DIKLAT GURU PENGEMBANG MATEMATIKA SMK
JENJANG LANJUT TAHUN 2009

MATRIKS

Oleh: Drs. MARKABAN, M.Si.

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK
DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
2009

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas karunia-Nya, bahan ajar ini dapat diselesaikan dengan baik. Bahan ajar ini digunakan pada Diklat Guru Pengembang Matematika SMK Jenjang Lanjut Tahun 2009, pola 120 jam yang diselenggarakan oleh PPPPTK Matematika Yogyakarta.

Bahan ajar ini diharapkan dapat menjadi salah satu rujukan dalam usaha peningkatan mutu pengelolaan pembelajaran matematika di sekolah serta dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat di dalam maupun di luar kegiatan diklat.

Diharapkan dengan mempelajari bahan ajar ini, peserta diklat dapat menambah wawasan dan pengetahuan sehingga dapat mengadakan refleksi sejauh mana pemahaman terhadap mata diklat yang sedang/telah diikuti.

Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah berpartisipasi dalam proses penyusunan bahan ajar ini. Kepada para pemerhati dan pelaku pendidikan, kami berharap bahan ajar ini dapat dimanfaatkan dengan baik guna peningkatan mutu pembelajaran matematika di negeri ini.

Demi perbaikan bahan ajar ini, kami mengharapkan adanya saran untuk penyempurnaan bahan ajar ini di masa yang akan datang. Saran dapat disampaikan kepada kami di PPPPTK Matematika dengan alamat: Jl. Kaliurang KM. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, DIY, Kotak Pos 31 YK-BS Yogyakarta 55281. Telepon (0274) 881717, 885725, Fax. (0274) 885752. email: p4tkmatematika@yahoo.com

Kepala,

Kasman Sulyono
NIP. 130352806

Daftar Isi

Bab I
Pendahuluan

A. Latar Belakang

Matriks dapat digunakan untuk mencirikan rangkaian, misalnya dalam jaringan listrik, dalam jaringan jalan-jalan yang menghubungkan kota-kota, dalam proses produksi dan sebagainya. Dalam hal ini membentuk koefisien transformasi linier atau muncul dalam sistem persamaan linier. Dalam koefisien itu kita mengamati suatu susunan dari banyak bilangan sebagai satu kesatuan, yang dinyatakan oleh satu simbul, dan melakukan perhitungan dengan simbul tadi dalam bentuk matriks. Aplikasi konsep matriks juga dapat untuk menyelesaikan persoalan program linier, analisis ekonomi yang bersifat kuantitatif misalnya didalam menganalisis tabel input output dan dalam metode-metode lain yang mempelajari hubungan-hubungan antar variabel, sehingga ruang lingkup matriks yang berkaitan dengan penerapannya telah dikembangkan lebih lanjut dan diterapkan untuk memecahkan permasalahan pada berbagai bidang.

Bahan ajar ini sebagai lanjutan dari bahan ajar matriks sebelumnya yang telah membahas tentang konsep-konsep dasar matriks sehingga dalam bahan ajar ini perlu dikembangkan lebih lanjut oleh guru dengan contoh-contoh penerapan pada bidang keahliannya.

B. Tujuan

Dengan bahan ajar diharapkan dapat semakin memantapkan penguasaan materi sehingga guru mampu mengembangkan keterampilan siswa dalam melakukan, menerapkan dalam kehidupan sehari-hari, dan memecahkan masalah yang berkaitan dengan matriks.

C. Ruang Lingkup

Bahan ajar matriks lanjut ini dimaksudkan untuk meningkatkan kompetensi guru dalam menyelenggarakan proses belajar mengajar matematika. Hal-hal yang akan dibahas dalam bahan ajar ini meliputi: Operasi Matriks, Determinan dan Invers suatu Matriks, Rank suatu Matriks, Sistem Persamaan Linier dan Penyelesaiannya, serta contoh aplikasi Matriks pada bidang keahlian.

Bab II
Matriks

A. Kapita Selekta Operasi Matriks

Untuk mengingatkan kembali tentang operasi matriks perhatikan soal berikut:
Andaikan dalam suatu survey diperoleh suatu data penggunaan tanah di suatu kota pada tahun 2000 sebesar 50 ha adalah sebagai berikut :

I. Untuk perumahan : 30 %
II. Untuk komersial : 20 %
III. Untuk industri : 50 %

Dari data tersebut tentukan persentase penggunaan tanah di kota tersebut pada tahun 2005 dan tahun 2010 dengan menggunakan matriks apabila probabilitas perubahan untuk interval 5 tahun ditentukan oleh tabel matriks A dibawah ini:

	Ke - I	Ke - II	Ke - III
Dari I	0,8	0,1	0,1
Dari II	0,1	0,7	0,2
Dari III	0	0,1	0,9

Untuk menyelesaikan kita menggunakan perkalian matriks, andaikan matriks kolom dari tabel tersebut untuk tahun 2000 dinyatakan oleh: X=$\begin{bmatrix} 30 & 20 & 50 \end{bmatrix}$ dan Y menyatakan penggunaan tanah tahun 2005 maka:

$$Y = X\,A = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 22 & 52 \end{bmatrix}$$

sedangkan Z menyatakan penggunaan tanah sampai tahun 2010.

Diperoleh : $$Z = Y\,A = \begin{bmatrix} 26 & 22 & 52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 23{,}2 & 53{,}8 \end{bmatrix}$$

Jadi penggunaan tanah sampai tahun 2010 adalah :

	Th. 2000	Th. 2005	Th. 2010
Untuk perumahan	30 %	26 %	23 %
Untuk Komersial	20 %	22 %	23,2 %
Untuk Industri	50 %	52 %	53,8 %

Untuk meningkatkan kemampuan siswa dalam mempelajari konsep operasi matriks dapat pula diberikan permasalahan-permasalahan yang ada kaitannya dengan matriks seperti soal berikut:

Dinas perhubungan di Propinsi X mengatur rute perjalanan yang menghubungkan Kota A ke Kota B melalui Kota C atau D. Dari Kota A ke Kota C ada 2 rute perjalanan, dari Kota C ke Kota B ada 3 perjalanan. Dari Kota A ke Kota D ada 4 perjalanan, sedangkan dari Kota D ke Kota B ada 2 perjalanan. Berapa banyaknya rute perjalanan jika seseorang ingin bepergian dari Kota A ke Kota B melalui Kota C atau D, dan tuliskan dengan perkalian matriks?

Bagaimana menyelesaikan permasalahan soal diatas.

B. Determinan Matriks

Untuk menentukan nilai determinan suatu matriks selain dengan metode Sarrus dapat juga dengan ekspansi Laplace

1. Metode Sarrus

Jika matriks A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka det (A) = $|A|$ = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad–bc

Sebagai pengingat ketentuan di atas diperoleh dari $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Jika matriks A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

maka det (A) = $|A|$ = $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ = aei + bfg +cdh – ceg – afh - bdi

Sebagai pengingat ketentuan di atas diperoleh dari $\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right.$

Perlu diperhatikan bahwa cara demikian tidak berlaku bila matriks berordo 4x4 dan yang lebih tinggi lagi.

2. Ekspansi Laplace

Sebelumnya dijelaskan pengertian matriks bagian atau submatriks. Jika dilakukan partisi pada elemen-elemen suatu matriks dengan menarik garis vertikal dan atau garis horisontal diantara baris atau kolom, maka himpunan bagian dari elemen-elemen tersebut disebut matriks bagian atau submatriks. Kita kadang perlu mempelajari beberapa himpunan bagian dari elemen-elemen dalam sebuah matriks yang membentuk matriks bagian atau submatriks tersebut.

<u>Contoh</u> :

Andaikan matriks A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{13} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{23} \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ maka: matriks-matriks bagian A tersebut adalah: A_{11}= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$, A_{21} = $\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, A_{12} = $\begin{bmatrix} a_{13} \end{bmatrix}$ dan A_{22} = $\begin{bmatrix} a_{23} \end{bmatrix}$

Perhatikan matriks A berordo n X n yaitu A = $\lfloor A_{ij} \rfloor$, dan M_{ij} adalah submatriks dari A dengan ordo (n-1) X (n-1) yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemennya pada baris ke-i dan elemen-elemen pada kolom ke-j.

Minor dari elemen a_{ij} suatu matriks A = $\lfloor A_{ij} \rfloor$ adalah $|M_{ij}|$ dan kofaktor dari elemen a_{ij} adalah K_{ij} = $(-1)^{i+j}$ $|M_{ij}|$ = $(-1)^{i+j}$ det (M_{ij}) merupakan suatu skalar.

Determinan suatu matriks merupakan jumlah perkalian elemen-elemen dari sebuah baris (kolom) dengan kofaktor-kofaktor yang bersesuaian. Dapat dirumuskan:

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}K_{ij}$ dengan i sebarang,diekspansikan menurut baris ke-i.

$\det(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}K_{ij}$ dengan j sebarang, diekspansikan menurut kolom ke-j.

Metode ini cukup mengambil satu ekspansi saja misal ekspansi baris ke-1

<u>Contoh:</u>

Diberikan matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, maka M_{11} = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

$M_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$, $M_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

M_{11}, M_{12} dan M_{13} merupakan submatriks hasil ekspansi baris ke-1 dari matriks A. Untuk mendapatkan det(A) dengan ekspansi Laplace dicari minornya dari ekspansi baris ke-1 diatas, yaitu $|M_{11}|$ = -13 , $|M_{12}|$ = - 26 dan $|M_{13}|$ = - 13 , maka :

$\det(A) = a_{11}.K_{11} + a_{12}.K_{12} + a_{13}.K_{13}$

$= a_{11}.(-1)^{1+1}.\ |M_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}\ .\ |M_{12}| + a_{13}(-1)^{1+3}\ .\ |M_{13}|$

$= 2.\ 13 - 4.\ 26 + 6.\ 13 = 0$

<u>Sifat-sifat Determinan</u>

1) . Nilai determinan dari suatu matriks sama dengan nilai determinan dari matriks tranposenya.

2). Jika masing-masing elemen pada baris (kolom) dari suatu matriks adalah nol maka nilai determinannya nol

3). Jika dua baris (kolom) dalam suatu matriks ditukar tempatnya maka nilai determinan akan berlawanan dengan determinan semula.

4). Jika suatu matrik mempunyai dua baris (kolom) yang sama, maka determinannya sama dengan nol.

5). Nilai suatu determinan akan menjadi k kali nilai determinan semula jika semua elemen suatu baris (kolom) dikalikan dengan skalar k, k ≠ 0.

6). Jika dalam suatu determinan ada dua baris (kolom) yang sebanding, maka nilai determinannya nol.

7). Jika semua elemen-elemen dari suatu baris (kolom) digandakan dengan k kemudian ditambahkan (dikurangkan) pada elemen-elemen yang bersesuaian dari baris (kolom) lainnya, maka nilai determinannya tidak berubah

C. Invers Matriks

Matrks-matriks persegi A dan B sedemikian hingga AB = BA = I maka A disebut insvers B ditulis B^{-1} dan sebaliknya B adalah invers A ditulis A^{-1} sehingga berlaku $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, dimana I matriks identitas.

Invers matriks A dirumuskan $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}.\text{Adj}(A)$,

dimana Adj(A) dinamakan adjoin matriks A

Adjoin matriks A adalah transpose dari kofaktor-kofaktor matriks tersebut, sehingga adj A = $(K_{ij})^T$

Jika A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

<u>Contoh</u> :

Diberikan matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, tentukan invers dari matriks tersebut!

<u>Jawab</u> :

Untuk mencari determinan matriks A, cara paling praktis adalah dengan mengekspansi baris yang memuat nol terbanyak yaitu baris ke-3, maka:

det (A) = 6 (1 x 4 – 0 x 2) = 24

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -12 & -2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jadi $A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 24 & -12 & -2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{12}{24} & -\frac{2}{24} \\ 0 & \frac{6}{24} & -\frac{5}{24} \\ 0 & 0 & \frac{4}{24} \end{bmatrix}$

Cara lain untuk mencari invers matriks dengan menggunakan tranformasi elementer.

Apabila A suatu matriks berordo $m \times n$, maka yang dimaksud dengan transformasi elementer terhadap matriks A yaitu transformasi baris elementer dan transformasi kolom elementer. Transformasi baris elementer adalah salah satu dari operas-operasi berikut :

1). menukar baris ke-i dengan baris ke-j disingkat $R_{i\,j}$

2). mengalikan baris ke-i dengan bilangan real $k \neq 0$ disingkat $R_i\,(k)$

3). menambah / mengurangi baris ke-i dengan k kali baris ke-j disingkat $R_{i\,j}\,(k)$

Sedangkan yang dimaksud transformasi kolom elementer adalah salah satu dari operas-operasi berikut :

1). menukar kolom ke-i dengan kolom ke-j disingkat $C_{i\,j}$

2). mengalikan kolom ke-i dengan bilangan real $k \neq 0$ disingkat $C_i\,(k)$

3). menambah/mengurangi kolom ke-i dengan k kali kolom ke-j disingkat $C_{i\,j}\,(k)$

Jika suatu transformasi elementer dioperasikan secara tunggal pada matriks identitas I maka akan didapat matriks elementer. Terdapat tiga macam matriks elementer yaitu :

1). Matriks E_{ij} yaitu suatu matriks elementer yang diperoleh dari matriks I dengan menukar baris / kolom ke-i dengan baris / kolom ke-j

2). Matriks $E_i(k)$ yaitu suatu matriks elementer yang diperoleh dari matriks I dengan mengalikan baris / kolom ke-i dengan bilangan real $k \neq 0$

3). Matriks $E_{ij}(k)$ yaitu suatu matriks elementer yang diperoleh dari matriks I dengan menambah baris / kolom ke-i dengan k kali baris / kolom ke-j.

Untuk mendapatkan matriks invers dengan menggunakan transformasi baris elementer, perhatikan matriks non singular A yang dapat dinyatakan sebagai perkalian dari matriks-matriks elmenter. Oleh karena itu ada matriks-matriks elementer $E_1, E_2, \ldots E_p$ sedemikian sehingga $E_1. E_2 \ldots E_p . A = I$, berarti matriks A dapat direduksi menjadi I dengan sederetan transformasi baris elementer, sehingga akan diperoleh $A^{-1} = E_1. E_2 \ldots E_p . I$.

Dari uraian diatas maka untuk mendapatkan A^{-1} dapat kita lakukan langkah-langkah sebagai berikut :

1). Bentuk matriks $\left[A|I\right]$

2). Dengan menggunakan transformasi baris elementer , reduksi $\left[A|I\right]$ menjadi $\left[I \mid B\right]$ sehingga $B = A^{-1}$

<u>Contoh :</u>

Dengan transformasi baris elementer tentukan invers matriks :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

<u>Penyelesaian :</u>

Dengan transformasi baris dapat disusun sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_1(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_{32}(1)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{R_{21}(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{R_{31}(-1)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{R_{13}(2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

<u>Jadi</u> matriks $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Sifat-sifat invers matriks :

1. Jika A dan B adalah matriks yang memenuhi AB = BA = I, maka matriks A dan B dikatakan sebagai matriks yang saling invers karena
   $A = B^{-1}$ dan $B = A^{-1}$
2. Jika matriks A mempunyai invers, maka inversnya tunggal
3. Jika A dan B adalah matriks yang mempunyai invers dan ordonya sama maka :
   a). AB mempunyai invers
   b). $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
   c). $(A^{-1})^{-1} = A$
   d). $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$, $k \neq 0$

Bila suatu matriks A mempunyai determinan nol atau det(A)=0 maka matriks A tidak mempunyai invers. Suatu matriks yang tidak mempunyai invers disebut matriks singular. Bila det(A) $\neq$ 0, maka matriks A pasti mempunyai invers. Suatu matriks persegi yang mempunyai invers disebut matriks non singular.

D Rank matriks

Definisi :

Banyaknya vektor baris yang bebas linier dari matrks A disebut rank matriks A, dinyatakan dalam bentuk rank A atau r(A), atau rank dari suatu matriks A sama dengan banyaknya vektor kolom yang bebas linier dari matriks A, sedangkan untuk rank dari matriks nol adalah nol atau r(A) =0.

Apabila suatu matriks dapat dipartisi sebagai $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dengan A adalah matriks segitiga atas dengan elemen-elemen diagonalnya satu maka matriks tersebut dikatakan dalam bentuk eselon.

Dengan menggunakan transformasi elementer setiap matriks yang berordo $m \times n$ dapat diubah menjadi matriks eselon dan banyaknya baris yang elemen-elemen tidak nol akan menunjukkan rank dari matriks. Transformasi elementer yang dilakukan untuk mengubah matriks menjadi bentuk eselon ini merupakan cara yang lebih mudah untuk menghitung rank suatu matriks.

<u>Contoh</u> :

Berapakah rank matriks $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Penyelesaiaan : Dengan tranformasi elementer kita dapatkan :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \underset{R_{21}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \underset{R_{31}(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C_{24}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underset{R_{32}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks M dapat dipartisi $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ yang merupakan bentuk eselon

dengan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Jadi rank M adalah 2

Latihan 1

1. Tentukan matriks $A_{2x2} \neq 0$ sedemikian sehingga $A^2 = 0$
2. Jumlah dua bilangan adalah 20 dan selisih dua bilangan tersebut adalah 4. Tulislah bentuk matriks dari pernyataan diatas dan tentukan kedua bilangan tersebut.
3. Tentukan determinan dari matriks - matriks berikut :

   a). $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ b). $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$
4. Hitunglah λ sehingga determinan matriks A atau det(A) = 0 ,

   jika $A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$

5. Tentukan invers dari matriks-matriks berikut :

a). $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ b). $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

6. Tentukan rank matriks-matriks berikut ini :

a). $\begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ b). $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

c). $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 8 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ d). $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Bab III

Sistem Persamaan Linier

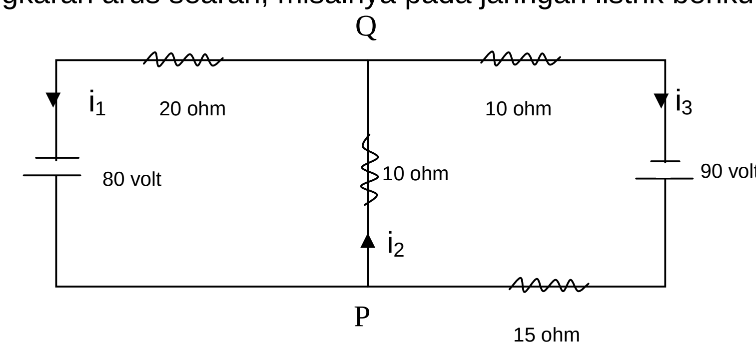
A. Pengertian Sistem Persamaan Linier

Dalam kehidupan sehari-hari banyak persoalan yang menyangkut persamaan linier. Persamaan linier tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu:

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots\ldots + a_n x_n = b$

dengan a_i (i = 1, 2, 3, 4, …..n) dan b adalah bilangan riil, x_i (i = 1, 2, 3, 4, …..n) disebut peubah/variabel atau bilangan yang tidak diketahui, sedangkan a_i merupakan koefisien dari x_i dan b suku konstan. Apabila beberapa persamaan linier tersebut saling berhubungan satu dengan yang lain sehingga merupakan suatu sistem yang dinamakan *sistem persamaan linier*.

Seringkali banyaknya persamaan sama dengan banyaknya variabel, tetapi juga terjadi banyaknya persamaan lebih banyak dari pada banyaknya variabel seperti pada lingkaran arus searah, misalnya pada jaringan listrik berikut :



Dengan hukum Kirchhof dapat menghasilkan empat buah persamaan, dan tiga variabel i_1 , i_2 dan i_3 yaitu :

Titik P	:	$i_1 - i_2 + i_3 = 0$
Titik Q	:	$-i_1 + i_2 - i_3 = 0$
Loop Kanan	:	$10\, i_2 + 25 i_3 = 90$
Loop Kiri	:	$20 i_1 + 10\, i_2 = 80$

Secara umum andaikan ada suatu sistem yang terdiri dari m buah persamaan linier dengan n buah variabel atau bilangan yang tidak diketahui $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, maka sistem persamaan linier (SPL) dapat dinyatakan dalam bentuk :

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots A_{2n}x_n = b_2$

……………………………………………………………………

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots A_{mn}x_n = b_m$

dimana a_{jk} dan b_i (i,j = 1, 2, 3, …. m dan k = 1, 2, 3, …….n) adalah bilangan riil.

Penyelesaiaan dari SPL merupakan himpunan dari bilangan-bilangan x_1, x_2, x_3, … x_n yang memenuhi semua m persamaan itu.

Jika semua $b_i = 0$ maka SPL disebut homogen yang akan mempunyai penyelesaiaan trivial yaitu $x_1= 0$; $x_2 = 0$ $x_3 = 0$… $x_n= 0$ sedangkan jika paling sedikit satu b_i tidak nol maka SPL disebut tak homogen.

Dengan menggunakan perkalian matriks maka bentuk SPL diatas dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis dengan : A X = B

dimana A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$; X = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$; dan B = $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix}$

Misalkan koefisien a_{jk} tidak semuanya nol, sehingga A bukan matriks nol dan X mempunyai n komponen dan B mempunyai m komponen. Matriks $\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ disebut matriks yang diperbesar atau lengkap (augmented matrix) dari SPL diatas.

B. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

1. Sistem persamaan linier dari dua persamaan dan dua variabel.

Bentuk umumnya : $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

Sistem persamaan ini terdapat tiga kemungkinan yaitu :

(i) jika $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ maka ada satu penyelesaian

(ii) jika $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ maka tidak ada penyelesaian

(iii) jika $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, maka ada tak berhingga penyelesaian

Ketiga kemungkinan di atas jika ditafsirkan secara geometri yang grafiknya berupa garis bahwa keduanya merupakan garis-garis lurus yang:

(i) berpotongan pada sebuah titik
(ii) sejajar
(iii) berimpit

Sekarang apabila kita menggunakan pendekatan matriks, maka penyelesaian sistem persamaan tersebut dapat dengan beberapa metode antara lain :

1). Metode Cramer yaitu :

Apabila berbentuk : $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

Maka : $x = \frac{D_x}{D}$ dan $y = \frac{D_y}{D}$

dimana : $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ dan $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

2). Dengan invers matriks

Sistem persamaan linier yang akan diselesaikan diubah dalam bentuk perkalian matriks AX = B sehingga X dapat dicari dengan sifat bahwa :

$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$ dengan matriks A, B dan X konformable terhadap perkalian

3). Dengan Operasi Baris Elementer (Eliminasi Gauss)

Cara ini pada hakekatnya adalah cara eliminasi dan substitusi, hanya disusun secara sistematis agar kita mudah menarik kesimpulan tentang penyelesaiannya. Elemen dari matriks koefisien yang ditulis didalam matriks augmented diubah kebentuk identitas dengan operasi baris elementer atau dengan mereduksi matriks sistem persamaan yang diperbesar (augmented matriks) menjadi bentuk eselon baris ataupun matriks eselon baris yang direduksi (reduced echelon)

<u>Contoh</u> :

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan: $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

Jawab:

a. Dengan cara Cramer maka :

$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$; $D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 14$ dan $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 21$

Maka $x = \frac{D_x}{D} = \frac{14}{7} = 2$ dan $y = \frac{D_y}{D} = \frac{21}{7} = 3$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah { (2,3) }

b. Dengan invers matriks

Sistem persamaan diatas dapat ditulis dengan perkalian matriks :

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ dapat ditulis : $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B$, maka $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}.B$

Diperoleh $A^{-1} = \frac{1}{(3x2) - (-1)(1)}.\text{Adj (A)} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

maka : $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}.B = = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 14 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah { (2,3) }

c. Dengan operasi baris elementer (Eliminasi Gauss)

Karena dengan eliminasi dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 3x - y = 3 \,|\times 2| &\Leftrightarrow 6x - 2y = 6 \\ x + 2y = 8 \,|\times 1| &\Leftrightarrow \underline{x + 2y = 8} + \end{aligned}$$

7x = 14 $\Rightarrow$ x = 2

Untuk x = 2 $\Rightarrow$ x + 2y = 8 $\Rightarrow$ 2y = 8 – 2 $\Rightarrow$y = 3

Sehingga dengan operasi baris elementer ditulis :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \widetilde{R_1(2)} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \widetilde{R_{1\,2}(1)} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 14 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \widetilde{R_1(1/7)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{R_{2\,1}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \widetilde{R_2(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ maka x = 2 dan y = 3

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah { (2,3) }

2. **Sistem persamaan linier dari tiga persamaan dan tiga variabel.**

Untuk sistem persamaan linier yang banyaknya persamaan sama dengan banyaknya variabel dan determinan matriks koefisien tidak sama dengan nol dapat digunakan cara :

a). Dengan Cramer

Andaikan bentuk SPL adalah sebagai berikut :

$a_1x + b_1y + c_1z = k_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = k_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = k_3$

Maka : $x = \frac{D_x}{D}$; $y = \frac{D_y}{D}$ dan $z = \frac{D_z}{D}$ dimana :

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; $D_x = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}$ dan

$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}$

b). Dengan invers

Sistem persamaan linier yang akan diselesaikan diubah dalam bentuk perkalian matriks AX = B sehingga X dapat dicari dengan sifat seperti diatas yaitu : $AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$

c). Dengan operasi baris elementer (Eliminasi Gauss)

Dengan cara ini, sama dengan yang telah dibicarakan diatas yaitu elemen dari matriks koefisien yang ditulis didalam matriks augmented diubah kebentuk identitas atau dengan mereduksi matriks augmented menjadi bentuk eselon baris.

<u>Contoh</u> :

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linier berikut ini :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - 3y + 2z &= 2 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

Penyelesaian :

Dalam bentuk matriks sistem persamaan linier diatas dapat ditulis :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matriks augmentednya adalah $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Apabila dilakukan operasi baris elementer akan didapat :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{R_{31}(-1)}{\overset{R_{21}(-2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \underset{R_{3}(-1)}{\overset{R_{2}(-\frac{1}{5})}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \overset{R_{32}(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ini identik dengan sistem persamaan :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ y \quad &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Jadi z = 1, y = 2 dan x = 6 – 1 – 2 = 3

Sekarang untuk dikerjakan dengan cara lain yaitu dengan cara Cramer maupun dengan invers matriks dan cocokan apakah jawabannya sama dengan jawaban tersebut ?

Secara umum untuk mengetahui ada tidaknya penyelesaian dari sistem persamaan linier dapat dengan menggunakan konsep rank matriks yang dapat dinyatakan dengan beberapa sifat yaitu :

1). Suatu sistem dari m persamaan linier dengan n bilangan yang tidak diketahui $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ mempunyai penyelesaian jika dan hanya jika matriks koefisien A dan matriks yang diperbesar $\tilde{A}$ mempunyai rank yang sama.

2). Jika rank A = r = n maka SPL diatas mempunyai tepat satu penyelesaian

3). Jika rank A = rank $\tilde{A}$ = r $<$ n maka SPL diatas mempunyai banyak penyelesaian

C. Contoh Aplikasi Matriks pada Bidang Keahlian

1. Siswa SMK jurusan teknologi pertanian mengadakan pameran hasil karya mereka, antara lain olahan kedelai berupa susu rasa coklat dan rasa vanila. Tabel berikut menunjukkan data penjualan dalam satuan liter pada pameran selama 2 hari tersebut :

	Rasa Coklat	Rasa vanila
Hari ke-1	40	50
Hari ke-2	20	10

Tabel berikut menunjukkan pendapatan yang diperoleh dalam satuan rupiah dari penjualan diatas :

	Total pendapatan dari kedua rasa
Hari ke-1	200.000
Hari ke-2	70.000

Berapakah harga jual susu kedelai rasa coklat dan susu kedelai rasa vanila tiap liternya ?

Persoalan diatas diselesaikan dengan matriks adalah sebagai berikut :

Misalkan : x = harga susu kedelai rasa coklat per-liter

y = harga susu kedelai rasa vanilla per-liter, maka :

$$\begin{bmatrix} 40 & 50 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200.000 \\ 70.000 \end{bmatrix} \text{ atau } A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B, \text{ maka } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}.B$$

Diperoleh $A^{-1} = \dfrac{1}{(40x10)-(50x20)}.\text{Adj }(A)$

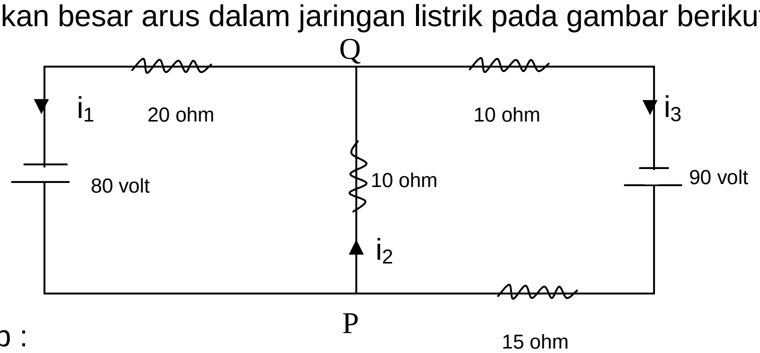
$$= \frac{1}{-600}\begin{bmatrix} 10 & -50 \\ -20 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{60} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{30} & -\frac{1}{15} \end{bmatrix},$$

Jadi penyelesaian untuk soal di atas adalah:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}.B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{60} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{30} & -\frac{1}{15} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200.000 \\ 70.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2500 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

Harga jual susu kedelai rasa coklat Rp. 2500,00 per-liter dan harga jual susu kedelai rasa vanila Rp. 2000,00 per-liter.

2. Tentukan besar arus dalam jaringan listrik pada gambar berikut :



Jawab :

Dengan hukum Kirchhof diperoleh sistem persamaan linier :

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

$$-i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

$$10\, i_2 + 25 i_3 = 90$$

$$20 i_1 + 10\, i_2 = 80$$

Dengan operasi baris elementer pada matriks augmented kita peroleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 20 & 10 & 0 & 80 \end{bmatrix} \text{ } R_{21}\ (1) \text{ dan } \widetilde{R_{4\,1}}\ (-20) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 30 & -20 & 80 \end{bmatrix} R_{24} \text{ } \widetilde{\text{dan}}$$

$$R_{3\,2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 30 & -20 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \widetilde{R_{3\,2}\ (-3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 0 & -95 & -190 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ini identik dengan sistem persamaan

$- 95\, i_3 = -190 \qquad \Rightarrow \quad i_3 = 2$

$10\, i_2 + 25 i_3 = 90 \qquad \Rightarrow \quad i_2 = \dfrac{1}{10}\,(90 - 25\, i_3) = 4$

$i_1 - i_2 + I_3 = 0 \qquad \Rightarrow \quad i_1 = i_2 - i_3 = 2$

Jadi, $i_1 = 2$, $i_2 = 4$ dan $i_3 = 2$.

Latihan 2 :

1. Selesaikan sistem persamaan linier berikut ini dengan metode Cramer dan Operasi baris elementer (Eliminasi Gauss) :

a). $3x_1 - 4x_2 = 5$
$2x_1 + x_2 = 4$

b). $x + y - 2z = 1$
$2x - y + z = 2$
$x - 2y - 4z = -4$

c). $4x + 5y = 2$
$11x + y + 2z = 3$
$x + 5y + 2z = 1$

d). $2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -32$
$7x_1 + 2x_2 + 9x_3 - x_4 = 14$
$3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 11$
$x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4$

2. Carilah suatu jawaban jika ada, apakah jawaban tersebut tunggal dari sistem persamaan linier berikut ini :

a). $3x_1 + 2x_2 = 7$
$x_1 + x_2 = 7$

b). $2x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 0$
$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$
$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 17$

c). $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$
$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3$

d). $2x_1 + 3x_2 = 7$
$4x_1 + 6x_2 = 3$
$x_1 + 17x_2 = 0$

3. Tentukan penyelesaian ekuilibrium ($D = S$) dari pasar satu komoditi dengan model linier:

$$D = 13 - 2P$$

$$S = 3P - 7$$

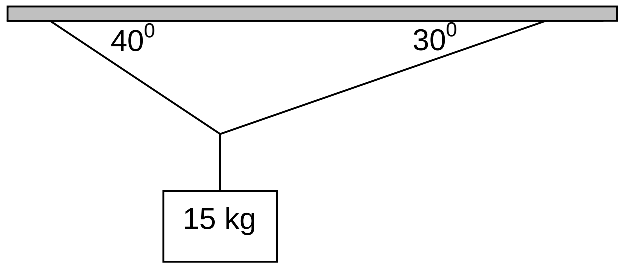
dengan D, S, P menyatakan permintaan, penawaran dan harga dari komoditi.

4. Suatu perusahaan mempekerjakan 150 orang pria dan wanita. Gaji tenaga pria Rp. 20.000,00 perhari dan tenaga wanita Rp. 18.000,00 perhari. Tiap hari perusahaan harus mengeluarkan biaya untuk gaji karyawan sebesar Rp. 2.820.000,00. Dengan menggunakan matriks hitunglah banyaknya tenaga kerja pria dan wanita yang dipekerjakan.

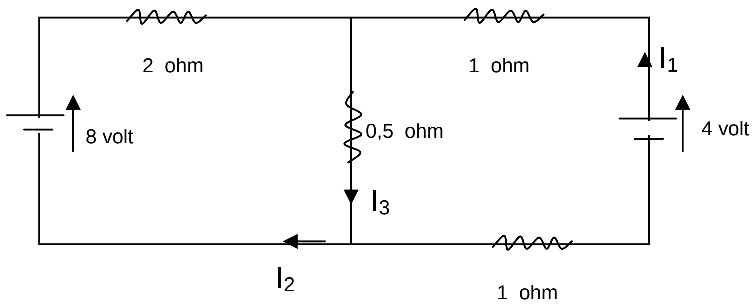
5. Sebuah agen minyak memasarkan tiga jenis bahan bakar, yaitu bensin, solar dan minyak tanah ketiga kota A, B dan C. Pada konsumen kota A diperoleh laba Rp. 500,00 untuk bensin, Rp. 400,00 untuk solar dan Rp. 300,00 untuk minyak tanah , untuk setiap liter. Laba per liter untuk konsumen kota B masing-masing adalah Rp. 400,00 , Rp. 300,00 dan Rp. 200,00. Laba perliter untuk konsumen kota C masing-masing adalah Rp. 300,00 , Rp. 500,00 dan Rp. 100,00. Menurut perhitungan agen, jumlah laba untuk ketiga kota tersebut masing-masing adalah Rp. 1.220.000,00 , Rp. 910.000,00 dan Rp. 690.000,00 . Tentukan model matematika persoalan diatas dan kemudian hitunglah jumlah yang terjual untuk ketiga jenis bahan bakar tersebut.

6. Biro travel “Lintas ” mengelola perjalanan antar 3 kota. Berikut adalah catatan perjalanan travel “Lintas” pada tanggal 22 Nopember 2003, sebuah mobil yang berangkat dari kota A tujuan kota B membawa 8 penumpang, dan mobil tujuan kota C membawa 12 penumpang, mobil yang berangkat dari kota B ke kota A membawa 10 penumpang dan mobil tujuan kota C membawa 9 penumpang, dari kota C berangkat sebuah mobil tujuan kota A berpenumpang 11 dan tujuan kota B berpenumpang 7 orang. Bila harga tiket antar kota A ke B Rp.42.000,00 per orang, antar kota B dan kota C Rp. 45.000,00 per orang dan antar kota A ke kota C Rp.40.000, 00 per orang. Ubahlah soal ini dalam bentuk matriks ! Bagaimana cara menghitung pendapatan biro hari itu dengan matriks yang anda buat ?

7. Tentukan tarikan dalam ketiga kabel yang mendukung berat sebesar 15 kg pada gambar berikut :



8. Dengan menggunakan hukum Kirchhoff , carilah besarnya arus dalam jaringan listrik pada gambar berikut :



Bab IV
Penutup

Pada bahan ajar Matriks Lanjut ini contoh-contoh aplikasi dalam bidang keahlian yang ada pada Sekolah Menengah Kejuruan belum semua diberikan pada semua jurusan di SMK tetapi hanya diberikan sebagian saja dan diharapkan peserta diklat dapat memberikan contoh-contoh yang sesuai dengan jurusan yang diajarkan. Dan untuk memperdalam penguasaan materi, peserta diklat dapat mengerjakan soal latihan yang ada pada akhir setiap pembahasan. Apabila ada kesulitan dalam mengerjakan latihan disarankan peserta mendiskusikan dengan peserta lain agar dapat memahami bahan ajar matriks selanjutnya.

Semoga bahan ajar ini bermanfaat bagi pembaca dan khususnya untuk guru mata pelajaran matematika di Sekolah Menengah Kejuruan.

Daftar Pustaka

Anton, H ; 1994 ; *Elementary Linear Algebra ;* John Willey & Sons, N.Y

Howard Anton ; alih bahasa oleh Pantur Silaban. 1991. *Aljabar Linier Elementer*. Jakarta: Erlangga

Kreyzig,E ; 1988 ; *Advanced Engineering Mathematics* ; Singapore ; John Willey & Sons

Klimartha *Eka* Putri M, Herry Sukarman. 2002. *Bahan Ajar Matematika SMK Kelompok Bidang Keahlian Non Teknik*. Yogyakarta: PPPG Matematika

Legowo, 1984 ; *Dasar-dasar Kalkulus Penerapannya dalam Ekonomi*, Jakarta, Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

M. Nababan , 1993 ; *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi dan Bisnis,* Jakarta , Penerbit Erlangga

Maman Abdurrahman. 2000. *Matematika SMK Bisnis dan Manajemen Tingkat I*. Bandung: Armico