DIKLAT GURU PENGEMBANG MATEMATIKA SMK
JENJANG DASAR TAHUN 2009

Notasi Sigma, Barisan, dan Deret

Oleh: Dra. Puji Iryanti, M.Sc.Ed.

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK
DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
2009

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas karunia-Nya, bahan ajar ini dapat diselesaikan dengan baik. Bahan ajar ini digunakan pada Diklat Guru Pengembang Matematika SMK Jenjang Dasar Tahun 2009, pola 120 jam yang diselenggarakan oleh PPPPTK Matematika Yogyakarta.

Bahan ajar ini diharapkan dapat menjadi salah satu rujukan dalam usaha peningkatan mutu pengelolaan pembelajaran matematika di sekolah serta dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat di dalam maupun di luar kegiatan diklat.

Diharapkan dengan mempelajari bahan ajar ini, peserta diklat dapat menambah wawasan dan pengetahuan sehingga dapat mengadakan refleksi sejauh mana pemahaman terhadap mata diklat yang sedang/telah diikuti.

Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah berpartisipasi dalam proses penyusunan bahan ajar ini. Kepada para pemerhati dan pelaku pendidikan, kami berharap bahan ajar ini dapat dimanfaatkan dengan baik guna peningkatan mutu pembelajaran matematika di negeri ini.

Demi perbaikan bahan ajar ini, kami mengharapkan adanya saran untuk penyempurnaan bahan ajar ini di masa yang akan datang.
Saran dapat disampaikan kepada kami di PPPPTK Matematika dengan alamat: Jl. Kaliurang KM. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, DIY, Kotak Pos 31 YK-BS Yogyakarta 55281. Telepon (0274) 881717, 885725, Fax. (0274) 885752. email: p4tkmatematika@yahoo.com

Sleman, 11 Mei 2009
Kepala,

Kasman Sulyono
NIP. 130352806

Daftar Isi

Peta Kompetensi :

1. Menyebutkan pengertian notasi sigma, pola barisan dan deret bilangan.
2. Mengidentifikasi barisan aritmetika dan geometri.
3. Menurunkan rumus deret aritmetika dan geometri.
4. Menyelesaikan masalah-masalah yang berkaitan dengan barisan dan deret aritmetika dan geometri.
5. Menyatakan jumlah dalam bentuk notasi sigma sebagai suatu fungsi.

Peta Bahan Ajar:

1. Notasi Sigma
2. Pola Barisan dan Deret Bilangan (khususnya barisan aritmetika dan barisan geometri)
3. Barisan Sebagai Fungsi

Informasi:

1. Kompetensi prasyarat: mampu menjelaskan konsep-konsep dasar materi/ pokok bahasan Matematika yang akan dipelajari siswa.
2. Indikator keberhasilan: menguasai peta kompetensi di atas.
3. Kompetensi yang dipelajari berikutnya:
   - menjelaskan cara memprediksi bentuk umum pola, barisan, dan deret.
   - menjelaskan cara mengidentifikasi berbagai jenis barisan (aritmetika, geometri, harmonik, barisan bilangan polygonal) sesuai sifatnya.
   - menjelaskan dan memberi contoh cara menurunkan rumus jumlah deret.

Skenario Pembelajaran

1. Pendahuluan:
   - ❖ Salam dan perkenalan.
   - ❖ Menginformasikan tujuan diklat dan kompetensi yang akan dicapai.
   - ❖ Mengidentifikasi masalah tentang Notasi sigma, Barisan dan Deret yang dihadapi peserta diklat

2a. Kegiatan Inti I (Penyajian Notasi Sigma)
   - ❖ Penyampaian materi
   - ❖ Peserta diklat mengerjakan tugas (sifat notasi sigma 3, 4 dan 5)
   - ❖ Pembahasan dan pemecahan masalah yang diidentifikasi sebelumnya.

b. Kegiatan Inti II (Barisan dan Deret Aritmetika)
   - ❖ Penyampaian materi
   - ❖ Peserta diklat mengerjakan tugas kelompok di Lembar Kerja 1
   - ❖ Pembahasan dan pemecahan masalah yang diidentifikasi sebelumnya.

c. Kegiatan Inti III (Barisan dan deret Geometri)
   - ❖ Penyampaian materi
   - ❖ Peserta diklat mengerjakan kegiatan yang tertulis di Lembar Kerja 2
   - ❖ Presentasi
   - ❖ Pembahasan dan pemecahan masalah yang diidentifikasi sebelumnya.

d. Kegiatan Inti IV
   - ❖ Penyampaian materi
   - ❖ Peserta diklat mengerjakan tugas kelompok di Lembar Kerja 3
   - ❖ Presentasi
   - ❖ Pembahasan dan pemecahan masalah yang diidentifikasi sebelumnya.

3. Penutup
   - ❖ Merangkum/menyimpulkan hasil yang diperoleh dan refleksi

Bab I
Pendahuluan

A. Latar Belakang

Notasi Sigma menjadi dasar untuk penulisan deret. Terutama di SMK pada materi Hitung Keuangan banyak digunakan notasi sigma, sehingga penting untuk menguasai materi ini serta sifat-sifatnya. Demikian pula, penting untuk menguasai materi barisan dan deret yang banyak penerapannya dalam kejadian di sekitar kita. Contohnya pada pertumbuhan manusia dan pertambahan bahan makanan, Thomas Robert Malthus (1766-1834), seorang ahli ekonomi Inggris, mengatakan bahwa pertumbuhan manusia berdasarkan kepada deret geometri (deret ukur) sebaliknya pertambahan bahan makanan berdasarkan kepada deret aritmetika (deret hitung).

Rumus-rumus yang digunakan dalam Hitung Keuangan sebagian besar dasarnya dari Deret Aritmetika dan Deret Geometri. Namun seringkali rumus-rumus itu langsung diinformasikan, tanpa ada penjelasan darimana asalnya. Melalui pembahasan Deret Aritmetika dan Deret Geometri yang lebih terinci, rumus-rumus dalam Hitung Keuangan dapat dimengerti oleh siswa secara mudah.

B. Tujuan

Bahan ajar ini disusun dengan tujuan untuk meningkatkan wawasan dan kemampuan peserta diklat untuk mengembangkan pengetahuan dan ketrampilan siswa dalam menggunakan konsep Notasi sigma, Barisan dan Deret Bilangan.

C. Ruang Lingkup

Ruang lingkup materi yang dibahas dalam bahan ajar ini adalah;

1. Notasi Sigma dan Sifat-sifatnya.
2. Barisan dan Deret:
    a. Barisan dan Deret Aritmetika
    b. Barisan dan Deret Geometri
3. Barisan sebagai fungsi.

Bab II

Notasi Sigma, Barisan dan Deret Bilangan I

A. Notasi Sigma

Notasi sigma memang jarang Anda jumpai dalam kehidupan sehari-hari, tetapi notasi ini akan banyak dijumpai penggunaannya dalam bagian matematika yang lain. Jika Anda mempelajari Statistika maka Anda akan menjumpai banyak rumus-rumus yang digunakan memakai lambang notasi sigma, misalnya rumus mean, simpangan baku, ragam, korelasi, dan lain-lain. Di Kalkulus, pada waktu membicarakan luas daerah yang dibatasi oleh kurva dan sumbu-sumbu koordinat, Anda akan menemui Jumlahan Riemann yang menggunakan notasi sigma untuk menyingkat penjumlahan yang relatif banyak. Ketika mempelajari Kombinatorik, Anda akan menemui bentuk notasi sigma dalam koefisien binomial. Demikian pula pada Hitung Keuangan, sebagian rumus menggunakan notasi sigma.

Untuk mengawali bahasan mengenai notasi sigma, perhatikan jumlah 5 bilangan ganjil pertama berikut ini:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

Pada bentuk tersebut 1 disebut suku ke-1, 3 disebut suku ke-2, 5 disebut suku ke-3, 7 disebut suku ke-4, dan 9 disebut suku ke-5. Ternyata suku-suku tersebut mengikuti suatu pola sebagai berikut:

Suku ke-1 = 1 = 2 (1) –1

Suku ke-2 = 3 = 2 (2) –1

Suku ke-3 = 5 = 2 (3) – 1

Suku ke-4 = 7 = 2 (4) –1

Suku ke-5 = 9 = 2 (5) –1

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa pola dari suku-suku penjumlahan itu adalah $2k - 1$ dengan $k \in \{1,2,3,4,5\}$. Untuk menyingkat penulisan penjumlahan seperti di atas digunakan huruf kapital Yunani Σ, dibaca notasi sigma yang diperkenalkan pertama kali tahun 1755 oleh Leonhard Euler. Selanjutnya bentuk penjumlahan di atas dapat ditulis dalam notasi sigma sebagai:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=1}^{5}(2k-1)$$

Ruas kanan dibaca "sigma k = 1 sampai dengan 5 dari 2k-1". Batas bawah bentuk notasi sigma ini adalah k = 1 dan batas atas k = 5.

Secara umum bentuk notasi sigma didefinisikan sebagai berikut:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}$$

Contoh 1:

Nyatakan $\sum_{k=1}^{6}(3k+1)^2$ dalam bentuk lengkap

Jawab:

$$\sum_{k=1}^{6}(3k+1)^2 = 4^2 + 7^2 + 10^2 + 13^2 + 16^2 + 19^2$$

Contoh 2:

Hitunglah nilai $\sum_{k=1}^{4}(2k^2-1)$

Jawab:

$$\sum_{k=1}^{4}(2k^2-1) = 1+7+17+31 = 56$$

Contoh 3:

Nyatakan 3+5+7+9+11+13 dalam bentuk notasi sigma

Jawab: suku ke-1 = 3 = 2(1)+1

suku ke-2 = 5 = 2(2)+1

suku ke-3 = 7 = 2(3)+1, dan seterusnya sehingga

suku ke-6 = 13 = 2(6) +1

Dengan melihat pola suku-suku tersebut dapat disimpulkan bahwa suku-suku dalam penjumlahan itu mempunyai pola 2k+1.

Dengan demikian 3+5+7+9+11+13 = $\sum_{k=1}^{6}(2k+1)$

Latihan 1

1. Tulislah bentuk-bentuk penjumlahan berikut dalam bentuk notasi sigma
   a. 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12
   b. 2 + 4 + 8 + 16 + 32
   c. 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49
   d. 1 + 3 + 9 + 27 + 81
   e. –1 + 2 –3 + 4 –5 + 6 –7 + 8 –9 +10
   f. 2 - 4 + 8 - 16 + 32 - 64
   g. (1 x 2) + (3 x 4) + (5 x 6) + (7 x 8) + (9 x 10)
   h. $a + a^2b + a^3b^2 + a^4b^3 + a^5b^4 + a^6b^5$
   i. $b + ab^2 + a^2b^3 + a^3b^4 + a^4b^5 + a^5b^6$
2. Nyatakan notasi-notasi sigma berikut dalam bentuk lengkap

a. $\sum_{k=1}^{5}(2k^2-1)$ c. $\sum_{k=1}^{5}(-1)^k 2k$ e. $\sum_{n=1}^{4}(n^2+2n+1)$

b. $\sum_{k=1}^{4}\frac{k(k+1)}{2}$ d. $\sum_{n=1}^{4}(n^3-n^2)$ f. $\sum_{k=1}^{6}(k-1)k$

3. Diketahui:

$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 11, a_6 = 13.$

$b_1 = -2, b_2 = 1, b_3 = 2, b_4 = 4, b_5 = 5, b_6 = 6.$

Hitunglah:

a. $\sum_{k=1}^{6} a_k$ f. $\sum_{k=1}^{6}(b_k)^2$

b. $\sum_{k=1}^{6} b_k$ g. $\sum_{k=1}^{6}(a_k+b_k)^2$

c. $\sum_{k=1}^{5} a_k b_k$ h. $\sum_{k=2}^{6}(a_k-b_k)^2$

d. $\sum_{k=1}^{5} a_k + b_k$ i. $\sum_{k=2}^{6} a_k^2 + b_k^2$

e. $\sum_{k=1}^{6}(a_k)^2$ j. $\sum_{k=2}^{6} a_k^2 - b_k^2$

Sifat-sifat Notasi Sigma

Untuk setiap bilangan bulat a, b dan n berlaku:

1. $\sum_{k=1}^{n} 1$ = n

2. $\sum_{k=a}^{b} cf(k) =$ c $\sum_{k=a}^{b} f(k)$

3. $\sum_{k=a}^{b} (f(k) + g(k)) = \sum_{k=a}^{b} f(k) + \sum_{k=a}^{b} g(k)$

4. $\sum_{k=1}^{m-1} f(k) + \sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$

5. $\sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{k=m+p}^{n+p} f(k-p)$

Bukti:

1. $\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{n suku}} = n\,(1) = n$

2. $\sum_{k=a}^{b} cf(k)$ = c f(a) + c f(a+1) +c f(a+2) +… + c f(b)

= c [f(a) + f(a+1) + f(a+2) +… + f(b)] = c $\sum_{k=a}^{b} f(k)$

Tugas:

Buktikan sifat-sifat notasi sigma no. 3, 4 dan 5

Batas bawah notasi sigma dapat dirubah dengan menggunakan sifat-sifat notasi sigma. Perhatikan contoh 4 dan contoh 5 berikut ini:

Contoh 4:

Nyatakan bentuk-bentuk notasi sigma berikut dengan batas bawah 1

a. $\sum_{k=7}^{13} k^2$ b. $\sum_{k=4}^{10} \frac{k-2}{k+3}$ c. $\sum_{k=3}^{8} 2k+3$

Jawab:

Untuk merubah bentuk-bentuk di atas, digunakan sifat nomor 5, $\sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{k=m+p}^{n+p} f(k-p)$

a. $\sum_{k=7}^{13} k^2 = \sum_{k=7-6}^{13-6} (k+6)^2$

$= \sum_{k=1}^{7} (k+6)^2$

b. $\sum_{k=4}^{10} \frac{k-2}{k+3} = \sum_{k=4-3}^{10-3} \frac{(k+3)-2}{(k+3)+3}$

$= \sum_{k=1}^{7} \frac{k+1}{k+6}$

c. $\sum_{k=-3}^{8} 2k+3 = \sum_{k=-3+4}^{8+4} 2(k-4)+3$

$= \sum_{k=1}^{12} 2k-5$

Contoh 5:

Buktikan bahwa $\sum_{k=5}^{10} (2k-7)^2 = 4\sum_{k=1}^{6} k^2 + 4\sum_{k=1}^{6} k + 6$

Bukti:

$\sum_{k=5}^{10} (2k-7)^2 = \sum_{k=5-4}^{10-4} [2(k+4)-7]^2$ ………….sifat nomor 5

$= \sum_{k=1}^{6} (2k+8-7)^2$

$= \sum_{k=1}^{6} (2k+1)^2$

$= \sum_{k=1}^{6} (4k^2+4k+1)$

$= \sum_{k=1}^{6} 4k^2 + \sum_{k=1}^{6} 4k + \sum_{k=1}^{6} 1$ ………sifat nomor 3

$= 4\sum_{k=1}^{6} k^2 + 4\sum_{k=1}^{6} k + 6$ ……….sifat nomor 1 dan 2 (terbukti)

Latihan 2

1. Nyatakan jumlah di bawah ini dengan bilangan 1 sebagai batas bawah

a. $\sum_{k=5}^{14}(k-3)$

b. $\sum_{k=-5}^{5}(k^2+1)$

c. $\sum_{b=5}^{14}(b^2+b)$

d. $\sum_{n=6}^{12}\frac{n-4}{2n+3}$

e. $\sum_{a=8}^{12}(a-2)^2$

f. $\sum_{k=-8}^{10}4-k^2$

2. Buktikan

a. $\sum_{n=1}^{10}(2n-1)=\sum_{n=5}^{14}(2n-9)$

b. $\sum_{p=1}^{6}(p+4)^2=96+8\sum_{p=1}^{6}p+\sum_{p=1}^{6}p^2$

Bentuk ruas kanan nomor 2 di atas disebut bentuk monomial.

3. Nyatakan jumlah-jumlah di bawah ini sebagai jumlah monomial.

a. $\sum_{k=1}^{6}k^2-2k$

b. $\sum_{k=1}^{8}k^2-4k-5$

c. $\sum_{n=1}^{15}2^n-3n^2$

d. $\sum_{k=1}^{10}(4k-6)(3-k)$

B. Barisan dan Deret

Banyak sekali barisan dan deret bilangan yang kita kenal. Namun demikian, untuk matematika SMK yang diwajibkan untuk dikuasai siswa adalah barisan dan deret aritmetika dan geometri. Untuk menarik minat siswa dalam mempelajari barisan dan deret, disarankan kegiatan pembelajaran dilakukan secara induktif menggunakan pendekatan kontekstual dan metode eksplorasi.

1 . Barisan dan Deret Aritmetika

a. Barisan Aritmetika

Bagi Anda yang pernah naik taksi yang menggunakan argometer, pernahkah Anda memperhatikan perubahan bilangan yang tercantum pada argometer? Apakah bilangan-bilangan itu berganti secara periodik dan apakah pergantiannya menuruti aturan tertentu? Jika Anda memperhatikan mulai dari awal bilangan yang tercantum pada argometer dan setiap perubahan yang terjadi, apa yang dapat Anda simpulkan dari barisan bilangan-bilangan tersebut?

Iwan mencari rumah temannya di Jalan Gambir no.55. Setelah sampai di Jalan Gambir ia memperhatikan bahwa rumah-rumah yang terletak di sebelah kanan jalan adalah rumah-rumah dengan nomor urut genap 2, 4, 6, 8, dan seterusnya. Dengan memperhatikan keadaan itu, kearah manakah Iwan mencari rumah temannya?.

Perubahan bilangan-bilangan pada argometer taksi menuruti aturan tertentu. Setiap dua bilangan yang berurutan mempunyai selisih yang tetap. Barisan bilangan yang seperti itu disebut barisan aritmetika.

Demikian juga barisan nomor-nomor rumah di atas merupakan barisan bilangan aritmetika. Barisan bilangan ini mempunyai selisih yang tetap antara dua suku yang berurutan. Pada barisan 1, 3, 5, 7, …, suku pertama adalah 1, suku kedua adalah 3, dan seterusnya. Selisih antara dua suku yang berurutan adalah 2. Barisan 2, 4, 6, 8, …, juga mempunyai selisih dua suku yang berurutan selalu tetap yang besarnya 2.

b. Rumus suku Ke-n Barisan Aritmetika

Pada barisan aritmetika dengan bentuk umum $u_1, u_2, u_3, \ldots$ dengan u_1 adalah suku pertama, u_2 adalah suku ke-2, u_3 adalah suku ke-3 dan seterusnya. Selisih antara dua suku berurutan disebut juga beda dan diberi notasi b, sehingga $b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \ldots = u_n - u_{n-1}$. Misalkan suku pertama u_1 dinamakan a dan beda antara 2 suku berurutan adalah b, maka: $u_1 = a$

$u_2 - u_1 = b \Rightarrow u_2 = u_1 + b = a + b = a + (2-1)b$

$u_3 - u_2 = b \Rightarrow u_3 = u_2 + b = a + 2b = a + (3-1)b$

$u_4 - u_3 = b \Rightarrow u_4 = u_3 + b = a + 3b = a + (4-1)b$

$u_5 - u_4 = b \Rightarrow u_5 = u_4 + b = a + 4b = a + (5-1)b$

Dengan memperhatikan pola suku-suku di atas kita dapat menyimpulkan rumus umum suku ke-n adalah:

$\boxed{u_n = a + (n-1)b}$ dengan u_n = suku ke-n

a = suku pertama dan b = beda

contoh 6:

Tentukan suku ke-35 dari barisan 3, 7, 11, 15,…

Jawab:

$u_1 = a = 3$, $b = u_2 - u_1 = 7 - 3 = 4$, $n = 35$

Dengan mensubstitusikan unsur-unsur yang diketahui ke

$u_n = a + (n-1)b$ diperoleh $u_{35} = 3 + (35-1)4 = 139$

Jadi suku ke-35 adalah 139.

contoh 7:

a. Carilah rumus suku ke-n barisan 60, 56, 52, 48,…

b. Suku ke berapakah dari barisan di atas yang nilainya adalah 16?

Jawab:

$u_1 = a = 60$, $b = u_2 - u_1 = 56 - 60 = -4$

a. $u_n = a + (n-1)b$

$= 60 - 4(n-1) = 64 - 4n$

b. $u_n = 64 - 4n$

$16 = 64 - 4n$

$4n = 48 \Leftrightarrow n = 12$

contoh 8:

Pada suatu barisan aritmetika suku ke-10 adalah 41 dan suku ke-5 adalah 21. Tentukan suku ke-125

Jawab:

$$\begin{array}{lr} u_{10} = a + (10-1)b = a + 9b = 41 & \\ u_5 = a + (5-1)b \quad = a + 4b = 21 & - \\ \hline 5b = 20 & \\ b = 4 \Rightarrow a = 5 & \end{array}$$

$U_{125} = a + (125-1)4 = 5 + 124(4) = 501$

Tugas:

1. Diskusikan dalam kelompok Anda sifat-sifat apa saja yang dapat ditemukan pada barisan aritmetika.
2. Jika diantara 2 bilangan a dan b disisipkan k bilangan baru sehingga membentuk suatu barisan aritmetika, diskusikan bagaimana mendapatkan beda barisan yang baru dan rumus suku ke-n.

Latihan 3

1. Seorang ayah memberikan uang saku harian yang berbeda-beda kepada lima anaknya. Uang saku seorang adik Rp 1000,00 kurangnya dari uang saku yang diterima kakak tepat di atasnya. Jika setiap hari ayah itu mengeluarkan Rp 17.500,00 untuk uang saku semua anaknya, berapakah uang saku harian anak ke-4?
2. Seorang arsitek merancang ornamen dinding yang terdiri dari barisan bata merah berselang-seling dengan barisan bata putih. Pola tersebut dimulai dengan 20 bata merah di bagian dasar. Tiap baris di atasnya memuat 3 bata kurangnya dari susunan sebelumnya. Jika barisan paling atas tidak memuat bata merah, berapa banyak baris yang ada dan berapa banyak bata merah yang digunakan?
3. Seorang seniman membuat suatu karya seni yang memuat 5 ornamen di bagian atas karya tersebut, 7 ornamen di lapisan ke dua, 9 ornamen di lapisan ke tiga, dan seterusnya. Berapa banyak ornamen yang terdapat pada lapisan ke-20?
4. Dari suatu barisan aritmetika, $u_2 + u_7 = 26$ dan $u_3 + u_5 = 22$. Tentukan suku ke-100
5. Diketahui barisan aritmetika 64, 61, 58, 55,…
   a. Suku keberapakah yang bernilai 26?
   b. Tentukan suku negatifnya yang pertama
6. Diketahui barisan bilangan asli kurang dari 125. Tentukan banyak bilangan yang :
   a. habis dibagi 2
   b. habis dibagi 5
   c. habis dibagi 2 tetapi tidak habis dibagi 5
7. Diantara bilangan-bilangan 8 dan 173 disisipkan 32 buah bilangan sehingga terjadi barisan aritmetika. Tentukan

a. beda barisan itu
b. rumus suku ke-n

c. Deret Aritmetika

Tentu Anda sudah mengetahui cerita tentang matematikawan Gauss. Ketika masih di sekolah dasar ia diminta gurunya untuk menjumlahkan 100 bilangan asli yang pertama. Teknik menghitung Gauss kecil sederhana tetapi tidak diragukan lagi keefektifannya. Ia memisalkan S adalah jumlah 100 bilangan asli yang pertama seperti di bawah ini.

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100$$

Kemudian ia menulis penjumlahan itu dengan urutan suku-suku terbalik.

$$S = 100 + 99 + 98 + 97 + \ldots + 1$$

Selanjutnya ia menjumlahkan kedua deret.

$$2S = 101 + 101 + 101 + 101 + \ldots + 101$$

Karena banyak suku dalam deret itu ada 100, maka penjumlahan itu dapat juga ditulis sebagai:

$$2S = 100\,(101) = 10100 \Leftrightarrow S = 5050$$

Teknik menghitung Gauss ini yang diikuti selanjutnya untuk mendapatkan rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika. Deret aritmetika adalah jumlah suku-suku dari suatu barisan aritmetika. Dari barisan aritmetika u_1, u_2, u_3, u_4, … diperoleh deret aritmetika $u_1 + u_2 + u_3 + u_4$, … Bila jumlah n suku yang pertama dari suatu deret aritmetika dinyatakan dengan S_n maka

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n$$

Misalkan $U_n = k$, maka

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + k$$

$$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + \ldots + (k - b) + k \quad \ldots(1)$$

Jika urutan penulisan suku-suku dibalik maka diperoleh

$$S_n = k + (k - b) + (k - 2b) + (k - 3b) + \ldots + (a + b) + a \quad \ldots.(2)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (1) dan (2) didapat:

$$2S_n = \underbrace{(a + k) + (a + k) + (a + k) + (a + k) + \ldots + (a + k) + (a + k)}_{\text{n suku}}$$

$$= n\,(a + k) = n\,[\,2a + (n - 1)\,b]$$

Jadi $S_n = \frac{1}{2}$ n (a + k)

atau $\boxed{S_n = \frac{1}{2} n (a + u_n) = \frac{1}{2} n [(2a + (n-1)b]}$

dengan a = suku pertama, U_n = suku ke-n, b = beda

Jika ditulis dalam bentuk notasi sigma, jumlah n suku pertama deret aritmetika dinyatakan sebagai $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{n=1}^{n} a + (n-1)b}$

Dengan demikian jumlah n suku pertama dan n –1 suku pertama deret aritmetika dapat dinyatakan sebagai

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{n-1} + u_n$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{n-1}$$

Dengan mengurangkan S_n dengan S_{n-1} terlihat dengan jelas bahwa

$$\boxed{U_n = S_n - S_{n-1}}$$

Contoh 9:

Seorang anak mengumpulkan batu kerikil dalam perjalanan pulang dari sekolah. Tiap hari ia mengumpulkan 5 kerikil lebih banyak dari hari sebelumnya. Jika pada hari pertama ia membawa pulang 1 kerikil, tentukan

a. jumlah kerikil-kerikil tersebut sampai hari ke-n dan bentuk notasi sigma jumlah tersebut
b. rumus jumlah deret tersebut
c. jumlah kerikil pada hari ke-25

Jawab:

a. 1+ 6 + 11 + 16 + ….+ n = $\sum_{k=1}^{n} (5k-4)$

b. $S_n = \frac{1}{2}$ n [(2a + (n-1)b]

$$= \frac{1}{2} n\ [2 + (n\text{-}1)\ 5] = \frac{5}{2} n^2 - \frac{3}{2} n$$

c. $S_{25} = \frac{5}{2}(25)^2 - \frac{3}{2}(25) = 1525$

Banyak batu kerikil yang dikumpulkan pada hari ke-25 adalah 1525 buah.

Contoh 10:

Hitunglah jumlah bilangan asli antara 10 sampai 100 yang habis dibagi 6

Jawab:

Jumlah bilangan asli antara 10 sampai 100 yang habis dibagi 6 adalah deret

12 + 18 + 24 + 30 +…+ 96

$u_n = 96$ disubstitusikan ke $u_n = a + (n - 1)b$

Jadi $96 = 12 + (n - 1)6$. Dengan menyelesaikan persamaan ini didapat n = 15

Selanjutnya n =15 dan $u_n = 96$ disubstitusi ke $S_n = \frac{1}{2} n(a + u_n)$ sehingga:

$S_{15} = \frac{1}{2}(15)(12 + 96) = 810$

Jadi jumlah bilangan asli antara 10 sampai 100 yang habis dibagi 6 adalah 810.

Contoh 11:

Jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika ditentukan oleh rumus

$S_n = 2n^2 + 5n$. Tentukan suku ke-n.

Jawab:

$$U_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 + 5n - \{2(n - 1)^2 + 5n\} = 4n + 3$$

Jadi rumus suku ke-n adalah $U_n = 4n + 3$

Latihan 4

1. Rancanglah soal-soal kontekstual dari deret-deret berikut ini.Hitunglah jumlah 30 suku yang pertama dari tiap rancangan.

   a. $2 + 5 + 7 + 9 + \ldots$

   b. $-30 -27 -24 -21 -\ldots$

   c. $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 3, 3\frac{3}{4}, \ldots$

   d. $7\frac{1}{2}, 6, 4\frac{1}{2}, 3, \ldots$

2. Hitunglah jumlah tiap deret berikut

   a. $\sum_{k=1}^{10}(2k-1)$

   b. $\sum_{k=1}^{14}(k+3)$

   c. $\sum_{n=1}^{25}(3n+2)$

   d. $\sum_{p=1}^{20}(5-2p)$

3. Rancanglah soal kontekstual deret-deret berikut dan tentuka n.

   a. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = 210$

   b. $84 + 80\frac{1}{2} + 77 + 73\frac{1}{2} + \ldots + n = 0$

4. Hitunglah jumlah semua bilangan asli

   a. antara 1 dan 200 yang habis dibagi 4

   b. antara 1 dan 200 yang habis dibagi 4 tetapi tidak habis dibagi 5

5. Diketahui jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika adalah

   $S_n = \frac{n}{2}(3n + 5)$. Tentukan :

   a. rumus suku ke-n

   b. suku pertama dan beda

6. Tiga bilangan merupakan barisan aritmetika. Jika bilangan yang ketiga adalah 12 dan hasil kali ketiga bilangan itu -120 . Tentukan bilangan itu.

2. Barisan dan Deret Geometri

a. Barisan Geometri

Alkisah di negeri Antah Berantah seorang raja akan memberikan hadiah kepada juara catur di negeri itu. Ketika raja bertanya hadiah apa yang diinginkan oleh Abu, sang juara, menjawab bahwa dia menginginkan hadiah beras yang merupakan jumlah banyak beras di petak terakhir papan catur yang diperoleh dari kelipatan beras 1 butir di petak pertama, 2 butir di petak kedua, 4 butir dipetak ketiga, dan seterusnya. Raja yang mendengar permintaan itu langsung menyetujui karena Raja berfikir bahwa hadiah yang diminta itu begitu sederhana. Apakah memang hadiah itu begitu sederhana dan berapa butir beras sesungguhnya jumlah hadiah Abu? Jika dianalisa, hadiah yang diperoleh Abu tergantung kepada banyak petak dipapan catur.

petak	1	2	3	4	5	…	n	…	64
Beras(butir)	1	2	4	8	16		…		…

Perhatikan bahwa barisan 1, 2, 4, 8 , 16, … mempunyai perbandingan yang tetap antara dua suku berurutan. Perbandingan yang tetap itu disebut *rasio* dan dilambangkan dengan r. Pada barisan ini perbandingan dua suku yang berurutan adalah r = 2 . Barisan yang mempunyai perbandingan yang tetap antara dua suku berurutan disebut **barisan geometri**. Secara umum dapat dikatakan:

Suatu barisan $u_1, u_2, u_3, u_4, ..., u_{n-1}, u_n$, disebut **barisan geometri**

jika $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ = konstan = r.

b. Rumus Suku Ke-n Barisan Geometri

Jika suku pertama u_1 = a dan perbandingan dua suku yang berurutan disebut rasio r, maka

$$\frac{u_2}{u_1} = r \Leftrightarrow u_2 = u_1 r = ar$$

$$\frac{u_3}{u_2} = r \Leftrightarrow u_3 = u_2 r = ar^2$$

$$\frac{u_4}{u_3} = r \Leftrightarrow u_4 = u_3 r = ar^3$$

$$\frac{u_5}{u_4} = r \Leftrightarrow u_5 = u_4 r = ar^4$$

Dengan memperhatikan pola suku-suku di atas diperoleh rumus umum suku ke-n barisan geometri

$\boxed{u_n = ar^{n-1}}$ dengan u_n = suku ke-n, a = suku pertama, r = rasio

Tugas:

Diskusikan dalam kelompok Anda sifat-sifat apa saja yang dapat ditemukan pada barisan geometri.

Contoh 12:

Suku ketiga dan suku kelima suatu barisan geometri berturut-turut 27 dan 3. Jika rasio barisan ini bilangan positif, tentukan:

a. rasio dan suku pertama

b. rumus suku ke-n dan suku ke-8

Jawab :

a. $\frac{u_5}{u_3} = \frac{ar^4}{ar^2} = \frac{3}{27} \Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}$

$ar^2 = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{9}a = 27 \Leftrightarrow$ a = 243

Jadi rasio deret itu $r = \frac{1}{3}$ dan suku pertama a = 243

b. $u_n = ar^{n-1}$

$= 243\ (\frac{1}{3})^{n-1} = 3^5\ (3^{-1})^{n-1} = 3^{6-n}$

$u_8 = 3^{6-8} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

Rumus suku ke-n adalah $u_n = 3^{6-n}$ dan suku ke-8 adalah $\frac{1}{9}$.

Contoh 13:

Tiga bilangan membentuk barisan geometri yang hasil kalinya 1000. Jika jumlah tiga bilangan itu 35, tentukan bilangan-bilangan tersebut.

Jawab:

Tiga bilangan itu dimisalkan sebagai $\frac{p}{r}$, p , pr. Hasil kali tiga bilangan itu $p^3 = 1000$ $\Leftrightarrow$ p = 10. Jumlah tiga bilangan $\frac{p}{r} + p + pr = 35$

$\Leftrightarrow \frac{10}{r} + 10 + 10\,r = 35$

$\Leftrightarrow 10\,r^2 - 25r + 10 = 0$

$\Leftrightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (2r - 1)(r - 2) = 0$

$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$ atau r = 2

Untuk $r = \frac{1}{2}$ dan p = 10 barisan adalah 20, 10, 5

Untuk r = 2 dan p = 10 barisan adalah 5, 10, 20

Latihan 5

1. Rancanglah soal-soal kontekstual untuk barisan-barisan geometri berikut.

   a. 1, 4, 16, 64, …

   b. 2, 6, 18, 54, …

   c. 32, 16, 8, 4, …

   d. 4, -8, 16, -32, …

   e. 10, -5, $2\frac{1}{2}$, $-1\frac{1}{4}$, …

   f. $\sqrt{3}$, 6, 12 $\sqrt{3}$, 72, …

2. Suku pertama suatu barisan geometri adalah 16, sedangkan suku ke empatnya sama dengan 128. Tentukan rasio, dan suku ke-8

3. Dari suatu barisan geometri diketahui $u_1 + u_6 = 244$ dan $u_3 . u_4 = 243$. Tentukan rasio dan u_2

4. Tiga bilangan membentuk barisan geometri naik yang jumlahnya 93 dan hasil kalinya 3375. Tentukan barisan tersebut.

5. Harga suatu mesin menyusut setiap tahun 10% dari harga pada permulaan tahun. Jika mesin itu dibeli seharga Rp. 15.000.000,-, berapakah harga mesin itu setelah 5 tahun?

6. Sebidang tanah berharga Rp. 20.000.000,-. Setiap tahun harga tanah itu naik 5%. Berapakah harga tanah itu pada tahun ke-8?

7. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jika suku tengah dikurangi 5 maka terbentuk barisan geometri dengan rasio 2. Tentukan bilangan-bilangan tersebut.

8. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jumlah ketiga bilangan itu sama dengan 12. Jika bilangan ke-3 ditambah dengan 2 maka terbentuk suatu barisan geometri. Tentukan bilangan-bilangan tersebut.

c. Deret Geometri

Banyak orang di sekitar kita yang bekerja dalam bisnis Multi Level Marketing (MLM) seperti Sophie Martin, Avon, Sara Lee, dan sebagainya. Seseorang yang membangun suatu bisnis MLM mengembangkan bisnisnya dengan mencari 2 agen di bawahnya yang memasarkan produk. Masing-masing agen itu juga mencari 2 agen lagi dan seterusnya. Keuntungan yang diperoleh oleh orang pertama sangat tergantung dari kerja para agen di bawahnya untuk memasarkan produk MLM itu. Semakin banyak orang yang terlibat untuk memasarkan produk itu akan menambah banyak pendapatan dari orang pertama. Perhatikan bahwa banyak orang yang terlibat dalam bisnis itu adalah 1 + 2 + 4 + 8 + …

Jumlahan 1 + 2 + 4 + 8 + … merupakan salah satu contoh deret geometri. Jika n suku pertama barisan geometri $u_1, u_2, u_3, u_4, ..., u_n$ dijumlahkan maka diperoleh deret geometri $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} ar^{n-1}$.

Rumus umum jumlah n suku deret geometri dapat ditentukan sebagai berikut:

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_n$

$= a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$ ………………………..(1)

Masing-masing ruas pada persamaan (1) dikalikan dengan r sehingga didapat

$r\,S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$ …………………...(2)

Kurangkan persamaan (1) dengan persamaan (2), diperoleh

$S_n - r\,S_n = a - ar^n$

$\Leftrightarrow S_n (1 - r) = a(1 - r^n)$

$\Leftrightarrow S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{(1-r)}$ atau $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{(r-1)}$, dengan $r \neq 1$

Contoh 14:

Tentukan jumlah 5 suku pertama deret 32 + 16 + 8 + 4+…

Jawab:

$a = 32,\ r = \dfrac{1}{2}$

$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \dfrac{32[1-(\frac{1}{2})^5]}{(1-\frac{1}{2})} = 62$

Jadi jumlah 5 suku pertama deret tersebut adalah 62

Contoh 15:

Tentukan nilai n jika $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 510$

Jawab:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n = 510$$

a = 2, r = 2

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$$

$$\Rightarrow 510 = \frac{2(2^n - 1)}{(2-1)} = 2^{n+1} - 2$$

$$\Leftrightarrow 512 = 2^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad n = 8$$

Latihan 6

1. Rancanglah soal-soal kontekstual dari deret berikut. Sertakan perintah menghitung jumlah 10 suku pertama tiap deret itu.

   a. $1 + 4 + 16 + 64 + \ldots$

   b. $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$

   c. $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + ...$

   d. $1 - 2 + 4 - 8 + \ldots$

   e. $128 - 64 + 18 - 54 + \ldots$

   f. $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + ...$

2. Hitunglah jumlah deret geometri berikut

   a. $2 + 4 + 8 + + \ldots + 512$

   b. $243 + 81 + 27 + \ldots + \frac{1}{3}$

   c. $1 + 5 + 25 + 125 + \ldots + 3125$

   d. $1 + 1,1 + (1,1)^2 + (1,1)^3 + \ldots + (1,1)^{10}$

3. Dari suatu deret geometri diketahui $u_9 = 128$ dan $u_4 = -4$. Hitunglah S_{10}

4. Dari suatu deret geometri diketahui $S_2 = 4$ dan $S_4 = 40$.Tentukan

   a. rasio dan suku pertama deret tersebut

   b. jumlah 8 suku pertama

5. Jumlah n suku pertama suatu deret geometri ditentukan dengan rumus

   $S_n = 8 - 2^{3-n}$. Tentukan

   a. suku pertama dan rasio deret itu

   b. jumlah lima suku yang pertama

6. Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 1 m di atas permukaan lantai. Setiap kali sesudah jatuh mengenai lantai bola dipantulkan lagi mencapai $\frac{3}{4}$ dari tinggi sebelumnya. Hitunglah panjang seluruh lintasan yang ditempuh bola itu selama enam pantulan yang pertama.

7. Seutas tali dipotong menjadi 6 ruas dan panjang masing-masing potongan itu membentuk barisan geometri. Jika potongan tali yang paling pendek sama dengan 3 cm dan potongan tali yang paling panjang adalah 96 cm, hitunglah panjang tali keseluruhan.

8. Jumlah penduduk suatu kota setiap 4 tahun menjadi lipat dua dari jumlah sebelumnya. Jika jumlah penduduk pada tahun 1997 adalah 200.000 orang, berapakah jumlah penduduk kota itu pada tahun 2021?

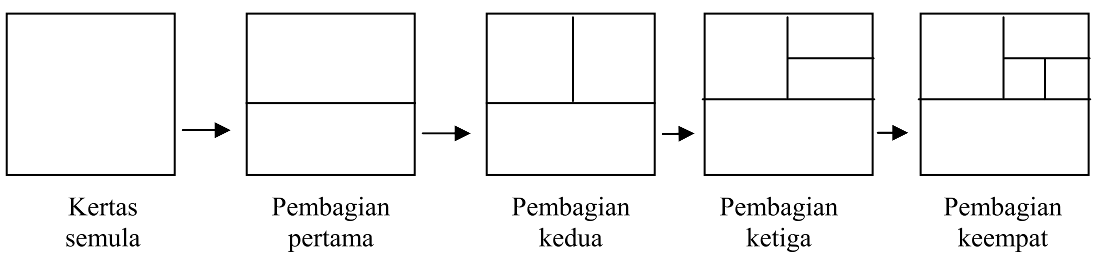
9. Beni menyimpan uang di bank dengan bunga majemuk (bunga diperhitungkan dari jumlah uang sebelumnya) sebesar 8 % per tahun. Jika uang yang disimpan pada tahun 1996 adalah Rp. 10.000.000,- berapakah jumlah uang Budi pada tahun 2003?

10. Perhatikan kembali masalah tentang hadiah yang diminta oleh sang juara catur kepada rajanya pada awal pembahasan barisan geometri. Berapa banyak butir beras yang

menjadi hadiah sang juara? Berapa kilogram kira-kira beras yang diperolehnya? Jelaskan alasan Anda!

d. Deret Geometri Tak Hingga

Untuk membahas masalah deret geometri tak hingga dapat digunakan benda yang sudah dikenal siswa. Sebuah kertas yang berbentuk persegi dibagi menjadi dua bagian. Salah satu bagian kertas itu kemudian dibagi lagi menjadi dua bagian. Selanjutnya bagian terkecil dari kertas itu dibagi lagi menjadi dua bagian dan seterusnya seperti digambarkan di bawah ini:



Secara teoritis proses pembagian ini dapat diulangi terus menerus sampai tak berhingga kali. Pada pembagian yang pertama diperoleh $\frac{1}{2}$ bagian, yang ke-2 diperoleh $\frac{1}{4}$ bagian, yang ke-3 diperoleh $\frac{1}{8}$ bagian dan seterusnya sampai tak berhingga kali. Tampak jelas bahwa jumlah dari seluruh hasil pembagian sampai tak berhingga kali adalah:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$$

Proses tadi menjelaskan pengertian jumlah deret geometri tak hingga yang bisa diperagakan secara sederhana. Untuk penjelasan secara teoritis perhatikan jumlah n suku pertama deret geometri $S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$. Jika suku-suku deret itu bertambah terus maka deret akan menjadi deret geometri tak hingga. Dengan demikian jumlah deret geometri menjadi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1-r)} - \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1-r)} r^n$$

$$= \frac{a}{(1-r)} - \frac{a}{(1-r)} \lim_{n\to\infty} r^n$$

Terlihat jelas bahwa nilai S_n sangat dipengaruhi oleh nilai $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$. Jika

1) $-1 < r < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ akan menjadi nol sehingga deret tak hingga itu mempunyai jumlah

   $$\boxed{S_\infty = \frac{a}{(1-r)}}$$

   Deret geometri tak hingga yang mempunyai jumlah disebut **konvergen** atau mempunyai **limit jumlah**.

2) $r < -1$ atau $r > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \pm\infty$ sehingga deret tak hingga itu tidak mempunyai limit jumlah. Deret yang seperti ini disebut **divergen.**

Contoh 16:

Hitunglah jumlah deret geometri tak hingga $4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \ldots$

Jawab:

$a = 4$ dan $r = -\frac{1}{2}$

$$S_\infty = \frac{a}{(1-r)} = \frac{4}{(1+\frac{1}{2})} = \frac{8}{3}$$

Jadi jumlah deret geometri tak hingga itu adalah $\frac{8}{3}$.

Latihan 7

1. Hitunglah jumlah tiap deret geometri tak hingga berikut ini

a. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ...$

b. $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + ... \dots$

c. $9 - 6 + 4 -- \frac{8}{3} + \dots$

d. $10 - 5 + 2{,}5 - 1{,}25 + \dots$

2. Hitunglah

a. $\lim_{n\to\infty}(4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + ...)$

b. $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k})$

3. Deret geometri tak hingga suku pertamanya 3. Deret itu konvergen dengan jumlah $\frac{9}{2}$. Tentukan suku ketiga dan rasio deret tersebut.

4. Jumlah suatu deret geometri tak hingga adalah ($4 + 2\sqrt{2}$) sedangkan rasionya adalah $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Tentukan suku pertama deret tersebut.

5. Jumlah suku-suku nomor ganjil dari suatu deret geometri tak hingga adalah 18. Deret itu sendiri mempunyai jumlah 24. Tentukan rasio dan suku pertama deret geometri itu.

6. Jumlah deret geometri tak hingga $\frac{1}{2}x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{8}{25}x^3 - ...$ sama dengan $\frac{1}{3}$. Carilah nilai x.

7. Suku pertama suatu deret geometri tak hingga adalah a, sedangkan rasionya adalah r = ${}^2\log(x-3)$. Carilah batas-batas nilai x sehingga deret geometri itu konvergen.

8. Sebuah bola tenis dijatuhkan ke lantai dari suatu tempat yang tingginya 2 m. Setiap kali setelah bola itu memantul akan mencapai $\frac{2}{3}$ dari tinggi yang dicapai sebelumnya. Hitunglah panjang lintasan bola sampai bola itu berhenti.

C. Barisan Sebagai Fungsi

Untuk menentukan suku-suku suatu barisan kita melihat keteraturan pola dari suku-suku sebelumnya. Salah satu cara untuk menentukan rumus umum suku ke-n suatu barisan adalah dengan memperhatikan selisih antara dua suku yang berurutan. Bila pada satu tingkat pengerjaan belum diperoleh selisih tetap, maka pengerjaan dilakukan pada tingkat berikutnya sampai diperoleh selisih tetap. Suatu barisan disebut **berderajat satu (linear)** bila selisih tetap diperoleh dalam satu tingkat pengerjaan, disebut **berderajat dua** bila selisih tetap diperoleh dalam dua tingkat pengerjaan dan seterusnya.

Bentuk umum dari barisan-barisan itu merupakan fungsi dalam n sebagai berikut:

Selisih tetap 1 tingkat $\longrightarrow U_n = an + b$

Selisih tetap 2 tingkat $\longrightarrow U_n = an^2 + bn + c$

Selisih tetap 3 tingkat $\longrightarrow U_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

Perlu diperhatikan bahwa a dan b pada fungsi ini **tidak sama** dengan a = suku pertama dan b = beda pada suku-suku barisan aritmetika yang dibicarakan sebelumnya.

Untuk memahami pengertian barisan berderajat satu, berderajat dua, dan seterusnya perhatikan contoh berikut:

- Barisan 2, 5, 8, 11, … disebut barisan berderajat satu karena selisih tetap diperoleh pada satu tingkat penyelidikan.

2 5 8 11, …

3 3 3 selisih tetap = 3

- Barisan 5, 8, 13, 20, 29, … disebut barisan berderajat dua karena selisih tetap diperoleh pada dua tingkat penyelidikan.

5 8 13 20 29

3 5 7 9

2 2 2 selisih tetap = 2

- Barisan 2, 5, 18, 45, 90, … disebut barisan berderajat tiga karena selisih tetap diperoleh pada tiga tingkat penyelidikan.

2 5 18 45 90

3 13 27 45

10 14 18

4 4 selisih tetap = 4

Untuk menentukan rumus suku ke-n masing-masing barisan itu dilakukan dengan cara sebagai berikut:

1. Barisan Linear (Berderajat Satu)

Bentuk umum $U_n = an + b$, jadi $u_1 = a + b$, $u_2 = 2a + b$, $u_3 = 3a + b$,$u_4 = 4a + b$, dan seterusnya.

(i) $\boxed{a + b}$, $2a + b$, $3a + b$, $4a + b$, …

(ii) $\boxed{a}$ a a

Rumus umum suku ke-n barisan 2, 5, 8, 11, …dapat ditentukan dengan cara:

(i) 2 5 8 11, …

(ii) 3 3 3

(ii) $a = 3 \rightarrow$ (i) $a + b = 2$

$3 + b = 2 \rightarrow b = -1$, sehingga $\mathbf{u_n = 3n - 1}$

2. Barisan Berderajat Dua

Bentuk umum $U_n = an^2 + bn + c$. Dengan demikian $u_1 = a + b + c$, $u_2 = 4a + 2b + c$, $u_3 = 9a + 3b + c$, $u_4 = 16a + 4b + c$, dan seterusnya. Identifikasi selisih tetapnya adalah sebagai berikut:

(i) $\boxed{a + b + c}$, $4a + 2b + c$, $9a + 3b + c$, $16a + 4b + c, \ldots$

(ii) $\boxed{3a + b}$ $\quad 5a + b \quad 7a + b$

(iii) $\boxed{2a}$ $\quad 2a$

Rumus umum suku ke-n barisan 5, 8, 13, 20, 29, … dapat ditentukan dengan cara:

(i) 5 8 13 20 29

(ii) 3 5 7 9

(iii) 2 2 2

(iii) $2a = 2$

$a = 1 \rightarrow$ (ii) $3a + b = 3$

$b = 0 \rightarrow$ (i) $a + b + c = 5$

$c = 4$, sehingga $\mathbf{U_n = n^2 + 4}$

3. Barisan Berderajat Tiga

Bentuk umum $U_n = an^3 + bn^2 + cn + d$. Dengan demikian $u_1 = a + b + c + d$, $u_2 = 8a + 4b + 2c + d$, $u_3 = 27a + 9b + 3c + d$, $u_4 = 64a + 16b + 4c + d$, dan seterusnya. Identifikasi selisih tetapnya adalah sebagai berikut:

(i) $\boxed{a + b + c + d}$, $8a + 4b + 2c + d$, $27a + 9b + 3c + d$, $64a + 16b + 4c + d$

(ii) $\boxed{7a + 3b + c}$ $\quad 19a + 5b + c \quad 37a + 7b + c$

(iii) $\boxed{12a + 2b}$ $\quad 18a + 2b$

(iv) $\boxed{6a}$

Rumus umum suku ke-n barisan 2, 5, 18, 45, 90, … dapat ditentukan dengan cara:

(i)	2		5		18		45		90
(ii)		3		13		27		45	
(iii)			10		14		18		
(iv)				4		4			

Dengan menyelesaikan persamaan (iv), (iii), (ii) dan (i) seperti yang dilakukan pada barisan berderajat satu maupun barisan berderajat dua diperoleh

$a = \frac{2}{3}$, $b = 1$, $c = -\frac{14}{3}$ dan $d = 5$ sehingga rumus suku ke-n

$$U_n = \frac{2}{3}n^3 + n^2 - \frac{14}{3}n + 5 = \frac{1}{3}(2n^3 + 3n^2 - 14n + 15)$$

Latihan 8

1. Tentukan rumus suku ke-n untuk tiap-tiap barisan berikut ini:

   a. 5, 9, 13, 17, …
   b. 6, 11, 16, 21, …
   c. 1, 6, 13, 22, …
   d. 2, 5, 12, 23, …
   e. 1, 9, 27, 61, …
   f. 2, 10, 28, 68, 120,…

2. Tentukan rumus suku ke-n

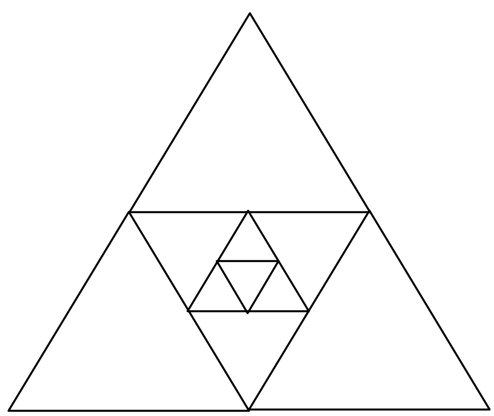
   a. barisan bilangan segi tiga 1, 3, 6, 10, 15, …
   b. barisan bilangan persegi panjang 2, 6, 12, 20, …
   c. barisan bilangan balok 6, 24, 60, 120, …

3. Rancanglah masalah-masalah kontekstual yang merupakan barisan berderajat dua dan tiga. Kemudian tentukan rumus suku ke-n barisan tersebut.

D. Lembar Kerja

Lembar Kerja 1

Materi	: Deret Geometri Tak Hingga
Kompetensi Dasar	: 1. Merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan deret 2. Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan deret dan penafsirannya
Indikator	: 1. merancang model matematika yang berkaitan dengan deret geometri tak hingga 2. Menentukan jumlah tak hingga suatu deret geometri
Waktu	: 10 menit
Petunjuk	: Bacalah dengan teliti soal di bawah ini, kemudian kerjakan sesuai dengan permintaan soal.



Suatu segitiga sama sisi mempunyai sisi-sisi yang panjangnya 20 cm. Titik tengah sisi-sisi segitiga itu dihubungkan sehingga membentuk segitiga sama sisi lain yang lebih kecil. Jika prosedur ini dilakukan berulang sampai tak hingga kali, tentukan:

1. jumlah keliling semua segitiga.
2. jumlah luas semua segitiga

Lembar Kerja 2

Materi : Deret Geometri Tak Hingga

Kompetensi Dasar : 4.3 Merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan deret

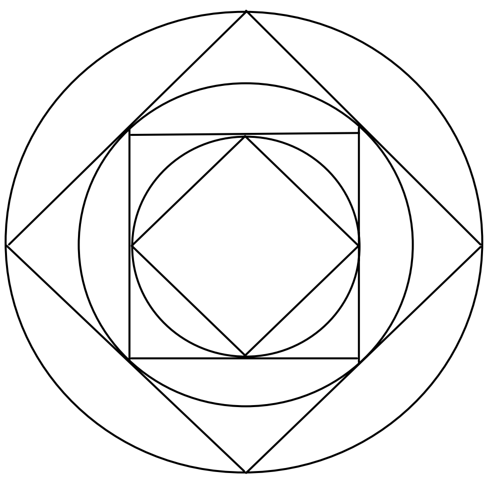
4.4 Menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan deret dan penafsirannya

Indikator : 1. merancang model matematika yang berkaitan dengan deret geometri tak hingga

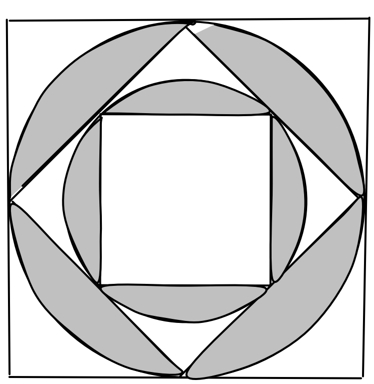
2. Menentukan jumlah tak hingga suatu deret geometri

Waktu : 15 menit

Petunjuk : Bacalah dengan teliti soal di bawah ini, kemudian kerjakan sesuai dengan permintaan soal.



1. Jari-jari lingkaran yang paling besar pada gambar di samping ini adalah R. Hitunglah luas:
   a. semua lingkaran yang terjadi
   b. semua persegi yang terjadi



2. Hitunglah luas semua daerah yang diarsir jika pola arsiran dilakukan sampai tak hingga dan panjang sisi persegi yang terbesar 2R.

Lembar Kerja 3

Materi : Barisan Sebagai Fungsi

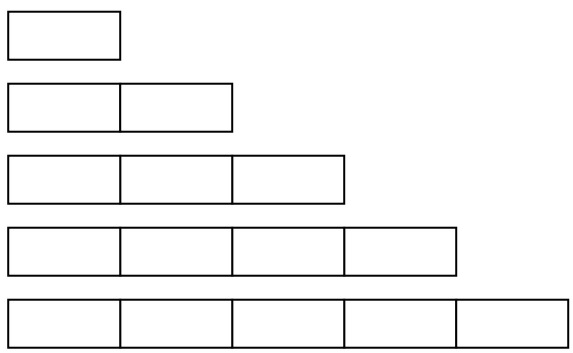
Indikator : Menyatakan rumus suku ke-n suatu barisan menggunakan fungsi

Waktu : 10 menit

Bahan/ alat : -

Langkah-langkah:

1. Perhatikan semua persegi panjang di bawah ini, kemudian lengkapi tabel berikut:



Banyak persegi panjang kecil	Banyak seluruh persegi panjang
1	
2	
3	
4	
5	

2. Perhatikan pola bilangan yang Anda dapat. Jika ada n persegi panjang kecil berapa jumlah seluruh persegi panjang? Jika ada 20 persegi panjang kecil berapa jumlah seluruh persegi panjang?

Lembar Kerja 4

Materi : Barisan Sebagai Fungsi

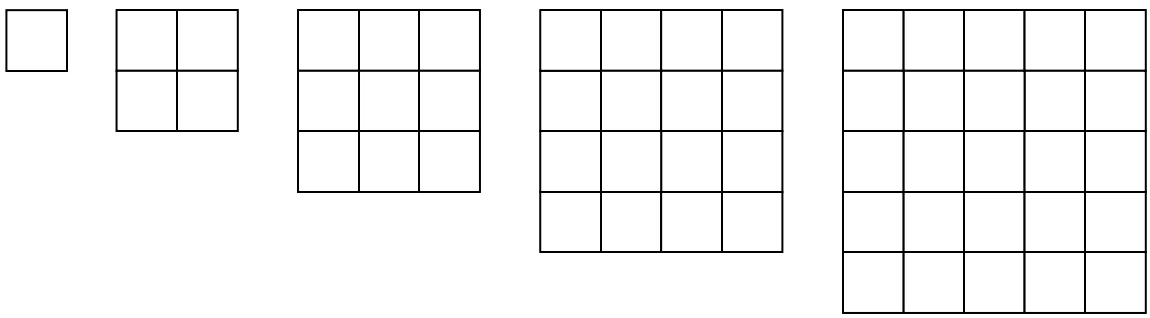
Indikator : Menyatakan rumus suku ke-n suatu barisan sebagai fungsi

Waktu : 10 menit

Bahan/ alat : -

Langkah-langkah:

1. Perhatikan semua persegi di bawah ini, kemudian lengkapi tabel berikut.



Panjang sisi persegi	Banyak seluruh persegi
1 satuan	
2 satuan	
3 satuan	
4 satuan	
5 satuan	

2. Perhatikan pola bilangan yang Anda dapat. Jika ada persegi bersisi 15 satuan berapa jumlah seluruh persegi yang ada?

E. Evaluasi

1. Buktikan $\sum_{k=1}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{6} k^2 + 3\sum_{k=1}^{7} k + 210$

2. Hitunglah nilai $\sum_{n=1}^{6} 2.3^{n-1}$

3. Tentukan n jika:

   a. 1+ 3 + 5 + 7 + … + n = 529

   b. 75 + 70 + 65 + 60 + …+n = 0

4. ${}^2\log a$, ${}^2\log \frac{a}{b}$, ${}^2\log \frac{a}{b^2}$, …. Barisan bilangan apakah ini?

5. Suku tengah barisan aritmetika adalah 25. Jika beda adalah 4 dan suku ke-5 adalah 21, berapa jumlah semua suku pada barisan tersebut?

6. Suatu deret aritmetika suku ke-5 adalah $5\sqrt{2}$ –3 dan suku ke-11 adalah $11\sqrt{2}$ + 9. Tentukan jumlah 10 suku pertama.

7. Sebuah deret aritmetika mempunyai suku umum a_n dan beda 2.
   Jika $a_2 + a_4 + a_6 + … + a_{20} = 138$. Tentukan jumlah 5 suku pertama deret itu.

8. Suku tengah barisan aritmetika adalah 25. Jika beda adalah 4 dan suku ke-5 adalah 21. Berapa jumlah semua suku pada barisan tersebut?

9. Suatu deret aritmetika diketahui $u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + u_9 + u_{11} = 72$. Tentukan nilai $u_1 + u_6 + u_{11}$

10. Sepotong kawat yang panjangnya 124 cm dipotong menjadi 5 bagian sehingga panjang potongan-potongannya membentuk barisan geometri. Jika potongan kawat yang paling pendek 4 cm, berapa ukuran kawat yang terpanjang?

11. A berhutang pada B sebesar Rp. 1.000. 000,-. A berjanji untuk membayar kembali hutangnya setiap bulan sebesar Rp. 100. 000,- ditambah bunga 2 % perbulan dari sisa pinjamannya. Berapa jumlah bunga yang dibayarkan sampai hutangnya lunas?

12. Suku pertama suatu deret geometri tak hingga adalah a, sedangkan rasionya adalah r = ${}^2\log(x-3)$. Carilah batas-batas nilai x sehingga deret geometri itu konvergen.

13. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jika suku ke-3 ditambah 2 dan suku ke-2 dikurangi 2 diperoleh barisan geometri. Jika suku ke-3 barisan aritmetika ditambah 2 maka hasilnya menjadi 4 kali suku pertama. Berapa beda barisan aritmetika itu?

14. Nyatakan penjumlahan berikut dengan bentuk notasi sigma:

a. 1 + 3 + 6 + 10 + …   b. 2 + 6 + 12 + 20+ …

15. Tentukan jumlah deret geometri tak hingga $\sqrt{2}+1+\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}+...$

F. Rangkuman

❖ Notasi sigma ($\sum$) digunakan untuk menyingkat penjumlahan yang panjang.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

❖ Sifat-sifat Notasi Sigma

Untuk setiap bilangan bulat a, b dan n berlaku:

1. $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$
2. $\sum_{k=a}^{b} cf(k) = c\sum_{k=a}^{b} f(k)$
3. $\sum_{k=a}^{b} (f(k)+g(k)) = \sum_{k=a}^{b} f(k) + \sum_{k=a}^{b} g(k)$
4. $\sum_{k=1}^{m-1} f(k) + \sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$
5. $\sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{k=m+p}^{n+p} f(k-p)$

❖ Barisan aritmetika adalah barisan yang mempunyai selisih yang tetap antara dua suku yang berurutan yang disebut beda.

Contoh barisan aritmetika:

1) 3, 7, 11, 15, …

2) 2, 5, 8, 11,…

Rumus suku ke-n barisan aritmetika adalah $\boxed{u_n = a + (n-1)b}$ dengan

a = suku pertama dan b= beda = $u_n - u_{n-1}$

❖ Deret aritmetika adalah jumlahan dari suku-suku barisan aritmetika.

Contoh deret aritmetika:

1) 3 + 7 + 11 + 15 + …

2) 2 + 5 + 8 + 11+ …

Rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2} n (a + u_n)} \text{ atau } \boxed{S_n = \frac{1}{2} n [(2a + (n-1)b]}$$

❖ Barisan geometri adalah barisan yang mempunyai perbandingan (rasio) yang tetap antara dua suku yang berurutan.

Contoh deret geometri:

1) 1, 2, 4, 8, 16, …

2) 2, 6, 18, 54, …

Rumus suku ke-n barisan geometri adalah:

$\boxed{u_n = ar^{n-1}}$ dengan a = suku pertama dan $\boxed{r = \text{rasio} = \frac{u_n}{u_{n-1}}}$

❖ Deret geometri adalah jumlahan dari suku-suku barisan geometri.

Contoh deret geometri:

1) 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + …

2) 2 + 6 + 18 + 54 + …

Rumus jumlah n suku pertama deret geometri:

$$\boxed{S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}}$$ atau

$$\boxed{S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}}$$

- Untuk $-1 < r < 1$, deret geometri mempunyai jumlah tak hingga S_∞ dengan

$$\boxed{S_\infty = \frac{a}{(1-r)}}$$

- Barisan 2, 5, 8, 11, … disebut barisan berderajat 1 karena selisih tetap dipeoleh pada satu tingkat penyelidikan.

2 5 8 11, …

3 3 3 selisih tetap = 3

Suku ke-n barisan ini jika dinyatakan sebagai fungsi adalah $U_n = an + b$.

- Barisan 5, 8, 13, 20, 29, … disebut barisan berderajat 2 karena selisih tetap dipeoleh pada dua tingkat penyelidikan.

5 8 13 20 29

3 5 7 9

2 2 2 selisih tetap = 2

Suku ke-n barisan ini jika dinyatakan sebagai fungsi adalah

$U_n = an^2 + bn + c$.

Bab III

Penutup

A. Kesimpulan

Notasi sigma merupakan suatu simbol yang digunakan untuk menyingkat penjumlahan yang panjang terutama untuk menyatakan suatu deret bilangan. Walaupun banyak sekali barisan dan deret yang dikenal, adalah suatu “keharusan” untuk mengenal dan menyelidiki lebih dalam lagi barisan dan deret aritmetika dan barisan dan deret geometri karena banyak sekali peristiwa dalam kehidupan sehari-hari yang merupakan representasi kedua barisan dan deret itu. Termasuk dalam hal ini adalah mengetahui ciri-ciri, sifat-sifat, bagaimana cara menentukan suku ke-n barisan aritmetika dan geometri serta jumlah n suku pertama deret aritmetika dan geometri.

Selain kedua jenis barisan dan deret itu, barisan dan deret berderajat lebih dari satu sangat menarik untuk diselidiki. Salah satu cara dalam menentukan rumus umum suku ke-n dari barisan jenis ini adalah menggunakan fungsi.

Untuk menarik minat siswa dalam mempelajari barisan dan deret, kegiatan pembelajaran dilakukan secara induktif menggunakan pendekatan kontekstual dan metode eksplorasi.

B. Saran

Banyak hal yang masih perlu diperbaiki dalam penulisan ini yang luput dari perhatian. Karena itu saran dan masukan sangat diharapkan dari pembaca demi perbaikan tulisan ini. Untuk itu saran dan masukan dapat diberikan secara langsung atau dikirimkan kepada Puji Iryanti, PPPPTK Matematika Yogyakarta Jalan Kaliurang Km.6 Sambisari Condong Catur Depok Sleman Yogyakarta.

Daftar Pustaka

Foster, Alan G. 1995. *Merril Algebra 2 With Trigonometry*. New York: Glencoe Macmillan/ McGraw-Hill.

Marsudi Raharjo. 2001. *Notasi Sigma dan Induksi Matematika*. Yogyakarta: PPPG Matematika.

Nasoetion, Andi Hakim. 1994. *Matematika I untuk Sekolah Menengah Umum Kelas I*. Jakarta: Balai Pustaka.

Posamentier, Alfred S- Stepelmen, Jay. 1999. *Teaching Secondary School Mathematics*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Sartono Wirodikromo. 2003. *Matematika 2000 untuk SMU Kelas I Semester 2*. Jakarta: Erlangga.

Sumadi, dkk. 1996. *Matematika SMU untuk Kelas I*. Solo: PT Tiga Serangkai.