DIKLAT INSTRUKTUR PENGEMBANG MATEMATIKA SMA
JENJANG LANJUT

VEKTOR

JENJANG LANJUT

Drs. Marsudi Raharjo, M.Sc.Ed

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIDK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
YOGYAKARTA
2009

DAFTAR ISI

KOMPETENSI, SUB KOMPETENSI, DAN PETA BAHAN AJAR

Kompetensi

Memiliki kemampuan mengembangkan pengetahuan dan ketrampilan siswa SMA berkenaan dengan konsep vektor, skalar, modulus (panjang) vektor, perkalian skalar antara dua vektor (dot vektor), proyeksi orthogonal suatu vektor ke vektor lain, dan **pengayaan** berupa **perkalian vektor antara dua vektor** (kros vektor) serta menggunakan konsep-konsep vektor dalam pemecahan masalah.

Sub Kompetansi

Menjelaskan dan memberi contoh:

1. Konsep vektor, skalar, modulus (panjang) vektor, cara menulis lambang vektor, jumlah dan selisih vektor, terapan vektor dalam perhitungan perbandingan panjang ruas garis
2. Vektor pada sistem koordinat Cartesius R^2 dan R^3, perkalian skalar antara dua vektor (dot vektor), basis ruang vektor, proyeksi orthogonal suatu vektor ke vektor lain
3. Perkalian vektor antara dua vektor (kros vektor), luas permukaan, dan volum bangun ruang dalam ruang vektor R^3
4. Penggunaan konsep-konsep vektor dalam pemecahan masalah

Peta bahan Ajar

No.	Pokok Bahasan	Sub Pokok Bahasan
1	Vektor dalam ruang R^2	1. Konsep vektor, skalar, penjumlahan, dan pengurangan vekror 2. Terapan vektor pada pembagian ruas garis 3. Dot vektor (**perkalian skalar** antara dua vektor) 4. Proyeksi orthogonal suatu vektor ke vektor lain 5. Jarak titik ke bidang dalam R^2
2	Vektor dalam ruang R^3	1. Kros vektor (**perkalian vektor** antara dua vektor) 2. Terapan vektor pada perhitungan luas permukaan pada ruang dimensi tiga (R^3) 3. Terapan vektor pada perhitungan volum bangun ruang: balok, kubus, dan limas

BAB I
PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Diklat SMA lanjut tahun 2009 ini seperti kita ketahui merupakan diklat yang diikuti oleh para alumni diklat SMA dasar yang belum menerima materi vektor di jenjang dasar. Mengapa?, karena menurut pertimbangan kala itu materi tersebut akan disampaikan pada diklat jenjang lanjut. Sementara hasil TNS (Training Need Assessment) meminta materi tesebut urgen untuk diberikan di jenjang dasar.

Mengingat dan mempertimbangkan hasil TNA tersebut maka program diklat matematika SMA tahun 2009 ini materi Vektor diberikan di jenjang dasar. Di lain pihak berarti alumni diklat dasar yang terpilih untuk diundang di jenjang lanjut 2009 ini belum pernah menerima diklat Vektor di jenjang dasar. Dengan pertimbangan seperti ini maka untuk program diklat guru SMA tahun 2009 ini materi vektor SMA jenjang lanjut sedikit dibedakan dengan materi vektor jenjang dasar. Perbedaannya pada jenjang lanjut diisi dengan ulasan singkat materi vektor di jenjang dasar sementara soal-soal latihannya ditekankan pada tingkat yang lebih dalam dan kompleks. Oleh sebab itu **materi vektor** pada **jenjang lanjut** ini dimulai dari mengingat kembali beberapa materi prasyarat kemudian dilanjutkan dengan **terapannya dalam matematika** dan **terapannya dalam kehidupan sehari-hari**.

Kami berharap agar sajian materi vektor ini dapat memberikan kecakapan hidup (*life skill*) yang bersifat akademik kepada teman-teman guru peserta diklat SMA Lanjut melalui prinsip *learning to know, learning to do, learning to be, learning to live together* dan *learning to cooperate* (Depdiknas, 2001:11).

B. TUJUAN

Materi diklat ini ditulis dengan maksud dapat dijadikan sebagai salah satu bahan rujukan diklat guru di seluruh Indonesia dalam memberikan bahan pemahaman dan pendalaman materi vektor yang perlu dikuasai oleh guru matematika SMA agar lebih berhasil dalam menjalankan profesinya dalam mengajarkan materi itu kepada para siswanya.

Setelah dipelajarinya materi ini diharapkan kepada para alumni untuk dapat:

1. mengimbaskan pengetahuannya kepada guru-guru di wilayah MGMP-nya dan rekan-rekan seprofesi lainnya
2. mengajarkan kepada para siswanya secara lancar, lebih baik dan lebih jelas
3. mengembangkan soal-soal yang lebih variatif dan menyentuh kehidupan nyata.

C. RUANG LINGKUP

Materi vektor yang ditulis ini merupakan materi minimal yang perlu dikuasai oleh guru SMA/MA. Materi yang dibahas pada diklat jenjang lanjut ini meliputi:

a. Pengetahuan prasayrat:
   (1) gambar vektor, cara penulisan vektor, modulus (panjang vektor), dan vektor satuan,
   (2) konsep skalar sebagai kelipatan dari sebuah vektor yang bentuknya paling sederhana, skalar positip jika vektornya searah, dan skalar negatif jika vektornya berlawanan arah,
   (3) penjumlahan dan pengurangan vektor, dan (4) dot vektor dan proyeksi orthogonal suatu vektor ke vektor lain

b. Materi vektor lanjut:
   (1) vekor arah garis lurus, bilangan arah, dan vektor normal,
   (2) konsep, sifat, dan dalil kros vektor,
   (3) terapan vektor dalam pemecahan masalah: koordinat titik bagi ruas garis, sudut dan jarak antara dua garis bersilangan, sudut antara garis dan bidang, luas bidang irisan, dan volum bangun ruang.

Bahan ajar ini dimaksudkan untuk dapat dibaca dan dipahami sendiri termasuk mengerjakan soal-soal latihan dan merujuknya pada kunci jawaban. Untuk itu langkah-langkah penguasaan materinya adalah

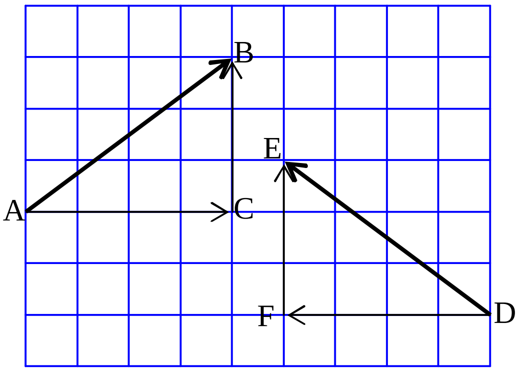
1. Pelajari materinya (bersama teman)
2. Bahas soal-soalnya dan lihat kunci jawabannya.
3. Adakan Problem Posing: Ciptakan variasi soal lainnya berikut kunci jawabannya.

BAB II
VEKTOR DAN TERAPANNYA

A. PENGINGATAN KONSEP-KONSEP PRASYARAT

Sebelum kita mulai membahas materi vektor diklat SMA lanjut, kita perlu mengingat kembali konsep-konsep prasyarat. Tujuannya agar kita lebih lancar mengikuti pembahasan materi-materi berikutnya. Konsep-konsep prasyarat yang dimaksud adalah sebagai berikut.

1. Konsep vektor



Contoh

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \text{komponen mendatar} \\ \text{komponen vertikal} \end{pmatrix}$$

Komponen mendatar $\begin{cases} \text{ke kanan} \rightarrow \text{pos} \\ \text{ke kiri} \rightarrow \text{neg} \end{cases}$

Komponen vertikal $\begin{cases} \text{ke atas} \rightarrow \text{pos} \\ \text{ke bawah} \rightarrow \text{neg} \end{cases}$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \text{A ke C terus} \\ \text{C ke B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ke kanan} = 4 \\ \text{ke atas} = 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} \text{D ke F terus} \\ \text{F ke E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ke kiri} = 4 \\ \text{ke atas} = 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Panjang vektor

Untuk vektor $\overrightarrow{AB}$ yaitu $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$, $\overrightarrow{CD}$ yaitu $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

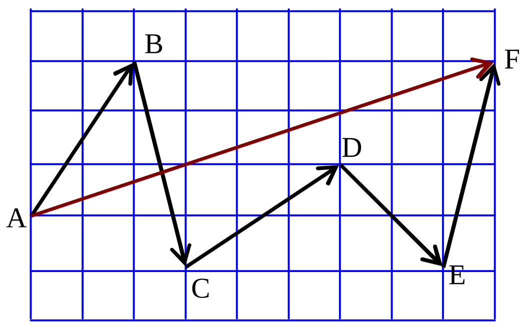
Secara umum,

panjang vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ adalah $|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$ dalam R^2.

panjang vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ adalah $|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ dalam R^3.

3. Penjumlahan Vektor

Lengkapi isian berikut selengkapnya dan cermati hasilnya .



Dari gambar di samping tentukan:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$.

Hitunglah

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} =$

$$\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$$

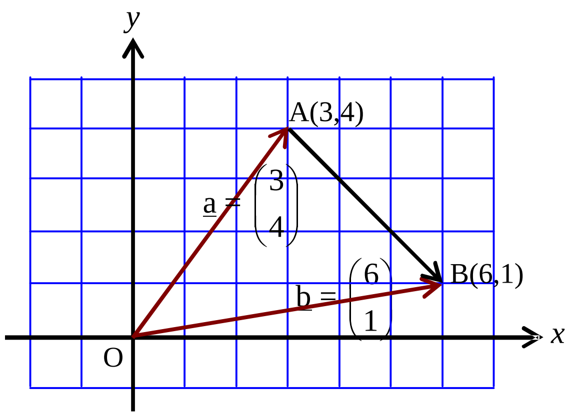
Apakah

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$?

Kesimpulan
Untuk setiap vektor berlaku:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \dots + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ}}$$

4. Vektor Posisi



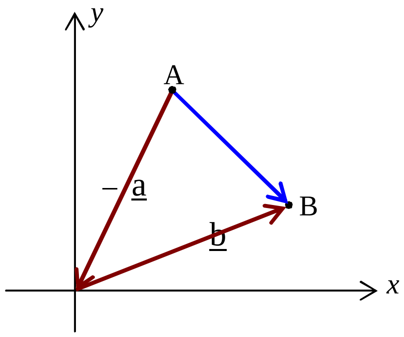
Vektor posisi titik A(3,4) adalah $\underline{a} = \begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}$

Vektor posisi titik B(6,1) adalah $\underline{b} = \begin{pmatrix}6\\ 1\end{pmatrix}$

Berdasarkan gambar yang diketahui maka

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$; $\underline{b} - \underline{a} = \begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$.

Apakah $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$?



Bukti Matematikanya adalah:

$\overrightarrow{AB} =$ A ke O + O ke B
= – O ke A + O ke B
= $-\underline{a} + \underline{b}$
= $\underline{b} - \underline{a}$ (terbukti).

Jadi benar bahwa:

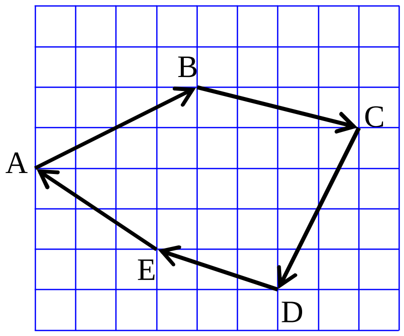
$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}}$$

Catatan

Rumus di atas selain berlaku untuk ruang vektor R^2 juga berlaku pula untuk R^3.

5. Vektor Nol

Adalah vektor yang titik pangkal dan titik ujungnya berimpit.



Perhatikan gambar di samping bahwa:

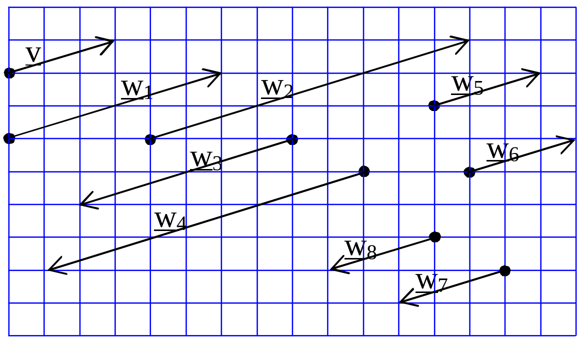
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} =$

$$\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Karena $\overrightarrow{AA} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \underline{0}$ maka

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AA} = \underline{0} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.}$$

6. Skalar (kelipatan vektor)



Setelah diselidiki lebih lanjut ternyata:

> Suatu vektor hanya dapat dinyatakan sebagai kelipatan dari vektor lainnya hanya apabila searah atau berlawanan arah.

Dari gambar-gambar vektor yang diperagakan tersebut tampak jelas bahwa kedelapan vektor itu sejajar. Selanjutnya bila diidentifikasi lebih lanjut diperoleh:

$\underline{v} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$\underline{w_1} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = 2\underline{v}$

$\underline{w_2} = \begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = 3\underline{v}$

$\underline{w_5} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \underline{v}$

$\underline{w_6} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \underline{v}$

$\underline{w_7} = \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} = -\underline{v}$

karena

$$\left.\begin{matrix}\underline{w_1} = 2\underline{v}\\ \underline{w_3} = -2\underline{v}\end{matrix}\right\}\ \underline{w_1} = -\underline{w_3}$$

$\underline{w}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\underline{v}$ $\quad \underline{w}_8 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = -\underline{v}$

$\underline{w}_4 = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -3\underline{v}$

$$\left.\begin{matrix} \underline{w}_2 = 3\underline{v} \\ \underline{w}_4 = -3\underline{v} \end{matrix}\right\} \underline{w}_2 = -\underline{w}_4$$

Perhatikan bahwa $\underline{w}_1 = -\underline{w}_3$ dan $\underline{w}_2 = -\underline{w}_4$ ternyata gambar $\underline{w}_1$ dan $\underline{w}_3$ sama panjang tetapi arahnya berlawanan. Hal yang sama diperlihatkan oleh $\underline{w}_2$ dan $\underline{w}_4$.

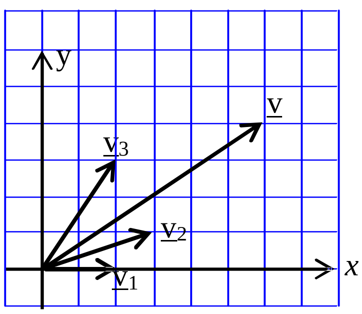
Uraian di atas memperlihatkan bahwa vektor-vektor yang arahnya sama dengan vektor $\underline{v}$ yaitu $\underline{w}_1$, $\underline{w}_2$, $\underline{w}_5$, dan $\underline{w}_6$ dapat ditulis dalam bentuk $\underline{w}_i = k\underline{v}$ dengan k skalar yang bernilai positif. Sementara itu vektor-vektor yang arahnya berlawanan dengan vektor $\underline{v}$ seperti $\underline{w}_3$, $\underline{w}_4$, $\underline{w}_7$, dan $\underline{w}_8$, dapat ditulis dalam bentuk $\underline{w}_i = k\underline{v}$ dengan k skalar yang bernilai negatif. Vektor-vektor yang arahnya sama atau berlawanan dengan vektor $\underline{v}$ disebut vektor-vektor yang sejajar dengan vektor $\underline{v}$. Sehingga

> *vektor $\underline{w}$ sejajar vektor $\underline{v}$ ditulis $\underline{w} // \underline{v}$ apabila*
>
> $\underline{w} = k\underline{v}$ *dengan k skalar,* $k \in R$
>
> *Jika $k>0$ maka $\underline{w}$ searah dengan $\underline{v}$*
>
> *Jika $k<0$ maka $\underline{w}$ berlawanan arah dengan $\underline{v}$*

7. Kombinasi Linear dan Basis

> *Jika $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, .., \underline{v}_r$, adalah vektor-vektor dalam R^2. Maka untuk setiap vektor $\underline{v} \in R^2$, vektor $\underline{v}$ dapat dinyatakan sebagai* ***kombinasi linear*** *dalam $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, ..., \underline{v}_r$, yaitu:*
> *$\underline{v} = k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + \ldots + k_r \underline{v}_r$, dengan $k_1, k_2, \ldots, k_r$, adalah skalar-skalar real.*
> Jika $k_1, k_2, \ldots, k_r$ tunggal, maka vektor-vektor $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, .., \underline{v}_r$ itu disebut ***basis*** untuk R^2.

Contoh



Perhatikan bahwa

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Dari vektor-vektor yang diketahui itu akan ditunjukkan bahwa jika:

a. $\underline{v} = k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2$, diperoleh k_1 dan k_2 tunggal maka dua vektor $\underline{v}_1$ dan $\underline{v}_2$ merupakan basis untuk R^2.

b. $\underline{v} = k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + k_3 \underline{v}_3$, diperoleh k_1, k_2, dan k_3 tidak tunggal maka $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, dan $\underline{v}_3$ bukan basis untuk R^2.

Bukti:

a) jika $\underline{v} = k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2$, maka

$$\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \rightarrow \text{(i)}\quad 6 = 2k_1+3k_2$$

(ii) $4 = k_2 \rightarrow k_2 = 4$

$k_2 = 4 \rightarrow$ (i) $2k_1 + 3k_2 = 6$

$2k_1 + 3(4) = 6$

$2k_1 = -6 \rightarrow k_1 = -3$

Sehingga diperoleh $\underline{v} = -3\underline{v}_1 + 4\underline{v}_2$, artinya k_1 dan k_2 tunggal.

b) Jika $\underline{v} = k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + k_3 \underline{v}_3$, maka

$$\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

Selanjutnya akan diperoleh persamaan

(i) $6 = 2k_1 + 3k_2 + 2k_3$

(ii) $4 = k_2 + 3k_3$

Karena terdapat 3 peubah (variabel) dalam 2 persamaan, maka akan terdapat banyak penyelesaian dengan parameter sebanyak (3–2) = 1 buah. Misalkan parameter itu adalah $k_3 = \lambda$; λ = parameter.

$k_3 = \lambda \rightarrow$ (ii) $k_2 + 3k_3 = 4$

$k_2 + 3\lambda = 4$

$k_2 = 4 - 3\lambda \rightarrow$ (i) $2k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 6$

$2k_1 + 3(4-3\lambda) + 2\lambda = 6$

$2k_1 + 12 - 9\lambda + 2\lambda = 6$

$2k_1 = -6 + 7\lambda$

$k_1 = -3 + 3\frac{1}{2}\lambda$

Jika $\lambda = 0 \rightarrow$ $k_1 = -3$, $k_2 = 4$, $k_3 = 0$

Jika $\lambda = 2 \rightarrow$ $k_1 = 4$, $k_2 = -2$, $k_3 = 2$.

Tampak bahwa k_1, k_2, dan k_3 tidak tunggal, mereka tergantung pada nilai parameter λ yang kita pilih. Karena kombinasi linearnya tidak tunggal, akibatnya vektor-vektor $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, dan $\underline{v}_3$ bukan merupakan basis untuk ruang vektor berdimensi 2 (R^2).

Basis-basisnya misal $\underline{v}_1$ dan $\underline{v}_2$ atau

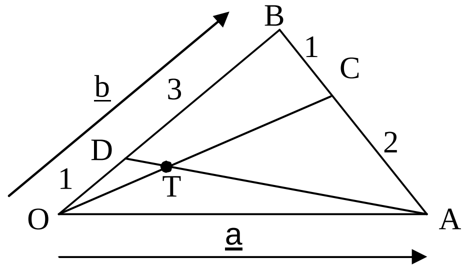
$\underline{v}_1$ dan $\underline{v}_3$ atau

$\underline{v}_2$ dan $\underline{v}_3$.

yaitu **setiap dua vektor tidak nol** yang **tidak searah**.

Dengan pemikiran yang sama dapat diselidiki bahwa **basis dalam ruang vektor R^3** (ruang vektor berdimensi tiga (R^3)) **adalah setiap 3 vektor tidak nol yang tidak sebidang** jika titik pangkal ketiga vektor itu diimpitkan.

Contoh perhitungan menggunakan konsep basis



Dari ΔOAB diketahui C pada $\overline{AB}$ dan D pada $\overline{OB}$. T pada perpotongan $\overline{OC}$ dan $\overline{AD}$. AC:CB = 2:1 dan OD:DB = 1:3. Tentukan OT:TC !

Jawab:

Karena ΔOAB berikut komponen-komponennya terletak sebidang, maka ia berdimensi 2 (dua). Untuk itu setiap 2 vektor yang tak searah akan merupakan basis untuk R^2. Akibatnya setiap vektor dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari kedua basis itu secara tunggal. Misalkan **basis**nya adalah $\overrightarrow{OA}$ dan $\overrightarrow{OB}$ (vektor $\overrightarrow{OA}$ = $\underline{a}$ dan $\overrightarrow{OB}$ = $\underline{b}$). Dari pijakan itu akan diperoleh:

$$\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{2}{3}(-\underline{a} + \underline{b}) \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} = -\underline{a} + \frac{1}{4}\underline{b} \quad \ldots\ldots (2)$$

Karena $\overrightarrow{OT}$ searah dengan $\overrightarrow{OC}$ maka $\overrightarrow{OT} = \lambda\overrightarrow{OC}$, λ suatu skalar

$$= \lambda\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \lambda\left(\underline{a} + \frac{2}{3}(-\underline{a}+\underline{b})\right)$$

$$= \frac{1}{3}\lambda\,\underline{a} + \frac{2}{3}\lambda\,\underline{b} \quad \ldots\ldots.(3)$$

Di lain pihak $\overrightarrow{AT}$ adalah kelipatannya $\overrightarrow{AD}$ (mengapa?), sehingga dapat ditulis

$$\overrightarrow{AT} = \mu\,\overrightarrow{AD} \quad \text{dan} \quad \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT}$$

$$\overrightarrow{OT} = \underline{a} + \mu\left(-\underline{a} + \frac{1}{4}\underline{b}\right)$$

$$= (1-\mu)\,\underline{a} + \frac{1}{4}\mu\,\underline{b} \quad \ldots\ldots. (4)$$

Dengan menyamakan koefisien $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ pada (3) dan (4) yaitu:

(i) Koefisien $\underline{a}$: $1 - \mu = \frac{1}{3}\lambda$

(ii) Koefisien $\underline{b}$: $\frac{1}{4}\mu = \frac{2}{3}\lambda$ $\longrightarrow$ $\mu = \frac{8}{3}\lambda$, substitusikan ke

(i) $1-\mu=\frac{1}{3}\lambda \longrightarrow 1-\frac{8}{3}\lambda=\frac{1}{3}\lambda$

$1=\frac{9}{3}\lambda \longrightarrow 1=3\lambda \rightarrow \lambda=\frac{1}{3}$

(ii) $\mu=\frac{8}{3}\lambda=\frac{8}{3}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{9}$

Karena $\overrightarrow{OT}=\lambda.\overrightarrow{OC}$ dan $\lambda=\frac{1}{3}$ maka $\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

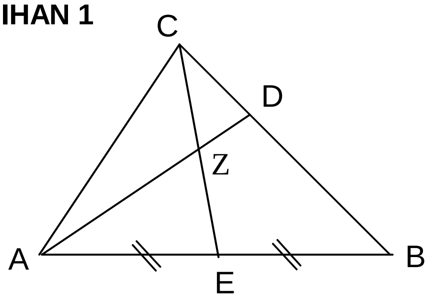
Selanjutnya karena $\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ maka $\left|\overrightarrow{OT}\right|=\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{OC}\right|$ atau $OT=\frac{1}{3}OC$ atau $\frac{OT}{OC}=\frac{1}{3}$.

Terakhir karena $\frac{OT}{OC}=\frac{1}{3}$ maka $\frac{OT}{TC}=\frac{1}{(3-1)}=\frac{1}{2}$ atau $\boxed{OT : TC = 1 : 2}$.

Catatan

1. Contoh perhitungan perbandingan ruas garis di atas adalah contoh perhitungan **menggunakan 2 vektor basis sembarang dalam ruang vektor R^2 yakni kedua vektor bukan vektor normal standar.**
2. **Vektor normal standar** adalah vektor-vektor yang saling tegak lurus dan panjang vektornya masing-masing 1 satuan).
3. Basis normal standar $\underline{i}$ dan $\underline{j}$ dalam ruang vektor berdimensi dua R^2 dan $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ dalam ruang vektor berdimensi tiga R^3 adalah basis-basis istimewa dan dikenal sebagai **basis orthonormal** .

LATIHAN 1

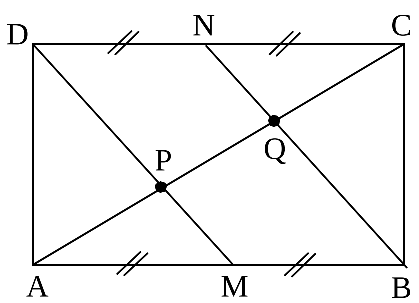
1. 

Diketahui Δ ABC

Titik D pada $\overline{BC}$ sehingga BD:DC = 2:1

Titik E pada pertengahan $\overline{AB}$

Jika Z adalah titik potong $\overline{AD}$ dan $\overline{CE}$, tentukan AZ:ZD = … dan CZ:ZE = ….

2. 

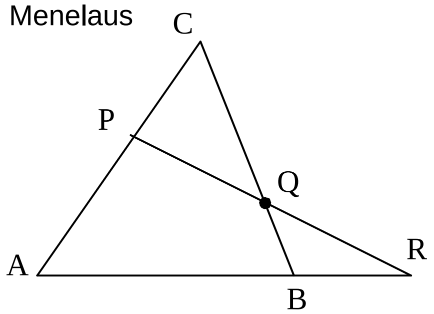
Diketahui persegi panjang ABCD, titik M dan N berturut-turut terletak pada pertengahan $\overline{AB}$ dan $\overline{DC}$. Titik P dan Q berturut-turut merupakan titik potong diagonal $\overline{AC}$ dengan ruas-ruas garis $\overline{DM}$ dan $\overline{BN}$.

Buktikan bahwa AP = PQ = QC = $\frac{1}{3}$AC.

3. Diketahui ΔABC dengan koordinat-koordinat titik A, B, dan C masing-masing adalah (x_A, y_A), (x_B, y_B), dan (x_C, y_C).

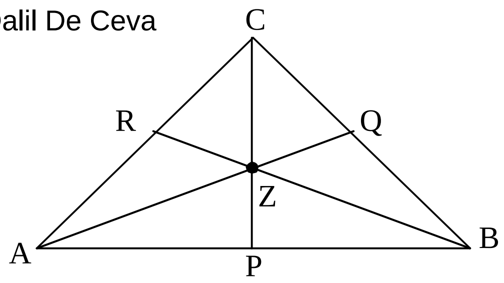
   Buktikan bahwa jika Z(x_Z, y_Z) adalah titik berat ΔABC maka $x_z = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$ dan $y_z = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

4. Dalil Menelaus



Diketahui ΔABC dengan transversal (garis yang memotong sisi-sisi segitiga atau perpanjangannya) $\overleftrightarrow{PR}$, buktikan bahwa $\dfrac{AR}{RB} \times \dfrac{BQ}{QC} \times \dfrac{CP}{PA} = 1$.

5. Dalil De Ceva



Segitiga ABC dengan $\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{BR}$ dan $\overrightarrow{CP}$ berpotongan di titik Z. Titik P, Q, dan R berturut-turut terletak pada ruas garis $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{CA}$. Buktikan bahwa $\dfrac{AP}{PB} \times \dfrac{BQ}{QC} \times \dfrac{CR}{RA} = 1$.

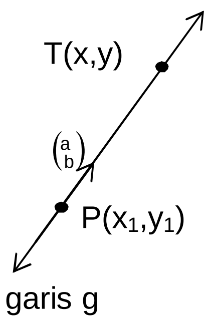
B. VEKTOR ARAH DAN VEKTOR NORMAL DALAM SISTEM KOORDINAT CARTESIUS

1. Vektor arah

Suatu garis dapat dipandang sebagai perpanjangan tak terbatas dari suatu ruas garis. Suatu garis dapat pula dipandang sebagai perpanjangan tak terbatas dari suatu vektor yang melalui titik tertentu. ***Vektor arah** dari suatu garis ialah **vektor yang menentukan arah dari garis itu**.* Sedangkan suatu titik yang dilewati garis itu adalah syarat lain yang ditambahkan atas vektor arah sehingga garis yang dimaksudkan bersifat tunggal.

Untuk memahami apa yang disebut vektor arah diberikan ontoh seperti berikut.

Misalkan $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ adalah vektor arah garis g dan garis g melalui titik $P(x_1,y_1)$ … (lihat gambar). Jika titik T(x,y) adalah titik sembarang pada garis g maka



$$\overrightarrow{PT} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{t} - \underline{p} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \lambda \text{ disebut parameter.}$$

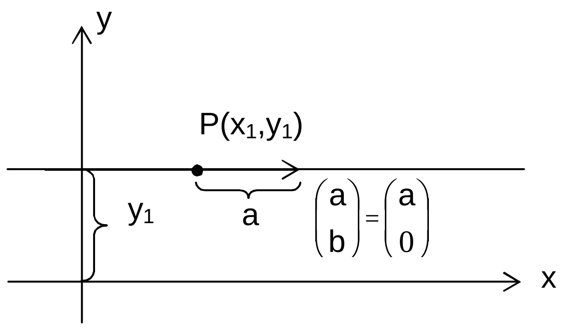
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$$

Bentuk terakhir ini disebut persamaan kanonik garis g dalam R^2. Sedangkan a dan b disebut bilangan-bilangan arah garis itu.

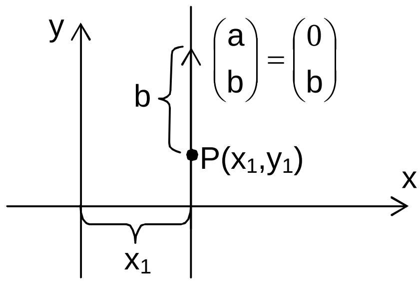
Sekarang perhatikan bahwa apabila:

b=0 $\Rightarrow$ vektor arah $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ merupakan vektor yang sejajar sumbu x.



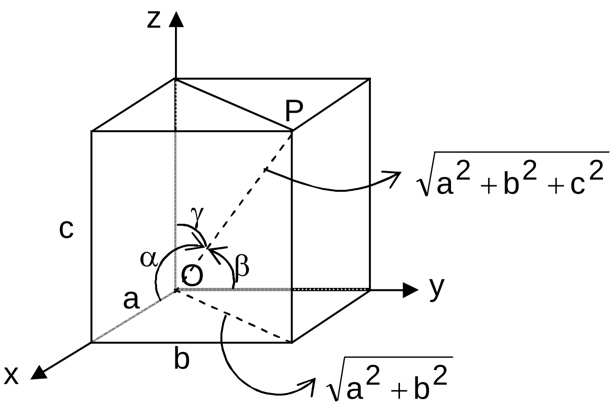
Jika

a = 0 $\Rightarrow$ vektor arah $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ merupakan vektor yang sejajar sumbu y.



Selanjutnya jika λ kita abaikan kita dapat memproses persamaan $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$ sehingga terbentuk Ax + By + C = 0 dengan A = b, B = –a, dan C = –($bx_1 - ay_1$) yang kemudian disebut *persamaan umum garis g.*

Dalam ruang dimensi tiga (R^3), gambaran tentang vektor arah suatu garis adalah seperti berikut.



Misalkan koordinat P(a,b,c), maka $\underline{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ atau dalam notasi baris $\underline{p}$ = (a,b,c). Maka

Vektor $\underline{v} = \underline{p}$ = (a,b,c) disebut *vektor arah garis g* yang melalui titik 0 dan titik P. Sedangkan cosinus-cosinus arahnya adalah:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ ;\ \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ ;\ \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Sehingga : $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = a : b : c$

Selanjutnya a, b, dan c disebut *bilangan-bilangan arah* garis g yaitu bilangan yang sebanding dengan cosinus-cosinus arahnya.

2. Persamaan garis lurus dalam R^3

Perhatikan bahwa garis lurus itu tertentu secara tunggal oleh:

(i) sebuah titik yang dilaluinya

(ii) vektor arahnya

Misalkan titik yang dilalui tersebut adalah A(x_1,y_1,z_1) dan vektor arahnya adalah $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

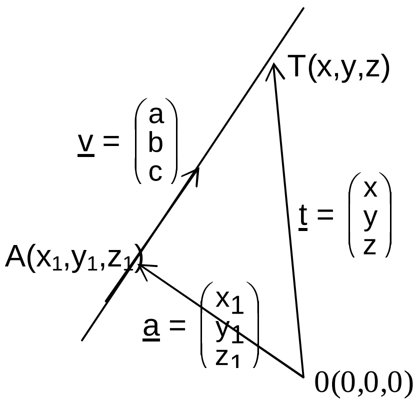
sedangkan T(x,y,z) adalah sembarang titik pada garis g. Maka:

$\overrightarrow{AT} = \lambda\, \underline{v}$: λ suatu parameter dan $\lambda \in R$.

$\Leftrightarrow$ $\underline{t} - \underline{a} = \lambda \underline{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ atau } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ atau } \underline{t} = \underline{a} + \lambda \underline{v}$$

Bentuk ini disebut persamaan vektor suatu garis. Selanjutnya $\underline{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ disebut vektor tumpu dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ disebut vektor arah. Karena $\underline{t} - \underline{a} = \lambda \underline{v}$ maka



$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ $\lambda a = x - x_1$

$\Leftrightarrow$ $\lambda b = y - y_1$

$\Leftrightarrow$ $\lambda c = z - z_1$

$$\lambda = \boxed{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}}$$

Bentuk terakhir yang diberi tanda kotak disebut *Persamaan kanonik* garis lurus. Sedangkan a, b, c disebut *bilangan-bilangan arah* yaitu bilangan yang sebanding dengan cosinus-cosinus arahnya.

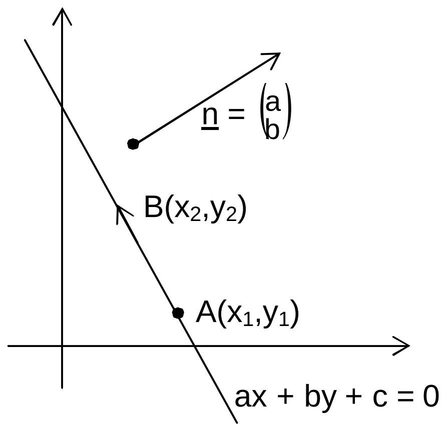
3. Vektor Normal

Vektor normal dari suatu garis ialah vektor yang tegak lurus pada garis itu. Karena syaratnya asal tegak lurus, maka vektor normal itu dapat panjang, dapat pendek, asal bukan vektor nol. Biasanya vektor normal yang dipilih adalah vektor normal yang paling sederhana.

Dalil: $\boxed{\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ tegak lurus garis } ax + by + c = 0}$

Bukti:

Ambilah (tentukan) 2 titik berlainan $A(x_1,y_1)$ dan $B(x_2,y_2)$ pada garis $ax+by+c = 0$



$B(x_2,y_2)$ pada garis $\rightarrow ax_2+by_2+c = 0$

$A(x_1,y_1)$ pada garis $\rightarrow ax_1+by_1+c = 0$ $\quad -$

$$a(x_2-x_1) + b(y_2-y_1) = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

$\underline{n}.\ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = a(x_2-x_1) + b(y_2-y_1) = 0$ … berdasarkan (1)

Karena $\underline{n}.\ \overrightarrow{AB} = 0$ maka terbukti $\underline{n} \perp$ garis $ax + by + c = 0$

Selanjutnya vektor $\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ disebut ***vektor normal*** garis $ax + by + c = 0$

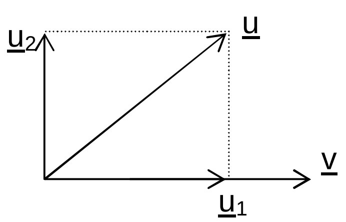
Sejalan dengan itu $\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp$ bidang $ax + by + cz + d = 0$ dalam ruang dimensi tiga (R^3).

4. Proyeksi ortogonal suatu vektor ke vektor lain

Dalil :

Proyeksi vektor $\underline{u}$ ke vektor $\underline{v}$ adalah vektor $\underline{u}_1 = \left(\dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{\lvert\underline{v}\rvert^2} \right) \underline{v}$.   Panjang proyeksi vektor $\underline{u}$ ke vektor $\underline{v}$ adalah $\lvert\underline{u}_1\rvert = \lvert\underline{u}.\underline{e}_v\rvert$; $\underline{e}_v$ adalah vektor satuan ke arah $\underline{v}$.

Bukti:



Dari gambar di samping vektor $\underline{u}_1$ adalah yang dimaksudkan sebagai vektor proyeksi $\underline{u}$ ke $\underline{v}$. Karena $\underline{u}_1$ searah dengan $\underline{v}$ maka $\underline{u}_1$ merupakan kelipatan dari $\underline{v}$ sehingga $\underline{u}_1 = k\underline{v}$ dengan k adalah skalar tertentu.

Perhatikan bahwa: u = $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \rightarrow$: $\underline{u}_2 \;= \underline{u} - \underline{u}_1$

$= \underline{u} - k\underline{v}$ ………..(1)

$u_2 \perp v \rightarrow \underline{u}_2.\underline{v} = 0$

$(\underline{u} - k\underline{v}).\underline{v} = 0$

$\underline{u}.\underline{v} - k\underline{v}.\underline{v} = 0$

$\underline{u}.\underline{v} - k|\underline{v}|^2 = 0 \rightarrow k = \dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{v}|^2}$ …………….(2)

Substitusikan nilai pada (2) ke $\underline{u}_1 = k\underline{v}$ akan diperoleh

$\boxed{\underline{u}_1 = \left(\dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\right)\underline{v}}$ ……. rumus proyeksi vektor $\underline{u}$ ke vektor $\underline{v}$.

$$\underline{u}_1 = \left(\frac{\underline{u}\,.\,\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\right)\underline{v} \rightarrow |\underline{u}_1| = \left|\left(\frac{\underline{u}\,.\,\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\right)\underline{v}\right| = \left|\left(\frac{|\underline{u}\,.\,\underline{v}|}{|\underline{v}|^2}\right)\right||\underline{v}| = \left|\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{v}|}\right| .$$

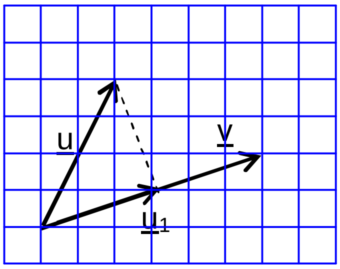
$\therefore$ Panjang vektor proyeksi $\underline{u}$ ke $\underline{v}$ adalah $|\underline{u}_1| = \left|\dfrac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{v}|}\right|$ atau $\boxed{|\underline{u}_1| = \left|\dfrac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{v}|}\right| = |\underline{u}\,.\,\underline{e}_v|}$

$\underline{e}_v$ adalah vektor satuan ke arah vektor $\underline{v}$, yakni $\boxed{\underline{e}_v = \dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|}}$.

Contoh

Tentukan proyeksi vektor $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ke vektor $\underline{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan panjang proyeksi vektor itu!

Jawab:



Proyeksi vektor $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ke $\underline{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ ialah

$$\underline{u}_1 = \left(\frac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\right).\underline{v} = \left(\frac{2 \times 6 + 4 \times 2}{\left(\sqrt{6^2 + 2^2}\right)^2}\right).\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{20}{40}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Konfirmasi bentuk geometrinya dapat dilihat pada gambar. Jika panjang vektor proyeksi itu dihitung dengan rumus, maka:

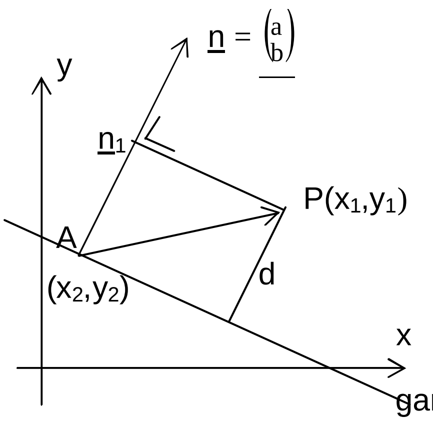
$$|\underline{u}_1| = |\underline{u} \cdot \underline{e}_v| = \left|\frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{v}|}\right| = \left|\frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{6^2 + 2^2}}\right| = \left|\frac{12 + 8}{\sqrt{40}}\right| = \frac{20}{\sqrt{40}} = \frac{20}{40}\sqrt{40}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} = \sqrt{10}$$

4. *Jarak titik ke garis dalam ruang vektor R^2*

Dalil: *Jarak titik P(x_1,y_1)ke garis ax+by+c=0 adalah* $d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

Bukti:



Ambil (tentukan) titik A(x_2,y_2) sembarang titik pada garis ax+bx+c = 0.

Selanjutnya vektor normal $\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dibuat melalui A. A(x_2,y_2) pada garis $\rightarrow$ $ax_2 + by_2 + c = 0$ sehingga $c = -ax_2 - by_2$ ….(1).

d = $|\underline{n}_1|$ adalah panjang proyeksi vektor $\overrightarrow{AP}$ ke vektor normal $\underline{n}$.

Maka d = $\left|\overrightarrow{AP}\,.\,\underline{e_n}\right| = \left|\dfrac{\overrightarrow{AP}\,.\,\underline{n}}{|\underline{n}|}\right| = \left|\dfrac{\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\dfrac{a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2)}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

$= \left|\dfrac{ax_1 + by_1 - ax_2 - by_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$ substitusi dari (1)

$$\boxed{d = \left|\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|}$$

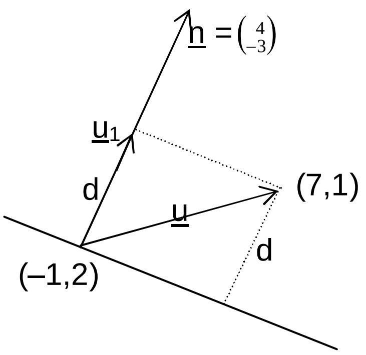
Sejalan dengan itu dapat dibuktikan bahwa pada R^3 jarak titik P(x_1,y_1,z_1) ke bidang ax+by+cz+d = 0 adalah d = $\left|\dfrac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$

Contoh

Tentukan jarak titik (7,1) ke garis 4x – 3y +10 = 0

Jawab

a. *Cara vektor*



g : 4x-3y+10 = 0

Normal garis g : 4x – 3y+10 = 0 adalah $\underline{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Pilih salah satu titik pada garis itu yang berkoordinat bulat, misal (–1,2)

$\underline{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$. Jarak titik ke garis yang dimaksud adalah:

d = $\left|\underline{u}\,.\,\underline{e_n}\right| = \left|\dfrac{\underline{u}\,.\underline{n}}{|\underline{n}|}\right| = \left|\dfrac{\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}\right| = \left|\dfrac{32+3}{5}\right| = \dfrac{35}{5} = 7$

b. *Cara Analitik*

$$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{4(7) - 3(1) + 10}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}\right| = \left|\frac{28 - 3 + 10}{5}\right| = \frac{35}{5} = 7.$$

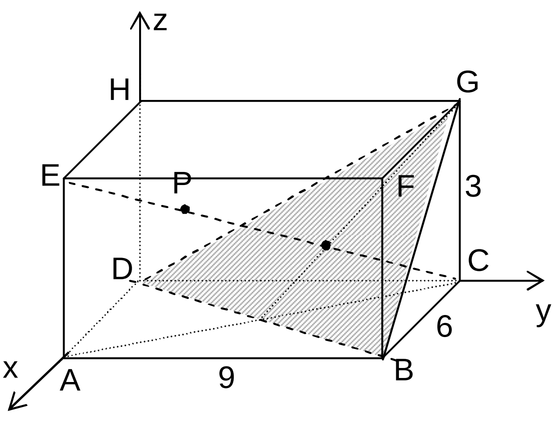
Latihan 1

1. Diketahui titik P(2,–3), Q(3,–1), dan R(4,-2). Tentukan panjang proyeksi vektor $\overrightarrow{PQ}$ ke vektor $\overrightarrow{PR}$!
2. Diketahui $\underline{u}$ = $\underline{i}$–5$\underline{j}$ dan $\underline{v}$ = 8$\underline{i}$+m$\underline{j}$. Jika panjang proyeksi vektor $\underline{u}$ ke $\underline{v}$ adalah $\frac{1}{5}$ dari panjang vektor $\underline{v}$, tentukan m dan proyeksi vektor $\underline{u}$ ke $\underline{v}$!
3. Tentukanlah jarak titik A(2,4) ke garis yang persamaannya 3x–4y–15 = 0 !
4. Tentukan panjang vektor-vektor berikut !

   a. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -2\frac{2}{5} \\ 1\frac{1}{5} \\ 2\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

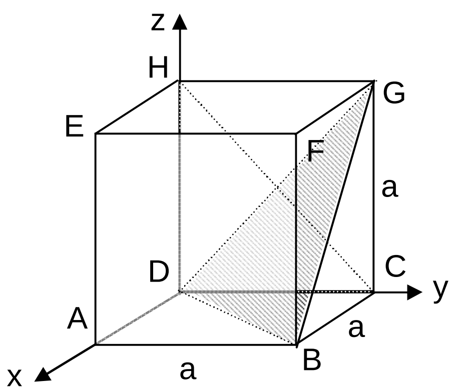
5. Balok ABCD.EFGH dengan AB=9, BC=6. dan CG=3 terletak pada koordinat ruang seperti berikut. Titik P pada rusuk $\overline{CE}$ sehingga CP : CE = 2 : 1



a. Tentukan koordinat titik-titik A, B, C, D, E, F, G, dan H !
b. Tentukan koordinat titik P !
c. Tentukan jarak titik P ke bidang BDG !
d. Sudut antara $\overline{CE}$ dan $\overline{BG}$
e. Jarak 2 garis bersilangan $\overleftrightarrow{CE}$ dan $\overleftrightarrow{BG}$

Petunjuk untuk pertanyaan
d. Sudut antara 2 garis bersilangan = sudut antara vektor-vektor yang mewakilinya (dipilih bagian yang lancip)
e. Tentukan normal bidang α yakni bidang yang melalui titik B dan memuat vektor-vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ dengan $\underline{u} = \overrightarrow{BG}$ dan $\underline{v} = \overrightarrow{CE}$, maka bidang α akan sejajar $\overline{CE}$. Jarak yang dimaksud adalah panjang vektor proyeksi $\overrightarrow{BC}$ ke normal atau $\overrightarrow{BE}$ ke normal (selidiki bahwa keduanya sama).

6. Kubus ABCD.EFGH panjang rusuknya a, terletak pada koordinat ruang seperti berikut. Tentukan



a. koordinat titik-titik A, B, C, D, E, F, G, dan H !
b. sudut antara 2 garis bersilangan $\overleftrightarrow{BG}$ dan $\overleftrightarrow{CH}$!
c. jarak 2 garis bersilangan $\overleftrightarrow{BG}$ dan $\overleftrightarrow{CH}$!
d. luas bidang BDG = …
e. jarak titik E ke bidang BDG = …
f. volum limas E.BDG = …

5. *Cross vektor*

Suatu hal yang hanya berlaku untuk ruang vektor berdimensi tiga R^3 adalah cross vektor (perkalian vektor antara 2 vektor), yakni perkalian antara 2 vektor yang menghasilkan vektor tunggal.

Definisi: (Thomas, 1986 : 727 – 730)

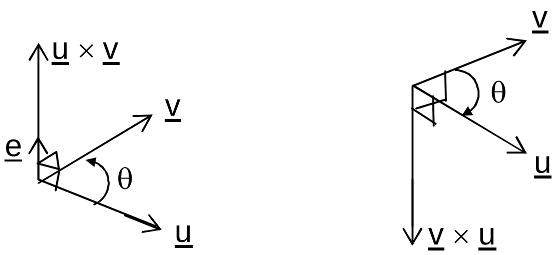
Jika $\underline{u} \neq \underline{0}$ dan $\underline{v} \neq \underline{0}$ dalam ruang dapat diputar tanpa mengubah besar atau arah masing-masing sehingga titik pangkalnya berimpit, dengan kaidah tangan kanan (ulir kanan) didefinisikan bahwa:

$$\boxed{\underline{u} \times \underline{v} = \underline{e}\,|\,\underline{u}\,||\,\underline{v}\,|\sin\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi}$$

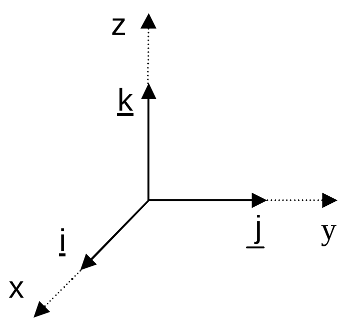
$\underline{e}$ = vektor satuan yang tegak lurus $\underline{u}$ dan $\underline{v}$

$\underline{u} \times \underline{v}$ dibaca "vektor u kros vektor v" atau cukup dengan "u kros v"

Gambar:



Akibat dari definisi tersebut adalah $\underline{u} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{u}$. Akibatnya selanjutnya jika



$\underline{i}$ = vektor satuan arah ke sumbu x

j = vektor satuan arah ke sumbu y

$\underline{k}$ = vektor satuan arah ke sumbu z, maka

$\underline{i} \times \underline{j} = -\underline{j} \times \underline{i} = \underline{k}$

$\underline{j} \times \underline{k} = -\underline{k} \times \underline{j} = \underline{i}$

$\underline{k} \times \underline{i} = -\underline{i} \times \underline{k} = \underline{j}$

$\underline{i} \times \underline{i} = \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} = \underline{0}$

Rumus determinan cross vektor

Jika $\underline{u} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$ dan $\underline{v} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}$, maka

$\underline{u} \times \underline{v} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\underline{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\underline{k}$, atau

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Bukti:

$\underline{u} \times \underline{v} = (a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}) \times (b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k})$

$$= a_1b_1 \underbrace{\underline{i} \times \underline{i}}_{\underline{0}} + a_1b_2\, \underline{i} \times \underline{j} + a_1b_3\, \underline{i} \times \underline{k} + a_2b_1\, \underline{j} \times \underline{i} + a_2b_2 \underbrace{\underline{j} \times \underline{j}}_{\underline{0}} + a_2b_3\, \underline{j} \times \underline{k}$$

$$+ a_3b_1\, \underline{k} \times \underline{i} + {}_3b_2\, \underline{k} \times \underline{j} + a_3b_3 \underbrace{\underline{k} \times \underline{k}}_{\underline{0}}$$

$= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\underline{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\underline{k}$, atau

$$\boxed{\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}$$

Perhatikan bahwa rumus tersebut dalam bentuk vektor kolom adalah:

$$\boxed{\underline{u} \times \underline{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}$$

Untuk memudahkan dalam mendapatkan unsur-unsur hasil kali dalam bentuk vektor kolom tersebut maka tuliskan lagi dua baris pertama dari unsur-unsur vektor yang dikalikan untuk diletakkan pada baris ke empat dan ke lima. Cara membayangkannya lebih lanjut adalah sebagai berikut.

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Keterangan:

1. Tulis ulang elemen-elemen dua baris yang pertama.
2. Nilai komponen vektor yang pertama diperoleh dari determinan komponen-komponen vektor di baris II dan III (yakni dengan menutupi baris I).
3. Nilai komponen vektor yang kedua diperoleh dari determinan komponen-komponen vektor di baris III dan IV (yakni dengan menutupi baris II).
4. Nilai komponen vektor yang ketiga diperoleh dari determinan komponen-komponen vektor di baris IV dan V (yakni dengan menutupi baris III).

Contoh perhitungan:

Hitung $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = ...$

jawab:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Sehingga $\begin{pmatrix} 2 \\ \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ -10 \end{pmatrix}$

Dalam bentuk $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ pengerjaannya adalah seperti berikut

$$\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} = (2\underline{i} + 3\underline{j} + 5\underline{k}) \times (4\underline{i} + \underline{j} + 2\,\underline{k}) = \begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ 2 & 3 & 5\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$= \underline{i}\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix} + (-\underline{j})\begin{vmatrix}2 & 5\\ 4 & 2\end{vmatrix} + \underline{k}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}$$

$$= \underline{i} + 16\underline{j} - 10\underline{k} = \begin{pmatrix}1\\16\\-10\end{pmatrix}$$

Sifat 1

$$\boxed{|\underline{u} \times \underline{v}| = |\underline{u}|\,|\underline{v}| \sin\theta}$$

Bukti

Karena $\underline{u} \times \underline{v} = \underline{e}\,|\,\underline{u}\,|\,\underline{v}\,|\sin\theta\,|$, maka

sin θ selalu positif untuk $0 < \theta \le \pi$
dan $\underline{e}$ vektor satuan, maka
$|\underline{e}| = 1$ dan $|\sin\theta| = \sin\theta$

$$|\underline{u} \times \underline{v}| = |\underline{e}|\,|\underline{u}|\,|\underline{v}| \sin\theta$$

$$= 1\,|u|\,|v| \sin\theta$$

$$= |\underline{u}|\,|\underline{v}| \sin\theta$$

Contoh perhitungan yang mengandung pecahan

Hitunglah $|\underline{u} \times \underline{v}|$ jika $\underline{u} = \begin{pmatrix}2\frac{6}{7}\\ 2\frac{2}{7}\\ 1\frac{1}{7}\end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix}2\frac{1}{7}\\ 2\frac{4}{7}\\ 1\frac{5}{7}\end{pmatrix}$

Jawab:

$$|\underline{u} \times \underline{v}| = \left|\begin{pmatrix}2\frac{6}{7}\\ 2\frac{2}{7}\\ 1\frac{1}{7}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\frac{1}{7}\\ 2\frac{4}{7}\\ 1\frac{5}{7}\end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{7}\begin{pmatrix}20\\16\\8\end{pmatrix} \times \frac{1}{7}\begin{pmatrix}15\\18\\12\end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{7}\times 4\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} \times \frac{1}{7}\times 3\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}\right|$$

$$|\,\underline{u}\times\underline{v}\,| = \frac{12}{49}\left|\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5\\6\\4\end{pmatrix}\right| = \frac{12}{49}\left|\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}4&6\\2&4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2&4\\5&5\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}5&5\\4&6\end{vmatrix}\end{pmatrix}\right| = \frac{12}{49}\left|\begin{pmatrix}4\\-10\\10\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{12}{49}\times 2\left|\begin{pmatrix}2\\-5\\5\end{pmatrix}\right| = \frac{24}{49}\sqrt{2^2+(-5)^2+5^2} = \frac{24}{49}\sqrt{54}$$

$$= \frac{24}{49}\times\sqrt{9\times 6} = \frac{24}{49}\times 3\sqrt{6} = \frac{72}{49}\sqrt{6}\,.$$

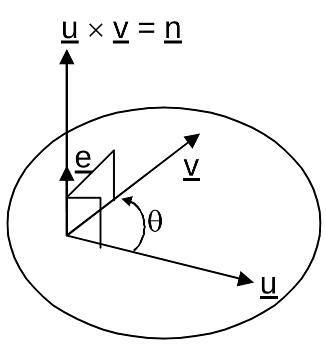
B. Aplikasi Vektor

1. *Bidang dalam ruang dimensi tiga (R^3)*

Dalam ruang R^3 pengertian bidang adalah datar, tak punya ketebalan, dan luasnya tak terbatas. Pada topik vektor suatu bidang tertentu secara tunggal oleh vektor normalnya dan sebuah titik yang dilalui oleh bidang itu.

a. *Normal bidang*

Normal bidang atau secara lengkap disebut vektor normal suatu bidang ialah sembarang vektor yang tegak lurus pada bidang itu. Bila suatu vektor tegak lurus suatu bidang maka vektor itu tegak lurus pada setiap vektor yang terletak pada bidang.



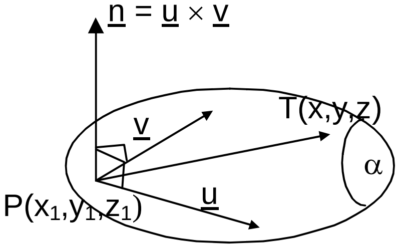
Karena didefinisikan bahwa $\underline{u}\times\underline{v} = \underline{e}\,|\underline{u}||\underline{v}|\sin\theta$, dengan $\underline{e}$ adalah vektor satuan yang tegak lurus $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ sedang θ merupakan sudut dari $\underline{u}$ dan $\underline{v}$, maka $\underline{e}$ juga merupakan vektor normal. Karena $\underline{u}\times\underline{v}$ searah $\underline{e}$ maka

$\underline{u}\times\underline{v} \perp \underline{u}$ dan $\underline{u}\times\underline{v} \perp \underline{v}$.

sehingga: $\boxed{\underline{n} = \underline{u}\times\underline{v} \text{ adalah vektor normal bidang yang melalui } \underline{u} \text{ dan } \underline{v}}$

b. *Persamaan bidang*

Jika vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ diketahui, dan bidang yang dimaksud diketahui melalui titik tertentu $P(x_1,y_1,z_1)$ maka persamaan bidang yang melalui kedua vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ itu dapat ditentukan. Caranya:



Jika $T(x,y,z)$ adalah sembarang titik pada bidang, pastilah $\overrightarrow{PT} \perp \underline{n}$. Sehingga persamaan vektor bidang itu adalah

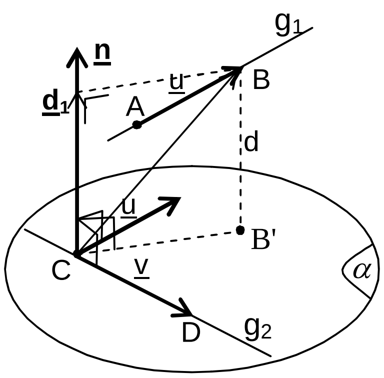
$$\boxed{\underline{n} \cdot \overrightarrow{PT} = 0 \text{ dengan } \underline{n} = \underline{u} \times \underline{v}}$$

Jika persamaan bidang dalam bentuk vektor ini dijabarkan lebih lanjut akan diperoleh bentuk umum persamaan bidang berbentuk

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

c. *Jarak dua garis bersilangan*

Jika v_1 dan v_2 masing-masing adalah vektor arah dua garis bersilangan g_1 dan g_2.



Maka jarak antara kedua garis bersilangan g_1 dan g_2 sama dengan jarak salah satu titik pada garis g_1 ke bidang α yang melaui garis g_2 dan sejajar g_1. Jika jarak yang dimaksud adalah d, maka d adalah salah satu dari harga mutlak **proyeksi** $\overrightarrow{CB}$ ke $\underline{n}$, atau $\overrightarrow{CA}$ ke $\underline{n}$, atau $\overrightarrow{DA}$ ke $\underline{n}$ atau $\overrightarrow{DB}$ ke $\underline{n}$, yaitu:

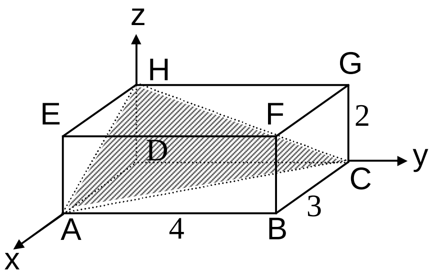
$$d = \left|\text{proyeksi } \overrightarrow{CB} \text{ ke } \underline{n}\right| = \left|\overrightarrow{CB} \cdot \underline{e}_n\right|, \text{ atau}$$

$$= \left|\text{proyeksi } \overrightarrow{CA} \text{ ke } \underline{n}\right|, \text{ atau}$$

$$= \left|\text{proyeksi } \overrightarrow{DA} \text{ ke } \underline{n}\right|, \text{ atau}$$

$$= \left|\text{proyeksi } \overrightarrow{DB} \text{ ke } \underline{n}\right|$$

Contoh



Dari balok ABCD.EFGH yang digambar pada koordinat ruang seperti gambar disamping (AB = 4, BC = 3, CG = 2).

Tentukan:

a. normal bidang ACH

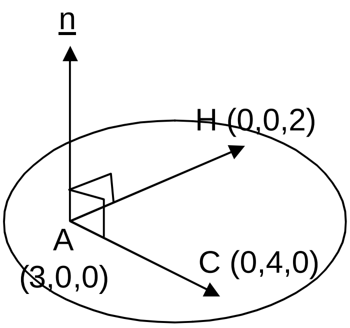
b. persamaan bidang ACH

c. jarak dua garis bersilangan $\overleftrightarrow{HC}$ dan $\overleftrightarrow{BG}$.

Jawab

Dari gambar yang diketahui mudah ditentukan bahwa koordinat titik A(3,0,0), C(0,4,0), dan H(0, 0, 2)

a. Normal bidang ACH adalah



$\underline{n} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AH}$

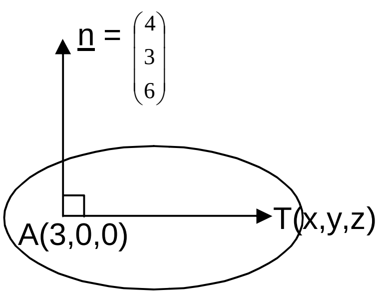
$= (\underline{c} - \underline{a}) \times (\underline{h} - \underline{a})$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Normal bidang kita pilih bentuk yang paling sederhana, sehingga normal bidang ACH adalah $\underline{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

b. Persamaan bidang ACH dicari berdasar data-data seperti yang digambarkan berikut.

Jika T(x,y,z) sembarang titik pada bidang maka $\overrightarrow{AT} \perp \underline{n}$ sehingga



$\underline{n} \,.\, \overrightarrow{AT} = 0$

$\underline{n} \,.\, (\underline{t} - \underline{a}) = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x-3 \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

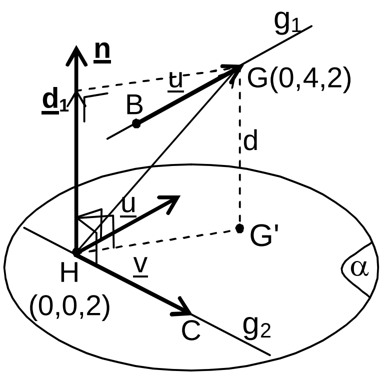
4(x – 3) + 3y + 6z = 0, sehingga persamaan bidang ACH yang dimaksud adalah 4x + 3y + 6z – 12 = 0.

c. Jarak dua garis bersilangan $\overleftrightarrow{HC}$ *dan* $\overleftrightarrow{BG}$*.*

Selidiki bahwa

$$\underline{u} = \overrightarrow{BG} = \underline{g} - \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \underline{v} = \overrightarrow{HC} = \underline{c} - \underline{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Normal bidang α yang memuat vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ dan berimpit pangkalnya pada pangkal vektor $\underline{v}$ adalah



$$\underline{n}_1 = \underline{u} \times \underline{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$= -2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ pilih yang sederhana, maka } \underline{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Sedangkan $\overrightarrow{CG} = \underline{g} - \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Jarak 2 garis bersilangan $\overleftrightarrow{BG}$ dan $\overleftrightarrow{CE}$ adalah panjang vektor proyeksi $\overrightarrow{CG}$ ke $\underline{n}$, yakni

$$d = |\overrightarrow{CG} \cdot \underline{e}_n| = \left|\overrightarrow{CG} \cdot \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|}\right|$$

$$= \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right|} \right| = \left| \frac{12}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 6^2}} \right| = \frac{12}{\sqrt{61}} = \frac{12}{61}\sqrt{61}.$$

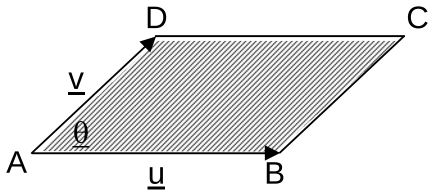
2. *Perhitungan luas dan volum*

Perhitungan luas dan volum yang akan dibahas dalam hal ini adalah luas jajargenjang, luas segitiga, volum paralel epipedum dan volum limas segitiga. Dalam pendekatan vektor topik-topik ini terkait erat dengan dot dan cross vektor.

a. *Luas jajargenjang dan luas segitiga*

Jajargenjang adalah segiempat yang sepasang sisi berhadapannya sama dan sejajar.

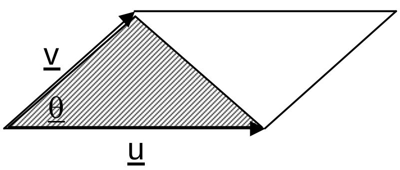
Luas jajargenjang ABCD dengan $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, dan $\theta = \angle BAD$ adalah



$L = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\sin\theta = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$

$\boxed{\text{Jadi } L_{▱} = |\underline{u} \times \underline{v}|}$

Karena segitiga tertentu secara tunggal oleh vektor-vektor $\underline{u}$, $\underline{v}$, dan sudut antara kedua vektor itu (θ) maka



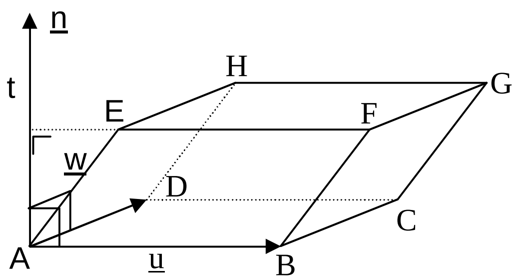
$L\,\Delta = \frac{1}{2} L_{▱}$

atau

$\boxed{L\,\Delta = \frac{1}{2}|\,\underline{u} \times \underline{v}\,|}$

b. *Volum paralel edipedum*

Paralel epipedum ialah benda ruang berisi enam dengan sisi-sisi sejajarnya kongruen dan masing-masing berbentuk jajargenjang.



Untuk paralel epipedum ABCD. EFGH seperti di atas volumnya:

V = Luas alas × tinggi

$= \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| . \left|\text{proyeksi } \overrightarrow{AE} \text{ ke normal}\right|$

$= \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| . \left|\text{proyeksi } \overrightarrow{AE} \text{ ke } \underline{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$

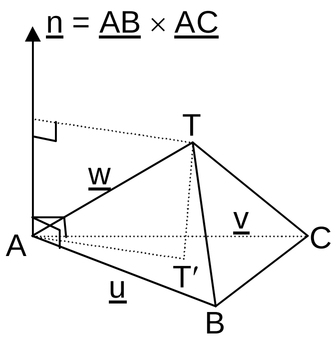
$= \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right)\right| . \left|\overrightarrow{AE} . \dfrac{\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right)}{\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right)\right|}\right| = \left|\overrightarrow{AE} . \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right)\right|$

Jika $\overrightarrow{AB} = \underline{u}, \overrightarrow{AD} = \underline{v}$ dan $\overrightarrow{AE} = \underline{w}$ maka volum ABCD.EFGH ialah V = $|\underline{w}.(\underline{u} \times \underline{v})|$.

Selidikilah bahwa volum V dapat pula dinyatakan dengan rumus V = $|\ \underline{u}.(\underline{v} \times \underline{w})\ |$ atau V = $|\ \underline{v} \cdot (\underline{u} \times \underline{w}\ |$.

c. Volum Limas Segitiga (Volum Bidang Empat)

Bidang empat ialah benda ruang yang dibatasi oleh permukaan-permukaan (sisi) berbentuk segitiga.



Misalkan bidang empat yang dimaksud adalah T.ABC, maka vektor normal dari bidang alas ABC ialah $\underline{n}$ = $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Tinggi bidang empat (yaitu TT′) panjangnya sama dengan panjang proyeksi vektor $\overrightarrow{AT}$ ke $\underline{n}$. Karena volum bidang empat = $\frac{1}{3}$ luas alas × tinggi, maka:

$$V = \frac{1}{3}\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|\left|\text{proyeksi } \overrightarrow{AT} \text{ ke } \underline{n}\right|, \text{ dengan } \underline{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

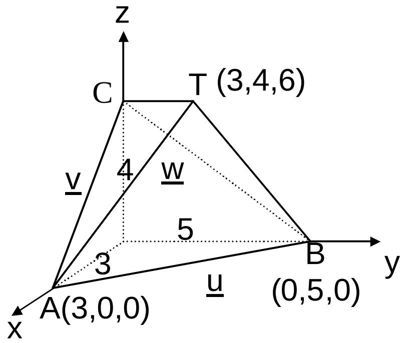
$$= \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AT} . \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AT} . \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right)\right|$$

$\boxed{V = \frac{1}{6}\left|\underline{w} . (\underline{u} \times \underline{v})\right|}$ yakni $\frac{1}{6}$ dari volum paralel epipedum.

Contoh

Tentukan volum bidang empat T.ABC jika T(3, 4, 6), A(3, 0, 0), B(0, 5, 0) dan C(0, 0, 4).



Misalkan $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{v} = \overrightarrow{AC}$ dan $\underline{w} = \overrightarrow{AT}$

Maka $\underline{u} = \underline{b} - \underline{a} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad \underline{w} = \underline{t} - \underline{a} = \begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\6\end{pmatrix}$

$\underline{v} = \underline{c} - \underline{a} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}$ $\quad \underline{u} \times \underline{v} = \begin{pmatrix}-3\\5\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\12\\15\end{pmatrix}$ sehingga volum

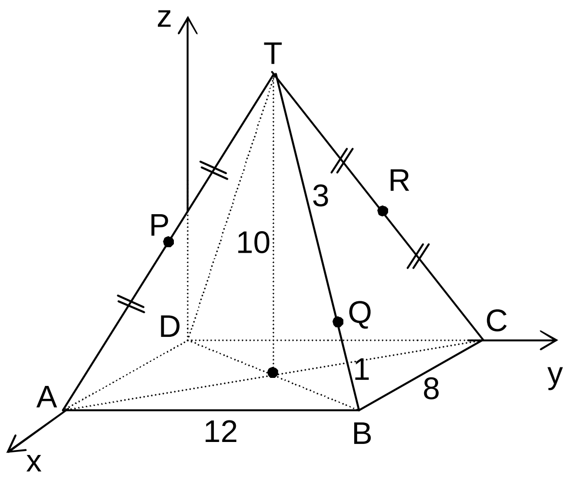
T.ABC yang dimaksud adalah

$$\text{Volum V} = \frac{1}{6}|\underline{w}.(\underline{u} \times \underline{v}| = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\4\\6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}20\\12\\15\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}|0 \times 20 + 4 \times 12 + 6 \times 15| = \frac{1}{6} \times |138| = 23.$$

3. *Perhitungan koordinat titik potong, luas, dan volum pada irisan antara bidang dan bangun ruang*

Contoh

Diketahui limas segiempat tegak T.ABCD terletak pada ruang R^3 (lihat gambar di bawah). Alas ABCD berupa persegipanjang dengan ukuran rusuk alas 12 cm dan 8 cm sedangkan tinggi limas 10 cm. Titik P pada pertengahan rusuk $\overline{TA}$, Q pada $\overline{TB}$ sehingga TQ:QB = 3:1, sedang titik R pada pertengahan rusuk $\overline{TC}$.

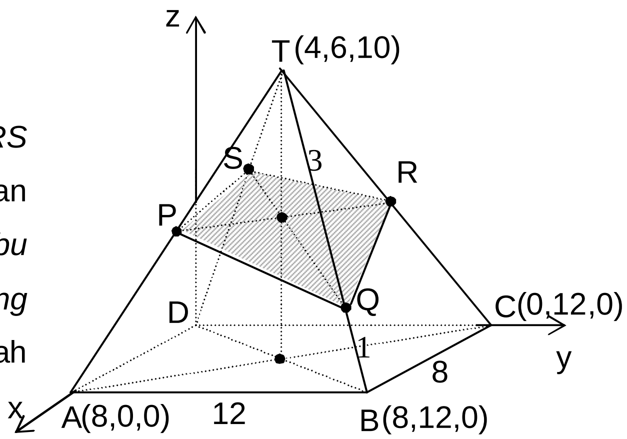


Pertanyaan

a. Lukislah irisan antara bidang PQR dengan limas !
b. Tentukan koordinat titik-titik A, B, C, D, T, P, Q, dan R !
c. Jika S adalah titik potong rusuk $\overline{DT}$ dengan bidang irisan, tentukan koordinat titik S !
d. Tentukan dan hitung luas bidang irisan (bidang PQRS) !
e. Tentukan dan hitung jarak titik T ke bidang irisan dan volum limas yang berada di atas bidang irisan !

Jawab

a. *Melukis irisan antara bidang PQRS dengan limas* dapat dilakukan dengan 2 cara, yaitu *menggunakan sumbu afinitas* atau *menggunakan titik potong diagonal*. Salah satu hasilnya adalah seperti gambar di samping.

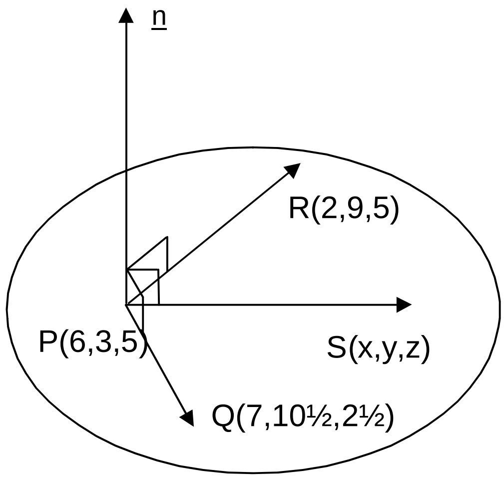


b. *Koordinat-koordinat titik A, B, C, D, dan T* dapat ditentukan secara langsung dengan membayangkan nilai masing-masing komponennya. Misal untuk titik A, komponen x untuk titik A adalah DA=8, komponen y untuk titik A adalah DD=0, dan komponen z nya adalah DD=0. Dengan begitu maka koordinat ruang untuk titik A adalah (8,0,0). Sementara itu titik P, Q, dan R menggunakan rumus $\frac{m\underline{a}+n\underline{b}}{m+n}$. Hasil selengkapnya yang diharapkan adalah A(8,0,0), B(8,12,0), C(0,12,0), D(0,0,0), T(4,,6,10), P(6,3,5), Q$\left(\frac{28}{4}, \frac{42}{4}, \frac{10}{4}\right) = \left(7, 10\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$, dan R(2,9,5).

c. *Titik potong rusuk* $\overline{\text{TD}}$ *dengan bidang irisan*

Untuk menentukan koordinat titik potong rusuk $\overline{\text{TD}}$ dengan bidang irisan yakni titik S dilakukan dengan cara menentukan persamaan garis $\overleftrightarrow{\text{TD}}$ dan persamaan bidang PQR kemudian mensubstitusikannya. Titik potong dapat ditentukan dengan cara:

(1) S(x,y,z) pada $\overline{\text{DT}}$ maka $\overrightarrow{\text{DS}} = \lambda\overrightarrow{\text{DT}}$ sehingga



$$\underline{s} - \underline{d} = \lambda(\underline{t} - \underline{d})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

maka x = 4λ, y = 6λ, dan z = 10λ adalah persamaan garis $\overleftrightarrow{\text{TD}}$ yang dimaksud.

$n_1 = \overrightarrow{\text{PQ}} \times \overrightarrow{\text{PR}} = (\underline{q} - \underline{p}) \times (\underline{r} - \underline{p})$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 7\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix} \times 2\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 36 \end{pmatrix}$$

(2) Normal bidang PQR dipilih bentuk sederhananya, sehingga yang dimaksud dengan $\underline{n}$ adalah $\underline{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ -36 \end{pmatrix}$.

S(x,y,z) pada bidang PQR maka $\overrightarrow{\text{PS}} \perp \underline{n}$, akibatnya $\underline{n} \cdot \overrightarrow{\text{PS}} = 0$.

$$\begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ 36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-6 \\ y-3 \\ z-5 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -15(x-6)-10(y-3)+36(z-5) = 0$$

$$-15x+90-10y+30+36z-180 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 15x + 10y - 36z + 60 = 0$$

(adalah persamaan bidang irisan)

Substitusikan persamaan garis DT: x = 4λ, y = 6λ, z = 10λ ke bidang irisan:

$15(4\lambda)+10(6\lambda)-36(10\lambda)+60 = 0$ akan diperoleh

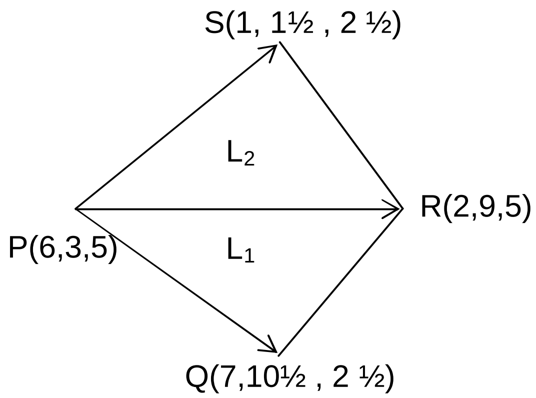
$60\lambda+60\lambda-360\lambda+60 = 0$

$-240\lambda = -60$

$\lambda = \frac{1}{4}$

Dengan begitu maka S(x,y,z) = (4λ , 6λ , 10λ) = $\left(\frac{4}{4}, \frac{6}{4}, \frac{10}{4}\right) = \left(1, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$

d. *Luas bidang irisan PQRS* dapat kita pisahkan menjadi L_1 dan L_2



$$\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7\frac{1}{2} \\ -2\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 15 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PR} = \underline{r} - \underline{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PS} = \underline{s} - \underline{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1\frac{1}{2} \\ -2\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\15\\-5\end{pmatrix}\times 2\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}2\\15\\-5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}15\\10\\36\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{15^2+10^2+36^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1621}$$

$$L_2 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PS}\right| = \frac{1}{2}\left|2\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}\times -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}10\\3\\5\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}10\\3\\5\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}15\\10\\36\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{15^2+10^2+36^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1621}$$

Maka $L_1 + L_2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1621} = \sqrt{1621}$ atau $L_{PQRS} = \sqrt{1621}$.

e. *Jarak titik T ke bidang irisan*

Cara 1

d = |proyeksi $\overrightarrow{ST}$ ke normal bidang irisan|

$$= \left|\overrightarrow{ST}\cdot \underline{e}_n\right| = \left|\frac{\overrightarrow{ST}\cdot n}{|n|}\right| \text{ dengan } \overrightarrow{ST} = \underline{t} - \underline{s} = \begin{pmatrix}4\\6\\10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\frac{1}{2}\\2\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\frac{1}{2}\\7\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\9\\15\end{pmatrix}$$

$$= \left|\frac{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6\\9\\15\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}15\\10\\-36\end{pmatrix}}{\sqrt{15^2+10^2+(-36)^2}}\right| = \frac{\frac{3}{2}\left|\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}15\\10\\-36\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1621}} = \frac{\frac{3}{2}\left|(30+30-180)\right|}{\sqrt{1621}} = \frac{180}{\sqrt{1621}}$$

cara 2

$$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right| \text{ dengan } T(4,6,10) \text{ ke } 15x + 10y - 36z + 60 = 0$$

$$= \left|\frac{15(4) + 10(6) - 36(10) + 60}{\sqrt{15^2 + 10^2 + (-36)^2}}\right| = \frac{180}{\sqrt{1621}}.$$

Dengan begitu maka volum limas bagian atas yang dimaksud adalah:

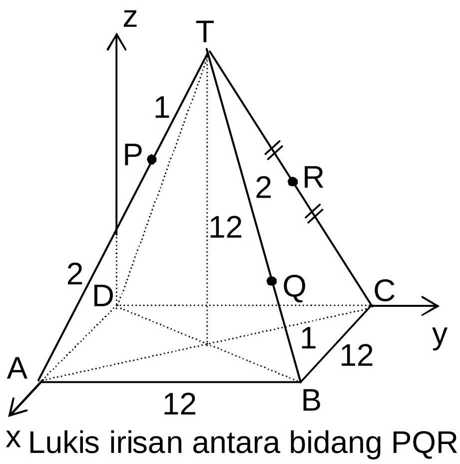
$$V = \frac{1}{3} \times L_{alas} \times \text{tinggi}, \text{ tingginya } t = d = \frac{180}{\sqrt{1621}}$$

$$= \frac{1}{3} \times L_{PQRS} \times \text{tinggi}$$

$$= \frac{1}{3} \times \sqrt{1621} \times \frac{180}{\sqrt{1621}} = 60 \text{ cm}^3$$

Jadi volum bagian atas bangun irisan tersebut adalah 60 cm^3.

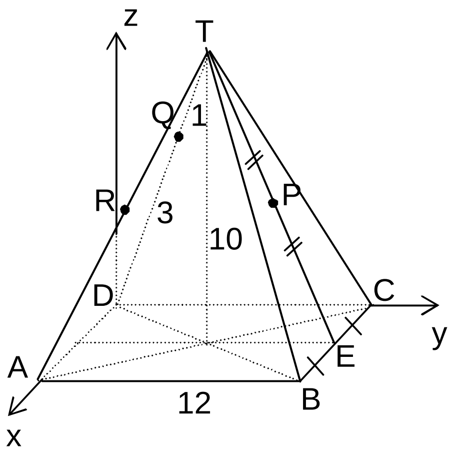
Latihan 2 (pengayaan)

1. 

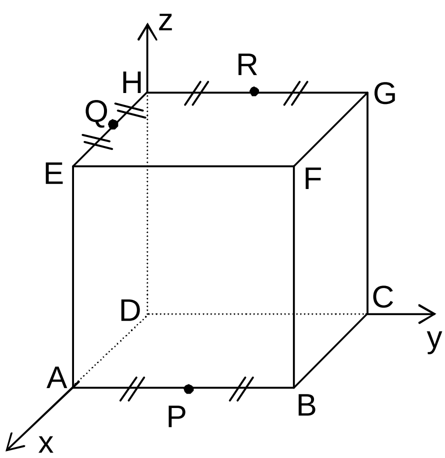
Diketahui limas segiempat beraturan T.ABCD panjang rusuk alas dan tingginya masing-masing 12 cm. Titik P pada $\overline{TA}$ sehingga TP:PA = 1:2. Titik Q pada $\overline{TB}$ sehingga TQ:TB = 2:1. Titik R pada pertengahan $\overline{TC}$.

a. Lukis irisan antara bidang PQR dengan limas !
b. Tentukan koordinat dari titik-titik A, B, C, D, T, P, Q, dan R !
c. Tentukan persamaan bidang irisan !
d. Jika PQRS dengan S adalah titik potong antara rusuk TD dan bidang PQR, tentukan koordinat titik S !
e. Hitung luas bidang irisan (bidang PQRS) !
f. Hitung jarak titik T ke bidang irisan !
g. Hitung volum limas yang ada di atas bidang irisan !

2. Diketahui limas segiempat tegak T.ABCD terletak pada ruang R^3 (lihat gambar). Alas ABCD berupa persegi panjang dengan ukuran rusuk alas 12 cm dan 8 cm. Tinggi limas 10 cm. Titik E pada pertengahan rusuk $\overline{BC}$ dan titik P pada pertengahan $\overline{TE}$. Sementara itu titik Q pada $\overline{TD}$ dengan TQ : QD = 1 : 3 dan R pada pertengahan $\overline{TA}$.

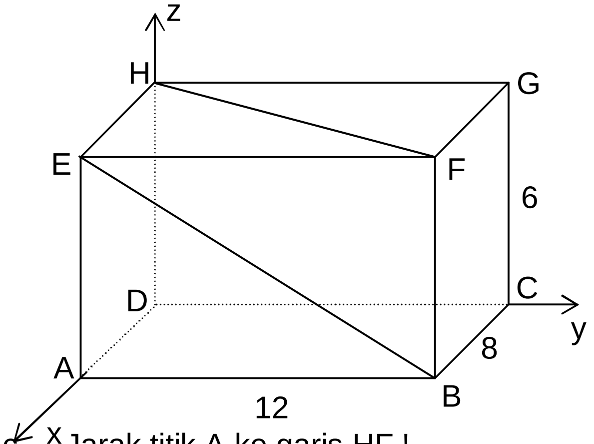


a. Lukis irisan antara bidang PQR dengan limas !
b. Tentukan koordinat dari titik-titik A, B, C, D, T, P, Q, dan R !
c. Tentukan persamaan bidang irisan !
d. Jika S dan U berturut-turut adalah titik potong bidang irisan dengan rusuk $\overline{TB}$ dan $\overline{TC}$, tentukan koordinat titik S dan koordinat titik U !
e. Hitung luas bidang irisan !
f. Hitung jarak titik T ke bidang irisan
g. Hitung volum limas yang ada di atas bidang irisan !

3. 

Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 6 cm terletak pada koordinat ruang R^3 seperti gambar. Titik P, Q, dan R berturut-turut terletak pada pertengahan rusuk-rusuk $\overline{AB}, \overline{EH}$, dan $\overline{HG}$. Lukis irisan bidang PQR dengan kubus !

a. Tentukan luas bidang irisan !
b. Tentukan jarak titik F ke bidang irisan !
c. Tentukan volum limas yang puncaknya di titik F dan alasnya di bidang irisan !

4. 

Diketahui balok ABCD.EFGH terletak pada koordinat ruang R^3 seperti gambar. AB=12, BC=8, dan CG=6. Tentukan

a. Sudut yang dibentuk oleh ruas garis BE dan HF !

b. Jarak 2 garis bersilangan BE dan HF !

c. Jarak titik A ke garis HF !

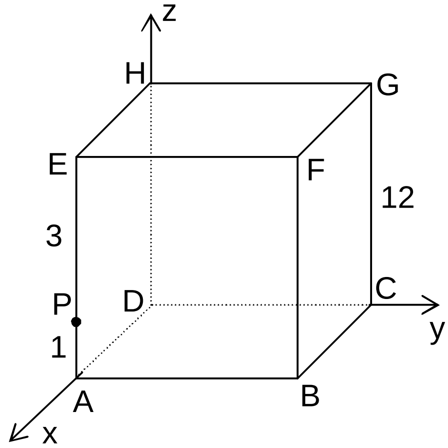
d. Volum bidang empat F.BGE !

5. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 12 cm terletak pada koordinat ruang R^3. Titik P pada AE sehingga AP : PE = 1:3.

a. Lukis irisan bidang BPH dengan kubus, tentukan pula persamaan bidang irisannya itu !

b. Jika Q adalah titik potong bidang irisan dengan rusuk kubus, tentukan koordinat titik Q !

c. Hitung luas bidang irisan dan volum limas yang puncaknya di titik F dan alasnya di bidang irisan !



C. Rangkuman

1. Vektor dan skalar

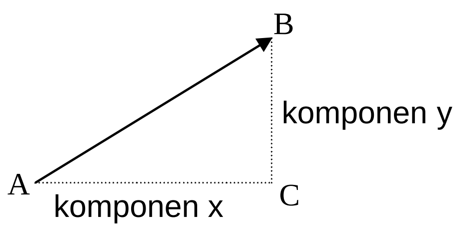
Vektor adalah **besaran** yang **mempunyai besar** dan **arah**, **besar** yang dimaksud adalah **panjang vektor** dan **arah** yang dimaksud adalah **sudut yang dibentuknya dengan sumbu mendatar** (sumbu x positif).

Skalar adalah besaran yang hanya memperhatikan besarnya saja. Sebagai contoh misalnya kelipatan, nilai sinus, cosinus suatu sudut, dan sejenisnya.

2. Lambang, komponen vektor, dan panjang vektor

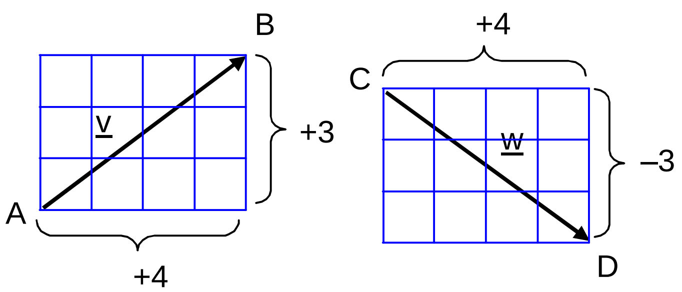
Dalam matematika, besaran suatu vektor ditentukan oleh komponen-komponennya: komponen x, komponen y, dan komponen z untuk ruang vektor berdimensi tiga (R^3) dan komponen x dan komponen y saja untuk ruang vektor berdimensi dua (R^2).

Vektor pada buku-buku rujukan umumnya dilambangkan dengan huruf kecil cetak tebal, tetapi dalam modul ini penulis menggunakan huruf kecil yang diberi tanda strip di bawahnya. Tujuannya agar penulisannya sesuai dengan yang dituliskan guru dalam menyampaikan proses pembelajarannya.



Jika vektor $\underline{v}$ bertitik pangkal di A dan bertitik ujung di B maka penulisannya adalah $\underline{v} = \overrightarrow{AB}$.
AC disebut komponen x / komponen mendatar
CB disebut komponen y / komponen vertikal.
Komponen x bertanda positif jika arahnya ke kanan dan bertanda negatif jika arahnya ke kiri.

Komponen y bertanda positif jika arahnya ke atas dan bertanda negatif jika arahnya ke bawah. Vektor-vektor $\underline{v}$ dan $\underline{w}$ di bawah ini ditulis sebagai berikut.

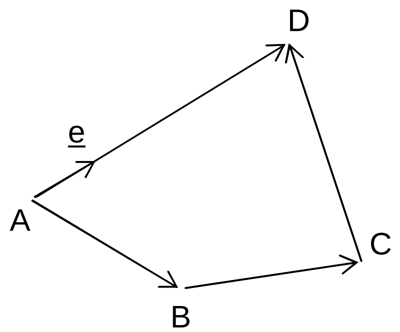


$\underline{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\underline{w} = \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Panjang vektor $\underline{v}$ = $\overrightarrow{AB}$ ditulis dengan notasi harga mutlak, yaitu $|\underline{v}|$ atau $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ yang masing-masing dibaca **panjang vektor v** atau **modulus vektor v** atau **harga mutlak vektor v**, boleh pula dibaca panjang vektor AB atau harga mutlak AB. Pada contoh di atas panjang vektor $\underline{v}$ dan panjang vektor $\underline{w}$ masing-masing adalah $|\underline{v}| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25}$ = 5, $|\underline{w}| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25}$ = 5.

3. *Vektor nol dan vektor satuan*

Vektor nol ialah vektor yang pangkalnya di suatu titik dan ujungnya di titik itu (vektor yang ujung dan titik pangkalnya berimpit)



$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

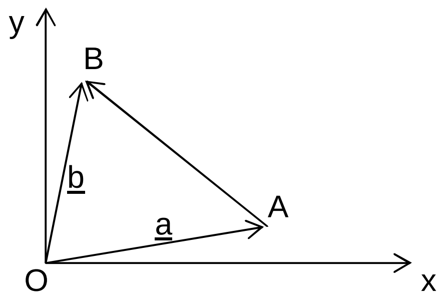
$\underline{0}$ = $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{DD}$, atau

$\underline{0}$ = $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$

vektor satuan $\underline{e}$ adalah vektor yang panjangnya 1 satuan. Vektor satuan pada arah $\overrightarrow{AD}$ ditulis $\boxed{e_{\overrightarrow{AD}} = \underline{e} = \dfrac{\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|}}$

4. *Vektor Posisi*

Vektor posisi suatu titik adalah vektor yang pangkalnya di titik pangkal koordinat dan ujungnua berada di titik itu. Vektor posisi titik A biasanya dilambangkan dengan $\underline{a}$.



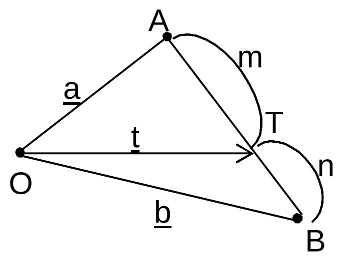
Vektor posisi titik A adalah $\underline{a}$.

Vektor posisi titik B adalah $\underline{b}$.

Sifat utamanya

Vektor $\boxed{\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}}$

5. Vektor Posisi titik pembagi ruas garis

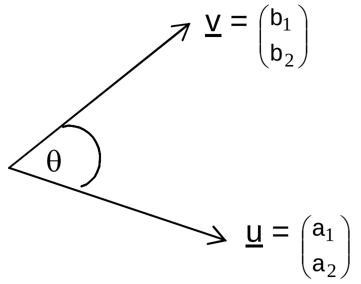


Jika T pada AB dengan AT:TB = m:n

maka vektor posisi titik C adalah

$$\boxed{\underline{t} = \frac{n\underline{a} + m\underline{b}}{(m+n)}}$$

6. Dot vektor (perkalian skalar antara dua vektor)



Didefinisikan $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}| \cos\theta$

Jika $\underline{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

maka

$$\boxed{\underline{u} \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2}$$

Jika $\underline{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ maka $\boxed{\underline{u} \cdot \underline{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$

Sifat-sifat dot vektor

$\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$

$\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2$ akibatnya panjang vektor $\underline{v}$ adalah $|\underline{v}| = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}}$

Jika $\underline{u} \perp \underline{v}$ maka $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ (skalar)

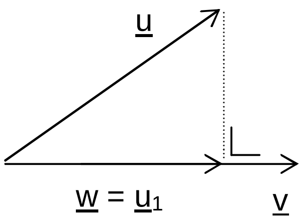
$\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$

Kegunaan

Kegunaan/terapan utama dari dot vektor adalah untuk menentukan sudut antara 2 garis sembarang yang diwakili oleh masing-masing vektor komponennya (disebut vektor arah garis itu)

7. *Proyeksi orthogonal suatu vektor ke vektor lain*

Proyeksi orthogonal vektor $\underline{u}$ ke vektor $\underline{v}$ adalah vektor $\underline{w}$ ditulis $\underline{w}$ = proyeksi $\underline{u}$ ke $\underline{v}$ maka



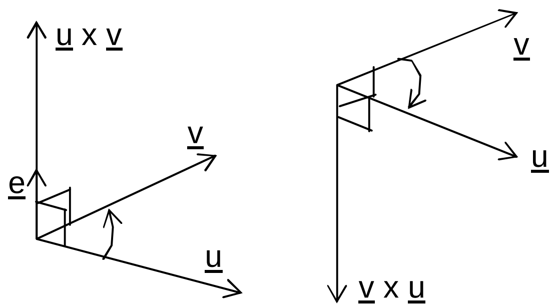
1. proyeksi vektor $\underline{u}$ adalah $\underline{u}_1 = \left(\dfrac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\right)\cdot\underline{v}$
2. panjang proyeksi vektor $\underline{u}$ ke $\underline{v}$ adalah

$$|\underline{u}_1| = |\text{proy } \underline{u} \text{ ke } \underline{v}| = |\underline{u}\cdot\underline{e}_v| = \left|\underline{u}\cdot\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}\right|$$

Kegunaan

Kegunaan utama rumus panjang vektor proyeksi adalah untuk menurunkan rumus jarak titik ke garis dalam R^2 dan jarak titik ke bidang dalam R^3.

8. *Kross vektor/perkalian silang (perkalian vektor antara dua vektor)*



Didefinisikan untuk $\underline{u}$ dan $\underline{v} \in R^3$ $\underline{u} \times \underline{v} = \underline{e}|\underline{u}||\underline{v}|\sin\theta$, $0 \le \theta \le \pi$, dengan $\underline{e}$ adalah vektor satuan yang tegak lurus vektor $\underline{u}$ dan vektor $\underline{v}$ dengan kaidah ulir kanan.

Akibat dari definisi itu:

a. $\underline{u} \times \underline{v}$ = adalah vektor yang tegak lurus $\underline{u}$ dan tegak lurus $\underline{v}$ dan $\underline{u} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{u}$

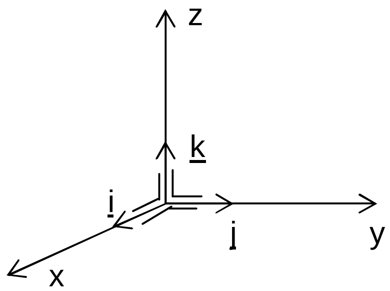
b. Jika $\underline{I}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ masing-masing adalah vektor satuan ke arah sumbu x, sumbu y, dan sumbu z, maka:

$\underline{i} \times \underline{j} = -\underline{j} \times \underline{I} = \underline{k}$

$\underline{i} \times \underline{k} = -\underline{k} \times \underline{j} = \underline{i}$

$\underline{k} \times \underline{i} = -\underline{i} \times \underline{k} = \underline{j}$

$\underline{i} \times \underline{i} = \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} = 0$



Akibat berikutnya jika

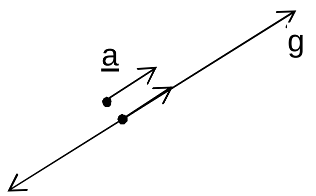
$\underline{u} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, maka

$$\underline{u} \times \underline{v} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\underline{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\underline{k} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

atau dalam bentuk vektor kolom

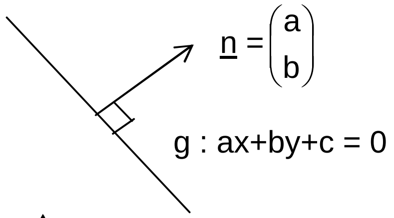
$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

9. *Vektor arah dan vektor normal*

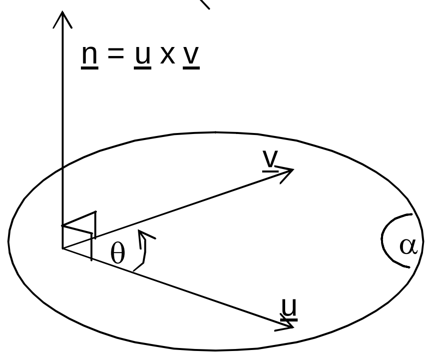


Vektor $\underline{a}$ yang sejajar garis g atau terletak pada garis g disebut vektor arah garis g. Maka

$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dalam R^2 dan $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dalam R^3



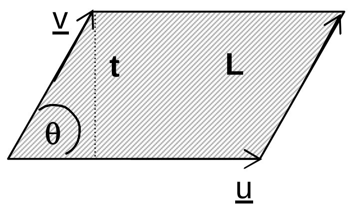
Vektor normal garis g : ax+by+c = 0 adalah n = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.



Vektor normal bidang α adalah $\underline{n} = \underline{u} \times \underline{v}$.

Jika α : ax+by+cz+d = 0, maka Vektor normal bidang itu adalah $\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

10. *Luas dan volum*

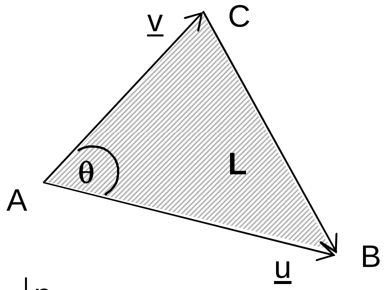


Luas jajargenjang yang dibentuk oleh vektor $\underline{u}$ dan vektor $\underline{v}$ adalah

L = alas × tinggi

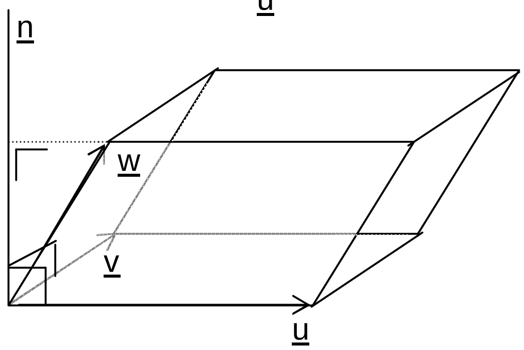
$= |\underline{u}| \times |\underline{v} \sin\theta| = |\underline{u}||\underline{v}| \sin\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$

L▱ = $|\underline{u} \times \underline{v}|$, sebab sin θ selalu positif.



Karena daerah segitiga tepat merupakan ½ dari daerah jajargenjang maka luas segitiga adalah:

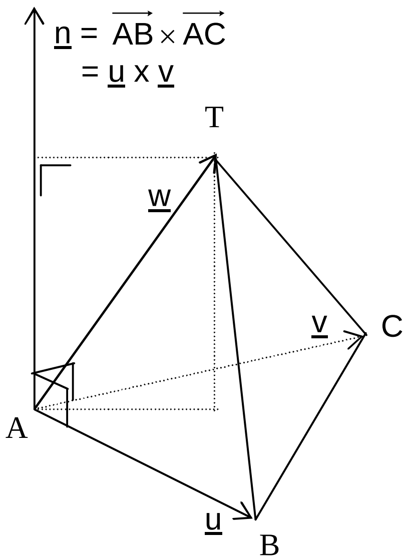
L△ = ½ $|\underline{u} \times \underline{v}|$.



Paralel Epipedum ialah benda ruang bersisi 6 yang sisi-sisi sejajarnya kongruen dan masing-masing sisinya berupa jajargenjang.

Volum parallel epipedum yang dibentuk oleh 3 vektor $\underline{u}$, $\underline{v}$, dan $\underline{w}$ adalah:

V = $|\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})| = |\underline{v} \cdot (\underline{u} \times \underline{w})| = |\underline{w} \cdot (\underline{u} \times \underline{v})|$



Volum bidang empat T.ABC adalah

$$V = \frac{1}{3} \times \text{luas alas x tinggi}$$

$$= \frac{1}{3}\left|\frac{1}{2}\underline{u} \times \underline{v}\right|\left|\text{proyeksi } \overrightarrow{AT} \text{ ke } \underline{n}\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AT} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{6}|\underline{w} \cdot (\underline{u} \times \underline{v})|$$

Selain itu dapat pula dibuktikan bahwa

$$V = \frac{1}{6}|\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})|, \text{ atau } = \frac{1}{6}|\underline{v} \cdot (\underline{u} \times \underline{w})|.$$

BAB III
PENUTUP

A. KESIMPULAN

Vektor yang selama ini mungkin baru sebatas pengetahuan sederhana dan belum begitu didalami oleh teman-teman guru SMA/MA ternyata merupakan materi yang cukup menantang dan memiliki terapan luas khususnya yang berkaitan dengan geometri.

Vektor setelah dikaitkan dengan sistem koordinat R^2 dan R^3, operasi dot dan kros vektor, dengan basis $\underline{i}$ dan j untuk ruang vektor R^2 dan dengan basis $\underline{i}$, $\underline{j}$ dan $\underline{k}$ untuk ruang vektor R^3 terbukti telah memperlihatkan ketajaman terapannya dalam perhitungan besaran-besaran obyek geometri seperti jarak, sudut, luas, dan volum dapat dilakukan secara lebih mudah, jelas, dan meyakinkan.

Sebuah catatan yang perlu diketahui oleh para peserta diklat matematika SMA lanjut adalah materi vektor yang baru saja dikenalkan pada diklat lanjut ini dimaksudkan untuk **mengenalkan perhitungan unsur-unsur geometri dengan pendekatan aljabar** (vektor) **bukan ansich secara geometri**. Inilah bedanya dengan **materi geometri ruang** yang **pokok pembelajaannya** memang menekankan pada pemahaman ruang. Pemecahan masalah geometri bukan dengan cara vektor itulah yang telah kita kenal selama ini.
Dengan pengetahuan baru tersebut kini Anda tinggal memilih mana yang terbaik untuk kita lakukan kepada siswa kita **kelas XII program IPA.**

B. SARAN

Bagi para alumni diklat yang berkomitmen untuk merealisasikan komitmennya pada anak didik agar mereka menjadi senang dengan pelajaran matematika diberikan saran-saran sebagai berikut.

1. Laporkan kepada atasan langsung tentang pengalaman apa saja yang menarik selama menerima sajian akademik dalam kegiatan pelatihan
2. Pikirkan perangkat kerja apa saja yang mendesak untuk dibuat dan segera diterapkan/ diimplementasikan di lapangan. Pertama adalah bagian-bagian yang mendesak untuk diterapkan di kelas yang diampunya, kemudian kepada sesama guru di sekolahnya, selanjunya pada kegiatan MGMP dan terakhir barulah cita-cita ke lingkup yang lebih luas
3. Ciptakan segera perangkat tersebut dengan niat baik, tulus, dan iklas demi peningkatan profesi dan demi anak bangsa di masa depan

4. Diskusikan rencana tindak lanjut Anda pasca pelatihan kepada kepala sekolah dan kepada pengawas
5. Bersemboyanlah " Apa yang terbaik yang saya miliki dan dapat saya perbuat untuk kemajuan bangsa ini sebagai andil dalam rangka mencerdaskan bangsa". Tuhan maha mengetahui dan pasti akan memberikan ganjaran yang patut disyukuri berupa sesuatu yang tak terduga di masa depan.

Amin.

Lampiran

Kunci Jawaban Soal-Soal Latihan

Latihan 1 halaman 8

1. $\frac{4}{5}\sqrt{5}$

2. m = –1 atau m = –24.

   m = –1 $\Rightarrow \underline{v} = 8\underline{i} - \underline{j} \Rightarrow$ proyeksi $\underline{u}$ ke $\underline{v}$ $= \left(\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\right)\underline{v} = \frac{104}{65}\underline{i} - \frac{13}{65}\underline{j}$

   m = –24 $\Rightarrow \underline{v} = 8\underline{i} - 24\underline{j} \Rightarrow$ proyeksi $\underline{u}$ ke $\underline{v} = \frac{8}{5}\underline{i} - \frac{24}{5}\underline{j}$

3. 5

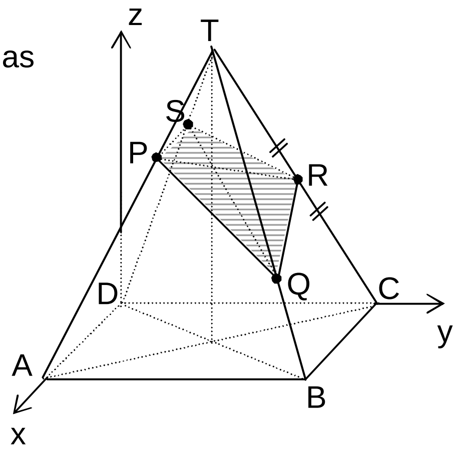
4. a. 3 b. 6 c. 1 d. $\frac{18}{5}$

5. a. A(6,0,6), B(6,9,0), C(0,9,0), D(0,0,0), E(6,0,3), F(6,9,3), G(0,6,3), H(0,0,3)
   b. P(4,3,2)
   c. $\frac{18}{7}$
   d. arc cos $\frac{3}{\sqrt{70}} = 69^o$
   e. $\frac{18}{61}\sqrt{6} \approx 2{,}3$

6. a. A(a,0,0), B(a,a,0), C(0,a,0), D(0,0,0), E(a,0,a), F(a,a,a), G(0,a,a), H(0,0,a).
   b. 60^o
   c. $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$
   d. $\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$
   e. $\frac{2}{3}a\sqrt{3}$
   f. $\frac{1}{3}a^3$

Latihan 2 halaman 23

1. a. Bentuk irisan bidang PQR dengan limas



b. A(12,0,0), B(12,12,0), C(0,12,0), D(0,0,0), T(6,6,12), P(8,4,8), Q(10,10,4), R(3,9,6)

c. $x + 3y + 5z - 60 = 0$

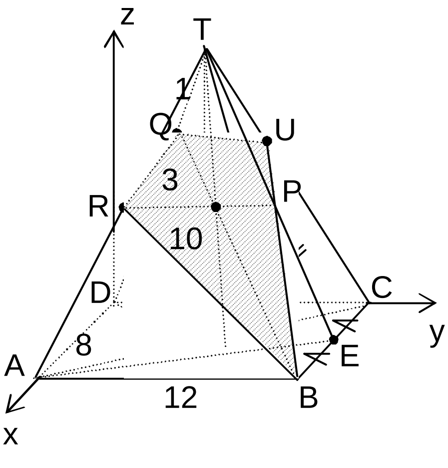
d. $S\left(\frac{30}{7}, \frac{30}{7}, \frac{60}{7}\right)$ atau $S\left(4\frac{2}{7}, 4\frac{2}{7}, 8\frac{4}{7}\right)$

e. $\frac{40}{7}\sqrt{35}$ cm^2

f. $\frac{24}{\sqrt{35}}$ cm

g. $45\frac{5}{7}$

2.



a. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa titik S berimpit dengan titi B

b. A(8,0,0), B(8,12,0), C(0,12,0), D(0,0,0), T(4,6,10), P(4,9,5), $Q\left(3, 4\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}\right)$, R(6,3,5)

c. $3x+y+3z-36 = 0$

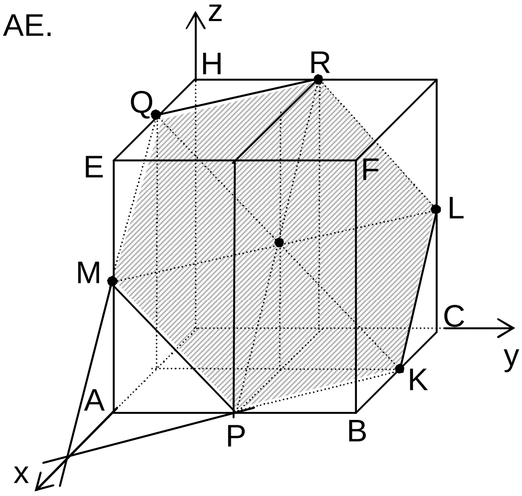
d. S(8,12,0) berimpit dengan titik B, dan $U(2\frac{2}{3}, 8, 6\frac{2}{3})$.

e. Luas BUQR = $\frac{20}{3}\sqrt{19} + \frac{5}{3}\sqrt{19} = \frac{25}{3}\sqrt{19} \approx 36{,}3$.

f. Jarak T ke bidang irisan = $\frac{12}{\sqrt{19}} \approx 2{,}75$.

g. Volum T.BUQR = $\frac{100}{3}$ = 33,33 cm^3.

3. a. Bidang irisan berupa segienam beraturan PKLRQM dengan K, L, M berturut-turut pada pertengahan rusuk BC, CG, dan AE.



b. 27$\sqrt{3}$ cm^2

c. $3\sqrt{3}$ cm

d. 81 cm^3

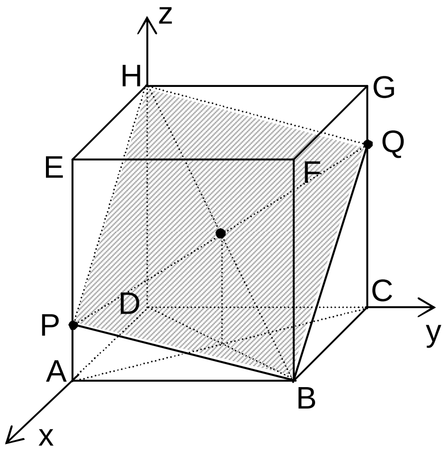
4. a. arc cos $\frac{6}{\sqrt{65}} \approx 41{,}9^o$

b. $\frac{12}{17}\sqrt{17}$

c. $\sqrt{\frac{1044}{13}} \approx \sqrt{80{,}3} =$ 8,96

d. 96.

5.



a. Lukisan dari irisan bidang BPH dengan kubus. Jika Q adalah titik potong kubus dengan bidang irisan maka Q pada $\overline{CG}$.

b. Q(0,12,9)

c. L = L_{BPH} + L_{BQH} = $36\sqrt{26}$

t = jarak F ke bidang BPHQ = $\frac{48}{\sqrt{26}}$

Volum F.BPHQ = 576