DIKLAT INSTRUKTUR PENGEMBANG MATEMATIKA SMA
JENJANG DASAR

VEKTOR

JENJANG DASAR

Drs. Marsudi Raharjo, M.Sc.Ed

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIDK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
YOGYAKARTA
2009

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Vektor merupakan bagian matematika yang mulai diajarkan di SMA/MA. Tepatnya menurut KTSP di kelas XII semester I Program IPA. Materi yang dibahas sesuai dengan KTSP meliputi pengunaan sifat-sifat dan operasi aljabar vektor dalam pemecahan masalah serta pengunaan sifat-sifat dan operasi perkalian skalar dua vektor dalam pemecahan masalah.

Dengan acuan tersebut berarti materi vektor yang dikenalkan di sekolah hanya sebatas pada konsep-konsep yang meliputi: (1) vektor, (2) skalar, (3) operasi antara dua vektor: penjumlahan, pengurangan, dan (4) perkalian skalar (dot vektor) serta terapannya dalam pemecahan masalah. Namun untuk materi Diklat ini pengampu sengaja memasukkan sebuah materi lagi yakni (5) kros vektor. Hal ini dilakukan dengan pertimbangan mengingat bagi peserta Diklat penambahan materi tersebut tidak terlalu memberatkan. Di samping itu manfaat kros vektor akan memberikan tambahan pengetahuan yang sangat signifikan dalam memudahkan pemecahan masalah khususnya geometri datar dan ruang. Manfaat yang dimaksud adalah mempermudah perhitungan jarak, sudut, dan luas pada geometri datar , serta jarak, sudut, luas, dan volum pada geometri ruang. Syarat yang diperlukan untuk memudahkan pemecahan masalah yang dimaksudkan tersebut hanya satu, yakni posisi titik-titik sudutnya dinyatakan dalam koordinat Cartesius.

Untuk diketahui pula bahwa materi kros vektor tidak dimasukkan dalam KTSP mungkin karena pertimbangannya akan melemahkan minat siswa pada pelajaran geometri ruang yang misinya memang menekannkan pemahaman ruang. Sementara vektor R^3 menyederhanakan permasalahan geometri (datar dan ruang) menjadi permasalahan secara aljabar.

Melalui kesempatan ini penulis berupaya menyusun materi diklat vektor seutuhnya hingga kros vektor dengan harapan dapat memberikan wawasan yang lebih luas kepada para peserta diklat yang akan dirasakan kemanfaatannya dalam pemecahan masalah.

Kami berharap agar sajian materi vektor ini dapat memberikan kecakapan hidup (*life skill*) yang bersifat akademik kepada teman-teman guru peserta diklat melalui prinsip *learning to know, learning to do, learning to be, learning to live together* dan *learning to cooperate* (Depdiknas, 2001:11).

B. TUJUAN

Materi diklat ini ditulis dengan maksud dapat dijadikan sebagai salah satu bahan rujukan diklat guru di seluruh Indonesia dalam memberikan bahan pemahaman dan pendalaman materi vektor yang perlu dikuasai oleh guru matematika SMA agar lebih berhasil dalam menjalankan profesinya dalam mengajarkan materi itu kepada para siswanya.

Setelah dipelajarinya materi ini diharapkan kepada para alumni untuk dapat:

1. mengimbaskan pengetahuannya kepada guru-guru di wilayah MGMP-nya dan rekan-rekan seprofesi lainnya
2. mengajarkan kepada para siswanya secara lancar, lebih baik dan lebih jelas
3. mengembangkan soal-soal yang lebih variatif dan menyentuh kehidupan nyata.

C. RUANG LINGKUP

Materi vektor yang ditulis ini merupakan materi minimal yang perlu dikuasai oleh guru SMA/MA. Materi yang dibahas meliputi:

1. Pemahaman konsep vektor, cara penulisan lambang dan besarannya, operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar antara dua vektor (dot vektor), proyeksi ortogonal suatu vektor ke vektor lain, serta contoh-contoh terapannya dalam perhitungan sudut antara dua garis, dan jarak titik ke garis pada ruang dimensi dua R^2 (geometri datar)
2. Perkalian vektor antara antara dua vektor (kros vektor) berikut contoh terapannya dalam perhitungan sudut antara dua garis, jarak titik ke garis, jarak titik ke bidang, luas permukaan, dan volum pada ruang dimensi tiga R^2 (geometri ruang)

Modul ini dimaksudkan untuk dapat dibaca dan dipahami sendiri termasuk mengerjakan soal-soal latihan dan merujuknya pada kunci jawaban. Untuk itu langkah-langkah penguasaan materinya adalah

1. Pelajari materinya (bersama teman)
2. Bahas soal-soalnya dan lihat kunci jawabannya.
3. Adakan Problem Posing: Ciptakan variasi soal lainnya berikut jawabannya.

BAB II
VEKTOR R^2, R^3, DAN TERAPANNYA

A. BESARAN VEKTOR, SKALAR, PENJUMLAHAN, DAN PENGURANGAN

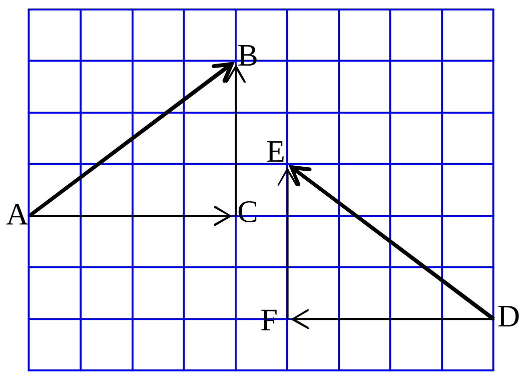
Vektor adalah materi pelajaran yang ada baik di pelajaran IPA khususnya Fisika dan juga di pelajaran Matematika. Untuk metematika vektor mulai diajarkan di jenjang SMA. Perhitungan vektor secara matematika adalah perpaduan antara aljabar dan geometri namun penekanannya lebih banyak ke aljabarnya dari pada geometrinya. Mata pelajaran geometri lebih menekankan pada pemahaman ruang artinya lebih menekankan pada penalaran tentang hakekat keruangan.

Agar kita lebih memahami makna vektor secara awal kita dikenalkan pada konsep vektor secara fisika dan kemudian konsep vektor secara metematika. Tujuannya sebagai pembanding bahwa setelah diselami lebih lanjut ternyata sebenarnya tidak ada perbedaan diantara keduanya. Perbedaanya hanya teletak pada cara pandang keilmuannya saja.

1. Konsep Vektor

Konsep vektor pada IPA Fisika adalah besaran yang mempunyai besar dan arah. Besaran yang hanya memiliki besar saja disebut skalar. Sementara itu konsep vektor dalam metematika adalah ruas garis berarah yang panjangnya adalah jarak dari titik pangkal ke titik ujung dan arahnya adalah arah dari pangkal ke ujung atau perpanjangannya.

Vektor yang pangkalnya di titik A dan ujungnya di titik B diberi lambang ” $\overrightarrow{AB}$ ”, sedangkan nama vektor yang tidak memperhatikan titik pangkal dan titik ujungnya dilambang-kan dengan huruf-huruf kecil yang digaris bawahi seperti misalnya $\underline{u}$, $\underline{v}$, dan $\underline{w}$. Selanjutnya untuk melihat bentuk aljabarnya ditulis dalam bentuk matriks kolom atau dalam bentuk $a_1\underline{i} + b_1\underline{j} + c_1\underline{k}$. Terakhir panjang vektor dilambangkan dengan tanda harga mutlak. Sehingga $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ merupakan lambang untuk panjang vektor $\overrightarrow{AB}$ dan $\left|\underline{u}\right|$ merupakan lambang untuk panjang vektor $\underline{u}$.



Contoh

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \text{komponen mendatar} \\ \text{komponen vertikal} \end{pmatrix}$$

$$\text{Komponen mendatar} \begin{cases} \text{ke kanan} \rightarrow \text{pos} \\ \text{ke kiri} \rightarrow \text{neg} \end{cases}$$

$$\text{Komponen vertikal} \begin{cases} \text{ke atas} \rightarrow \text{pos} \\ \text{ke bawah} \rightarrow \text{neg} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \text{A ke C terus} \\ \text{C ke B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ke kanan} = 4 \\ \text{ke atas} = 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} \text{D ke F terus} \\ \text{F ke E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ke kiri} = 4 \\ \text{ke atas} = 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Panjang vektor

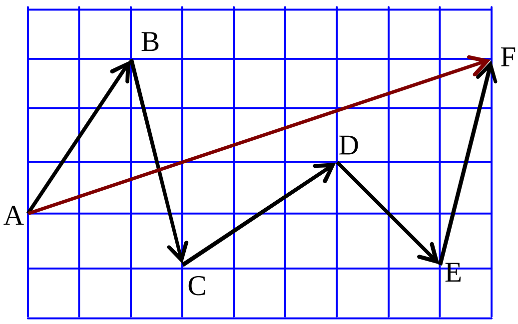
Untuk vektor $\overrightarrow{AB}$ yaitu $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$, $\overrightarrow{CD}$ yaitu $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$.

Secara umum,

panjang vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ adalah $|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2+b^2}$ dalam R^2.

panjang vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ adalah $|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ dalam R^3.

2. Penjumlahan Vektor



Dari gambar di samping tentukan

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$.

Hitunglah

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} =$

$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

Apakah

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$?

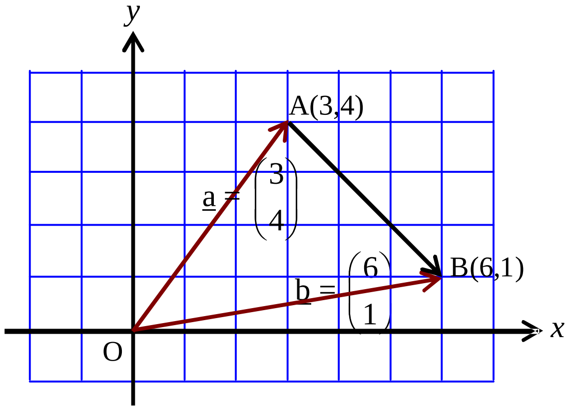
Kesimpulan

Untuk setiap vektor berlaku:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \dots + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ}}$$

3. Vektor Posisi dan Vektor Nol

Apabila suatu vektor digambarkan pada sistem koordinat Cartesius, vektor posisi suatu titik adalah vektor yang titik pangkalnya di titik pangkal koordinat dan titik ujungnya di titik itu. Untuk selanjutnya vektor posisi titik A dilambangkan dengan "$\underline{a}$", vektor posisi titik B dilambangkan dengan "$\underline{b}$", vektor posisi titik C dilambangkan dengan "$\underline{c}$", dan seterusnya.



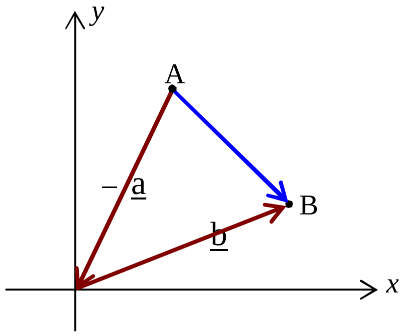
Vektor posisi titk A(3,4) adalah $\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Vektor posisi titk B(6,1) adalah $\underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berdasarkan gambar yang diketahui maka

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$; $\underline{b} - \underline{a} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$.

Apakah $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$?



Bukti Matematikanya adalah:

$\overrightarrow{AB}$ = A ke O + O ke B
= – O ke A + O ke B
= $-\underline{a} + \underline{b}$
= $\underline{b} - \underline{a}$ (terbukti).

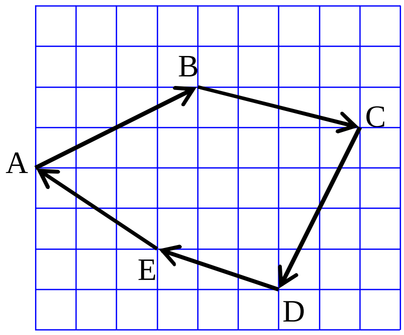
Jadi benar bahwa:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}}$$

Catatan
Rumus di atas selain berlaku untuk ruang vektor R^2 juga berlaku pula untuk R^3.

Vektor nol.

Adalah vektor yang titik pangkal dan titik ujungnya berimpit.
Perhatikan gambar di samping bahwa:

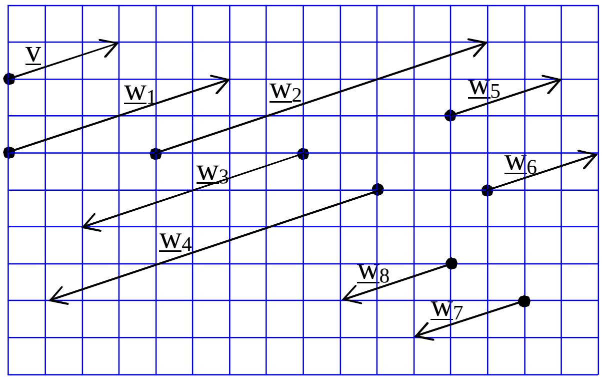


$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} =$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Karena $\overrightarrow{AA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$ maka

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AA} = \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$



Kelipatan vektor

Selanjutnya untuk memahami dua vektor sama dan dua vektor sejajar diberikan contoh melalui gambar di samping.

Jika diselidiki lebih lanjut ternyata suatu vektor hanya dapat dinyatakan sebagai kelipatan dari vektor lainnya hanya apabila searah atau berlawanan arah.

Dari gambar-gambar vektor yang diperagakan tersebut tampak jelas bahwa kedelapan vektor itu sejajar. Selanjutnya bila diidentifikasi lebih lanjut diperoleh:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$\underline{w_1} = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = 2\underline{v}$$

$$\underline{w_2} = \begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = 3\underline{v}$$

$$\underline{w_3} = \begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = -2\underline{v}$$

$$\underline{w_4} = \begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = -3\underline{v}$$

$$\underline{w_5} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \underline{v}$$

$$\underline{w_6} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \underline{v}$$

$$\underline{w_7} = \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} = -\underline{v}$$

$$\underline{w_8} = \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} = -\underline{v}$$

karena

$$\left.\begin{array}{l}\underline{w_1} = 2\underline{v}\\ \underline{w_3} = -2\underline{v}\end{array}\right\} \underline{w_1} = -\underline{w_3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\underline{w_2} = 3\underline{v}\\ \underline{w_4} = -3\underline{v}\end{array}\right\} \underline{w_2} = -\underline{w_4}$$

Perhatikan bahwa $\underline{w_1} = -\underline{w_3}$ dan $\underline{w_2} = -\underline{w_4}$ ternyata gambar $\underline{w_1}$ dan $\underline{w_3}$ sama panjang tetapi arahnya berlawanan. Hal yang sama diperlihatkan oleh $\underline{w_2}$ dan $\underline{w_4}$.

Uraian di atas memperlihatkan bahwa vektor-vektor yang arahnya sama dengan vektor $\underline{v}$ yaitu $\underline{w_1}$, $\underline{w_2}$, $\underline{w_5}$, dan $\underline{w_6}$ dapat ditulis dalam bentuk $\underline{w_i} = k\underline{v}$ dengan k skalar yang bernilai positif. Sementara itu vektor-vektor yang arahnya berlawanan dengan vektor $\underline{v}$ seperti $\underline{w_3}$, $\underline{w_4}$, $\underline{w_7}$, dan $\underline{w_8}$, dapat ditulis dalam bentuk $\underline{w_i} = k\underline{v}$ dengan k skalar yang bernilai negatif. Vektor-vektor yang arahnya sama atau berlawanan dengan vektor $\underline{v}$ disebut vektor-vektor yang sejajar dengan vektor $\underline{v}$. Sehingga *vektor $\underline{w}$ sejajar vektor $\underline{v}$ ditulis $\underline{w} \,//\, \underline{v}$ apabila*

$\underline{w} = k\underline{v}$ dengan k skalar, $k \in R$

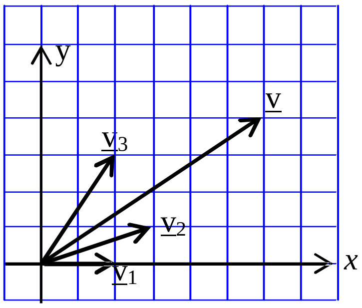
Jika $k>0$ maka $\underline{w}$ searah dengan $\underline{v}$

Jika $k<0$ maka $\underline{w}$ berlawanan arah dengan $\underline{v}$

4. Pengertian tentang kombinasi linear dan basis

Jika $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$,.., $\underline{v}_r$, adalah vektor-vektor dalam R^2. Maka untuk setiap vektor $\underline{v} \in R^2$, vektor $\underline{v}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dalam $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$,..., $\underline{v}_r$, yaitu:
$\underline{v} = k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + \ldots + k_r \underline{v}_r$, dengan $k_1, k_2, \ldots, k_r$, adalah skalar-skalar real.
Jika $k_1, k_2, \ldots, k_r$ tunggal, maka vektor-vektor $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$,.., $\underline{v}_r$ itu disebut basis untuk R^2.

Contoh



Perhatikan bahwa

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Dari vektor-vektor yang diketahui itu akan ditunjukkan bahwa jika:

a. $\underline{v} = k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2$, diperoleh k_1 dan k_2 tunggal maka dua vektor $\underline{v}_1$ dan $\underline{v}_2$ merupakan basis untuk R^2.

b. $\underline{v} = k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + k_3 \underline{v}_3$, diperoleh k_1, k_2, dan k_3 tidak tunggal maka $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, dan $\underline{v}_3$ bukan basis untuk R^2.

Bukti:

a) jika $\underline{v} = k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2$, maka

$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ (i) $6 = 2k_1 + 3k_2$

(ii) $4 = k_2 \rightarrow k_2 = 4$

$k_2 = 4 \rightarrow$ (i) $2k_1 + 3k_2 = 6$

$2k_1 + 3(4) = 6$

$2k_1 = -6 \rightarrow k_1 = -3$

Sehingga diperoleh $\underline{v} = -3\underline{v}_1 + 4\underline{v}_2$, artinya k_1 dan k_2 tunggal.

b) Jika $\underline{v} = k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + k_3 \underline{v}_3$, maka

$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Selanjutnya akan diperoleh persamaan

(i) $6 = 2k_1 + 3k_2 + 2k_3$
(ii) $4 = k_2 + 3k_3$

Karena terdapat 3 peubah (variabel) dalam 2 persamaan, maka akan terdapat banyak penyelesaian dengan parameter sebanyak (3–2) = 1 buah. Misalkan parameter itu adalah $k_3 = \lambda$; λ = parameter.

$$k_3 = \lambda \rightarrow \text{(ii) } k_2 + 3k_3 = 4$$
$$k_2 + 3\lambda = 4$$
$$k_2 = 4 - 3\lambda \rightarrow \text{(i) } 2k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 6$$
$$2k_1 + 3(4-3\lambda) + 2\lambda = 6$$
$$2k_1 + 12 - 9\lambda + 2\lambda = 6$$
$$2k_1 = -6 + 7\lambda$$
$$k_1 = -3 + 3\frac{1}{2}\lambda$$

Jika $\lambda = 0 \rightarrow$ $k_1 = -3$, $k_2 = 4$, $k_3 = 0$

Jika $\lambda = 2 \rightarrow$ $k_1 = 4$, $k_2 = -2$, $k_3 = 2$.

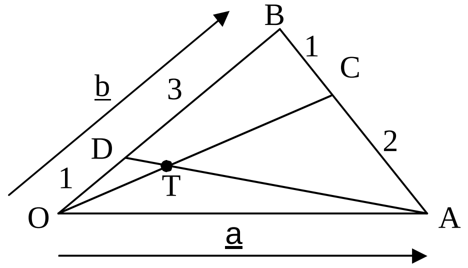
Tampak bahwa k_1, k_2, dan k_3 tidak tunggal, mereka tergantung pada nilai parameter λ yang kita pilih. Karena kombinasi linearnya tidak tunggal, akibatnya vektor-vektor $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, dan $\underline{v}_3$ bukan merupakan basis untuk ruang vektor berdimensi 2 (R^2).

Basis-basisnya misal $\underline{v}_1$ dan $\underline{v}_2$ atau
$\underline{v}_1$ dan $\underline{v}_3$ atau
$\underline{v}_2$ dan $\underline{v}_3$.

yaitu <u>setiap dua vektor tidak nol</u> yang tak searah.

Dengan pemikiran yang sama dapat diselidiki bahwa basis dalam ruang vektor berdimensi tiga (R^3) adalah <u>setiap vektor tidak nol yang tidak sebidang</u> jika titik pangkal ketiga vektor itu diimpitkan.
Berikut contoh terapan perhitungan menggunakan konsep basis dalam ruang vektor berderajat dua (R^2).

Contoh perhitungan menggunakan konsep basis



Dari ΔOAB diketahui C pada $\overline{AB}$ dan D pada $\overline{OB}$. T pada perpotongan $\overline{OC}$ dan $\overline{AD}$. AC:CB = 2:1 dan OD:DB = 1:3. Tentukan OT:TC !

Jawab:

Karena ΔOAB berikut komponen-komponennya terletak sebidang, maka ia berdimensi 2 (dua). Untuk itu setiap 2 vektor yang tak searah akan merupakan basis untuk R^2. Akibatnya setiap vektor dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari kedua basis itu secara tunggal. Misalkan **basis**nya adalah $\overrightarrow{OA}$ dan $\overrightarrow{OB}$ (vektor $\overrightarrow{OA}$ = $\underline{a}$ dan $\overrightarrow{OB}$ = $\underline{b}$). Dari pijakan itu akan diperoleh:

$$\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{2}{3}(-\underline{a} + \underline{b}) \; \ldots\ldots (1)$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} = -\underline{a} + \frac{1}{4}\underline{b} \; \ldots\ldots (2)$$

Karena $\overrightarrow{OT}$ searah dengan $\overrightarrow{OC}$ maka $\overrightarrow{OT} = \lambda\overrightarrow{OC}$, λ suatu skalar

$$= \lambda\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \lambda\left(\underline{a} + \frac{2}{3}(-\underline{a}+\underline{b})\right)$$

$$= \frac{1}{3}\lambda\,\underline{a} + \frac{2}{3}\lambda\,\underline{b} \; \ldots\ldots\ldots (3)$$

Di lain pihak $\overrightarrow{AT}$ adalah kelipatannya $\overrightarrow{AD}$ (mengapa?), sehingga dapat ditulis

$$\overrightarrow{AT} = \mu\,\overrightarrow{AD} \quad \text{dan} \quad \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT}$$

$$\overrightarrow{OT} = \underline{a} + \mu\left(-\underline{a} + \frac{1}{4}\underline{b}\right)$$

$$= (1-\mu)\,\underline{a} + \frac{1}{4}\mu\,\underline{b} \; \ldots\ldots\ldots (4)$$

Dengan menyamakan koefisien $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ pada (3) dan (4) yaitu:

(i) Koefisien $\underline{a}$: $1 - \mu = \frac{1}{3}\lambda$

(ii) Koefisien $\underline{b}$: $\frac{1}{4}\mu = \frac{2}{3}\lambda$ $\longrightarrow$ $\mu = \frac{8}{3}\lambda$, substitusikan ke

(i) $1 - \mu = \frac{1}{3}\lambda \longrightarrow 1 - \frac{8}{3}\lambda = \frac{1}{3}\lambda$

$$1 = \frac{9}{3}\lambda \longrightarrow 1 = 3\lambda \rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

(ii) $\mu = \frac{8}{3}\lambda = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}$

Karena $\overrightarrow{OT} = \lambda.\overrightarrow{OC}$ dan $\lambda = \frac{1}{3}$ maka $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

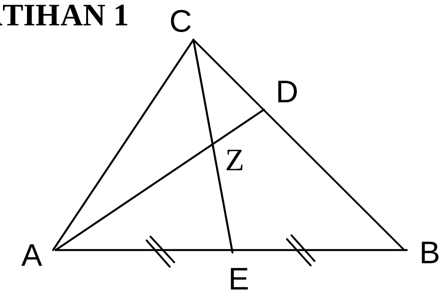
Selanjutnya karena $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ maka $|\overrightarrow{OT}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{OC}|$ atau OT = $\frac{1}{3}$OC atau $\frac{OT}{OC} = \frac{1}{3}$.

Terakhir karena $\frac{OT}{OC} = \frac{1}{3}$ maka $\frac{OT}{TC} = \frac{1}{(3-1)} = \frac{1}{2}$ atau $\boxed{\text{OT : TC = 1 : 2}}$.

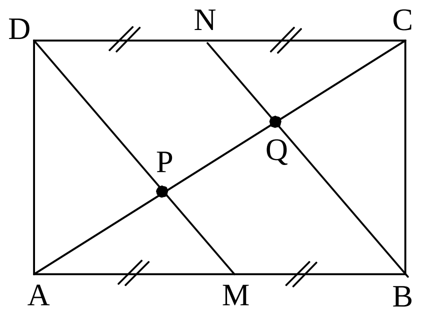
Catatan

1. Contoh perhitungan perbandingan ruas garis di atas adalah contoh perhitungan **menggunakan 2 vektor basis sembarang dalam ruang vektor R^2 yakni kedua vektor bukan vektor normal standar.**
2. **Vektor normal standar** adalah vektor-vektor yang saling tegak lurus dan panjang vektornya masing-masing 1 satuan)
3. Kita baru akan membicarakan **basis normal standar** yakni **vektor-vektor yang saling tegak lurus dan panjang masing-masing vektor sama dengan 1 satuan** setelah pembicaraan terfokus pada vektor dalam sistem koordinat Cartesius.

LATIHAN 1

1. 

Diketahui Δ ABC
Titik D pada $\overline{BC}$ sehingga BD:DC = 2:1
Titik E pada pertengahan $\overline{AB}$
Jika Z adalah titik potong $\overline{AD}$ dan $\overline{CE}$, tentukan AZ:ZD = … dan CZ:ZE = ….

2. 

Diketahui persegi panjang ABCD, titik M dan N berturut-turut terletak pada pertengahan $\overline{AB}$ dan $\overline{DC}$. Titik P dan Q berturut-turut merupakan titik potong diagonal $\overline{AC}$ dengan ruas-ruas garis $\overline{DM}$ dan $\overline{BN}$.

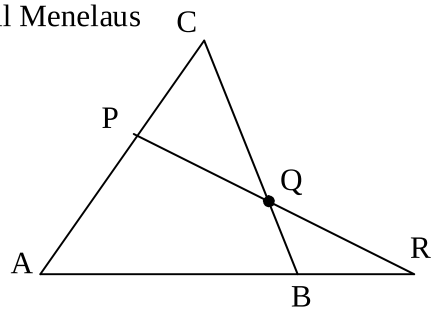
Buktikan bahwa AP = PQ = QC = $\frac{1}{3}$AC.

3. Diketahui ΔABC dengan koordinat-koordinat titik A, B, dan C masing-masing adalah (x_A, y_A), (x_B, y_B), dan (x_C, y_C).

   Buktikan bahwa jika Z(x_Z, y_Z) adalah titik berat ΔABC maka $x_z = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ dan

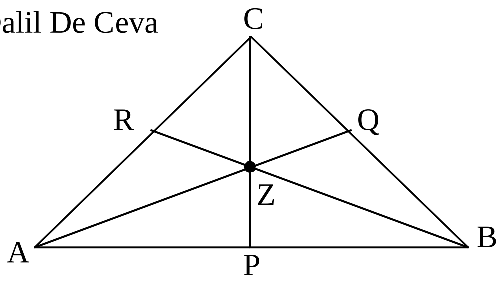
   $y_z = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

4. Dalil Menelaus



Diketahui ΔABC dengan transversal (garis yang memotong sisi-sisi segitiga atau perpanjangannya) $\overleftrightarrow{PR}$, buktikan bahwa $\frac{AR}{RB} \times \frac{BQ}{QC} \times \frac{CP}{PA} = 1$.

5. Dalil De Ceva

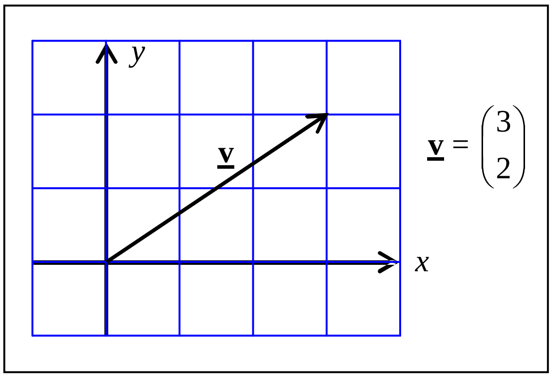


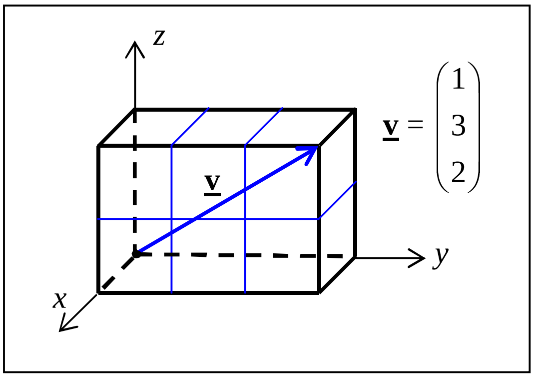
Segitiga ABC dengan $\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{BR}$ dan $\overrightarrow{CP}$ berpotongan di titik Z. Titik P, Q, dan R berturut-turut terletak pada ruas garis $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{CA}$. Buktikan bahwa $\frac{AP}{PB} \times \frac{BQ}{QC} \times \frac{CR}{RA} = 1$.

B. VEKTOR DALAM SISTEM KOORDINAT KARTESIUS

Perhitungan-perhitungan yang dikemukakan pada soal latihan 1 tersebut di atas semuanya mengacu pada persamaan vektor sembarang. Yakni vektor-vektor dalam R^2 yang **basisnya** berupa **2 vektor sembarang** yang **bukan vektor satuan** dan **tidak saling tegak lurus**. Dua vektor yang digunakan sebagai basis perhitungan adalah asal 2 vektor yang tidak segaris. Nah, mulai saat ini ruang vektor yang akan kita bahas adalah ruang vektor R^2 dan ruang vektor R^3 yang letaknya dihubungkan dengan sistem koordinat Cartesius **berdimensi dua** dan **tiga**.

Masing-masing vektor yang dihubungkan dengan koordinat Cartesius selanjutnya disebut **vektor** dalam **ruang vektor $\mathbf{R^2}$** dan **vektor** dalam **ruang vektor $\mathbf{R^3}$**. Dan sekali lagi untuk lebih memudahkan pemahaman siswa dalam **membedakan** antara **vektor** dan **skalar** kita sepakat untuk menuliskannya dalam bentuk vektor kolom.





C. BASIS NORMAL STANDAR

Untuk diketahui bahwa batasan/definisi **basis normal standar** adalah vektor-vektor yang saling tegak lurus dan panjang (modulus) masing-masing vektor adalah sama dengan 1 (satu). Sementara itu kita tentu masih ingat bahwa basis dalam ruang vektor V ialah vektor-vektor $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_k$ sedemikian sehingga untuk setiap $\underline{v} \in V$, maka $\underline{v}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear secara tunggal dari vektor-vektor tersebut.

Definisi Basis

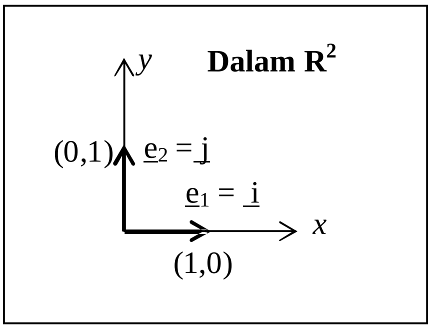
Jika V adalah ruang vektor, maka vektor-vektor $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_k$ disebut basis dari V jika untuk setiap $\underline{v} \in V$, $\underline{v}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear secara tunggal dari k vektor tersebut, yakni:

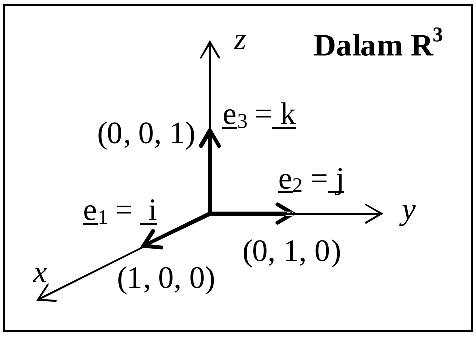
$$\underline{v} = a_1\underline{\mathbf{v}}_1 + a_2\underline{\mathbf{v}}_2 + a_3\underline{\mathbf{v}}_3 + \ldots + a_k\underline{\mathbf{v}}_k \text{ dengan } a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k \text{ tunggal.}$$

Jika masing-masing vektor tersebut panjangnya **1 satuan** dan **saling tegak lurus**, maka $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3, \ldots, \underline{\mathbf{v}}_k$ disebut **basis normal standar** dalam ruang vektor **V**.

Berdasarkan definisi tersebut maka kita dapat menyimpulkan bahwa vektor-vektor:

1. $\underline{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\underline{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ adalah **basis normal standar** dalam ruang vektor $\mathbf{R}^2$
2. $\underline{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan $\underline{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ adalah **basis normal standar** dalam ruang vektor $\mathbf{R}^3$.



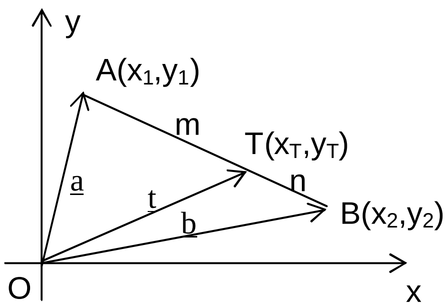


Dalam bentuk $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ maka $\underline{i}$ dan $\underline{j}$ adalah basis normal standar dalam ruang vektor R^2 dan $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ adalah basis normal standar dalam ruang vektor R^3.

Catatan

Untuk memudahkan pemahaman siswa khususnya **dalam membedakan** antara **skalar** dan **vektor** lebih lanjut **kita sepakati** bahwa pembahasan dan penulisan vektor berikutnya kita lebih menekankan pada bentuk **vektor kolom.**

D. KOORDINAT PEMBAGI RUAS GARIS



Misalkan diketahui titik A(x_1,y_1), B(x_2,y_2) dan AT:TB = m:n dengan m dan n skalar: m, n $\in$ R, maka vektor posisi titik T adalah:

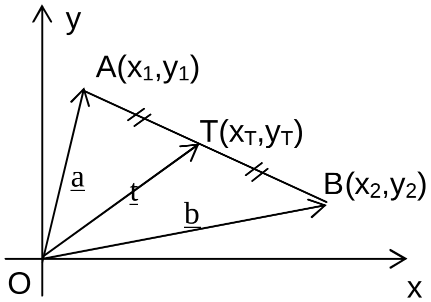
$$\boxed{\underline{t} = \frac{n\underline{a} + m\underline{b}}{m + n}}$$

Bukti

Karena $\overrightarrow{AT}$ searah dengan $\overrightarrow{AB}$ maka $\overrightarrow{AT}$ dan $\overrightarrow{AB}$ dapat dibandingkan, yaitu:

$\overrightarrow{AT} : \overrightarrow{AB}$	= m : (m+n) sehingga (m+n) $\overrightarrow{AT}$ = m $\overrightarrow{AB}$. Akibatnya
(m+n) ($\underline{t}$ – $\underline{a}$)	= m($\underline{b}$ – $\underline{a}$)
(m+n)$\underline{t}$ – (m+n) $\underline{a}$	= m$\underline{b}$ – m$\underline{a}$
(m+n)$\underline{t}$	= (m+n) $\underline{a}$ + m$\underline{b}$ – m$\underline{a}$
	= $\cancel{m\underline{a}}$ + n$\underline{a}$ + m$\underline{b}$ – $\cancel{m\underline{a}}$
	= n$\underline{a}$ + m$\underline{b}$, sehingga $\underline{t} = \dfrac{n\underline{a} + m\underline{b}}{m + n}$ ▨

Jika T terletak pada pertengahan $\overrightarrow{AB}$ maka nilai m = n. Akibatnya



$$\underline{t} = \frac{n\underline{a}+m\underline{b}}{m+n} = \frac{k\underline{a}+k\underline{b}}{k+k} = \frac{k(\underline{a}+\underline{b})}{2k} \quad \text{atau}$$

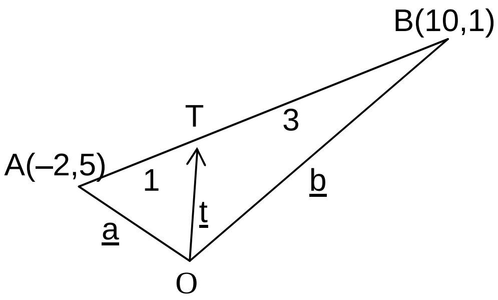
$$\boxed{\underline{t} = \frac{\underline{a}+\underline{b}}{2} = \frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})}$$

Contoh:

Diketahui ruas garis $\overline{AB}$ dengan A(–2, 5) dan B(10,1). Titik T terletak pada $\overline{AB}$ sehingga AT:AB = 1:3. Tentukan koordinat titik T. Selanjutnuya jika titik P terletak pada pertengahan $\overline{AB}$, tentukan koordinat titik P.

Jawab:

Untuk lebih memperjelas permasalahan pada soal tersebut diberikan gambar corat-coret (gambaran kasar) berikut perhitungannya secara lengkap.



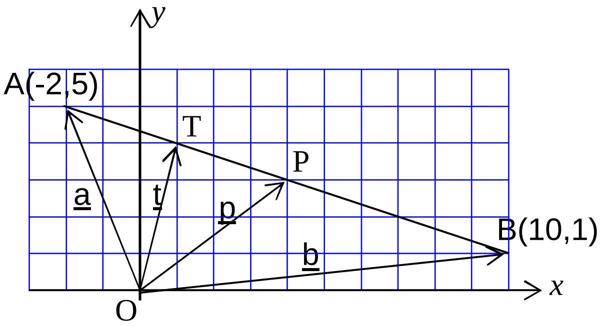
$$\underline{t} = \frac{n\underline{a}+m\underline{b}}{m+n}$$

$$= \frac{3\underline{a}+1\underline{b}}{(3+1)} = \frac{1}{4}(3\underline{a}+\underline{b})$$

$$= \frac{1}{4}\left[3\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}4\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \text{T(1,4).}$$

Jadi koordinat titik T(1,4).



Keadaan sebenarnya dapat dilihat pada gambar di samping.

Karena titik P pada pertengahan $\overrightarrow{AB}$ maka

$$\underline{p} = \frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\1\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \text{Koordinat titik P(4,3).}$$

Periksalah hasil tersebut dengan memperhatikan gambarnya !

E. DOT VEKTOR

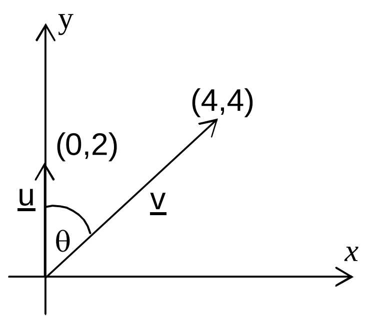
Dot vektor disebut pula sebagai **perkalian skalar antara dua vektor**, sebab meskipun kedua unsur yang dikalikan berupa vektor namun hasil kalinya berupa skalar. Lambang perkaliannya digunakan tanda titik (**.**) sedangkan aturan perkaliannya (Anton, 1994:27) diberikan sebagai berikut.

Didefinisikan : $\underline{u}\ .\ \underline{v} \begin{cases} = |\underline{u}||\underline{v}|\cos\theta, \text{ jika } \underline{u} \neq \underline{0} \text{ dan } \underline{v} \neq \underline{0} \\ = 0 \qquad\qquad\quad , \text{ jika } \underline{u} = \underline{0} \text{ atau } \underline{v} \neq \underline{0} \end{cases}$

dengan $\underline{u}.\underline{v}$ dibaca " vektor u dot vektor v" atau cukup dengan " **$\underline{u}$ dot $\underline{v}$**" saja.

Contoh 1

Tentukan $\underline{u}\ .\ \underline{v}$ jika $\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$



Berdasarkan gambar dan definisi dot vektor, maka

$\underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan tentu $\theta = 45°$. Maka

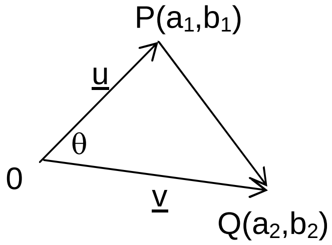
$$\underline{u}\ .\ \underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}|\cos\theta \rightarrow \text{definisi}$$

$$= \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cos 45°$$

$$= \sqrt{0^2 + 2^2}.\sqrt{4^2 + 4^2}.\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$= 2.4\sqrt{2}\ .\ \frac{1}{2}\sqrt{2} = 8.$$

Dalil : Jika $\underline{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b2 \end{pmatrix}$ maka $\underline{u}\ .\ \underline{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1a_2 + b_1b_2$.



Bukti

Misalkan sudut antara $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ adalah θ. Maka menurut aturan cosinus pada segitiga berlaku:

$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP.OQ \cos\theta$, atau

$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OP}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OQ}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right| \cos\theta$ (mengapa ?).

Karena $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = -\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} - \underline{u}$

Maka diperoleh $|\underline{v}-\underline{u}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 - 2|\underline{u}||\underline{v}|\cos\theta$;

dari definisi

$= |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 - 2\underline{u}.\underline{v}$

$$\begin{aligned}2\underline{u}.\underline{v} &= |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 - |\underline{u} - \underline{v}|^2 \\ &= \left(a_1^2 + b_1^2\right) + \left(a_2^2 + b_2^2\right) - \left[(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2\right] \\ &= a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 - \left[a_2^2 - 2a_1a_2 + a_1^2 + b_2^2 - 2b_1b_2 + b_1^2\right]\end{aligned}$$

$2\underline{u}.\underline{v} = 2a_1a_2 + 2b_1b_2$. Maka $\boxed{\underline{u}\,.\,\underline{v} = a_1a_2 + b_1b_2}$

Rumus tersebut ternyata memudahkan setiap orang dalam menghitung perkalian skalar antara dua vektor. Dengan rumus tersebut perhitungan untuk $\underline{u}\,.\underline{v}$ pada contoh di atas menjadi lebih sederhana, yakni

$$\underline{u}\,.\underline{v} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} = 0\times4 + 2\times4 = 0 + 8 = 8\,.$$

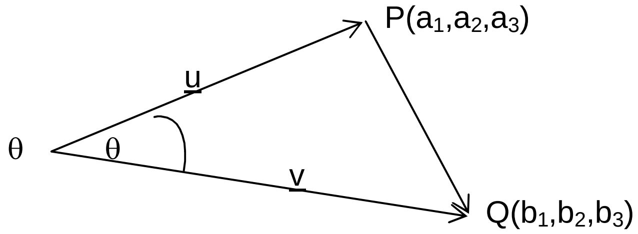
Sejalan dengan ruang vektor R^2, untuk ruang vektor R^3 berlaku dalil seperti berikut

Dalil: jika $\underline{u} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ maka $\boxed{\underline{u}\,.\,\underline{v} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$

dalam ruang vektor R^3.

Bukti:

Misalkan $\underline{u} = \overrightarrow{OP}$ dan $\underline{v} = \overrightarrow{OQ}$ sedang θ adalah sudut antara vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ (lihat gambar)



Berdasarkan aturan cosinus diperoleh:

$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2.OP.OQ \cos\theta$ sedang $\overrightarrow{PQ} = \underline{v} - \underline{u}$.

$|\underline{v} - \underline{u}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 - 2\,|\underline{u}|\,|\underline{v}| \cos\theta$. Karena $|\underline{u}||\underline{v}|\cos\theta = \underline{u}.\underline{v}$, maka

$= |\underline{u}|^2 + |\mathrm{v}|^2 - 2\underline{u}.\underline{v}$.

$2\underline{u}.\underline{v} = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 - |\underline{v} - \underline{u}|^2$

$= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) + \left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - \left[(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2\right]$

$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 -$

$\left[b_1^2 + a_1^2 - 2b_1a_1 + b_2^2 + a_2^2 - 2b_2^2a_2 + b_3^2 + a_3^2 - 2a_3^2b_3\right]$

$2\underline{u}.\underline{v} = 2\ a_1b_1 + 2\ a_2b_2 + 2\ a_3b_3$

$\boxed{\underline{u} \cdot \underline{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$ terbukti

Sifat-sifat perkalian skalar antara dua vektor:

sifat 1 : $\underline{v} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|^2$

sifat 2 : $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$ (sifat komutatif)

sifat 3 : jika $\underline{u} \neq \underline{0}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$, dan $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, maka $\underline{u} \perp \underline{v}$

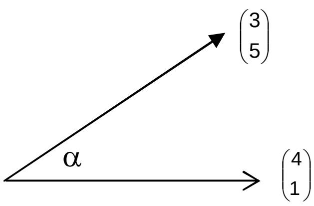
Sifat 4 : $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ (sifat distributif)

Contoh 2

Tentukan sudut yang dibentuk oleh vektor $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

Jawab

Misalkan sudut antara kedua vektor itu α, maka:



$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}|\,|\underline{v}| \cos \alpha$$

$$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = \sqrt{4^2+1^2}.\sqrt{3^2+5^2} \,.\, \cos \alpha$$

$$12 + 5 = \sqrt{17}.\sqrt{34} \,.\, \cos \alpha$$

$$17 = 17\,\sqrt{2}\,\cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

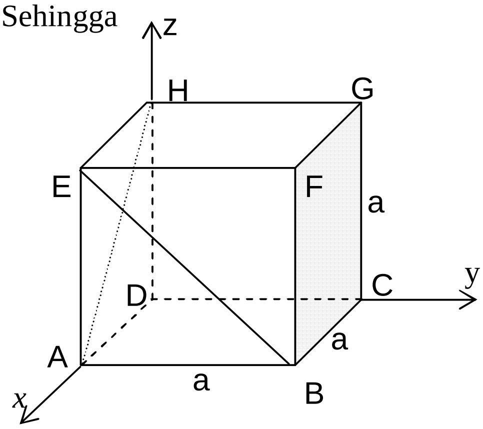
$$\alpha = 45^o.$$

Contoh 3

Pada kubus ABCD.EFGH Tentukan sudut antara garis $\overleftrightarrow{BE}$ and $\overleftrightarrow{AH}$. Selanjutnya buktikan bahwa garis $\overleftrightarrow{BG}$ tegak lurus $\overleftrightarrow{CE}$.

Jawab

Secara vektor kubus itu dapat digambarkan pada sistem koordinat ruang seperti berikut. Jika rusuk kubus itu a satuan maka koordinat titik-titik A(a,0,0), B(a,a,0), E(a,o,a), G(0,a,a), H(0,0,a). Sehingga



$$\overrightarrow{BE} = \underline{e} - \underline{b} = \begin{pmatrix}a\\0\\a\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-a\\a\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{AH} = \underline{h} - \underline{a} = \begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a\\0\\a\end{pmatrix}$$

a. Sudut antara $\overleftrightarrow{BE}$ dan $\overleftrightarrow{AH}$ dihitung berdasar definisi dot vektor $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AH} = \left|\overrightarrow{BE}\right|\left|\overrightarrow{AH}\right| \cos \theta$

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AH}}{\left|\overrightarrow{BE}\right|\left|\overrightarrow{AH}\right|} = \frac{\begin{pmatrix}0\\-a\\a\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-a\\0\\a\end{pmatrix}}{\sqrt{0^2+(-a)^2+a^2}.\sqrt{(-a)^2+0^2+a^2}} = \frac{0+0+a^2}{\sqrt{2a^2}.\sqrt{2a^2}} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^o.$$

Maka sudut antara garis $\overleftrightarrow{BE}$ dan $\overleftrightarrow{AH}$ = 60^o.

b. Untuk menunjukkan $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CE}$ cukup ditunjukkan bahwa dot vektornya sama dengan nol. Mengapa?, sebab kedua vektor masing-masing bukan vektor nol.

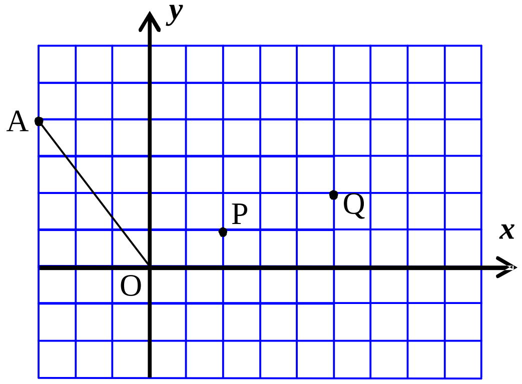
$$\overrightarrow{BG} = \underline{g} - \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix},\ \overrightarrow{CE} = \underline{e} - \underline{c} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix} = -a^2 + 0 + a^2 = 0$$

Karena $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$ maka terbukti $\overleftrightarrow{BG} \perp \overleftrightarrow{CE}$.

Latihan 2

1. Buatlah dua sumbu koordinat x dan y sembarang pada kertas berpetak. Pada kertas berpetak itu terdapat titik A, P, dan Q dengan A(–3,4), P(2,1), dan Q(5,2).



Lukis dua buah ruas garis yang panjangnya sama dengan OA melalui titik P sejajar $\overrightarrow{OA}$ dan dua buah ruas garis yang panjangnya sama dengan OA melalui titik Q yang tegak lurus $\overrightarrow{OA}$. Tentukan koordinat masing-masing titik ujung dari ruas-ruas garis yang dilukis itu!

2. Diketahui $\underline{a} = -\underline{i} + 4\underline{j}$; $\underline{b} = 3\underline{i} + \underline{j}$; $\underline{c} = 3\underline{i} - 4\underline{j}$ dan $\underline{w} = p\underline{a} + q\underline{b}$ dengan p dan q bilangan real tidak nol. Jika $\underline{c}$ sejajar $\underline{w}$, maka p dan q memenuhi hubungan ….

   (A) 8p – 15q = 0 (D) 15p + 8q = 0
   (B) 8p + 15q = 0 (E) 15p – 9q = 0
   (C) 15p – 8q = 0
   (UMPTN 1993; Rayon B, kode 52, nomor 3)

3. Diketahui $\underline{a} = 3\underline{i} - 2\underline{j}$; $\underline{b} = -\underline{i} + 4\underline{j}$; dan $\underline{r} = 7\underline{i} - 8\underline{j}$, jika $\underline{r} = k\underline{a} + m\underline{b}$, maka k + m = …
   (UMPTN 1995, Rayon A, kode 55, nomor 3)

4. Buktikan sifat-sifat dot vektor berikut
   a. $\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2$
   b. dua vektor tidak nol $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ saling tegak lurus jika dan hanya jika $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$.
   c. vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ searah (bila titik pangkalnya diimpitkan) jika $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}|$

5. Diketahui A(5,5), B(0,10). Titik P terletak pada ruas garis AB sehingga AP : PB = 3 : 2. Tentukan koordinat titik P tersebut !

6. Jika vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ membentuk sudut 60^o, $|\underline{a}| = 4$ dan $|\underline{b}| = 3$; maka $\underline{a} \cdot (\underline{a} - \underline{b}) = \ldots$

7. Misalkan θ adalah sudut antara vektor $\underline{a}$ dan vektor $\underline{b}$.
   Buktikan bahwa $|\underline{a}+\underline{b}|^2 = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 + 2|\underline{a}||\underline{b}|\cos\theta$.

8. Jika panjang vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$, dan ($\underline{a}$ + $\underline{b}$) berturut-turut adalah 12, 8, dan $4\sqrt{7}$, tentukan sudut antara vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$.

F. CROSS VEKTOR

Suatu hal yang hanya berlaku untuk ruang vektor berdimensi tiga R^3 adalah cross vektor (perkalian vektor antara 2 vektor), yakni perkalian antara 2 vektor yang menghasilkan vektor tunggal.

1. Definisi: (Thomas, 1986 : 727 – 730)

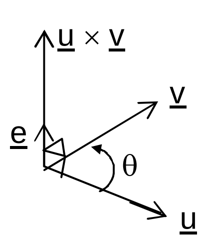
Jika $\underline{u} \neq \underline{0}$ dan $\underline{v} \neq \underline{0}$ dalam ruang dapat diputar tanpa mengubah besar atau arah masing-masing sehingga titik pangkalnya berimpit, dengan kaidah tangan kanan (ulir kanan) didefinisikan bahwa:

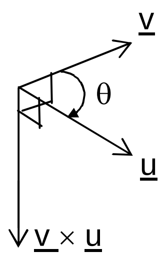
$$\boxed{\underline{u} \times \underline{v} = \underline{e}\,|\underline{u}||\underline{v}|\sin\theta,\ 0 \le \theta \le \pi}$$

$\underline{e}$ = vektor satuan yang tegak lurus $\underline{u}$ dan $\underline{v}$

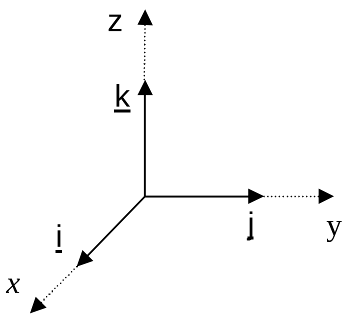
$\underline{u} \times \underline{v}$ dibaca "**vektor u kros vektor v**" atau cukup dengan "**u kros v**" saja.

Gambar:





Akibat dari definisi tersebut adalah $\underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{v}} = -\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{u}}$. Akibatnya selanjutnya jika



$\underline{i}$ = vektor satuan arah ke sumbu x
$\underline{j}$ = vektor satuan arah ke sumbu y
$\underline{k}$ = vektor satuan arah ke sumbu z, maka

$\underline{i} \times \underline{j} = -\underline{j} \times \underline{i} = \underline{k}$

$\underline{j} \times \underline{k} = -\underline{k} \times \underline{j} = \underline{i}$

$\underline{k} \times \underline{i} = -\underline{i} \times \underline{k} = \underline{j}$

$\underline{i} \times \underline{i} = \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} = \underline{0}$

Rumus determinan cross vektor

Jika $\underline{u} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$ dan $\underline{v} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}$, maka

$$\underline{u} \times \underline{v} = (a_2b_3 - a_3b_2)\underline{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\underline{k}, \text{ atau}$$

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Bukti:

$$\underline{u} \times \underline{v} = (a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}) \times (b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k})$$

$$= a_1b_1 \underbrace{\underline{i} \times \underline{i}}_{\underline{0}} + a_1b_2\, \underline{i} \times \underline{j} + a_1b_3\, \underline{i} \times \underline{k} + a_2b_1\, \underline{j} \times \underline{i} + a_2b_2 \underbrace{\underline{j} \times \underline{j}}_{\underline{0}} + a_2b_3\, \underline{j} \times \underline{k}$$

$$+ a_3b_1\, \underline{k} \times \underline{i} + {}_3b_2\, \underline{k} \times \underline{j} + a_3b_3 \underbrace{\underline{k} \times \underline{k}}_{\underline{0}}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\, \underline{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\, \underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\, \underline{k}, \text{ atau } \boxed{\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}$$

Perhatikan bahwa rumus tersebut dalam bentuk vektor kolom adalah:

$$\boxed{\underline{u} \times \underline{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}$$

Untuk memudahkan dalam mendapatkan unsur-unsur hasil kali dalam bentuk vektor kolom tersebut maka tuliskan lagi dua baris pertama dari unsur-unsur vektor yang dikalikan untuk diletakkan pada baris ke empat dan ke lima. Cara membayangkannya lebih lanjut adalah sebagai berikut.

$$\begin{array}{cccc} \underline{u} \times \underline{v} = & \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ & a_1 & & b_1 \\ & a_2 & & b_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Keterangan:

1. Tulis ulang elemen-elemen dua baris yang pertama.
2. Nilai komponen vektor yang pertama diperoleh dari determinan komponen-komponen vektor di baris II dan III (yakni dengan menutupi baris I).
3. Nilai komponen vektor yang kedua diperoleh dari determinan komponen-komponen vektor di baris III dan IV (yakni dengan menutupi baris II).
4. Nilai komponen vektor yang ketiga diperoleh dari determinan komponen-komponen vektor di baris IV dan V (yakni dengan menutupi baris III).
5. Bila kita berhadapan dengan bilangan pecahan di dalam komponen-komponen vektornya akan lebih mudah perhitungannya apabila pecahannya kita keluarkan dari komponen-komponen vektornya. Hal yang sama berlaku pula untuk komponen-komponen vektor yang memuat faktor yang sama, maka faktor yang sama dan terbesar itulah yang kita cari kemu-dian kita keluarkan dari dalam komponen. Tujuan dari kesemuanya itu adalah untuk memudahkan dan mengurangi tingkat kesalahan dalam perhitungan.

Cuntoh Perhitungan

Hitunglah $\underline{u} \times \underline{v}$ jika $\underline{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{6} \\ -1 \\ 1\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Jawab

Perhatikan bahwa $\underline{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{6} \\ -1 \\ 1\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Maka

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1\frac{1}{6} \\ -1 \\ 1\frac{2}{3} \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} = 3 \times \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

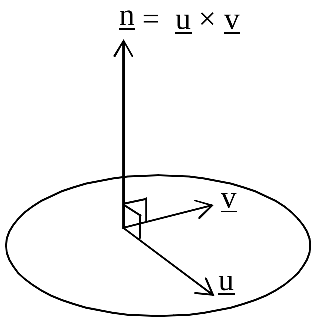
$$\begin{matrix} 2 & 7 \\ 1 & -6 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 28 \\ 1 \\ -19 \end{pmatrix}$$

2. Sifat cross vektor

Sifat 1 : $\underline{u} \times \underline{v}$ merupakan vektor yang tegak lurus vektor $\underline{u}$ dan tegak lurus vektor $\underline{v}$.

Bukti :



Dari definisi cross vektor yakni $\underline{u} \times \underline{v} = \underline{e}\, |\, \underline{u} \,|\, \underline{v} \,|\, \sin\theta|$, dengan $\underline{e}$ adalah vektor satuan yang tegak lurus $\underline{u}$ dan $\underline{v}$, maka

$$\underline{u} \times \underline{v} = \underbrace{\underline{e}}_{\text{vektor}}\ \underbrace{|\underline{u}||\underline{v}| \sin\theta}_{\text{skalar}},$$

Karena $\underline{u} \times \underline{v}$ merupakan kelipatan skalar dari vektor satuan $\underline{e}$ dan $\underline{e}$ didefinisikan tegak lurus $\underline{u}$ dan $\underline{v}$, maka $\underline{u} \times \underline{v} \perp \underline{u}$ dan $\underline{u} \times \underline{v} \perp \underline{v}$. Itu berarti $\underline{u} \times \underline{v}$ merupakan normal bidang yang melalui vektor-vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ ▨.

Sifat 2: $\underline{u} \times \underline{v}$ berlawanan arah dengan $\underline{v} \times \underline{u}$ sehingga

$$\boxed{\underline{u} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{u}}$$

Dalil : $\boxed{|\underline{u} \times \underline{v}| = |\underline{u}|\,|\underline{v}| \sin\theta}$

sin θ selalu positif untuk $0 < \theta \leq \pi$
dan $\underline{e}$ vektor satuan, maka
$|\underline{e}| = 1$ dan $|\sin\theta| = \sin\theta$

Bukti

Karena $\underline{u} \times \underline{v} = \underline{e}\, |\, \underline{u} \,|\, \underline{v} \,|\, \sin\theta\, |$, maka

$$|\underline{u} \times \underline{v}| = |\underline{e}|\,|\underline{u}|\,|\underline{v}| \sin\theta$$
$$= 1\, |u|\,|v| \sin\theta$$
$$= |\underline{u}|\,|\underline{v}| \sin\theta.$$

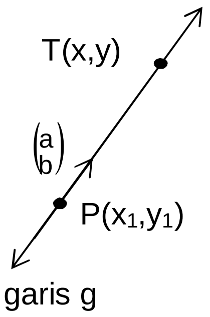
D. TERAPAN

1. Vektor Arah Garis Lurus

Suatu garis dapat dipandang sebagai perpanjangan tak terbatas dari suatu ruas garis. Suatu garis dapat pula dipandang sebagai perpanjangan tak terbatas dari suatu vektor yang melalui titik tertentu. *Vektor arah dari suatu garis ialah vektor yang menentukan arah dari garis itu*. Sedangkan suatu titik yang dilewati garis itu adalah syarat lain yang ditambahkan atas vektor arah sehingga garis yang dimaksudkan bersifat tunggal.

Misalkan $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ adalah vektor arah garis g.

Misalkan garis itu melalui titik $P(x_1,y_1)$ … (lihat gambar). Jika titik $T(x,y)$ adalah titik sembarang pada garis g maka



$$\overrightarrow{PT} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{t} - \underline{p} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ \lambda \text{ disebut parameter.}$$

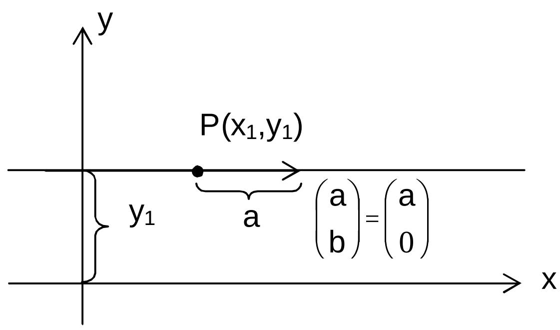
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$$

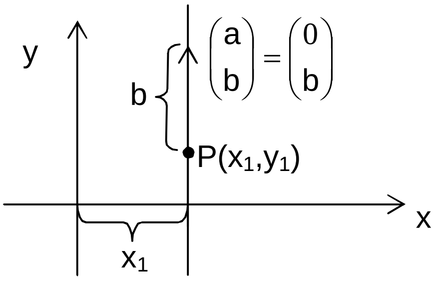
Bentuk terakhir ini disebut persamaan kanonik garis g dalam R^2. Sedangkan a dan b disebut bilangan-bilangan arah garis itu.

Sekarang perhatikan bahwa apabila:

$b = 0 \Rightarrow$ vektor arah $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ merupakan vektor yang sejajar sumbu *x*.

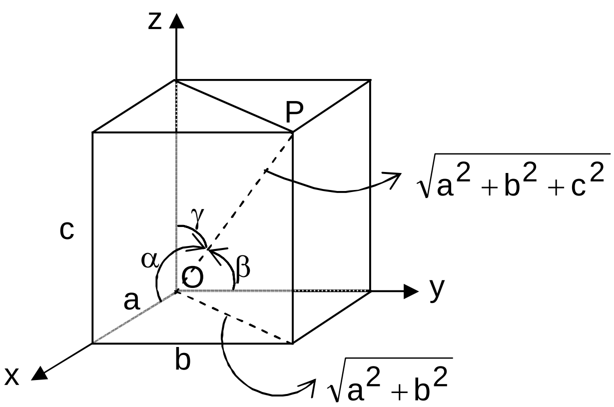


a = 0 $\Rightarrow$ vektor arah $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ merupakan vektor yang sejajar sumbu y.



Selanjutnya jika λ kita abaikan kita dapat memproses persamaan $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$ sehingga terbentuk Ax + By + C = 0 dengan A = b, B = –a, dan C = –($bx_1 - ay_1$) yang kemudian disebut *persamaan umum garis g*.

Dalam ruang dimensi tiga (R^3), gambaran tentang vektor arah suatu garis adalah seperti berikut.



Misalkan koordinat P(a,b,c), maka

$\underline{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ atau dalam notasi baris

= (a,b,c).

Vektor $\underline{v} = \underline{p}$ = (a,b,c) disebut *vektor arah garis g* yang melalui titik 0 dan titik P. Sedangkan cosinus-cosinus arahnya adalah:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ ;\ \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ ;\ \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\boxed{\text{Sehingga : } \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = a : b : c}$$

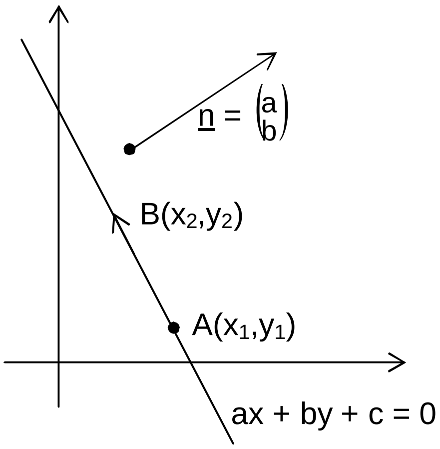
Selanjutnya a, b, dan c disebut *bilangan-bilangan arah* garis g yaitu bilangan yang sebanding dengan cosinus-cosinus arahnya

2. Vektor Normal Garis Lurus dalam R^2 dan Normal Bidang dalam R^3

Vektor normal dari suatu garis ialah vektor yang tegak lurus pada garis itu. Karena syaratnya asal tegak lurus, maka vektor normal itu dapat panjang, dapat pendek, asal bukan vektor nol. Biasanya vektor normal yang dipilih adalah vektor normal yang paling sederhana.

Dalil: $\boxed{\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ tegak lurus garis } ax + by + c = 0}$

Bukti:



Ambilah (tentukan) 2 titik berlainan $A(x_1,y_1)$ dan $B(x_2,y_2)$ pada garis $ax+by+c = 0$. Karena

$B(x_2,y_2)$ pada garis $\rightarrow ax_2+by_2+c = 0$

$A(x_1,y_1)$ pada garis $\rightarrow ax_1+by_1+c = 0$ $\quad -$

$a(x_2-x_1) + b(y_2-y_1) = 0 \; . \; . \; . \; . \;\; (1)$

$$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

$\underline{n} . \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$ … berdasarkan (1)

Karena $\underline{n} . \overrightarrow{AB} = 0$ maka terbukti $n \perp$ garis $ax + by + c = 0$

$\boxed{\text{Selanjutnya vektor } \underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ disebut } \textit{vektor normal} \text{ garis } ax + by + c = 0}$

Sejalan dengan itu $\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \perp$ bidang $ax + by + cz + d = 0$ dalam ruang dimensi tiga (R^3).

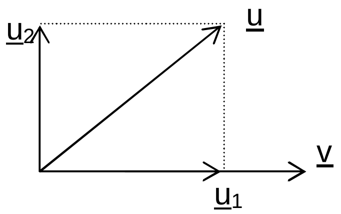
3. Proyeksi Orthogonal suatu Vektor ke Vektor Lain

Dalil :

Proyeksi vektor $\underline{u}$ ke vektor $\underline{v}$ adalah vektor $\underline{u}_1 = \left(\dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{v}|^2} \right) \underline{v}$.

Panjang proyeksi vektor $\underline{u}$ ke vektor $\underline{v}$ adalah $|\underline{u}_1| = |\underline{u}.\underline{e}_v|$; $\underline{e}_v$ adalah vektor satuan ke arah $\underline{v}$.

Bukti:



Dari gambar di samping vektor $\underline{u}_1$ adalah yang dimaksudkan sebagai vektor proyeksi $\underline{u}$ ke $\underline{v}$. Karena $\underline{u}_1$ searah dengan $\underline{v}$ maka $\underline{u}_1$ merupakan kelipatan dari $\underline{v}$ sehingga $\underline{u}_1 = k\underline{v}$ dengan k adalah skalar tertentu.

Perhatikan bahwa: $u = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \rightarrow : \underline{u}_2 = \underline{u} - \underline{u}_1$

$= \underline{u} - k\underline{v}$ …………(1)

$\underline{u}_2 \perp \underline{v} \rightarrow \underline{u}_2 \,.\, \underline{v} = 0$

$(\underline{u} - k\underline{v}).\underline{v} = 0$

$\underline{u}.\underline{v} - k\underline{v}.\underline{v} = 0$

$\underline{u}.\underline{v} - k|\underline{v}|^2 = 0 \rightarrow k = \dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{v}|^2}$ …………….(2)

Substitusikan nilai pada (2) ke $\underline{u}_1 = k\underline{v}$ akan diperoleh

$\boxed{\underline{u}_1 = \left(\dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\right)\underline{v}}$ …… terbukti merupakan rumus proyeksi vektor $\underline{u}$ ke vektor $\underline{v}$.

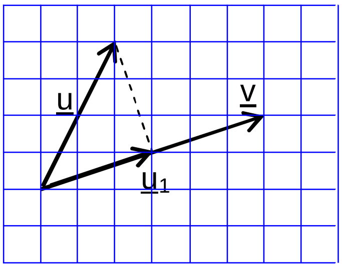
Dari $\underline{u}_1 = \left(\dfrac{\underline{u}\,.\,\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\right)\underline{v} \rightarrow |\underline{u}_1| = \left|\left(\dfrac{\underline{u}\,.\,\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\right)\underline{v}\right| = \left|\left(\dfrac{|\underline{u}\,.\,\underline{v}|}{|\underline{v}|^2}\right)\right||\underline{v}| = \left|\dfrac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{v}|}\right|$. Karena $\dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \underline{e}_v$ yakni vektor satuan ke arah $\underline{v}$ maka $\boxed{|\underline{u}_1| = \left|\dfrac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{v}|}\right| = |\underline{u}\,.\,\underline{e}_v|}$.

$\therefore$ Panjang vektor proyeksi $\underline{u}$ ke $\underline{v}$ adalah $= |\underline{u}\,.\,\underline{e}_v|$ dengan $\underline{e}_v = \dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$ vektor satuan ke arah $\underline{v}$.

Contoh

Tentukan proyeksi vektor $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ke vektor $\underline{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan panjang proyeksi vektor itu!

Jawab:



Proyeksi vektor $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ke $\underline{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ ialah

$$\underline{u}_1 = \left(\frac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{v}|^2} \right) .\underline{v} = \left(\frac{2 \times 6 + 4 \times 2}{\left(\sqrt{6^2 + 2^2}\right)^2} \right) . \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{20}{40} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ Panjangnya $|\underline{u}_1| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

Konfirmasi bentuk geometrinya dapat dilihat pada gambar. Jika panjang vektor proyeksi itu dihitung dengan rumus, maka:

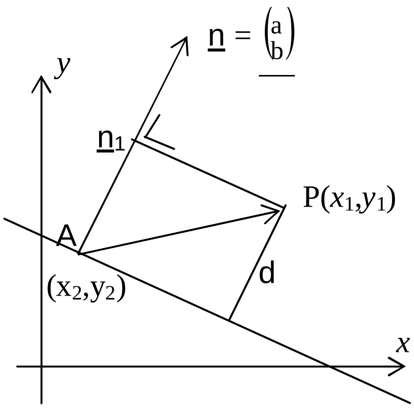
$$|\underline{u}_1| = |\underline{u} \cdot \underline{e}_v| = \left| \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{v}|} \right| = \left| \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{6^2 + 2^2}} \right| = \left| \frac{12 + 8}{\sqrt{40}} \right| = \frac{20}{\sqrt{40}} = \frac{20}{40}\sqrt{40} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} = \sqrt{10} .$$

4. Jarak titik ke garis dalam R^2 dan jarak titik ke bidang dalam R^3

Dalil:

> Jarak titik P(x_1, y_1) ke garis $ax + by + c = 0$ adalah
>
> $$d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Bukti:



Ambil (tentukan) titik A(x_2,y_2) sembarang titik pada garis $ax + by + c = 0$.

Selanjutnya vektor normal $\underline{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dibuat melalui A.

A(x_2, y_2) pada garis $\rightarrow$ $ax_2 + by_2 + c = 0$ sehingga $c = - ax_2 - by_2$ ….(1).

$d = |\underline{n}_1|$ adalah panjang proyeksi vektor $\overrightarrow{AP}$ ke vektor normal $\underline{n}$.

Maka $d = \left|\overrightarrow{AP}\,.\,\underline{e}_n\right| = \left|\frac{\overrightarrow{AP}\,.\,\underline{n}}{|\underline{n}|}\right| = \left|\frac{\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \left|\frac{a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

$= \left|\frac{ax_1 + by_1 - ax_2 - by_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$ substitusi dari (1)

$$\boxed{d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|}$$

Sejalan dengan itu dapat dibuktikan bahwa pada R^3 jarak titik P(x_1, y_1, z_1) ke bidang

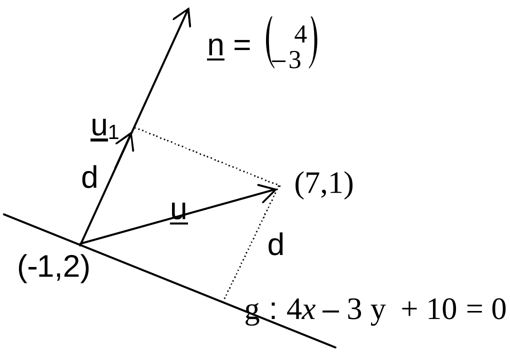
$ax + by + cz + d = 0$ adalah $d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$

Contoh

Tentukan jarak titik (7,1) ke garis $4x - 3y + 10 = 0$

Jawab

a. *Cara vektor*



Normal garis g : $4x$-3y+10 = 0 adalah $\underline{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Pilih salah satu titik pada garis $4x$-3y+10 = 0 yang berkoordinat bulat, misal (–1 ,2).

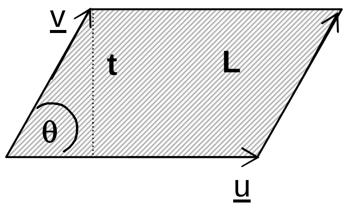
$\underline{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$. Jarak titik ke garis yang dimaksud adalah:

$$d = \left|\underline{u}\,.\,\underline{e}_n\right| = \left|\frac{\underline{u}\,.\,\underline{n}}{|\underline{n}|}\right| = \left|\frac{\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right| = \left|\frac{32+3}{5}\right| = \frac{35}{5} = 7.$$

b. *Cara Analitik*

$$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{4(7) - 3(1) + 10}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}\right| = \left|\frac{28 - 3 + 10}{5}\right| = \frac{35}{5} = 7.$$

5. Luas Permukaan dan Volum Bangun Ruang

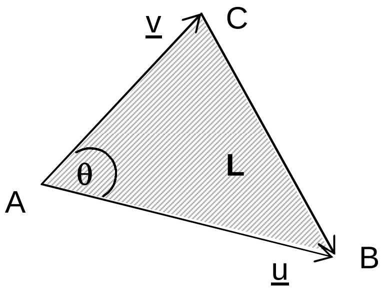


Luas jajargenjang yang dibentuk oleh vektor $\underline{u}$ dan vektor $\underline{v}$ adalah

L = alas × tinggi

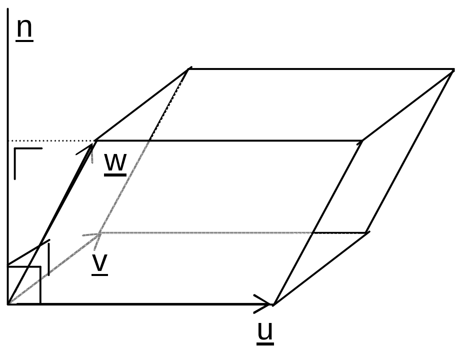
$= |\underline{u}| \times |\underline{v} \sin\theta| = |\underline{u}||\underline{v}| \sin\theta$, $0 \le \theta \le \pi$

$L_{▱} = |\underline{u} \times \underline{v}|$, sebab sin θ selalu positif.



Karena daerah segitiga tepat merupakan ½ dari daerah jajargenjang maka luas segitiga adalah:

$L_{\triangle} = \frac{1}{2}|\underline{u} \times \underline{v}|$

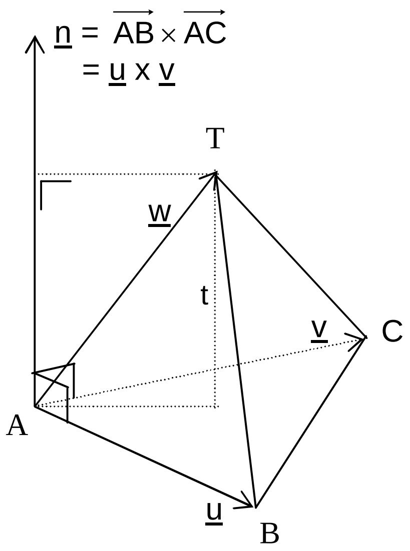


Paralel Epipedum ialah benda ruang bersisi 6 yang sisi-sisi sejajarnya kongruen dan masing-masing sisinya berupa jajargenjang.

Volum parallel epipedum yang dibentuk oleh 3 vektor $\underline{u}$, $\underline{v}$, dan $\underline{w}$ adalah:

$$V = |\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})| = |\underline{v} \cdot (\underline{u} \times \underline{w})| = |\underline{w} \cdot (\underline{u} \times \underline{v})|.$$

Volum bidang empat T.ABC adalah



$$V = \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|\right) \times (\text{proyeksi } \overrightarrow{AT} \text{ ke } \underline{n})$$

$$= \frac{1}{6} \times |\underline{n}| \times \left(\left|\frac{\underline{w} \cdot \underline{n}}{|\underline{n}|}\right|\right), \text{ sebab } \underline{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

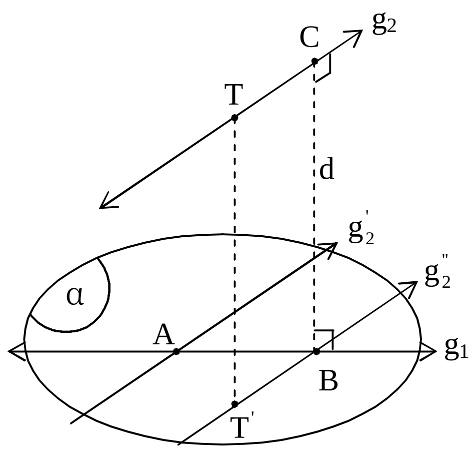
$$= \frac{1}{6} \times (|\underline{w} \cdot \underline{n}|)$$

$$= \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AT} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|\underline{w} \cdot (\underline{u} \times \underline{v})\right|$$

Selain itu dapat pula dibuktikan bahwa:

$$V = \frac{1}{6}\left|\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})\right|, \text{ atau } = \frac{1}{6}\left|\underline{v} \cdot (\underline{u} \times \underline{w})\right|$$

6. Jarak antara 2 garis yang bersilangan



Jarak dua garis bersilangan dalam R^3 adalah panjang ruas garis penghubung terpendek antara titik pada garis yang satu dengan titik lain pada garis kedua.

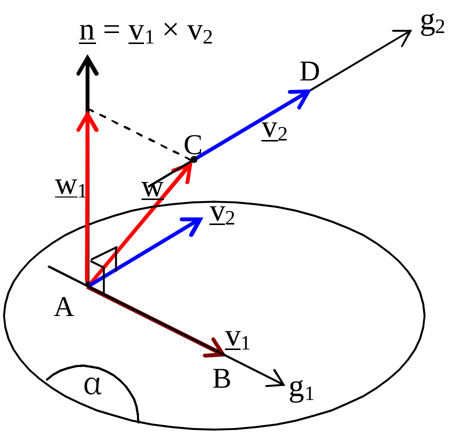
Secara keruangan, untuk melukis jarak terpendek antara titik A pada g_1 dan menentukan titik B pada g_2 (jarak yang dimaksudkan itu), dilakukan sbb.

(1) Tentukan sebuah titik A pada g_1 dan tarik garis $g_2' \parallel g_2$ melalui A

(2) Buat bidang α melalui g_1 dan g_2', maka bidang α akan melalui A dan sejajar g_2

(3) Proyeksikan salah satu titik, sebut T pada g_2 ke bidang α hingga kita peroleh T'. Dari T' kita tarik garis $g_2'' \parallel g_2'$. Garis g_2'' akan memotong g_1 di suatu titik, sebut B

(4) Dari B tarik garis $\parallel$TT' hingga memotong g_2 di suatu titik, sebut C. Maka d = BC adalah jarak 2 garis bersilangan g_1 dan g_2 yang dimaksudkan itu.



Dengan penalaran keruangan seperti itu maka secara vektor, jarak 2 garis bersilangan g_1 dan g_2 yang masing-masing melalui titik A dan B serta C dan D diwakili oleh jarak antara vektor $\underline{v}_1$ pada g_1 dan vektor $\underline{v}_2$ pada g_2. Maka secara vektor penalaran untuk mencari jarak 2 garis bersilangan yang diwakili oleh vektor-vektor $\underline{v}_1$ dan $\underline{v}_2$ adalah sebagai berikut.

(1) Impitkan kedua titik pangkal vektor $\underline{v}_1$ dan $\underline{v}_2$ yakni di titik A kemudian buat bidang α melalui $\underline{v}_1$ dan $\underline{v}_2$. Maka normal bidang α adalah $\underline{n} = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2$.

(2) Jika $\underline{w}_1$ adalah proyeksi vektor $\overrightarrow{AC}$ ke normal, maka

$$\boxed{d = |\underline{w}_1|}$$

adalah jarak 2 garis bersilangan yang dimaksudkan.

Perhatikan bahwa selain d = panjang proyeksi vektor $\overrightarrow{AC}$ ke normal, berikut juga benar bahwa

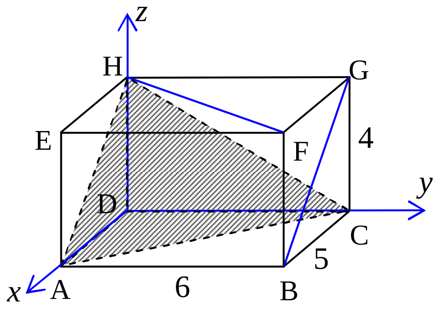
$$d = \left|\text{proyeksi } \overrightarrow{AD} \text{ ke normal } \underline{n}\right|$$

$$= \left|\text{proyeksi } \overrightarrow{BC} \text{ ke normal } \underline{n}\right|$$

$$= \left|\text{proyeksi } \overrightarrow{BD} \text{ ke normal } \underline{n}\right|$$, coba camkan!

Contoh

Diketahui balok ABCD EFGH dengan AB = 6, BC = 5, dan CG = 4 terletak pada koordinat ruang R^3 seperti yang ditunjukkan pada gambar.



Tentukan

(a) luas bidang ACH

(b) volum limas F.ACH

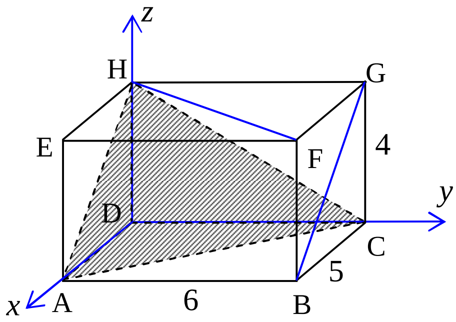
(c) jarak 2 garis bersilangan BG dan HF.

Jawab

Untuk memudahkan perhitungan, sebaiknya kita identifikasi terlebih dahulu koordinat titik-titik sudut yang diperlukan.

Dari gambar yang tersedia kita dapat menyatakan bahwa koordinat titik A(5, 0, 0) ; B(5, 6, 0) ; C(0, 6, 0) ; H(0, 0, 4) ; F(5, 6, 4) ; dan G(0, 6, 4).

Dari data tersebut maka



(a) Luas bidang ACH

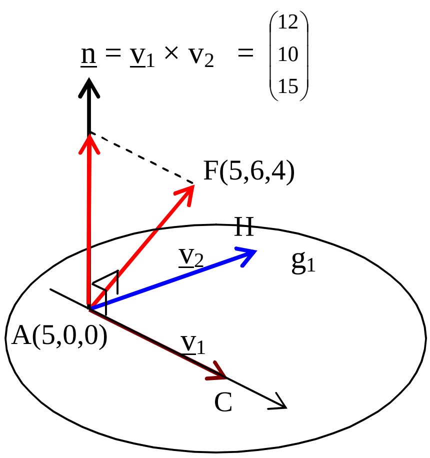
$$L = \tfrac{1}{2} \times \left| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AH} \right|$$

$$= \tfrac{1}{2} \times \left| (\underline{c} - \underline{a}) \times (\underline{h} - \underline{a}) \right|$$

$$= \tfrac{1}{2} \times \left| \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \tfrac{1}{2} \times \left| \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \right| = \tfrac{1}{2} \times \left| \begin{pmatrix} 24 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{12^2 + 10^2 + 15^2} = \sqrt{469} = 21{,}66.$$

(b) Volum limas F.ACH



Normal bidang ACH adalah kita pilih bagian yang paling sederhana dari $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AH}$. Perhatikan

$$\underline{n} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 24 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

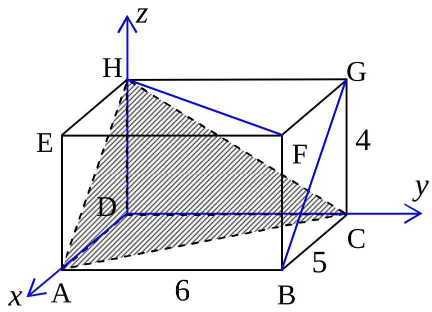
Maka tinggi limas adalah salah satu dari panjang vektor proyeksi $\overrightarrow{AF}$ ke $\underline{n}$, atau $\overrightarrow{CF}$ ke $\underline{n}$, atau $\overrightarrow{HF}$ ke $\underline{n}$. Misal kita pilih $\overrightarrow{AF}$ ke $\underline{n}$.

Sehingga t = $\left| \text{proyeksi } \overrightarrow{AF} \text{ ke } \underline{n} \right| = \left| \overrightarrow{AF} \cdot \underline{e}_n \right|$

$$= \left| \frac{\overrightarrow{AF} . \underline{n}}{|\underline{n}|} \right| = \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \right|} \right| = \frac{0 + 60 + 60}{\sqrt{12^2 + 10^2 + 15^2}} = \frac{120}{\sqrt{469}}.$$

$$V = \tfrac{1}{3} At = \tfrac{1}{3} \times \sqrt{469} \times \frac{120}{\sqrt{469}} = 40.$$

(c) Jarak 2 garis bersilangan BG dan HF



Dicari terlebih dahulu vektor $\overrightarrow{BG}$ dan $\overrightarrow{HF}$.

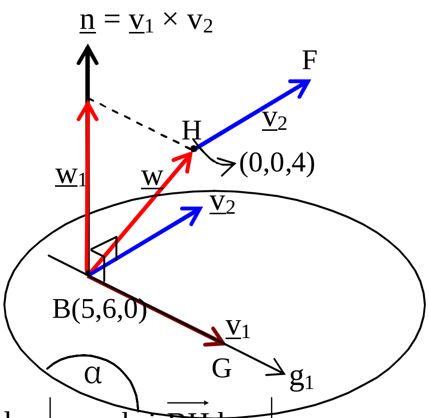
$$\overrightarrow{BG} = \underline{g} - \underline{b} = \begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\0\\4\end{pmatrix} \text{ dan } \overrightarrow{HF} = \begin{pmatrix}-5\\-6\\0\end{pmatrix}.$$

Normal dari BG dan HF adalah

$$\underline{n} = \overrightarrow{BG} \times \overrightarrow{HF} = \begin{pmatrix}-5\\0\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-5\\-6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & -6\\4 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}4 & 0\\-5 & -5\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-5 & -5\\6 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24\\-20\\30\end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix}12\\-10\\15\end{pmatrix}.$$

$$\begin{matrix}-5 & -5\\6 & 0\end{matrix}$$

Pilih normal yang paling sederhana, yaitu $\underline{n} = \begin{pmatrix}12\\-10\\15\end{pmatrix}$. Maka jarak yang dimaksud adalah



$$d = \left|\text{proyeksi } \overrightarrow{BF} \text{ ke } \underline{n}\right| \quad \text{atau}$$
$$= \left|\text{proyeksi } \overrightarrow{BH} \text{ ke } \underline{n}\right| \quad \text{atau}$$
$$= \left|\text{proyeksi } \overrightarrow{GH} \text{ ke } \underline{n}\right| \quad \text{atau}$$
$$= \left|\text{proyeksi } \overrightarrow{GF} \text{ ke } \underline{n}\right| \quad \text{pilih salah satu misal}$$

$\left|\text{proyeksi } \overrightarrow{BH} \text{ ke } \underline{n}\right|$ maka

$$d = \left|\text{proyeksi } \overrightarrow{BH} \text{ ke } \underline{n}\right|$$

$$= \left|\overrightarrow{BH} \cdot \underline{e}_n\right| = \left|\frac{\overrightarrow{BH} \cdot \underline{n}}{|\underline{n}|}\right| = \left|\frac{\begin{pmatrix}-5\\-6\\4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}12\\-10\\15\end{pmatrix}}{\sqrt{12^2 + (-10)^2 + 15^2}}\right| = \left|\frac{-60+60+60}{\sqrt{469}}\right| = \frac{60}{21{,}66} = 2{,}77.$$

Cocokah jika dihitung dengan cara lain misalnya panjang vektor proyeksi BF ke $\underline{n}$.

Latihan 3

1. Diketahui titik P(2,–3), Q(3,–1), dan R(4,-2). Tentukan panjang proyeksi vektor $\overrightarrow{PQ}$ ke vektor $\overrightarrow{PR}$!

2. Diketahui 3 titik A, B, dan C terlatak pada bidang koordinat R^2. Koordinat $A(a_1 , a_2)$, $B(b_1 , b_2)$, dan $C((c_1 , c_2)$.

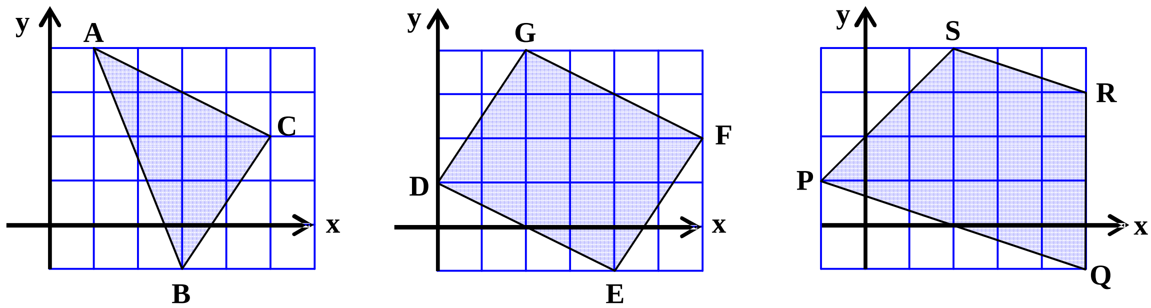
   Buktikan bahwa

   Luas ΔABC adalah

$$L = \frac{1}{2}(a_1b_2 - b_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + c_1a_2 - a_1c_2) = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \\ \\ \\ a_1 & a_2 \end{matrix}$$

$- b_1a_2$
$- c_1b_2$
$- c_1b_2$
$+ a_1b_2$
$+ b_1c_2$
$+ c_1a_2$

   Tentukan luas bangun-bangun berikut menggunakan rumus tersebut di atas!
   Selidiki kebenaran hasil perhitungannya dari analisis pengamatan gambar .



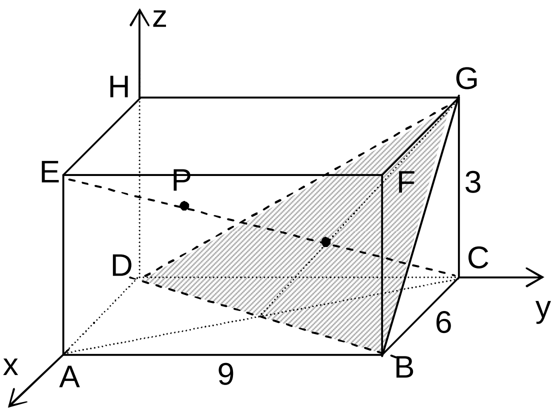
3. Diketahui $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{i} - 5\underset{\sim}{j}$ dan $\underset{\sim}{v} = 8\underset{\sim}{i} + m\underset{\sim}{j}$. Jika panjang proyeksi vektor $\underset{\sim}{u}$ ke $\underset{\sim}{v}$ adalah $\frac{1}{5}$ dari panjang vektor $\underset{\sim}{v}$, tentukan m dan proyeksi vektor $\underset{\sim}{u}$ ke $\underset{\sim}{v}$!

4. Tentukanlah jarak titik A(2,4) ke garis yang persamaannya $3x - 4y - 15 = 0$.

5. Tentukan panjang vektor-vektor berikut .

   a. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -2\frac{2}{5} \\ 1\frac{1}{5} \\ 2\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

6. Balok ABCD.EFGH dengan AB = 9, BC = 6. dan CG = 3 terletak pada koordinat ruang seperti berikut. Titik P pada rusuk $\overline{CE}$ sehingga CP : CE = 2 :



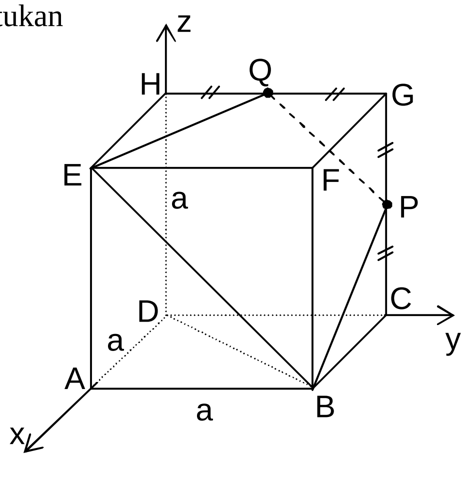
a. Tentukan koordinat titik-titik A, B, C, D, E, F, G, dan H !
b. Tentukan koordinat titik P !
c. Tentukan jarak titik P ke bidang BDG !
d. Sudut antara $\overline{CE}$ dan $\overline{BG}$
e. Jarak 2 garis bersilangan $\overleftrightarrow{CE}$ dan $\overleftrightarrow{BG}$

Petunjuk untuk pertanyaan

d. Sudut antara 2 garis bersilangan = sudut antara vektor-vektor yang mewakilinya (dipilih bagian yang lancip)

e. Tentukan normal bidang α yakni bidang yang melalui titik B dan memuat vektor-vektor $\underline{u}$ dan $\underline{v}$ dengan $\underline{u} = \overrightarrow{BG}$ dan $\underline{v} = \overrightarrow{CE}$, maka bidang α akan sejajar $\overline{CE}$. Jarak yang dimaksud adalah panjang vektor proyeksi $\overrightarrow{BC}$ ke normal atau $\overrightarrow{BE}$ ke normal (selidiki bahwa keduanya sama).

7. Kubus ABCD.EFGH panjang rusuknya a, terletak pada koordinat ruang seperti berikut. Tentukan



Titik P dan Q berturut-turut terletak pada pertengahan rusuk $\overline{CG}$ dan $\overline{HG}$. Jika panjang rusuk kubus 4, tentukan

a. koordinat titik-titik A, B, C, D, E, F, G, H, P, dan Q.
b. sudut antara rusuk $\overline{BD}$ dengan bidang BEQP. (**UAN 2004**)
c. Luas daerah BEQP = $L_{BEP} + L_{EPQ}$ = ...?
d. Volum limas F. BEQP.

BAB VIII
PENUTUP

A. KESIMPULAN

Vektor yang selama ini mungkin baru sebatas pengetahuan sederhana dan belum begitu didalami oleh teman-teman guru SMA/MA ternyata merupakan materi yang cukup menantang dan memiliki terapan luas khususnya yang berkait dengan geometri.

Vektor sebagai pengetahuan murni (sebelum dihubungkan dengan koordinat) meski dapat memudahkan perhitungan perbandingan panjang pada ruas garis, dianggap kurang menarik, sebab masih tampak abstrak. Perhitungan perbandingan panjang pada ruas garis tersebut didasarkan pada basis sembarang, yakni pada ruang vektor berdimensi dua (R^2) asal dipilih 2 vektor yang tidak searah. Namun setelah dikaitkan dengan sistem koordinat R^2 dan R^3, operasi dot dan kros vektor, dengan basis yang saling tegak lurus dan panjang masing-masing sama dengan 1 (dikenal dengan nama *basis orthonormal*), yakni $\underline{i}$ dan $\underline{j}$ untuk R^2, dan $\underline{i}$, $\underline{j}$, dan $\underline{k}$ untuk R^3 topik vektor ini menjadi semakin manarik dan manantang. Mengapa?, sebab perhitungan-perhitungan besaran obyek-obyek geometri seperti jarak, sudut, luas, dan volum dapat dilakukan secara lebih mudah, jelas, dan meyakinkan.

Sebuah catatan yang perlu diketahui oleh para guru SMA adalah materi vektor yang dikenalkan pada diklat ini dimaksudkan untuk **mengenalkan perhitungan unsur-unsur geometri dengan pendekatan aljabar** (vektor) **bukan ansich secara geometri**. Inilah bedanya dengan materi geometri ruang yang pokok pembelajaannya menekankan pada pemahaman ruang. Pemahaman ruang yang dimaksud misalnya **memahami geometri secara keruangan** seperti hubungan antara titik, garis, dan bidang. Apakah sebuah titik terletak pada suatu garis atau tidak, apakah sebuah titik terletak pada suatu bidang atau tidak, apakah 2 buah garis terletak sebidang atau tidak, jika mereka sebidang dan tidak sejajar maka kedua garis saling bepotongan. Sebaliknya jika kedua garis **tidak sebidang** maka kedua garis disebut **bersilangan**, sehingga **kedua garis tidak akan berpotongan meskipun** pada gambar ruang **tampak seperti berpotongan**. Dengan demikian materi vektor yang ditulis pada diklat ini berlaku sebagai tambahan pengetahuan bagi guru dalam pemecahan masalah serta bagaimana mengemas pembelajaran yang bersifat menantang sehingga dapat menarik minat siswa untuk mempelajarinya lebih lanjut.

B. SARAN

Bagi para alumni diklat yang berkomitmen untuk merealisasikan komitmennya pada anak didik agar mereka menjadi senang dengan pelajaran matematika diberikan saran-saran sebagai berikut.

1. Laporkan kepada atasan langsung tentang pengalaman apa saja yang menarik selama menerima sajian akademik dalam kegiatan pelatihan
2. Pikirkan perangkat kerja apa saja yang mendesak untuk dibuat dan segera diterapkan/ diimplementasikan di lapangan. Pertama adalah bagian-bagian yang mendesak untuk diterapkan di kelas yang diampunya, kemudian kepada sesama guru di sekolahnya,

selanjunya pada kegiatan MGMP dan terakhir barulah cita-cita ke lingkup yang lebih luas
3. Ciptakan segera perangkat tersebut dengan niat baik, tulus, dan iklas demi peningkatan profesi dan demi anak bangsa di masa depan
4. Diskusikan rencana tindak lanjut Anda pasca pelatihan kepada kepala sekolah dan kepada pengawas
5. Bersemboyanlah “ Apa yang terbaik yang saya miliki dan dapat saya perbuat untuk kemajuan bangsa ini sebagai andil dalam rangka mencerdaskan bangsa”. Tuhan maha mengetahui dan pasti akan memberikan ganjaran yang patut disyukuri berupa sesuatu yang tak terduga di masa depan.

Amin.

Daftar Pustaka

Anton, Howard., **Elementary Linear Algebra (Fourth Edition)**. John Wiley & Sons, Inc., Canada, 1984.

Depdiknas., **Kurikulum 2004** (Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika SMA dan MA). Departeman Pendidikan Nasional, Jakarta, 2003.

(----------)., **Broad Based Education** (Buku II). Departemen Pendidikan Nasional, Jakarta, 2003.

Holland, D-Treeby, T., **Vektor (Pure and Applied)**. Edward Arnold Limited, London, 1983.

Muharti HW., **Ilmu Ukur Analit Ruang**, FPMIPA IKIP Yogyakarta, 1975.

Raharjo, Marsudi., **Vektor R^2 dan R^3** (Standar Bahan Ajar Penataran Matematika Guru SMA), PPPG Matematika, Yogyakarta, 2000.

Thomas, George B – Finley, Ross L., **Calculus and Analytic Geometry**. Addisson Wesley Publishing Co, Boston, 1986.

KUNCI SOAL LATIHAN

Latihan 1 halaman 10

Semuanya pembuktian, tanpa kunci.

Latihan 2 halaman 20

1. Dari P titik-titik ujungnya (–1,5) dan (5,–3)
   Dari Q titik-titik ujungnya (1,–1) dan (9,5).
2. (B) 8p + 15q = 0.
3. 1
4. –
5. (2,8)
6. 10
7. –
8. 60^0.

Latihan 3 halaman 35

1. $\frac{4}{5}\sqrt{5}$
2. a. 8 b. 16 c. 18
3. m = –1 atau m = –24

   m = –1 $\Rightarrow \underline{v} = 8\underline{i} - \underline{j} \Rightarrow$ proyeksi $\underline{u}$ ke $\underline{v}$ $= \left(\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\right)\underline{v} = \frac{104}{65}\underline{i} - \frac{13}{65}\underline{j}$

   m = –24 $\Rightarrow \underline{v} = 8\underline{i} - 24\underline{j} \Rightarrow$ proyeksi $\underline{u}$ ke $\underline{v}$ $= \frac{8}{5}\underline{i} - \frac{24}{5}\underline{j}$
4. 5.
5. a. 3 b. 6 c. 1 d. $\frac{18}{5}$
6. a. A(6,0,6), B(6,9,0), C(0,9,0), D(0,0,0), E(6,0,3), F(6,9,3), G(0,6,3), H(0,0,3)

   b. P(4,3,2)

   c. $\frac{18}{7}$

   d. arc cos $\frac{3}{\sqrt{70}}$ = 69^o

   e. $\frac{18}{61}\sqrt{6} \approx 2{,}3$

7. a. A(a,0,0), B(a,a,0), C(0,a,0), D(0,0,0), E(a,0,a), F(a,a,a), G(0,a,a) , H(0,0,a).

   b. 45^o

   c. $\frac{9}{8}a^2$

   d. Normal bidang BEQP adalah $\underline{n}$ = bentuk sederhana dari $\overrightarrow{BE} \times \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

   tinggi limas = $\left|\text{proyeksi } \overrightarrow{BF} \text{ ke } \underline{n}\right| = \frac{2}{3}a$. $V_{limas} = \frac{1}{4}a^3$.