang masing-masing cabang**

= **banyaknya cabang** dikalikan **nilai peluang cabang yang pertama** (mengingat nilai peluang masing-masing cabang adalah sama)

$$= P^{(x_1+x_2+\ldots+x_k)}_{(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k)} \cdot \frac{P^{n_1}_{x_1} \cdot P^{n_2}_{x_2} \ldots P^{n_k}_{x_k}}{P^n_x}$$

$$= P^x_{(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_k} \cdot \frac{C^{n_1}_{x_1} \cdot x_1! \cdot C^{n_2}_{x_2} \cdot x_2! \ldots P^{n_k}_{x_k} \cdot x_k!}{C^n_x \cdot x!}\text{, atau}$$

$$= \frac{x!}{x_1!\, x_2! \cdots x_k!} \cdot \frac{\binom{n_1}{x_1} \cdot x_1! \binom{n_2}{x_2} \cdot x_2! \cdots \binom{n_k}{x_k} \cdot x_k!}{\binom{n}{x} \cdot x!}$$

$$= \frac{\binom{n_1}{x_1} \cdot \binom{n_2}{x_2} \cdots \binom{n_k}{x_k}}{\binom{n}{x}}$$

Dengan demikian secara umum terbukti bahwa

Peluang terambilnya x_1 dari n_1, x_2 dari n_2, …, x_k dari n_k dengan $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ **pada pengambilan x bola sekaligus** dengan **x** = $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ sama dengan peluang terambilnya **x** bola **satu demi satu tanpa pengembalian** dari kotak yang berisi **n** bola

C. Distribusi Multinomial *(Pitman, 1993 : 155)*

(Rumusan peluang percobaan berulang yang saling bebas untuk 3 kategori atau lebih)

Contoh 2c

Soal sama dengan contoh 2a dan 2b hanya pengambilan bolanya saja yang berbeda.

PENGAMBILAN SAMPEL SATU DEMI SATU DENGAN PENGEMBALIAN

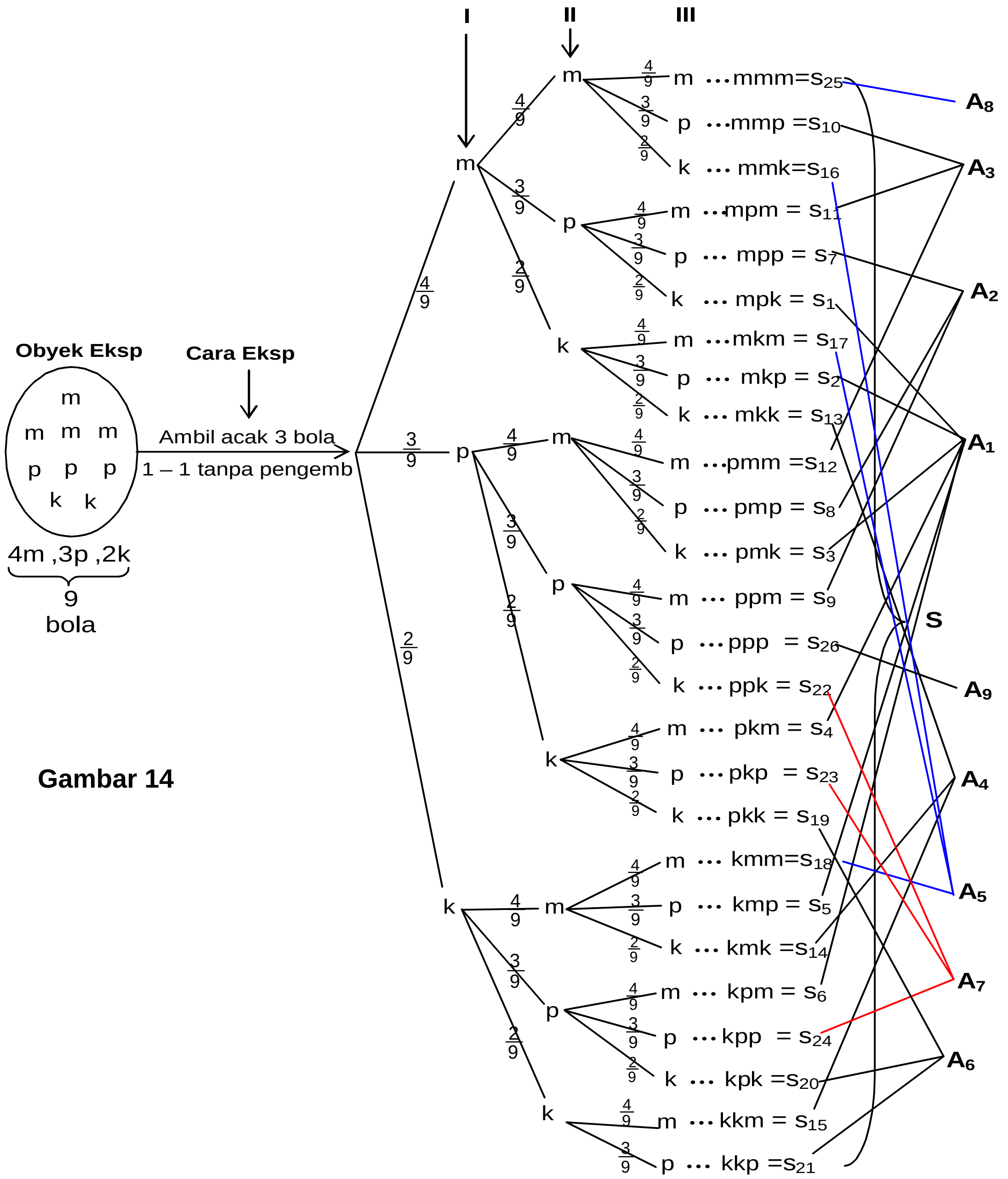
Sebuah kotak berisi 4 bola merah 3 bola putih dan 2 bola kuning. Dari dalam kotak diambil 3 bola **satu demi satu dengan pengembalian**.

Berapakah peluang terambilnya 1 bola merah, 1 bola putih, dan 1 bola kuning?.

Jawab

Berikut adalah gambaran pengambilan 6 bola **satu demi satu dengan pengembalian**.

Karena bola-bolanya terdiri dari 4 bola merah, 3 bola putih, dan 2 bola kuning, maka bola seluruhnya sebanyak 4 + 3 + 2 = 9. Peristiwa yang ditanyakan adalah P(1m, 1p, 1k) = ?.



Gambar 14

Perhatikan bahwa

1. ruang sampel S memuat 26 titik sampel, sehingga n(S) = 26.
2. ruang sampel S berdistribusi seragam, peluang masing-masing titik sampelnya

   $P(\{s_i \mid i \in \{1, 2, 3, \ldots, 26\}\}) =$
3. ruang sampel S memuat 10 peristiwa partisi $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}$. Yakni:

$$A_1 = \{(1m, 1p, 1k)\} \rightarrow n(A_1) = 6 \rightarrow P(A_1) = 6 \text{ cabang} \times \tfrac{4}{9} \times \tfrac{3}{9} \times \tfrac{2}{9} = \tfrac{144}{729} = \tfrac{16}{81}$$

$$A_2 = \{(1m, 2p)\} \rightarrow n(A_2) = 3 \rightarrow P(A_2) = 3 \text{ cabang} \times \tfrac{4}{9} \times \tfrac{3}{9} \times \tfrac{3}{9} = \tfrac{108}{729} = \tfrac{4}{27}$$

$$A_3 = \{(2m, 1p)\} \rightarrow n(A_3) = 3 \rightarrow P(A_3) = 3 \text{ cabang} \times \tfrac{4}{9} \times \tfrac{4}{9} \times \tfrac{3}{9} = \tfrac{144}{729} = \tfrac{16}{81}$$

$$A_4 = \{(1m, 2k)\} \rightarrow n(A_4) = 3 \rightarrow P(A_4) = 3 \text{ cabang} \times \tfrac{4}{9} \times \tfrac{2}{9} \times \tfrac{2}{9} = \tfrac{48}{729} = \tfrac{16}{243}$$

$$A_5 = \{(2m, 1k)\} \rightarrow n(A_5) = 3 \rightarrow P(A_5) = 3 \text{ cabang} \times \tfrac{4}{9} \times \tfrac{4}{9} \times \tfrac{2}{9} = \tfrac{96}{729} = \tfrac{32}{243}$$

$$A_6 = \{(1p, 2k)\} \rightarrow n(A_6) = 3 \rightarrow P(A_6) = 3 \text{ cabang} \times \tfrac{3}{9} \times \tfrac{2}{9} \times \tfrac{2}{9} = \tfrac{36}{729} = \tfrac{4}{81}$$

$$A_7 = \{(2p, 1k)\} \rightarrow n(A_7) = 3 \rightarrow P(A_7) = 3 \text{ cabang} \times \tfrac{3}{9} \times \tfrac{3}{9} \times \tfrac{2}{9} = \tfrac{54}{729} = \tfrac{2}{27}$$

$$A_8 = \{(3m)\} \rightarrow n(A_8) = 1 \rightarrow P(A_8) = 1 \text{ cabang} \times \tfrac{4}{9} \times \tfrac{4}{9} \times \tfrac{4}{9} = \tfrac{64}{729}$$

$$A_9 = \{(3p)\} \rightarrow n(A_9) = 1 \rightarrow P(A_9) = 1 \text{ cabang} \times \tfrac{3}{9} \times \tfrac{3}{9} \times \tfrac{3}{9} = \tfrac{27}{729} = \tfrac{1}{27}$$

$$A_{10} = \{(3k)\} \rightarrow n(A_{10}) = 1 \rightarrow P(A_{10}) = 1 \text{ cabang} \times \tfrac{2}{9} \times \tfrac{2}{9} \times \tfrac{2}{9} = \tfrac{8}{729} \quad +$$

$$\text{Total} = \tfrac{729}{729} = 1$$

Catatan

Peristiwa $A_{10} = \{(3k)\}$ mungkin terjadi sebab eksperimennya adalah **pengambilan satu-satu dengan pengembalian**. Oleh sebab itu meskipun bola kuningnya hanya 2 buah namun karena pengambilannya dengan pengembalian, maka menjadi memungkinkan munculnya peristiwa A_{10}.

Karena setaiap kali mengambil sebuah bola, bola kuningnya tetap ada sebanyak 2 buah dan jumlah bolanya tetap 9 buah. Maka setiap kali mengambil, peluang terambilnya bola kuning adalah $\frac{2}{9}$.

Ruang sampel S yang tersebar (terdistribusi) menjadi 10 **peristiwa partisi** itu masing-masing partisinya disebut **distribusi multinomial**.

Secara umum

Jika dalam sebuah kotak terdapat n bola yang terdiri dari k warna : warna pertama, warna kedua, warna ketiga, …, hingga warna ke k masing-masing sebanyak n_1, n_2, n_3, …n_k. Jika dari dalam kotak diambil secara acak sebanyak x bola **satu demi satu dengan pengembalian**, maka peluang terambilnya x_1 bola dari n_1 bola yang ada, x_2 bola dari n_2 bola yang ada, … dan seterusnya hingga x_k bola dari n_k bola yang ada ialah :

$$\boxed{P(x_1 \text{ dari } n_1, x_2 \text{ dari } n_2, \cdots, x_k \text{ dari } n_k) = \frac{x!}{x_1!\,x_2!\cdots x_k!}.p_1^{x_1}.p_2^{x_2}\cdots p_k^{x_k}}$$

disebut rumus umum **distribusi multinomial**.

Keterangan :

$$p_1 = \frac{n_1}{n}, p_2 = \frac{n_2}{n}, \cdots, p_k = \frac{n_k}{n}$$

$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$

$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = x$

Bukti

Karena pengambilan bola dilakukan **satu demi satu dengan pengembalian**, akibatnya peluang terambilnya masing-masing warna pada setiap kali percobaan (percobaan pertama, kedua, dan seterusnya hingga ke-n) adalah tetap yaitu:

p_1 untuk peluang munculnya warna pertama,

p_2 untuk peluang munculnya warna kedua, … dan seterusnya hingga

p_k untuk peluang munculnya warna ke-k.

Selanjutnya kita bayangkan diagram pohonnya. Banyaknya cabang (banyaknya titik sampel) pada diagram pohon yang dihitung nilai peluangnya ialah sebanyak

$$n(A_i) = P_{(x_1, x_2, \cdots, x_k)}^{(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)} = P_{(x_1, x_2, \cdots, x_k)}^{x} = \frac{x!}{x_1!\,x_2!\cdots x_k!}.$$

Bayangkan lagi bahwa tiap-tiap partisi mempunyai anggota yang setiap anggotanya berpeluang sam untuk muncul. Maka peluang munculnya masing-masing cabang (masing-masing titik sampel) pada partisi yang sama adalah sama, yaitu

$$P(s \in A_i) = \underbrace{p_1 \cdot p_1 \cdots p_1}_{x_1 \text{ faktor}} \cdot \underbrace{p_2 \cdot p_2 \cdots p_2}_{x_2 \text{ faktor}} \cdots \underbrace{p_k \cdot p_k \cdots p_k}_{x_k \text{ faktor}} = p_1^{x_1} \cdot p_1^{x_2} \cdots p_1^{x_k}.$$

Karena banyaknya cabang pada setiap peristiwa partisi adalah

$$n(A_i) = \frac{x!}{x_1!\,x_2!\cdots x_k!},$$

dan setiap cabang nilai peluangnya adalah

$$P(s \in A_i) = p_1^{x_1} \cdot p_1^{x_2} \cdots p_1^{x_k}$$

Maka nilai peluang yang ditanyakan adalah jumlah nilai peluang dari masing-masing cabang yaitu banyaknya cabang dikalikan nilai peluang masing-masing cabang. Yakni

$P(x_1 \text{ dari } n_1, x_2 \text{ dari } n_2, \cdots, x_k \text{ dari } n_k)$

= banyaknya cabang dikalikan nilai peluang masing-masing cabang

$= n(A_i) \times P(s \in A_i)$

$= \dfrac{x!}{x_1!\,x_2!\cdots x_k!} \,.\, p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$.

Terbukti.

LATIHAN 1

1. Sekeping mata uang logam diundi 5 kali. Berapa nilai peluang munculnya muka angka
   a. sebanyak dua kali ?
   b. paling banyak satu kali ?
2. Sepasang pengantin mengharapkan 4 anak (tidak ada yang kembar). Berapa peluangnya mereka mendapatkan ?
   a. dua anak laki-laki
   b. minimal seorang anak laki-laki.
3. Sebuah dadu diundi sebanyak 4 kali. Tentukan peluangnya untuk muncul
   a. mata dadu 2 sebanyak 2 kali
   b. mata dadu 2 minimal satu kali.
4. Apakah ruang sampelnya sama antara mengundi sebuah dadu 4 kali dengan mengundi 4 dadu sekaligus ?
5. Sebuah kotak berisi 3 bola merah dan 2 bola putih. Dari dalam kotak diambil satu demi satu sebanyak 3 bola dengan pengembalian. Tentukan peluang terambilnya :

a. dua bola merah
b. satu bola putih
c. paling sedikit sebuah bola putih.

6. Sebuah kotak memuat 2 kelereng, merah 3 kelereng putih dan 5 kelereng kuning. Dari dalam kotak diambil sebanyak 3 kelereng satu demi satu tanpa pengembalian. Tentukan peluang dari 3 kelereng yang termbil itu :
   a. memuat kelereng merah, putih dan kuning masing-masing satu kelereng
   b. hanya memuat satu kelereng merah dan dua kelereng kuning
   c. 2 kelereng diantaranya berwarna merah.
7. Misalkan terdapat tawaran beasiswa untuk enam orang siswa, ternyata yang mendaftarkan diri ada lima orang pria dan lima orang wanita. Selanjutnya mereka diundi secara acak. Tentukan peluang terpilihnya penerima beasiswa itu :
   a. terdiri dari 3 pria dan 3 wanita
   b. siswa pria lebih banyak dari pada siswa wanita.
8. Misalkan didalam sebuah kantong terdapat 10 batu baterai, tiga diantaranya mati. Sampel sebanyak 3 baterai diambil secara acak satu demi satu dari 10 baterai yang ada didalam kantong itu. Berapakah peluang diperolehnya sebuah baterai mati jika pengambilan sampelnya
   a. tanpa pengembalian
   b. dengan pengembalian.
9. Dari seperangkat kartu bridge ditarik secara acak 4 kartu secara berturut-turut. Tentukan peluang terambilnya kartu jantung, sekop, berlian dan keriting masing-masing sebuah jika pengambilannya
   a. tanpa pengembalian
   b. dengan pengembalian.
10. Sebuah kantong berisi 5 bola merah, 6 bola putih, 4 bola kuning, dan 5 bola hijau. Dari dalam kotak diambil 10 bola satu demi satu. Tentukan peluang terambilnya 3 bola merah, 2 bola putih, 1 bola kuning, dan 4 bola hijau jika pengambilannya
    a. tanpa pengembalian
    b. dengan pengembalian.
11. Misalkan sebuah kotak berisi 4 bola merah, 3 bola putih, 2 bola kuning dan 1 bola biru. Dari dalam kotak diambil acak 4 bola. Jika S adalah ruang sampel dari eksperimen tersebut. Tentukan

a. Semua peristiwa partisi dalam S jika eksperimennya adalah **pengambilan satu demi satu tanpa pengembalian**. Berapa macam peristiwa partisi yang mungkin terjadi dalam eksperimen itu?
b. Peluang munculnya salah satu peristiwa partisi dalam S yakni terambilnya 3 bola merah dan 1 bola putih.
c. Semua peristiwa partisi dalam S jika eksperimennya adalah **pengambilan satu demi satu dengan pengembalian**. Berapa macam peristiwa partisi yang mungkin terjadi dalam eksperimen itu?
d. Peluang munculnya salah satu peristiwa partisi dalam S yakni terambilnya 3 bola merah dan 1 bola putih.

12. Misalkan sebuah kotak berisi 4 bola merah, 3 bola putih dan 2 bola kuning. Dari dalam kotak diambil acak 5 bola. Jika S adalah ruang sampel dari eksperimen tersebut. Tentukan
    a. Semua peristiwa partisi dalam S jika eksperimennya adalah **pengambilan satu demi satu tanpa pengembalian**. Berapa macam peristiwa partisi yang mungkin terjadi dalam eksperimen itu?
    b. Peluang munculnya salah satu peristiwa partisi dalam S yakni terambilnya 1 bola merah, 2 bola putih, dan 2 bola kuning.
    c. Semua peristiwa partisi dalam S jika eksperimennya adalah **pengambilan satu demi satu dengan pengembalian**. Berapa macam peristiwa partisi yang mungkin terjadi dalam eksperimen itu?
    d. Peluang munculnya salah satu peristiwa partisi dalam S yakni terambilnya1 bola merah, 2 bola putih, dan 2 bola kuning.

Soal-Soal EBTANAS

1. Sebuah mata uang dan sebuah dadu dilempar diundi sekaligus. Tentukan peluang munculnya muka angka pada mata uang dan bilangan prima ganjil pada dadu.

   (EBTANAS 1993/1994)

2. Dalam sebuah kotak terdapat 10 bola putih dan 5 bola merah. Dari kotak tersebut diambil satu bola berturut-turut sebanyak dua kali tanpa pengembalian. Tentukan peluang terambilnya kedua bola berwarna putih.

   (EBTANAS 1998/1999)

3. Sebuah kantong berisi 2 kelereng merah, 8 kelereng biru dan 10 kelereng kuning. Jika sebuah kelereng diambil secara acak dari kantong itu, peluang terambilnya kelereng kuning atau merah adalah …

   (EBTANAS 1993/1994)

4. Sebuah kotak A berisi 4 kelereng merah dan 3 kelereng putih. Kotak B berisi 6 kelereng merah dan 2 kelereng putih. Dari masing-masing kotak diambil sebuah kelereng, tentukan peluang yang terambil kelereng merah dari kotak A dan kelereng putih dari kotak B.

   (EBTANAS 1991/1992)

5. Dalam sebuah kotak terdapat 4 bola merah dan 6 bola putih. Dari kotak itu diambil 2 bola sekaligus secara acak. Peluang terambil sekurang-kurangnya 1 bola putih adalah …

   (EBTANAS 1996/1997)

6. Pada sebuah kotak terdapat 10 kelereng yang terdiri dari 7 kelereng berwarna merah dan 3 kelereng berwarna biru. Jika diambil 3 buah kelereng secara acak, maka peluang terambilnya ketiga kelereng tersebut berwarna merah adalah …

   (EBTANAS 1994/1995)

7. Dalam sebuah kantong terdapat 9 manik-manik kuning dan 6 manik-manik biru. Dua manik-manik diambil satu demi satu dengan pengembalian. Tentukan peluang terambil keduanya berwarna kuning.

   (EBTANAS 1996/1997)

8. Dalam pelemparan 2 buah dadu secara bersama-sama, peluang munculnya jumlah kedua mata dadu sama dengan 7 atau 4 adalah …

   (EBTANAS 1988/1998)

9. Dalam sebuah kantong terdapat 11 kelereng merah dan 7 kelereng putih. Diambil sekaligus dua kelereng secara acak. Peluang munculnya dua kelereng merah adalah …

   (EBTANAS 1991/1992)

10. Suatu kotak berisi 5 kelereng merah dan 3 kelereng putih. Dua kelereng diambil satu persatu dimana kelereng pertama yang diambil dikembalikan lagi dalam kotak. Tentukan peluang terambilnya kelereng pertama dan kedua berwarna merah.

    (EBTANAS 1991/1992)

BAGIAN III
RUMUS BAYES

A. PENURUNAN RUMUS

Pada bagian ini kita akan membahas suatu teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan peluang (probabilitas) berkenaan dengan pencarian nilai peluang atas suatu peristiwa yang disebabkan oleh beberapa faktor. Teknik yang dimaksud dikenal sebagai rumus Bayes.

Pada tahun 1763 Thomas Bayes (1702 – 1763) seorang pendeta juga matematikawan menerbitkan papernya berjudul "An Essay Toward Solving a Problem in the Doctrine of Chances". Pada paper tersebut Bayes menurunkan rumus penting yang menghubungkan antara peluang bersyarat P(A|B) dengan P(B|A) yakni

$$P(B|A) = \frac{P(A\,|\,B).P(B)}{P(A)} \quad \text{……….} \ (1)$$

Dengan menggunakan teori himpunan, bukti dari (1) tersebut jauh lebih mudah dari pada bukti aslinya yang dikemukakan oleh Bayes. Berdasarkan teori himpunan bukti dari formula (1) di atas adalah sebagai berikut.

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad \text{………………. definisi peluang bersyarat}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{……………….. sebab } B \cap A = A \cap B$$

$$= \frac{P(A\,|\,B).P(B)}{P(A)} \text{…………… sebab dari rumus definisi probabilitas/peluang}$$

bersyarat akan diperoleh

$P(A \cap B) = P(A|B) \,.\, P(B)$.

Catatan :

Dalam beberapa hal sulit bagi kita untuk mencari P(B|A), sementara untuk mencari P(A|B) sangat mudah. Hal ini disebabkan karena P(A|B) dapat ditunjukkan secara langsung representasinya pada diagram pohon. Sementara P(B|A) representasinya tidak dapat ditunjukkan secara langsung pada diagram itu. Perlu diketahui bahwa P(B|A) hanya dapat dihitung tetapi tidak dapat direpresentasikan pada diagram pohon. P(B|A) dihitung berdasarkan komponen-komponen peluang yang diperoleh dari diagram pohon.

Contoh berikut adalah gambaran bagaimana mudahnya menentukan P(A|B) dibandingkan dengan menentukan P(B|A).

Contoh 1

Sebuah kotak berisi 10 bola terdiri dari 6 bola berwarna merah dan 4 bola berwarna putih. Dari dalam kotak diambil berturut-turut sebanyak 2 bola tanpa pengembalian. Tentukan peluang

a. terambilnya bola kedua merah dengan syarat pertama terambil putih
b. terambilnya bola pertama putih jika bola kedua yang terambil ternyata merah (tanpa melihat hasil pengambilan pertama).

Jawab :

Misalkan A dan B adalah peristiwa sebagai berikut

A = bola kedua yang terambil berwarna merah (IIm)

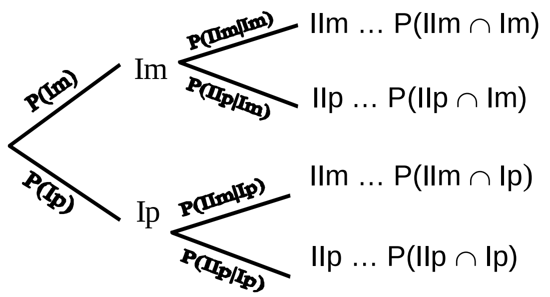
B = bola pertama yang terambil berwarna putih (Ip)

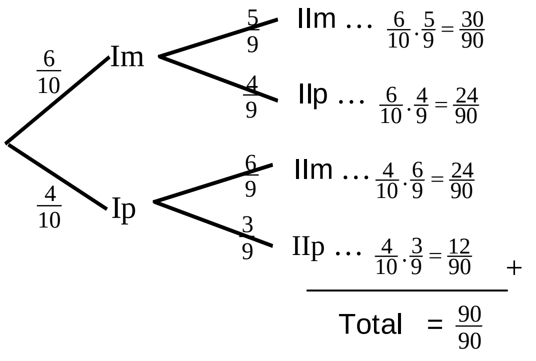
Dari soal tersebut yang ditanyakan masing-masing adalah

a. P(A | B) = (P(IIm | Ip)

b. P(B | A) = P(Ip | IIm)

Untuk memperjelas permasalahan tersebut dapat diperlihatkan melalui diagram-diagram pohon berikut ini.





Dengan menyimak ilustrasi pada kedua diagram pohon tersebut, maka jawaban dari masing-masing masalah yang ditanyakan adalah sebagai berikut.

a. P(A | B) = P(IIm | Ip)

$= \frac{6}{9}$ ………………… (lihat kesesuaian diagram kiri dan kanan)

b. $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \mid B).P(B)}{P(A)}$ …………… Rumus Bayes (1)

$P(I_p|II_m) = \dfrac{P(IIm \mid Ip).P(Ip)}{P(IIm)}$ ………... perhatikan P(IIm) ada 2 tempat

$= \dfrac{\frac{6}{9}.\frac{4}{10}}{\frac{30}{90}+\frac{24}{90}}$ …………… … P(IIm) = jalur I dan III

$= \dfrac{(24/90)}{(54/90)} = \dfrac{24}{54} = \dfrac{4}{9}$.

Lebih lanjut akan ditunjukkan bahwa dari rumus Bayes (1) tersebut di atas akan diturunkan rumus Bayes yang lebih lengkap dan lebih bersifat umum. Rumus Bayes itu amat berguna untuk menyelesaikan masalah peluang dari suatu eksperimen yang memuat beberapa faktor yang mempengaruhinya. Contoh 2 berikut memberikan gambaran berkenaan dengan masalah probabilitas/peluang seperti apa yang pemecahannya menggunakan rumus Bayes.

Contoh 2

Sebuah kardus berisi barang dagangan berupa ballpoin. Misalkan ballpoin-ballpoin yang ada pada kardus itu :

30% diantaranya diproduksi oleh perusahaan I,

20% diantaranya diproduksi oleh perusahaan II, dan

50% lainnya diproduksi oleh perusahaan III.

Selanjutnya dari ketiga perusahaan tersebut diperoleh data

2% dari ballpoin yang diproduksi perusahaan I mati

3% dari ballpoin yang diproduksi perusahaan II mati

4% dari ballpoin yang diproduksi perusahaan III mati.

Misalkan kita secara acak mengambil sebuah ballpoin dari dalam kardus itu. Setelah di tes ternyata ballpoin yang terambil itu mati. Berapa peluang bahwa ballpoin yang terambil dan ternyata mati itu:

(a) berasal dari perusahaan I?

(b) berasal dari perusahaan II?

(c) berasal dari perusahaan III?

Jawab

Untuk mempermudah pemahaman, peristiwa-peristiwa yang kita buat pemisalannya adalah sebagai berikut :

A = peristiwa ballpoin yang terambil itu mati

B_1 = peristiwa ballpoin yang terambil berasal dari perusahaan I

B_2 = peristiwa ballpoin yang terambil berasal dari perusahaan II

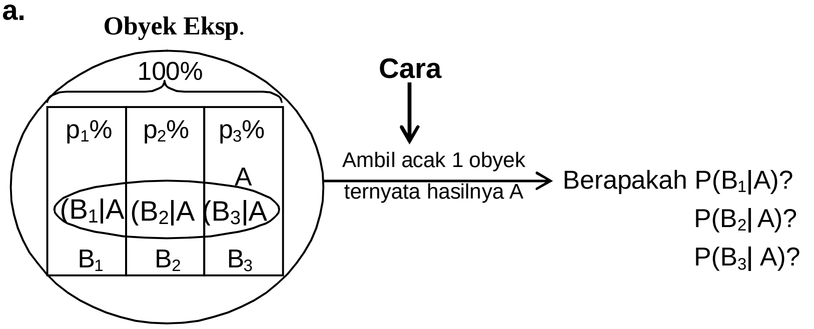
B_3 = peristiwa ballpoin yang terambil berasal dari perusahaan III

Dari pemisalan tersebut maka permasalahan yang ditanyakan masing-masing adalah :

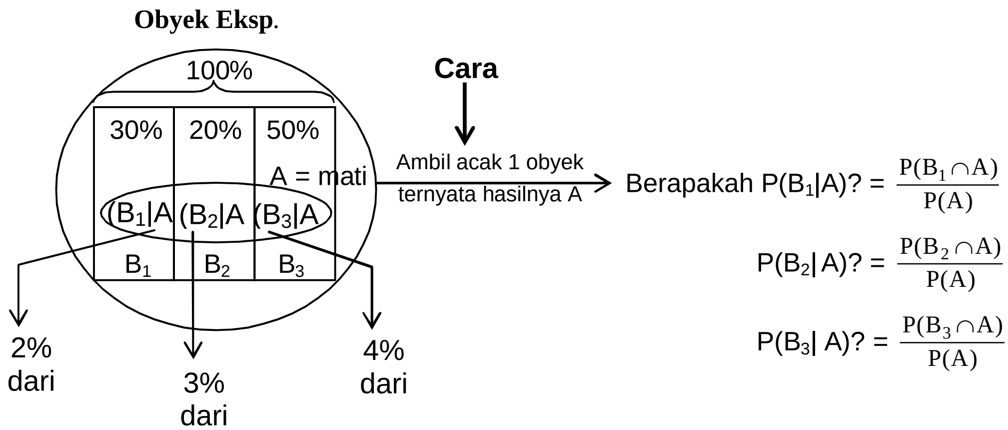
(a) $P(B_1 \mid A)$ (b) $P(B_2 \mid A)$ (c) $P(B_3 \mid A)$.

Gambaran dari soal di atas adalah sebagai berikut.

a.



b. Khusus contoh



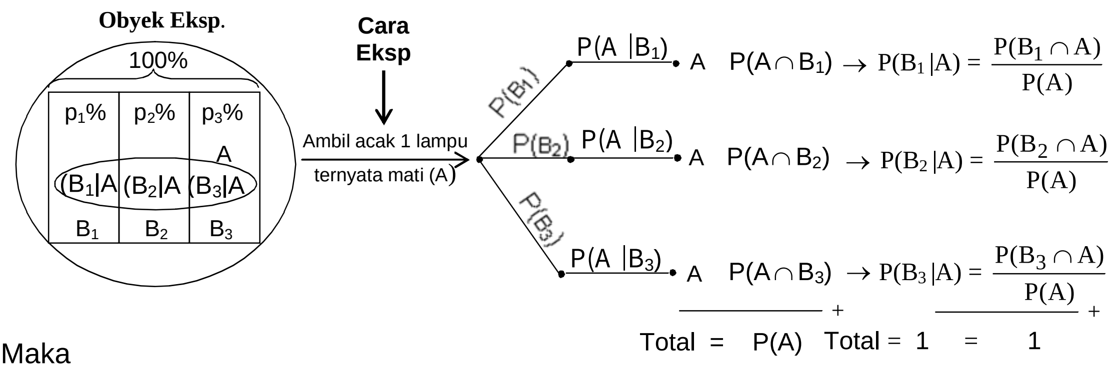
Karena 30% barang berasal dari perusahaan I, maka $P(B_1) = 0{,}3$

Sejalan dengan itu akan diperoleh $P(B_2) = 0{,}2$ dan $P(B_3) = 0{,}5$.

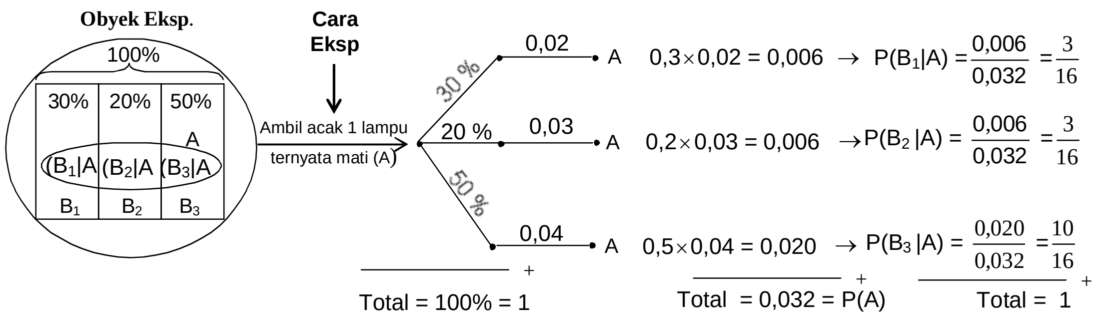
Selanjutnya karena 2% dari semua barang yang berasal dari perusahaan I mati, maka

$P(A \mid B_1) = 0{,}02$.

Sejalan dengan itu akan diperoleh $P(A \mid B_2) = 0,03$ dan $P(A \mid B_3) = 0,04$.



Maka



Untuk memecahkan pertanyaan-pertanyaan

(a) $P(B_1 \mid A)$ (b) $P(B_2 \mid A)$ (c) $P(B_3 \mid A)$,

yang diperlukan nilai-nilai dari :

$P(B_1)$, $P(B_2)$, $P(B_3)$, $P(A \mid B_1)$, $P(A \mid B_2)$, dan $P(A \mid B_3)$ …… (2),

sebab berdasarkan rumus (1) maka untuk pertanyaan (a) akan diperoleh bentuk

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1).P(B_1)}{P(A)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3).}$$

Perhatikan bahwa A adalah peristiwa terjadinya bola yang terambil mati, sementara bola yang mati dapat berasal dari perusahaan B_1, B_2, atau B_3. Sehingga:

$$A = (B_1|A) \cup (B_2|A) \cup (B_3|A)$$

Sedangkan ketiga peristiwa $(B_1|A)$, $(B_2|A)$, dan $(B_3|A)$ saling lepas sehingga masing-masing dari $(B_1|A)$, $(B_2|A)$, dan $(B_3|A)$ merupakan partisi dari A. Sebab irisannya berupa himpunan kosong dan gabungannya sama dengan dirinya sendiri. Yakni

$$(B_1|A) \cap (B_2|A) \cap (B_3|A) = \varnothing \text{ dan } (B_1|A) \cup (B_2|A) \cup (B_3|A) = A.$$

Karena $(B_1|A)$, $(B_2|A)$, dan $(B_3|A)$ merupakan partisi dari A, maka

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Perhatikan bahwa suku-suku pada persamaan (4) berdasarkan definisi peluang bersyarat maka masing-masing dari $(A \cap B_i)$ dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut :

$$P(A \cap B_1) = P(A \mid B_1) \,.\, P(B_1)$$

$$P(A \cap B_2) = P(A \mid B_2) \,.\, P(B_2)$$

$$P(A \cap B_3) = P(A \mid B_3) \,.\, P(B_3).$$

Substitusikan ketiganya ke persamaan (4) akan diperoleh

$$P(A) = P(A \mid B_1) \,.\, P(B_1) + P(A \mid B_2) \,.\, P(B_2) + P(A \mid B_3) \,.\, P(B_3) \ldots\ldots (5)$$

Substitusikan lagi dari (5) ke (3) akan diperoleh

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_1)\,.\,P(B_1)}{P(A \mid B_1).P(B_1) + P(A \mid B_2).P(B_2) + P(A \mid B_3).P(B_3)} \ldots (6).$$

Dengan penalaran yang sama akan diperoleh :

$$P(B_2 \mid A) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_2)\,.\,P(B_2)}{P(A \mid B_1).P(B_1) + P(A \mid B_2).P(B_2) + P(A \mid B_3).P(B_3)}$$

dan

$$P(B_3 \mid A) = \frac{P(A \cap B_3)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_3)\,.\,P(B_3)}{P(A \mid B_1).P(B_1) + P(A \mid B_2).P(B_2) + P(A \mid B_3).P(B_3)}.$$

Dengan demikian penyelesaian dari masing-masing nilai peluang yang ditanyakan adalah sebagai berikut :

$$P(B_1 \mid A) = \frac{(0{,}02)(0{,}3)}{(0{,}02)(0{,}3) + (0{,}03)(0{,}2) + (0{,}04)(0{,}5)} = \frac{0{,}006}{0{,}006 + 0{,}006 + 0{,}020} = \frac{0{,}006}{0{,}032} = \frac{3}{16}$$

$$P(B_2 \mid A) = \frac{(0{,}03)(0{,}2)}{(0{,}02)(0{,}3) + (0{,}03)(0{,}2) + (0{,}04)(0{,}5)} = \frac{0{,}006}{0{,}032} = \frac{3}{16}$$

$$P(B_3 \mid A) = \frac{(0{,}04)(0{,}5)}{(0{,}02)(0{,}3) + (0{,}03)(0{,}2) + (0{,}04)(0{,}5)} = \frac{0{,}020}{0{,}032} = \frac{10}{16}.$$

Dari rumus (6) tersebut maka secara umum rumus Bayes yang dimaksud adalah:

Rumus Bayes

Jika ruang sampel S dapat dibagi dalam n peristiwa yang saling lepas yakni B_1, B_2, …, B_n dan A adalah suatu peristiwa yang nilai peluangnya tidak nol, maka untuk masing-masing B_i nilai peluangnya adalah :

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i).P(B_i)}{P(A \mid B_1).P(B_1) + P(A \mid B_2).P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_n).P(B_n)}$$

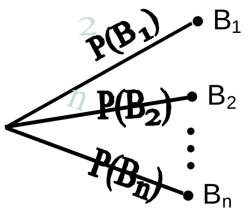
$$= \frac{P(A \mid B_i).P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i).P(B_i)}$$

B. TEKNIK PERHITUNGAN RUMUS BAYES

Bagi kita tidak begitu penting untuk mengingat-ingat rumus Bayes tersebut, sebab ada cara yang lebih mudah untuk mengatasinya. Cara yang dimaksud terdiri dari 3 tahap, yaitu

Tahap 1

Dari titik persekutuan umum di kiri tariklah cabang-cabang yang melambangkan masing-masing peristiwa B_1, B_2, …, B_n dan tandailah cabang-cabang itu dengan masing-masing nilai P.

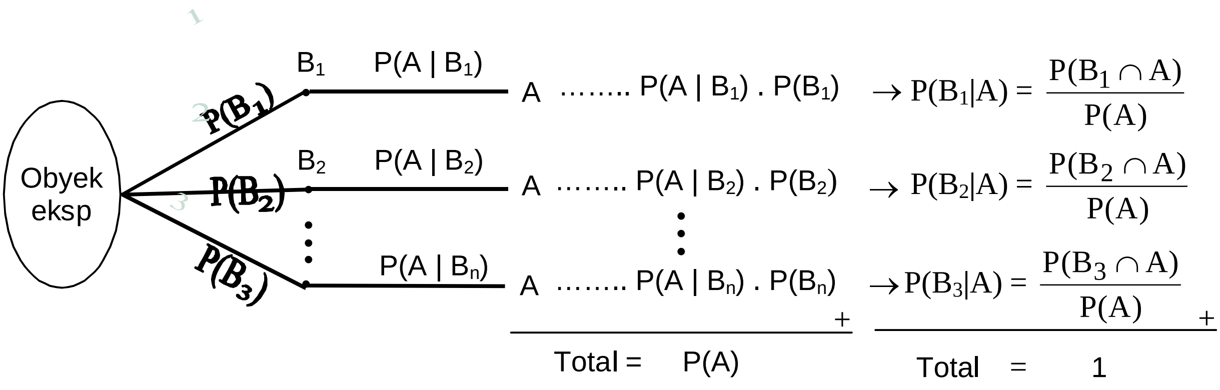


Tahap 2

Dari ujung masing-masing cabang tariklah cabang tunggal yang melambangkan peristiwa A dan tandailah cabang-cabang baru itu dengan peluang-peluang bersyarat $P(A \mid B_1)$, $P(A \mid B_2)$, … dan seterusnya hingga $P(A \mid B_n)$.

Tahap 3

Tandailah masing-masing titik ujung kanan dengan hasil kali nilai-nilai peluang yang ada pada masing-masing jalur yang ditunjukkan sebelumnya.



Dari diagram pohon itu mudah dipahami bahwa yang dimaksud dengan

$$P(A) = P(A|\,B_1)\,.\,P(B_1) + P(A\,|\,B_2)\,.\,P(B_2) + P(A\,|\,B_3)\,.\,P(B_3) + \ldots + P(A\,|\,B_n)\,.\,P(B_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i).P(B_i)\,.$$

Perhatikan pula bahwa nilai ujung cabang yang pertama jika dibagi dengan P(A) hasilnya adalah $P(B_1|A)$ yakni

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)\,.P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A\,|\,B_1)\,.P(B_1)}{P(A\,|\,B_1).P(B_1) + P(A\,|\,B_2).P(B_2) + \ \ldots\ + P(A\,|\,B_n).P(B_n)}\,.$$

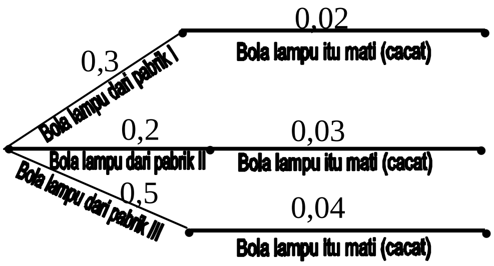
Hasilnya ternyata adalah peluang bolpoin yang terambil mati itu berasal dari pabrik B_1.
Sejalan dengan itu maka untuk menentukan $P(B_2|A)$, $P(B_3|A)$, $P(B_4|A)$, … dan seterusnya hingga $P(B_n|A)$, cukup dengan membagi nilai peluang di ujung cabang kedua dengan P(A), ujung cabang ketiga dengan P(A), ujung cabang keempat dengan P(A), dan seterusnya hingga ujung cabang ke-n dengan P(A), atau secara umum berbentuk.

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)\,.P(B_i)}{P(A)}.$$

Diagram yang digambarkan seperti di atas disebut **diagram pohon Bayes**. Dari diagram pohon itu secara umum dapat dikatakan bahwa nilai peluang dari soal yang ditanyakan yaitu $P(B_i\,|\,A)$ dapat diperoleh dengan cara:

$$P(B_i \mid A) = \frac{\text{Peluang dari cabang yang melalui A dan } B_i}{\text{Jumlah peluang dari seluruh cabang}}$$

Dengan cara itu maka penyelesaian dari contoh 2 yang diuraikan secara panjang lebar di atas akan menjadi sangat sederhana dan mudah. Gambaran selengkapnya yaitu :



… (0,02)(0,3) = 0,006

… (0,03)(0,2) = 0,006

… (0,04)(0,5) = 0,020
______________ +

Total = P(cacat/mati) = 0,032.

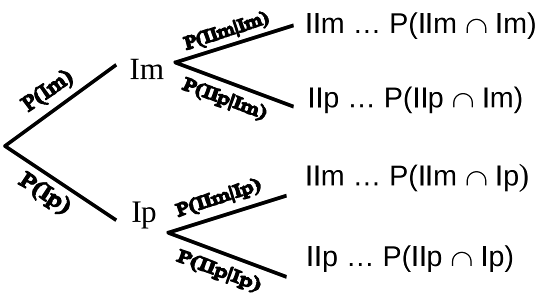
Dari cabang masing-masing maka yang dimaksud dengan :

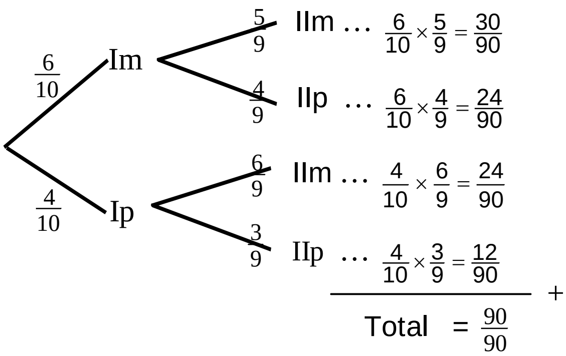
P(Bola lampu mati berasal dari pabrik I) $= \dfrac{\text{cabang}-1}{\text{Total}} = \dfrac{0{,}006}{0{,}032} = \dfrac{6}{32} = \dfrac{3}{16} = P(B_1 \mid A)$

P(Bola lampu mati berasal dari pabrik II) $= \dfrac{\text{cabang}-2}{\text{Total}} = \dfrac{0{,}006}{0{,}032} = \dfrac{6}{32} = \dfrac{3}{16} = P(B_2 \mid A)$

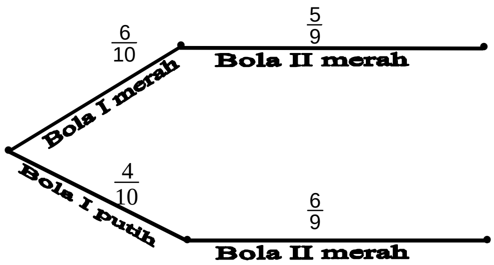
P(Bola lampu mati berasal dari pabrik III) $= \dfrac{\text{cabang}-3}{\text{Total}} = \dfrac{0{,}020}{0{,}032} = \dfrac{20}{32} = \dfrac{10}{16} = P(B_3 \mid A)$.

Cara yang sama dapat kita lakukan pula untuk contoh 1, yakni dari diagram semula





Karena yang ditanyakan adalah *terambilnya bola pertama putih jika bola kedua yang terambil ternyata merah* (tanpa melihat hasil pengambilan pertama), maka diagram semula itu kita ubah menjadi bentuk diagram pohon Bayes seperti berikut.



$\cdots \frac{5}{9}.\frac{6}{10} = \frac{30}{90}$

$\cdots \frac{6}{9}.\frac{4}{10} = \frac{24}{90}$ +

Total = P (II merah) $= \frac{54}{90}$. Sehingga

P(Bola I putih | Bola II merah) = $\frac{(24/90)}{(54/90)} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9}$.

Artinya adalah peluang terambilnya bola pertama putih jika diketahui bola yang terambil pada pengambilan kedua adalah merah.

LATIHAN 2

1. Pada sebuah pabrik ban terdapat 3 jaringan perakit A, B, dan C yang masing-masing menangani 60%, 30%, dan 10% dari produksi secara keseluruhan. Dari sistem perakitan tersebut ternyata jaringan A, B, dan C menghasilkan ban yang cacat berturut-turut sebanyak 0,3%, 0,6%, dan 0,8%. Jika dari pabrik ban tersebut diambil secara acak sebuah ban dan ternyata cacat. Tentukan peluang ban yang cacat itu berasal dari :

   a. jaringan A b. jaringan B c. jaringan C

2. Dalam sebuah kantong terdapat 3 kotak. Kotak I berisi 2 bola merah dan 8 bola putih, kotak II berisi 3 bola merah dan 5 bola putih, sedang kotak III berisi 4 bola merah dan 8 bola putih. Misalkan kita ambil acak sebuah bola dari kantong tersebut. Ternyata bola yang terambil berwarna merah. Berapakah peluangnya bahwa bola yang terambil merah itu

   a. berasal dari kotak I b. berasal dari kotak II c. berasal dari kotak III

3. Misalkan dalam sebuah kantong terdapat 3 buah kotak. Dari ketiga kotak tersebut kotak I semuanya berisi 5 bola merah. Kotak II berisi 4 bola kuning dan 2 bola putih sedangkan kotak III berisi 3 bola kuning dan 6 bola putih. Dari dalam kantong kita ambil secara acak sebuah bola. Ternyata bola yang terambil berwarna merah. Berapakah peluang bola yang terambil itu

   a. berasal dari kotak I b. berasal dari kotak II c. berasal dari kotak III

Jika bola yang teambil itu bukan bola merah tetapi bola putih, berapakah peluang bola yang terambil itu

d. berasal dari kotak I e. berasal dari kotak II f. berasal dari kotak III

4. Sebuah perusahaan asuransi mencatat bahwa seorang sopir baru yang lulus uji, di tahun pertama mereka bekerja peluang mengalami kecelakaan 0,3% sementara untuk sopir yang tak lulus uji 0,9%. Jika 60% dari semua sopir baru telah lulus uji, berapakah peluang seorang sopir yang terlibat dalam kecelakaan di tahun pertama menyopir berasal dari:

   a. mereka yang lulus uji b. mereka yang belum lulus uji

5. Suatu tes didesain untuk mendeteksi penggunaan narkoba oleh pelajar sekolah menengah. Ternyata bagi seorang pengguna atau yang pernah menggunakan narkoba peluang mereka akan terdeteksi adalah 80%. Sementara bagi mereka yang merasa belum pernah menggunakan secara mengejutkan peluang terdeteksi mengandung narkoba sebanyak 5%. Jika 10% dari siswa sekolah menengah yang diduga sebagai pengguna dites ternyata positip mengandung narkoba. Berapakah peluang orang yang dites itu berasal dari mereka yang merasa belum pernah menggunakan narkoba.

6. Sebuah kotak berisi 100 bola, terdiri dari 40 bola berwarna merah, 30 bola berwarna putih, 20 bola berwarna kuning dan 10 bola berwarna biru. Dari bola-bola itu persentase cacat masing-masing adalah 4% untuk bola merah, 3% untuk bola putih, 2% untuk bola kuning, dan 1% untuk bola biru. Dari dalam kotak diambil secara acak sebuah bola (tanpa melihat warna bola yang terambil) kemudian bola dijatuhkan ke lantai. Ternyata dari bunyi benturannya diketahui bahwa bola itu cacat. Berapakah peluang bola yang terambil itu

   a. berwarna putih
   b. berwarna kuning

7. Sebuah kantong berisi 50 lembar kertas gambar bergambar tokoh-tokoh film kartun. Dari kertas-kertas gambar itu 10 lembar diantaranya gambarnya dobel (ada di kedua sisinya). Dari kantong tersebut diambil secara acak 1 lembar kemudian dilemparkan ke udara sebanyak 2 kali, ternyata jatuhnya berupa sisi yang ada gambarnya. Berapakah peluang lembaran kertas yang terambil itu berasal dari kertas gambar yang gambarnya dobel.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H – Kolman, B. (1982). ***Applied Finite Mathematics (3rd Edition)***. Anton Textbooks, Inc: New York.

Depdiknas. (2001). ***Pola Pelaksanaan Broad Based Education (BBE)***. Buku II. Departemen Pendidikan Nasional: Jakarta.

---------------. (2003). ***Kurikulum 2004 (Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah).*** Departemen Pendidikan Nasional: Jakarta.

--------------- (2006). ***Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP) Matematika Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah).*** Departemen Pendidikan Nasional: Jakarta.

Harnet, Donald L. (1982). ***Statistical Methods (3rd Edition)***. Addison – Wesley Publishing Company, Inc: Philiphines.

Pitman, Jim. (1993). ***Probability.*** Springer-Verlag Inc: New York.

Smith, Gary. (1991). ***Statistical Reasoning (3rd Edition)***. Allyn and Bacon, A Division of Simon and Schuster Inc: 160 Gould Street, Needham Height, Massachusetts 02194.

Spiegel, Murary B. (1982). ***Probability and Statistics (Theory and Problem)***. Mc Graw – Hill Book Company: Singapore.

LAMPIRAN

Kunci Latihan 1 halaman 24

1. a. $\binom{5}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$ b. $\binom{5}{0}.\left(\frac{1}{2}\right)^0.\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1}.\left(\frac{1}{2}\right)^1.\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{16}$

2. a. $\binom{4}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$ b. $1 - \text{P(nol lelaki)} = \frac{15}{16}$

3. a. $\binom{4}{2}.\left(\frac{1}{6}\right)^2.\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}$ b. $1 - \text{P(nol kali)} = \frac{671}{1296}$

4. ya

5. a. $\frac{54}{125}$ b. $\frac{54}{125}$ c. $\frac{98}{125}$

6. a. $\frac{1}{4}$ b. $\frac{1}{6}$ c. $\frac{1}{15}$

7. a. $\frac{10}{21}$ b. $\frac{11}{42}$

8. a. $\frac{21}{40}$ b. $\frac{3!}{1!2!}.\left(\frac{3}{10}\right)^1.\left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{441}{1000}$

9. a. $\dfrac{\binom{13}{1}.\binom{13}{1}.\binom{13}{1}.\binom{13}{1}}{\binom{52}{4}} = \frac{2197}{498.800}$ b. $\frac{4!}{1!1!1!1!}.\left(\frac{1}{4}\right)^1.\left(\frac{1}{4}\right)^1.\left(\frac{1}{4}\right)^1.\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{3}{32}$

10. a. $\dfrac{\binom{5}{3}.\binom{6}{2}.\binom{4}{1}.\binom{5}{4}}{\binom{20}{10}} = 0{,}0162$

    b. $\frac{10!}{3!2!1!4!}.\left(\frac{5}{20}\right)^3.\left(\frac{6}{20}\right)^2.\left(\frac{4}{20}\right)^1.\left(\frac{5}{20}\right)^4 \approx 0{,}002 = 0{,}001977$

11. a. 10 macam b. $\frac{1}{35}$ c. 19 macam d. $\frac{6}{78.125}$

12. a 10 peristiwa b. $\frac{1}{21}$ c.19 peristiwa d. $\frac{27}{1250}$

Kunci Soal-soal EBTANAS *halaman 25*

1. $\frac{1}{6}$
2. $\frac{3}{7}$
3. $\frac{3}{5}$
4. $\frac{4}{21}$
5. $\frac{3}{5}$
6. $\frac{7}{24}$
7. $\frac{9}{25}$
8. $\frac{1}{4}$
9. $\frac{55}{153}$
10. $\frac{25}{64}$

Kunci Latihan 2 halaman 36

1. Ilustrasi

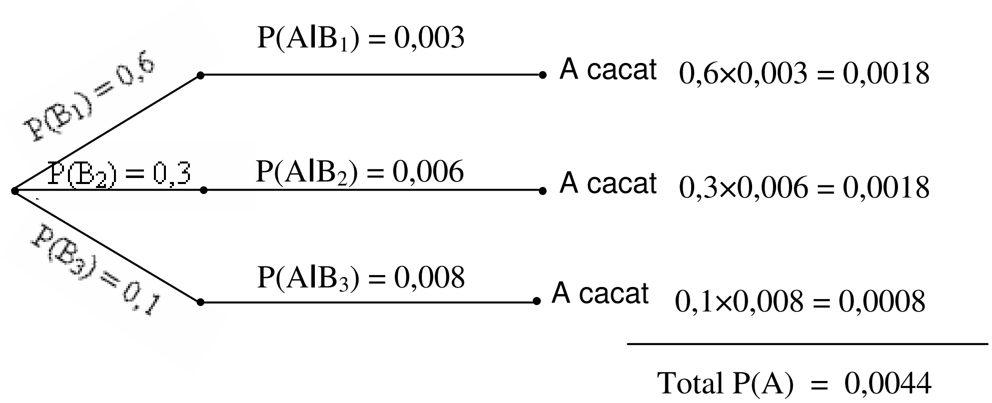
Jaringan I	Jaringan II	Jaringan III
0,3%	0,6%	0,8%
60 %	30 %	10 %

Ban cacat

a. 18/44 = 9/22

b. 9/22

c. 2/11



Yang ditanyakan adalah $P(B_1|A)$ = … (cacat yang berasal dari jaringan 1, B_1)

$P(B_2|A)$ = … (cacat yang berasal dari jaringan 1, B_2)

$P(B_3|A)$ = … (cacat yang berasal dari jaringan 1, B_3)

2. a. $\frac{2}{9}$ b. $\frac{3}{9}$ c. $\frac{4}{9}$

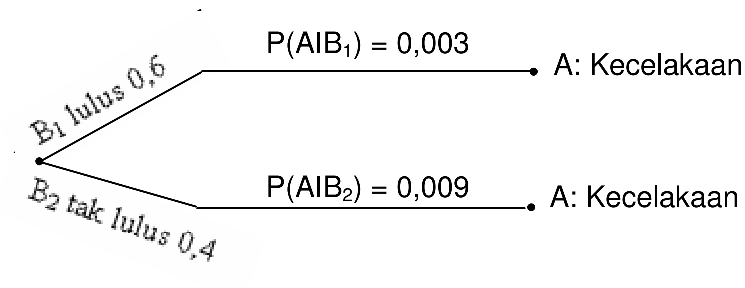
3. a. $\frac{2}{9}$ b. $\frac{3}{9}$ c. $\frac{4}{9}$

4. Ilustrasi

Lulus uji	Tak lulus uji
0,3%	0,9%
60%	40%

Kecelakaan

Kunci: $\frac{18}{54} = \frac{1}{3}$



$0{,}6 \times 0{,}003 = 0{,}0018$

$0{,}4 \times 0{,}009 = 0{,}0036$ +

Total = 0,0054

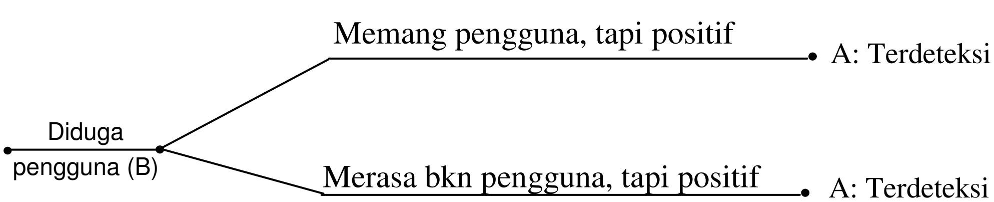
$P(B_1 | A) = (\text{lulus} \mid \text{kecelakaan}) = \frac{0{,}0018}{0{,}0054} = \frac{1}{3}$

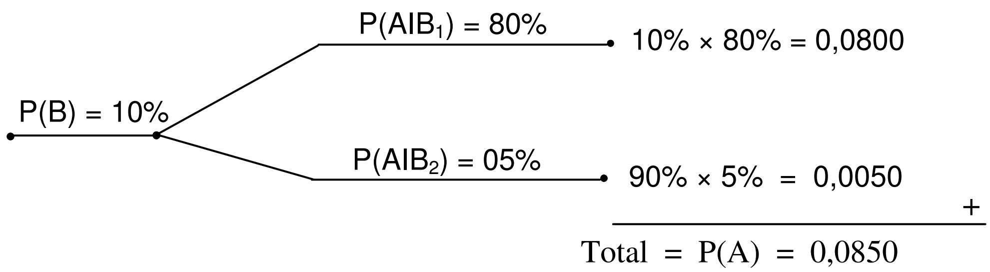
5. Ilustrasi

Pengguna narkoba	Bukan pengguna
80%	5%
10%	…%

Terdeteksi

Kunci: $\frac{50}{850} = \frac{1}{17}$





6. Ilustrasi

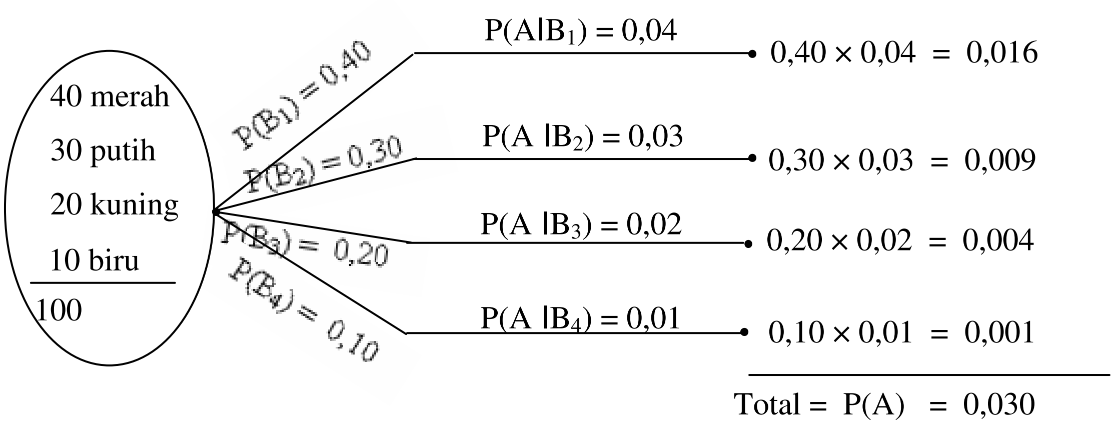
Merah	Putih	Kuning	Biru
4%	3%	2%	1%
40	30	20	10

Cacat/retak

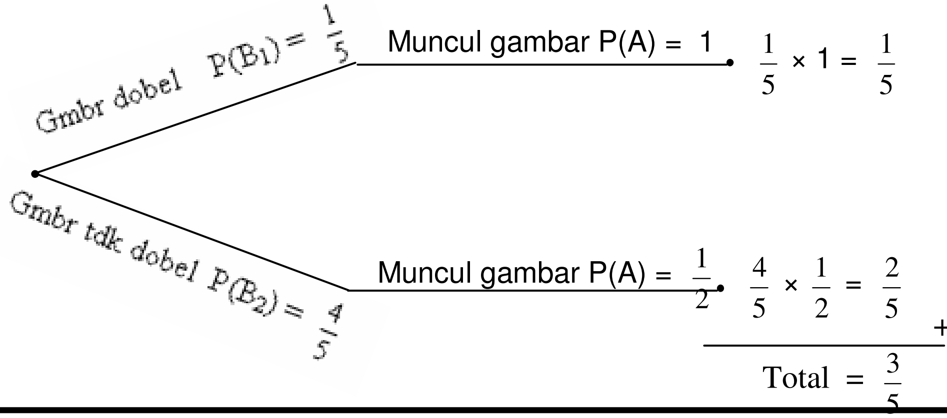
100

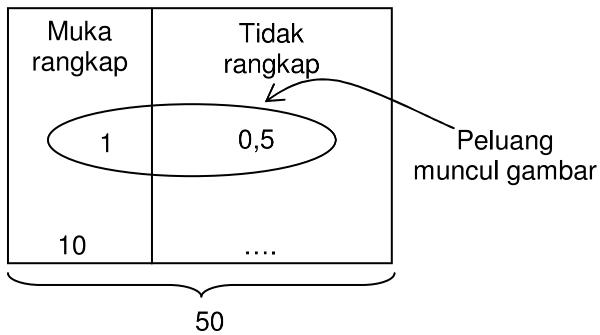
Kunci : a. $\frac{3}{10}$

b. $\frac{4}{30}$



7. Ilustrasi





Kunci: $\frac{1}{3}$