DIKLAT INSTRUKTUR PENGEMBANG MATEMATIKA SMA
JENJANG LANJUT

OSN MATEMATIKA SMA

Wiworo, S.Si, M.M.

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIDK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
YOGYAKARTA
2009

BAB I

OLIMPIADE SAINS NASIONAL BIDANG MATEMATIKA

SEKOLAH MENENGAH ATAS/MADRASAH ALIYAH

A. LATAR BELAKANG

Pesatnya perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi hingga saat ini telah mengantarkan umat manusia ke era kompetisi global di berbagai bidang kehidupan. Situasi demikian menuntut kita agar segera berbenah diri dan sekaligus menyusun langkah nyata guna menyongsong masa depan. Langkah utama yang harus dipikirkan dan direalisasikan adalah bagaimana kita menyiapkan sumber daya manusia yang berkarakter kuat, kokoh, tahan uji serta memiliki kemampuan yang handal di bidangnya.

Upaya tersebut harus ditempuh dengan merealisasikan pendidikan yang berorientasi pada bagaimana peserta didik mampu berkreasi memecahkan masalah yang dihadapi dalam kehidupan sehari-hari. Oleh karena itu, paradigma pendidikan yang mengedepankan peningkatan daya nalar, kreativitas serta berpikir kritis harus diaplikasikan dalam setiap langkah pengembangan ke depan.

Salah satu arah kebijakan program pembangunan pendidikan nasional dalam bidang pendidikan adalah mengembangkan kualitas sumber daya manusia sedini mungkin secara terarah, terpadu dan menyeluruh melalui berbagai usaha proaktif dan reaktif oleh seluruh komponen bangsa agar generasi muda dapat berkembang secara optimal.

Misi pendidikan nasional adalah terwujudnya sistem dan iklim pendidikan nasional yang demokratis dan bermutu guna memperteguh akhlak mulia, kreatif, inovatif, berwawasan kebangsaan, cerdas, sehat, berdisiplin serta menguasai ilmu pengetahuan dan teknologi.

Mutu sumber daya manusia suatu bangsa tergantung pada mutu pendidikan. Dengan berbagai strategi, peningkatan mutu pendidikan diarahkan untuk meningkatkan mutu siswa dalam penguasaan ilmu pengetahuan dasar, penguasaan bahasa asing dan penanaman sikap serta perilaku yang mencerminkan budi pekerti.

Era global memberikan inspirasi positif dalam masyarakat Indonesia, sebagai bagian dari masyarakat internasional, bahwa masa depan Indonesia sangat memerlukan kemampuan kompetitif di kalangan pelajar untuk bersaing secara sehat dalam penguasaan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Untuk mengantisipasi hal tersebut, Departemen Pendidikan Nasional melalui Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah telah memfasilitasi kegiatan-kegiatan yang mengarah pada kreativitas siswa dalam bidang ilmu pengetahuan dan teknologi melalui berbagai lomba, baik yang berskala nasional maupun internasional. Sejak tahun 2002 telah dimulai kegiatan Olimpiade Sains Nasional (OSN) untuk siswa SMA/MA yang terdiri dari kompetisi di bidang Matematika, Fisika Biologi, Kimia dan Informatika/Komputer. Pada tahun 2003 kegiatan OSN ini dikembangkan sampai ke jenjang SD/MI (Matematika dan IPA) serta SMP/MTs (Matematika, Fisika dan Biologi). Kemudian pada tahun 2004 juga telah dimulai Olimpiade Astronomi Nasional untuk jenjang SMP/MTs dan SMA/MA.

B. TUJUAN

Tujuan diadakannya Olimpiade Sains Nasional adalah:

1. Menumbuhkembangkan budaya kompetitif yang sehat di kalangan siswa SD/MI, SMP/MTs dan SMA/MA
2. Meningkatkan wawasan pengetahuan, kemampuan, kreativitas dan kerja keras untuk menguasai ilmu pengetahuan dan teknologi
3. Membina dan mengembangkan kesadaran ilmiah untuk mempersiapkan generasi muda dalam menghadapi masa kini dan yang akan datang
4. Mempererat kesatuan bangsa dalam pengembangan sains, matematika dan teknologi bagi generasi muda masa kini dan yang akan datang
5. Meningkatkan kecerdasan dan keterampilan siswa dalam rangka mewujudkan pendidikan yang berkualitas

C. HASIL YANG DIHARAPKAN

Hasil yang diharapkan pada Olimpiade Sains Nasional adalah:

1. Menciptakan suasana kompetisi yang sehat antarsiswa, antarsekolah dan antarprovinsi di bidang sains, matematika dan teknologi.
2. Memacu peningkatan mutu pendidikan sains, matematika dan teknologi di semua sekolah.

3. Membangkitkan minat keilmuan, khususnya sains, matematika dan teknologi bagi siswa dan warga sekolah.
4. Membangun kesadaran di kalangan siswa dan warga sekolah bahwa belajar sains, matematika dan teknologi dapat menyenangkan dan mengasyikkan.
5. Mempererat persatuan dan kesatuan bangsa di masa kini dan yang akan datang.

D. MATERI OLIMPIADE MATEMATIKA SMA

Materi soal-soal olimpiade matematika SMA bersumber pada buku-buku pelajaran, buku-buku penunjang dan bahan lain yang relevan. Penekanan soal adalah pada aspek penalaran, pemecahan masalah dan komunikasi dalam matematika. Karakteristik soal adalah nonrutin dengan dasar teori yang diperlukan cukup dari teori yang diperoleh di SMP dan SMA saja. Akan tetapi untuk bisa menjawab soal, siswa memerlukan kematangan matematika dengan taraf lanjut berupa wawasan, kecermatan, kejelian, kecerdikan, cara berpikir dan pengalaman dengan matematika. Seperti umumnya kompetisi matematika yang serius, Olimpiade Sains Nasional Matematika SMA/MA mengukur secara langsung tiga aspek, yaitu pemecahan masalah (*problem solving*), penalaran (*reasoning*) dan komunikasi tertulis. Oleh karena itu persiapan calon peserta OSN semestinya berorientasi kepada peningkatan kemampuan dalam ketiga aspek tersebut.

Pemecahan masalah dipahami sebagai pelibatan diri dalam masalah tidak rutin (*nonroutine problem*), yaitu masalah yang metode penyelesaiannya tidak diketahui di muka. Masalah tidak rutin menuntut pemikiran produktif seseorang untuk menciptakan strategi, pendekatan dan teknik untuk memahami dan menyelesaikan masalah tersebut. Pengetahuan dan keterampilan saja tidak cukup. Ia harus dapat memilih pengetahuan dan keterampilan mana yang relevan; meramu dan memanfaatkan hasil pilihannya itu untuk menangani masalah tidak rutin yang dihadapinya.

Boleh jadi seseorang secara intuitif dapat menemukan penyelesaian dari masalah matematika yang dihadapinya. Bagaimana ia dapat meyakinkan dirinya dan orang lain bahwa penyelesaian yang ditemukannya itu memang penyelesaian yang benar? Ia harus memberikan justifikasi (pembenaran) untuk penyelesaiannya itu. Justifikasi yang dituntut di sini mestilah berdasarkan penalaran matematika yang hampir selalu berdasarkan penalaran deduktif. Peserta OSN Matematika SMA/MA perlu menguasai teknik-teknik pembuktian, seperti bukti langsung, bukti dengan kontradiksi, kontraposisi dan induksi matematika.

OSN Matematika SMA/MA berbentuk tes tertulis. Oleh karena itu peserta perlu memiliki kemampuan berkomunikasi secara tertulis. Tulisan haruslah efektif, yaitu dapat dibaca dan dimengerti orang lain serta menyatakan dengan tepat apa yang dipikirkan penulis. Selain itu OSN Matematika SMA/MA adalah tes dengan waktu terbatas. Ini berarti bahwa peserta harus dapat melakukan ketiga hal di atas secara efisien. Hendaknya diingat juga bahwa peserta OSN diharapkan memahami materi yang diujikan, bukan sekedar mengetahui fakta materi tersebut.

Silabus materi olimpiade matematika SMA/MA mengacu kepada silabus *International Mathematics Olympiad* (IMO) dan dapat digolongkan ke dalam empat hal, yaitu:

1. Aljabar
   a. Sistem bilangan real
      - Himpunan bilangan real dilengkapi dengan operasi tambah dan kali beserta sifat-sifatnya
      - Sifat urutan (sifat trikotomi, relasi lebih besar/kecil dari beserta sifat-sifatnya)

   b. Ketaksamaan
      - Penggunaan sifat urutan untuk menyelesaikan soal-soal ketaksamaan
      - Penggunaan sifat bahwa kuadrat bilangan real selalu non negatif untuk menyelesaikan soal-soal ketaksamaan
      - Ketaksamaan yang berkaitan dengan rataan kuadratik, rataan aritmetika, rataan geometri dan rataan harmonic

   c. Nilai mutlak
      - Pengertian nilai mutlak dan sifat-sifatnya
      - Aspek geometri nilai mutlak
      - Persamaan dan ketaksamaan yang melibatkan nilai mutlak

   d. Polinom
      - Algoritma pembagian
      - Teorema sisa
      - Teorema faktor
      - Teorema Vieta (sifat simetri akar)

e. Fungsi
    - Pengertian dan sifat-sifat fungsi
    - Komposisi fungsi
    - Fungsi invers
f. Sistem koordinat bidang
    - Grafik fungsi
    - Persamaan dan grafik fungsi irisan kerucut (lingkaran, elips, parabola, hiperbola)
g. Barisan dan deret
    - Suku ke-n suatu barisan
    - Notasi sigma
h. Persamaan dan sistem persamaan
    - Penggunaan sifat-sifat fungsi untuk menyelesaikan persamaan dan system persamaan
    - Penggunaan ketaksamaan untuk menyelesaikan persamaan dan sistem persamaan

2. Geometri
    a. Hubungan antara garis dan titik
    b. Hubungan antara garis dan garis
    c. Bangun-bangun bidang datar (segitiga, segiempat, segibanyak beraturan, lingkaran)
    d. Kesebangunan dan kekongruenan
    e. Sifat-sifat segitiga dan garis-garis istimewa pada segitiga (garis berat, garis bagi, garis tinggi, garis sumbu)
    f. Dalil Menelaus
    g. Dalil Ceva
    h. Dalil Stewart
    i. Relasi lingkaran dengan titik (titik kuasa)
    j. Relasi lingkaran dengan garis (bersinggungan, berpotongan, tidak berpotongan)
    k. Relasi lingkaran dengan segitiga (lingkaran dalam, lingkaran luar)
    l. Relasi lingkaran dengan segiempat

    - Segiempat tali busur
    - Dalil Ptolomeus
  m. Relasi lingkaran dengan lingkaran
    - Dua lingkaran tidak beririsan; baik salah satu di dalam atau di luar yang lain
    - Dua lingkaran beririsan di satu titik (bersinggungan); dari dalam atau dari luar
    - Dua lingkaran beririsan di dua titik
    - Lingkaran-lingkaran sepusat (konsentris)
  n. Garis-garis yang melalui satu titik (konkuren) dan titik-titik yang segaris (kolinear)
  o. Trigonometri (perbandingan, fungsi, persamaan, identitas)
  p. Bangun-bangun ruang sederhana
3. Kombinatorika
  a. Prinsip pencacahan
    - Prinsip penjumlahan
    - Prinsip perkalian
    - Permutasi dan kombinasi
    - Penggunaan prinsip pencacahan untuk menghitung peluang suatu kejadian
  b. Prinsip rumah merpati (pigeonhole principle/prinsip Dirichlet)
  c. Prinsip paritas
4. Teori bilangan
  a. Sistem bilangan bulat dan sifat-sifat operasinya
  b. Keterbagian (pengertian, sifat-sifat elementer, algoritma pembagian)
  c. Faktor persekutuan terbesar dan kelipatan persekutuan terkecil, relative prima, algoritma Euclid
  d. Bilangan prima
  e. Teorema dasar aritmetika (faktorisasi prima)
  f. Persamaan dan sistem persamaan bilangan bulat
  g. Fungsi tangga

E. PESERTA

Peserta olimpiade matematika SMA/MA adalah siswa SMA/MA negeri ataupun swasta yang duduk di kelas X atau XI dan memiliki nilai rapor matematika minimal 7,5. Selain itu olimpiade matematika SMA/MA juga dapat diikuti oleh siswa kelas IX SMP/MTs. Selama ini banyak contoh siswa kelas IX SMP yang ikut olimpiade matematika SMA yang dapat berprestasi bahkan sampai meraih medali di Olimpiade Sains Nasional dan diundang mengikuti Pembinaan Nasional Tahap I untuk seleksi Tim Olimpiade Matematika Indonesia

F. POLA SELEKSI

Pola seleksi Olimpiade Sains Nasional Tingkat SMA/MA bidang studi matematika dilaksanakan secara berjenjang mulai dari tingkat kabupaten/kota, provinsi dan diakhiri dengan Olimpiade Sains Nasional. Prosesnya adalah sebagai berikut:

1. Seleksi tingkat sekolah

   Menjadi kewenangan sekolah, dilaksanakan oleh masing-masing sekolah untuk memilih wakil sekolah tersebut yang akan diikutkan ke seleksi tingkat kabupaten/kota.

2. Seleksi tingkat kabupaten/kota

   Seleksi tingkat kabupaten/kota dilakukan melalui tes tertulis sebanyak 10 soal pilihan ganda dan 10 soal isian singkat. Materi soal masih berupa masalah-masalah (*problem solving*) yang sederhana. Beberapa daerah yang dirasakan sudah mampu diperbolehkan untuk membuat soal sendiri walaupun dari panitia pusat juga tetap menyediakan soal standar.

3. Seleksi tingkat provinsi

   Seleksi tingkat provinsi dilakukan melalui tes tertulis sebanyak 20 soal isian singkat dan 5 soal uraian. Materi soal berupa masalah-masalah (*problem solving*) tingkat menengah. Soal seleksi tingkat provinsi dibuat oleh panitia pusat dan dibuat sama untuk seluruh Indonesia. Hal ini disebabkan untuk menjaring calon peserta OSN menggunakan sistem *passing grade*, yaitu juara I untuk setiap provinsi (berapapun nilainya) akan langsung diundang mengikuti OSN. Sedangkan peringkat II dan seterusnya untuk masing-masing provinsi, nilainya akan diranking secara nasional dan akan diambil sekitar 50 siswa terbaik dari hasil ranking nasional tersebut. Total peserta OSN untuk masing-masing bidang studi adalah sekitar 90 siswa. Dengan cara ini setiap provinsi pasti akan ada wakilnya (aspek pemerataan), akan tetapi juga akan ada beberapa provinsi yang punya banyak wakil karena memang nilainya lebih tinggi dari provinsi yang lain (aspek penjaringan potensi). Di beberapa daerah, sistem *passing grade* ini bahkan sudah dilakukan sejak seleksi tingkat kabupaten/kota.

4. Olimpiade Sains Nasional SMA/MA bidang studi matematika

   Olimpiade Sains Nasional SMA/MA bidang studi matematika diadakan setiap bulan September. Tes dilaksanakan dalam dua hari dengan rincian kegiatan sebagai berikut:

   a. Hari I, setiap peserta menyelesaikan 4 soal uraian dalam waktu 180 menit
   b. Hari II, setiap peserta menyelesaikan 4 soal uraian dalam waktu 180 menit

   Materi soal untuk OSN berupa *problem solving* tingkat lanjut. Nilai maksimal untuk setiap soal adalah 7 (disesuaikan dengan sistem penilaian di *International Mathematics Olympiad*).

5. Pembinaan Nasional Tahap I Tim Olimpiade Matematika Indonesia

   Siswa peraih medali emas, perak dan perunggu OSN ditambah dengan veteran peserta Pembinaan Nasional Tahap II tahun sebelumnya diundang untuk mengikuti Pembinaan Nasional Tahap I Tim Olimpiade Matematika Indonesia untuk seleksi pemilihan tim Indonesia ke *International Mathematics Olympiad* (IMO). Khusus untuk siswa peraih medali perunggu dari kelas XII SMA tidak akan diundang untuk mengikuti pembinaan tersebut. Pembinaan Tahap I ini bertujuan untuk:

   a. Meningkatkan pengetahuan dan wawasan calon peserta IMO tentang matematika, terutama materi yang berkaitan dengan IMO
   b. Melatih calon peserta IMO dalam kegiatan pemecahan masalah
   c. Melatih calon peserta IMO dalam menuangkan ide dan gagasan terutama dalam bentuk bahasa tulis
   d. Menyeleksi calon peserta yang akan dibina pada Pembinaan Tahap II

   Materi yang dilatihkan pada kegiatan ini meliputi:

   a. *Heuristic* (*Problem Solving Strategy*)
   b. Aljabar
   c. Teori Bilangan
   d. Geometri

e. Kombinatorika

6. Pembinaan Nasional Tahap II Tim Olimpiade Matematika Indonesia

   Sekitar 15 siswa dengan ranking terbaik hasil Pembinaan Tahap I berhak mengikuti Pembinaan Tahap II. Peserta Pembinaan Tahap II ini juga akan mengikuti *Asian Pacific Mathematics Olympiad* (APMO). Hasil beberapa tes di Pembinaan Tahap II ditambah dengan hasil APMO akan menjadi dasar penentuan 6 siswa wakil Indonesia ke *International Mathematics Olympiad* (IMO).

G. DISTRIBUSI MEDALI DAN PENGHARGAAN

Distribusi medali dan penghargaan bagi pemenang Olimpiade Sains Nasional Tingkat SMA/MA adalah sebagai berikut:

1. Untuk masing-masing mata pelajaran disediakan 5 medali emas, 10 medali perak dan 15 medali perunggu.
2. Selain medali, juga disediakan penghargaan berupa *The Best Theory* dan *The Best Experiment* untuk Fisika, Kimia dan Biologi

H. STRATEGI BELAJAR SISWA MENGHADAPI OLIMPIADE

Strategi belajar yang sebaiknya dilakukan oleh siswa untuk menghadapi olimpiade matematika, di antaranya adalah:

1. Tahu manfaat dan tujuan
2. Membiasakan diri untuk berpikir kreatif
3. Membiasakan untuk berpikir sistematis, terstruktur dan logis dalam memecahkan masalah
4. Membiasakan untuk memahami dan tidak hanya mengingat
5. Mengembangkan kemampuan berpikir, kemampuan bernalar, kemampuan memecahkan masalah dan kemampuan berkomunikasi
6. Aktif bertanya ke guru ataupun pembina
7. Aktif mencari materi olimpiade dari berbagai sumber belajar (buku-buku referensi dan internet)
8. Pada tahap yang lebih lanjut siswa harus mempunyai kemampuan untuk *transfer of learning* yaitu kemampuan untuk mengembangkan hal-hal yang pernah dipelajari untuk menghadapi situasi yang baru yang belum pernah dihadapi sebelumnya

9. Pada akhirnya siswa diharapkan untuk dapat “berpikir dan bekerja matematika” (*thinking and working mathematically*)

I. PERAN GURU DALAM PEMBINAAN OLIMPIADE

Peran guru dalam mengoptimalkan potensi matematika yang dimiliki oleh siswanya melalui pembinaan olimpiade adalah:

1. Menanamkan konsep dasar matematika yang benar
2. Menanamkan sikap dan kebiasaan untuk berpikir kreatif, sistematis, terstruktur, logis, mengembangkan kemampuan bernalar, kemampuan memecahkan masalah, kemampuan berkomunikasi dan kemampuan menghubungkan-hubungkan
3. Mengidentifikasi siswa yang potensial dan memelihara serta mengoptimalkan potensi siswa tersebut
4. Menjalin hubungan dan komunikasi yang lebih baik dengan siswa
5. Memotivasi siswa

BAB II

STRATEGI PEMECAHAN MASALAH

Lenchner (1983: 8) secara umum menggolongkan penugasan matematika ke dalam dua hal, yaitu soal biasa (*exercise)* dan masalah (*problem*). Menurut Lenchner, pengertian *exercise* adalah "*A task for which a procedure for solving is already known, frequently an exercise can be solved by the direct application of one or more computational algorithms*", yang apabila diterjemahkan maksudnya kurang lebih adalah suatu penugasan yang cara atau prosedur untuk menyelesaikannya sudah diketahui, sehingga hanya memerlukan beberapa langkah perhitungan. Pengertian *problem* dinyatakan sebagai "*A problem is more complex because the strategy for solving is not immediately apparent, solving a problem requires some degree of creativity or originality on the part of the problem solver*", yang apabila diterjemahkan maksudnya kurang lebih berarti suatu penugasan yang lebih kompleks karena cara penyelesaiannya tidak bisa langsung diketahui dan lebih memerlukan kreativitas dan originalitas dari seorang pemecah masalah.

Secara garis besar, untuk soal biasa begitu kita melihat soalnya kita akan bisa langsung menentukan cara penyelesaiannya. Sedangkan untuk yang berjenis masalah, begitu melihat soalnya kita belum bisa langsung menentukan cara penyelesaian soal tersebut. Untuk menyelesaikan soal yang bertipe masalah ini, kita memerlukan langkah-langkah pemecahan masalah dan strategi pemecahan masalah. Pengertian pemecahan masalah menurut Posamentier (1999: 98) adalah suatu proses mengaplikasikan pengetahuan yang telah diperoleh sebelumnya ke dalam suatu situasi yang baru dan tidak dikenal. Belajar memecahkan masalah adalah alasan utama mempelajari matematika. Menyelesaikan soal cerita (*word problem*) adalah salah bentuk proses pemecahan masalah, akan tetapi siswa juga harus dihadapkan dengan masalah yang bukan berupa soal cerita (*nontext problem*).

Untuk dapat memecahkan masalah diperlukan tahap-tahap pemecahan masalah dan strategi pemecahan masalah. Polya (1973: 5) menyarankan untuk membagi proses pemecahan masalah ke dalam empat tahap, yaitu:

1. Memahami masalah

   Pada tahap ini kita harus dapat mengidentifikasi hal-hal yang diketahui, hal-hal yang ditanyakan dan syarat-syarat yang ada. Apabila diperlukan kita dapat membuat gambar/diagram untuk memperjelas situasinya. Setelah informasi yang diperoleh sudah lengkap, kita harus dapat mengorganisasi dan menghubung-hubungkan informasi-informasi tersebut.

2. Menyusun rencana

Pada tahap ini kita harus dapat menentukan apakah kita pernah menghadapi masalah tersebut ataupun masalah lain yang serupa. Selain itu kita harus memikirkan masalah lain yang terkait dengan masalah yang sedang dihadapi. Selanjutnya kita harus menentukan strategi yang sesuai untuk memecahkan masalah tersebut. Pengertian strategi pemecahan masalah adalah cara atau metode yang sering digunakan dan berhasil pada proses pemecahan masalah. Beberapa strategi pemecahan masalah yang sering digunakan adalah:

a. Menebak dan memeriksa
b. Membuat gambar/diagram
c. Mencari pola
d. Membuat daftar yang sistematis
e. Bergerak dari belakang
f. Menyatakan masalah dalam bentuk yang lebih sederhana
g. Menyelesaikan bagian per bagian dari masalah
h. Menyatakan masalah dengan cara lain
i. Memperhitungkan setiap kemungkinan
j. Mengabaikan hal yang tidak mungkin
k. Membuat model matematika

3. Melaksanakan rencana

   Pada tahap ini kita melaksanakan rencana pemecahan masalah dengan setiap kali mengecek kebenaran di setiap langkah. Dapatkah kita melihat bahwa setiap langkah yang kita lakukan sudah benar? Dapatkah kita membuktikan bahwa setiap langkah yang kita lakukan sungguh benar?

4. Menguji kembali

   Pada tahap ini kita harus memeriksa hasil diperoleh. Apakah hasil tersebut sudah sesuai dengan masalahnya?

BAB III

CONTOH SOLUSI BEBERAPA SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA

1. Diketahui bahwa $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Untuk $k > 2$ didefinisikan bahwa $a_k = \frac{1}{2}a_{k-2} + \frac{1}{3}a_{k-1}$.

   Tentukan jumlah tak hingga dari $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$.

   Solusi:

   Kita misalkan $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \mathrm{S}$. Dengan demikian kita dapat menuliskan

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \\ &= 2 + 3 + \left(\tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{1}{3}a_2 + \tfrac{1}{2}a_2 + \tfrac{1}{3}a_3 + \tfrac{1}{2}a_3 + \tfrac{1}{3}a_4 + \cdots\right) \end{aligned}$$

   Kedua ruas kita kalikan 6 sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 6S &= 6(2+3) + 6\left(\tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{1}{3}a_2 + \tfrac{1}{2}a_2 + \tfrac{1}{3}a_3 + \tfrac{1}{2}a_3 + \tfrac{1}{3}a_4 + \cdots\right) \\ &= 12 + 18 + 3a_1 + 2a_2 + 3a_2 + 2a_3 + 3a_3 + 2a_4 + \cdots \\ &= 30 + 3(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots) + 2(a_2 + a_3 + a_4 + \cdots) \\ &= 30 + 3(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots) + 2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots) - 2a_1 \end{aligned}$$

   Dengan demikian $6S = 30 + 3S + 2S - 2 \cdot 2$. Sehingga diperoleh $S = 26$.

2. Buktikan bahwa $(n-1)n(n^3+1)$ senantiasa habis dibagi 6 untuk semua bilangan asli n.

   Bukti:

   Ambil sebarang bilangan asli n. Untuk membuktikan bahwa $(n-1)n(n^3+1)$ senantiasa habis dibagi oleh 6, maka harus dibuktikan bahwa $(n-1)n(n^3+1)$ habis dibagi 2 dan habis dibagi 3.

   Akan dibuktikan bahwa $(n-1)n(n^3+1)$ habis dibagi 2.

   Kita pecah dalam dua kasus, yaitu untuk $n = 2k$ dan untuk $n = 2k+1$ untuk sebarang bilangan asli k.

   Untuk $n = 2k$ diperoleh

$$\begin{aligned} (n-1)n(n^3+1) &= (2k-1)(2k)\left((2k)^3+1\right) \\ &= 2(2k-1)k\left(8k^3+1\right) \end{aligned}$$

   yang merupakan kelipatan 2.

   Untuk $n = 2k+1$ diperoleh

$$(n-1)n(n^3+1) = 2k(2k+1)\left(8k^3 + 12k^2 + 6k + 2\right)$$

   yang merupakan kelipatan 2.

   Dari kedua kasus tersebut dapat disimpulkan bahwa $(n-1)n(n^3+1)$ habis dibagi 2 untuk setiap bilangan asli n.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $(n-1)n(n^3+1)$ habis dibagi 3.

Kita pecah dalam tiga kasus, yaitu untuk $n=3k$, untuk $n=3k+1$ dan untuk $n=3k+2$ untuk sebarang bilangan asli k.

Untuk $n=3k$ diperoleh

$$\begin{aligned}(n-1)n(n^3+1) &= (3k-1)(3k)((3k)^3+1)\\ &= 3(3k-1)k(27k^3+1)\end{aligned}$$

yang merupakan kelipatan 3.

Untuk $n=3k+1$ diperoleh

$$(n-1)n(n^3+1) = (3k)(3k+1)((3k+1)^3+1)$$

yang merupakan kelipatan 3.

Untuk $n=3k+2$ diperoleh

$$\begin{aligned}(n-1)n(n^3+1) &= (3k+1)(3k+2)((3k+2)^3+1)\\ &= (3k+1)(3k+2)(27k^3+54k^2+36k+8+1)\\ &= (3k+1)(3k+2)9(3k^3+6k^2+4k+1)\end{aligned}$$

yang merupakan kelipatan 3.

Dari ketiga kasus tersebut dapat disimpulkan bahwa $(n-1)n(n^3+1)$ habis dibagi 3 untuk setiap bilangan asli n.

Dengan demikian $(n-1)n(n^3+1)$ habis dibagi 2 dan habis dibagi 3. Karena 2 dan 3 saling relatif prima (FPB dari 2 dan 3 adalah 1), maka $(n-1)n(n^3+1)$ habis dibagi 6 untuk setiap bilangan asli n.

3. Untuk bilangan real a dan b sebarang, buktikan bahwa $a^2+b^2 \geq 2(a+b)-2$.

   Catatan:

   Untuk membuktikan soal tersebut, permasalahan yang sering muncul adalah harus dimulai dari mana untuk mengkonstruksikan pembuktiannya. Untuk pembuktian yang masih sederhana, masalah tersebut tidak terlalu mengganggu. Akan tetapi untuk soal yang lebih kompleks, masalah tersebut akan sangat mengganggu. Hal ini dapat diatasi jika kita mulai dengan terlebih dahulu membuat proses/langkah berpikirnya. Dalam proses berpikir ini, kita bergerak mundur (*working backward*) dari yang akan dibuktikan, dengan langkah-langkah yang logis menuju ke yang diketahui. Pada penulisan buktinya, proses berpikir ini tidak perlu dicantumkan dan cukup ditulis di lembar corat-coret saja (buram).

Proses berpikir:

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &\geq 2(a+b)-2 \\ a^2+b^2 &\geq 2a+2b-2 \\ a^2-2a+1+b^2-2b+1 &\geq 0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dari proses berpikir tersebut, ternyata langkah buktinya harus dimulai dari $(a-1)^2 \geq 0$ dan $(b-1)^2 \geq 0$. Hal ini didasarkan dari sifat kuadrat sebarang bilangan real selalu nonnegatif.

Bukti:

Ambil *a* dan *b* sebarang bilangan real.

$$\begin{aligned} (a-1)^2 &\geq 0 \\ (b-1)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Jumlahkan kedua ketaksamaan maka diperoleh

$$\begin{aligned} (a-1)^2+(b-1)^2 &\geq 0 \\ a^2-2a+1+b^2-2b+1 &\geq 0 \\ a^2+b^2 &\geq 2a+2b-2 \\ a^2+b^2 &\geq 2(a+b)-2 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $a^2+b^2 \geq 2(a+b)-2$ untuk bilangan real *a* dan *b* sebarang.

4. Seseorang memiliki sejumlah koin senilai 1000 rupiah. Setelah diperhatikan dengan seksama, ternyata koin yang dimilikinya terdiri dari tiga macam koin di antara 4 macam koin yang sekarang masih berlaku (500-an, 200-an, 100-an dan 50-an). Selidiki dan tentukan berapa banyak kombinasi koin yang mungkin dimiliki oleh orang tersebut.

   Solusi:

   Strategi membuat daftar yang sistematis akan digunakan untuk menyelesaikan masalah ini.

Nomor	**Koin yang Digunakan**

	500-an	200-an	100-an	50-an
1	-	1	1	14
2	-	1	2	12
3	-	1	3	10
4	-	1	4	8
5	-	1	5	6
6	-	1	6	4
7	-	1	7	2
8	-	2	1	10
9	-	2	2	8
10	-	2	3	6
11	-	2	4	4
12	-	2	5	2
13	-	3	1	6
14	-	3	2	4
15	-	3	3	2
16	-	4	1	2
17	1	-	1	8
18	1	-	2	6
19	1	-	3	4
20	1	-	4	2
21	1	1	-	6
22	1	2	-	2
23	1	1	3	-
24	1	2	1	-

Dengan demikian terdapat 24 kemungkinan kombinasi koin yang dapat dimiliki orang tersebut.

5. Untuk setiap pasangan bilangan asli a dan b, kita definisikan $a*b = ab + a - b$. Bilangan asli x dikatakan penyusun bilangan asli n jika terdapat bilangan asli y yang memenuhi $x*y = n$. Sebagai contoh, 2 adalah penyusun 6 karena terdapat bilangan asli 4 sehingga $2*4 = 2\cdot 4 + 2 - 4 = 8 + 2 - 4 = 6$. Tentukan semua penyusun 2005.

   Solusi:

   Misalkan x adalah penyusun 2005. Sehingga terdapat bilangan asli y sedemikian hingga

$$\begin{aligned} 2005 &= x*y \\ &= xy + x - y \\ &= (x-1)(y+1)+1 \end{aligned}$$

   Sebagai akibatnya

$$
\begin{aligned}
(x-1)(y+1) &= 2004 \\
&= 2^2 \cdot 3 \cdot 167
\end{aligned}
$$

Faktor-faktor dari $2^2 \cdot 3 \cdot 167$ adalah 1, 2, 3, 4, 6, 12, 167, 334, 501, 668, 1002, 2004. Dengan demikian $x-1$ harus bernilai salah satu dari keduabelas faktor tersebut. Sehingga nilai x adalah salah satu dari 2, 3, 4, 5, 7, 13, 168, 335, 502, 669, 1003 atau 2005. Kita peroleh $y = \frac{2004}{x-1} - 1$ untuk masing-masing nilai x. Selanjutnya kita buat daftar sebagai berikut:

x	y	$x * y = xy + x - y$
2	2003	$2 \cdot 2003 + 2 - 2003 = 2005$
3	1001	$3 \cdot 1001 + 3 - 1001 = 2005$
4	667	$4 \cdot 667 + 4 - 667 = 2005$
5	500	$5 \cdot 500 + 5 - 500 = 2005$
7	333	$7 \cdot 333 + 7 - 333 = 2005$
13	166	$13 \cdot 166 + 13 - 166 = 2005$
168	11	$168 \cdot 11 + 168 - 11 = 2005$
335	5	$335 \cdot 5 + 335 - 5 = 2005$
502	3	$502 \cdot 3 + 502 - 3 = 2005$
669	2	$669 \cdot 2 + 669 - 2 = 2005$
1003	1	$1003 \cdot 1 + 1003 - 1 = 2005$
2005	0	$2005 \cdot 0 + 2005 - 0 = 2005$

Karena x dan y harus merupakan bilangan asli maka $x = 2005$ bukan penyusun 2005 karena nilai y yang diperoleh adalah 0. Dengan demikian semua penyusun 2005 adalah 2, 3, 4, 5, 7, 13, 168, 335, 502, 669 dan 1003.

6. Diketahui bentuk $x^2 + 3y^2 = n$, dengan x dan y adalah bilangan-bilangan bulat.
   a. Jika $n < 20$, bilangan berapa sajakah n tersebut dan diperoleh dari pasangan (x, y) apa saja?
   b. Tunjukkan bahwa tidak mungkin menghasilkan $x^2 + 3y^2 = 8$.

Solusi:

a. Masalah ini dapat diselesaikan dengan membuat daftar yang sistematis.

x	y	$x^2 + 3y^2 = n$	n
0	0	$0^2 + 3 \cdot 0^2 = 0$	0
1	0	$1^2 + 3 \cdot 0^2 = 1$	1
−1	0	$(-1)^2 + 3 \cdot 0^2 = 1$	1
0	1	$0^2 + 3 \cdot 1^2 = 3$	3
0	−1	$0^2 + 3 \cdot (-1)^2 = 3$	3
2	0	$2^2 + 3 \cdot 0^2 = 4$	4
−2	0	$(-2)^2 + 3 \cdot 0^2 = 4$	4
1	1	$1^2 + 3 \cdot 1^2 = 4$	4
−1	1	$(-1)^2 + 3 \cdot (1)^2 = 4$	4
−1	−1	$(-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2 = 4$	4
2	1	$2^2 + 3 \cdot 1^2 = 7$	7
−2	1	$(-2)^2 + 3 \cdot 1^2 = 7$	7
2	−1	$2^2 + 3 \cdot (-1)^2 = 7$	7
−2	−1	$(-2)^2 + 3 \cdot (-1)^2 = 7$	7
3	0	$3^2 + 3 \cdot 0^2 = 9$	9
−3	0	$(-3)^2 + 3 \cdot 0^2 = 9$	9
0	−2	$0^2 + 3 \cdot (-2)^2 = 12$	12
0	2	$0^2 + 3 \cdot 2^2 = 12$	12
3	−1	$3^2 + 3 \cdot (-1)^2 = 12$	12
3	1	$3^2 + 3 \cdot 1^2 = 12$	12
−3	−1	$(-3)^2 + 3 \cdot (-1)^2 = 12$	12
−3	1	$(-3)^2 + 3 \cdot 1^2 = 12$	12
1	2	$1^2 + 3 \cdot 2^2 = 13$	13
−1	2	$(-1)^2 + 3 \cdot 2^2 = 13$	13
1	−2	$1^2 + 3 \cdot (-2)^2 = 13$	13
−1	−2	$(-1)^2 + 3 \cdot (-2)^2 = 13$	13
2	2	$2^2 + 3 \cdot 2^2 = 16$	16
2	−2	$2^2 + 3 \cdot (-2)^2 = 16$	16
−2	2	$(-2)^2 + 3 \cdot 2^2 = 16$	16
−2	−2	$(-2)^2 + 3 \cdot (-2)^2 = 16$	16
4	0	$4^2 + 3 \cdot 0^2 = 16$	16
−4	0	$(-4)^2 + 3 \cdot 0^2 = 16$	16
4	1	$4^2 + 3 \cdot 1^2 = 19$	19
4	−1	$4^2 + 3 \cdot (-1)^2 = 19$	19
−4	1	$(-4)^2 + 3 \cdot 1^2 = 19$	19
−4	−1	$(-4)^2 + 3 \cdot (-1)^2 = 19$	19

b. Karena $x^2+3y^2=8$ maka haruslah $x^2 \le 8$ dan $3y^2 \le 8$. Pertidaksamaan $x^2 \le 8$ hanya mungkin dipenuhi untuk $x=-2,-1,0,1,2$, sedangkan pertidaksamaan $3y^2 \le 8$ hanya mungkin dipenuhi untuk $y=-1,0,1$. Dari nilai-nilai x dan y yang memenuhi, diperoleh hasil yang mungkin untuk x^2 adalah 0, 1, 4, sedangkan untuk $3y^2$ adalah 0, 3.

   Dengan demikian nilai maksimal dari x^2+3y^2 adalah 7. Sehingga tidak ada bilangan bulat x dan y yang dapat memenuhi persamaan $x^2+3y^2=8$.

7. Diketahui $N = 9+99+999+\cdots+\underbrace{9999\ldots9}_{121 angka}$. Tentukan nilai N.

   Solusi:

$$
\begin{aligned}
N &= 9+99+999+\cdots+\underbrace{9999\ldots9}_{121\,\text{angka}} \\
&= (10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots+\left(1\underbrace{0000\ldots00}_{121\,\text{angka}}-1\right) \\
&= \left(10+100+1000+\cdots 1\underbrace{0000\ldots00}_{121\,\text{angka}}\right)-\left(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{121\,\text{suku}}\right) \\
&= \underbrace{1111\ldots11}_{121\,\text{angka}}0-121 \\
&= \underbrace{1111\ldots11}_{118\,\text{angka}}0989
\end{aligned}
$$

   Dengan demikian N adalah $\underbrace{1111\ldots11}_{118\,\text{angka}}0989$.

BAB IV

CONTOH SOAL OLIMPIADE MATEMATIKA SMA/MA

1. Suatu bilangan bulat $p \geq 2$ merupakan bilangan prima jika faktornya hanyalah p dan 1. Misalkan M menyatakan perkalian 100 bilangan prima yang pertama. Berapa banyakkah angka 0 di akhir bilangan M ?

   (*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2003*)

2. Misalkan $p = 10(9!)^{\frac{1}{2}}$, $q = 9(10!)^{\frac{1}{2}}$ dan $r = (11!)^{\frac{1}{2}}$, dengan $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$. Bagaimana pengurutan yang benar dari ketiga bilangan ini?

   (*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2003*)

3. Misalkan a dan b bilangan real yang berbeda sehingga

   $$\frac{a}{b} + \frac{a+10b}{b+10a} = 2$$

   Tentukan nilai $\frac{a}{b}$

   (*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2003*)

4. Bilangan bulat positif $p \geq 2$ disebut bilangan prima jika ia hanya mempunyai faktor 1 dan p. Tentukan nilai penjumlahan semua bilangan prima di antara 1 dan 100 yang sekaligus bersifat satu lebihnya dari suatu bilangan kelipatan 5 dan satu kurangnya dari suatu bilangan kelipatan 6.

   (*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2003*)

5. Misalkan M dan m berturut-turut menyatakan bilangan terbesar dan bilangan terkecil di antara semua bilangan 4 angka yang jumlah keempat angkanya adalah 9. Berapakah faktor prima terbesar dari $M - m$?

   (*Seleksi Tingkat Provinsi – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2003, 10 Juni 2002*)

6. Tentukan semua solusi dari sistem persamaan

   $$\begin{cases} x + y + z & = & 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 12 \\ x^3 + y^3 + z^3 & = & 24 \end{cases}$$

   (*Olimpiade Sains Nasional I 2002, Matematika SMA, Yogyakarta, 10 September 2002*)

7. Ada berapa banyak bilangan 4 angka yang semua angkanya genap dan bukan merupakan kelipatan 2003 ?

   (*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2004*)

8. Jika a dan b bilangan bulat sedemikian sehingga $a^2 - b^2 = 2003$, maka berapakah nilai $a^2 + b^2$?

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2004*)

9. Untuk setiap bilangan real α, kita definisikan $\lfloor \alpha \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan α. Sebagai contoh, $\lfloor 4{,}9 \rfloor = 4$ dan $\lfloor 7 \rfloor = 7$. Jika x dan y bilangan real sehingga $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 9$ dan $\lfloor \sqrt{y} \rfloor = 12$, maka nilai terkecil yang mungkin dicapai oleh $\lfloor y - x \rfloor$ adalah .....

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2004*)

10. Buktikan bahwa $a^9 - a$ habis dibagi 6 untuk semua bilangan bulat a.

(*Olimpiade Sains Nasional II 2003, Matematika SMA, Hari I – Balikpapan, 16 September 2003*)

11. Buktikan untuk setiap bilangan real a, b dan c berlaku ketaksamaan

$$5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4bc + 4ca$$

dan tentukan kapan kesamaan berlaku.

(*Olimpiade Sains Nasional II 2003, Matematika SMA, Hari II – Balikpapan, 17 September 2003*)

12. Jika $x > 0$ dan $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$, maka $x^5 + \frac{1}{x^5} = \cdots$

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2005, 28 April 2004*)

13. Dua lingkaran pada bidang mempunyai titik pusat yang sama. Jari-jari lingkaran besar adalah tiga kali jari-jari lingkaran kecil. Jika luas daerah di antara kedua lingkaran ini adalah 8, maka luas daerah lingkaran kecil adalah ...

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2005, 28 April 2004*)

14. Nilai dari $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{10100}$ adalah ...

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2005, 28 April 2004*)

15. Diberikan persegipanjang $PQRS$. Titik O terletak di dalam $PQRS$ demikian rupa sehingga OP = 3 cm, OQ = 12 cm dan OS = 11 cm. Maka OR = ...

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2005, 28 April 2004*)

16. Tentukan banyaknya pembagi genap dan pembagi ganjil dari $5^6 - 1$

(*Olimpiade Sains Nasional III 2004, Matematika SMA, Hari I – Pekanbaru, 25 Agustus 2004*)

17. Titik (a, b) disebut titik letis jika a dan b keduanya adalah bilangan bulat. Banyaknya titik letis pada lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari 5 adalah ...

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2006, 11 Juni 2005*)

18. Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat positif (m, n) yang merupakan solusi dari persamaan $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$.

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2006, 11 Juni 2005*)

19. Sebuah kelompok terdiri dari 2005 anggota. Setiap anggota memegang tepat satu rahasia. Setiap anggota dapat mengirim surat kepada anggota lain manapun untuk menyampaikan seluruh rahasia yang dipegangnya. Banyaknya surat yang perlu dikirim agar semua anggota kelompok mengetahui seluruh rahasia adalah ...

(*Seleksi Tingkat Provinsi – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2006, 18 Juli 2005*)

20. Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan $2xy - 5x + y = 55$ adalah ...

(*Seleksi Tingkat Provinsi – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2006, 18 Juli 2005*)

21. Untuk sebarang bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Buktikan bahwa ada tepat satu bilangan bulat m yang memenuhi persamaan $m - \left\lfloor \frac{m}{2005} \right\rfloor = 2005$.

(*Olimpiade Sains Nasional IV 2005, Matematika SMA, Hari II – DKI Jakarta, 7 September 2005*)

22. Misalkan T adalah himpunan semua titik pada bidang XY yang memenuhi $|x| + |y| \leq 4$. Luas daerah T adalah .....

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2007, 26 April 2006*)

23. Definisikan $a * b = a + b + 1$ untuk semua bilangan bulat a, b. Jika p memenuhi $a * p = a$ untuk setiap bilangan bulat a, maka p = ...

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2007, 26 April 2006*)

24. Di antara lima orang gadis, Arinta, Elsi, Putri, Rita dan Venny, dua orang memakai rok dan tiga orang memakai celana panjang. Arinta dan Putri mengenakan jenis pakaian yang sama. Jenis pakaian Putri dan Elsi berbeda, demikian pula dengan Elsi dan Rita. Kedua gadis yang memakai rok adalah .....

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2007, 26 April 2006*)

25. Nanang mencari semua bilangan empat-angka yang selisihnya dengan jumlah keempat angkanya adalah 2007. Banyaknya bilangan yang ditemukan Nanang tidak akan lebih dari .....

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2007, 26 April 2006*)

26. Jika $f(xy) = f(x+y)$ dan $f(7) = 7$, maka $f(49) =$ .....

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2007, 26 April 2006*)

27. Untuk bilangan asli n, tuliskan $s(n) = 1 + 2 + \cdots + n$ dan $p(n) = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Bilangan genap n terkecil yang memenuhi $p(n)$ habis dibagi $s(n)$ adalah .....

(*Seleksi Tingkat Provinsi – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2007, 12 Juni 2006*)

28. Sebuah himpunan tiga bilangan asli disebut himpunan aritmetika jika salah satu unsurnya merupakan rata-rata dari dua unsur lainnya. Banyaknya subhimpunan aritmetika dari $\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$ adalah .....

(*Seleksi Tingkat Provinsi – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2007, 12 Juni 2006*)

29. Dari setiap bilangan satu-angka a, bilangan N dibuat dengan menyandingkan ketiga bilangan $a+2, a+1, a$; yaitu $N = \overline{(a+2)(a+1)a}$. Sebagai contoh, untuk $= 8,\quad N = 1098$. Kesepuluh bilangan N semacam itu memiliki faktor persekutuan terbesar .....

(*Seleksi Tingkat Provinsi – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2007, 12 Juni 2006*)

30. Pada segitiga ABC, garis bagi sudut A memotong sisi BC di titik D. Jika $AB = AD = 2$ dan $BD = 1$, maka $CD =$ .....

(*Seleksi Tingkat Provinsi – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2007, 12 Juni 2006*)

31. Dari titik O ditarik dua setengah-garis (sinar) l_1 dan l_2 yang membentuk sudut lancip . Titik-titik berbeda A_1, A_3, A_5 terletak pada garis l_2 , sedangkan titik-titik A_2, A_4, A_6 terletak di l_1 . Jika $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4O = OA_5 = A_5A_6 = A_6A_1$, maka $\alpha =$ .....

(*Seleksi Tingkat Provinsi – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2007, 12 Juni 2006*)

32. Misalkan segitiga ABC siku-siku di B. Garis tinggi dari B memotong sisi AC di titik D. Jika titik E dan F berturut-turut adalah titik tengah BD dan CD, buktikan bahwa $AE \perp BF$.

(*Seleksi Tingkat Provinsi – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2007, 12 Juni 2006*)

33. Misalkan m bilangan asli yang memenuhi $1003 < m < 2006$. Diberikan himpunan bilangan asli $S = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$, berapa banyak anggota S harus dipilih agar selalu terdapat paling sedikit satu pasang anggota terpilih yang hasil tambahnya 2006 ?

(*Seleksi Tingkat Provinsi – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2007, 12 Juni 2006*)

34. Misalkan a, b, c adalah bilangan-bilangan asli. Jika $30 | (a+b+c)$, buktikan bahwa $30 | (a^5 + b^5 + c^5)$.

(*Olimpiade Sains Nasional V 2006, Matematika SMA, Hari I – Semarang, 6 September 2006*)

35. Misalkan S adalah himpunan semua segitiga ABC yang memenuhi sifat $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ adalah bilangan-bilangan asli. Buktikan bahwa semua segitiga anggota S sebangun.

(*Olimpiade Sains Nasional V 2006, Matematika SMA, Hari I – Semarang, 6 September 2006*)

36. Sebuah bidak hitam dotempatkan pada petak pertama dan sebuah bidak putih ditempatkan pada petak terakhir sebuah papan catur berukuran $1 \times n$. Wiwit dan Siti lalu melangkah bergantian. Wiwit memulai permainan dengan bidak putih. Pada setiap langkah, pemain memindahkan bidaknya sendiri satu atau dua petak ke kanan atau ke kiri tanpa melompati bidak lawan. Pemain yang tidak bias melangkah dinyatakan kalah. Pemain manakah yang memiliki cara (strategi) untuk selalu memenangkan permainan, apapun yang dilakukan lawannya? Jelaskan strategi pemain tersebut.

(*Olimpiade Sains Nasional V 2006, Matematika SMA, Hari I – Semarang, 6 September 2006*)

37. Jika n adalah bilangan asli sehingga 3^n adalah faktor dari $33!$, maka nilai n terbesar yang mungkin adalah …..

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2008, 30 April 2007*)

38. Semua pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi $x + y = xy - 1$ dan $x \le y$ adalah …..

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2008, 30 April 2007*)

39. Sebuah daerah persegi dibagi menjadi 2007 daerah kecil dengan menarik garis-garis lurus yang menghubungkan 2 sisi berbeda pada persegi. Banyak garis lurus yang harus ditarik paling sedikit ada …..

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2008, 30 April 2007*)

40. Empat tim sepakbola mengikuti sebuah turnamen. Setiap tim bertanding melawan masing-masing tim lainnya sekali. Setiap kali bertanding, sebuah tim memperoleh nilai 3 jika menang, 0 jika kalah dan 1 jika pertandingan berakhir seri. Di akhir turnamen salah satu tim memperoleh nilai total 4. Jumlah nilai total ketiga tim lainnya paling sedikit adalah …..

(*Seleksi Tingkat Provinsi – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2008, 4 Juni 2007*)

41. Untuk bilangan asli n, didefinisikan $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. Dalam bentuk sederhana, $1!\,1 + 2!\,2 + 3!\,3 + \cdots + n!\,n =$ …..

(*Seleksi Tingkat Provinsi – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2008, 4 Juni 2007*)

42. Pada segitiga lancip ABC, AD, BE dan CF adalah garis-garis tinggi, dengan D, E, F berturut-turut pada sisi BC, CA dan AB. Buktikan bahwa $E + DF \leq BC$.

(*Seleksi Tingkat Provinsi – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2008, 4 Juni 2007*)

43. Bilangan-bilangan 1, 2, 3, …, 15, 16 disusun pada persegi 4×4. Untuk $= 1, 2, 3, 4$, misalkan b_i adalah jumlah bilangan-bilangan pada baris ke-i dan k_i adalah jumlah bilangan-bilangan pada kolom ke-i. Misalkan pula d_1 dan d_2 adalah jumlah bilangan-bilangan pada kedua diagonal. Susunan tersebut dapat disebut *antimagic* jika $b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2$ dapat disusun menjadi sepuluh bilangan berurutan. Tentukan bilangan terbesar di antara sepuluh bilangan berurutan ini dapat diperoleh dari sebuah *antimagic*.

(*Seleksi Tingkat Provinsi – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2008, 4 Juni 2007*)

44. Untuk setiap bilangan asli n, $b(n)$ menyatakan banyaknya faktor positif n dan $p(n)$ menyatakan hasil penjumlahan semua faktor positif n. Sebagai contoh, $b(14) = 4$ dan $p(14) = 24$. Misalkan k sebuah bilangan asli yang lebih besar dari 1.
    a. Buktikan bahwa ada tak berhingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi $b(n) = k^2 - k + 1$
    b. Buktikan bahwa ada berhingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi $p(n) = k^2 - k + 1$

(*Olimpiade Sains Nasional VI 2007, Matematika SMA, Hari I – Surabaya, 4 September 2007*)

45. Suatu susunan 10-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dikatakan cantik jika
    a. Saat dibaca dari kiri ke kanan, 0, 1, 2, 3, 4 membentuk barisan naik; sedangkan 5, 6, 7, 8, 9 membentuk barisan turun
    b. Angka 0 tidak berada pada ujung kiri.

    Sebagai contoh, 9807123654 adalah susunan cantik. Tentukan banyaknya susunan cantik.

(*Olimpiade Sains Nasional VI 2007, Matematika SMA, Hari I – Surabaya, 4 September 2007*)

46. Misalkan m dan n dua bilangan asli. Jika ada tak berhingga banyaknya bilangan bulat k sehingga $k^2 + 2kn + m^2$ adalah bilangan kuadrat sempurna, buktikan bahwa $= n$.

(*Olimpiade Sains Nasional VI 2007, Matematika SMA, Hari II – Surabaya, 5 September 2007*)

47. Diketahui $FPB(a, 2008) = 251$. Jika $a > 2008$, maka nilai terkecil yang mungkin bagi a adalah …..

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2009, 9 April 2008*)

48. Setiap dung adalah ding. Ada lima ding yang juga dong. Tidak ada dung yang dong. Jika banyaknya ding adalah 15 dan tiga di antaranya tidak dung dan tidak dong, maka banyaknya dung adalah …..

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2009, 9 April 2008*)

49. Bilangan 4-angka dibentuk dari angka-angka 1, 4, 7, 8 di mana masing-masing satu angka digunakan tepat satu kali. Jika semua bilangan 4-angka yang diperoleh dengan cara ini dijumlahkan, maka jumlah ini mempunyai angka satuan …..

(*Seleksi Tingkat Kabupaten/Kota – Tim Olimpiade Matematika Indonesia 2009, 9 April 2008*)

DAFTAR PUSTAKA

Lenchner, George, 1983, *Creative Problem Solving in School Mathematics*, New York: Glenwood Publications, Inc.

Polya, George, 1957, *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, New Jersey: Princeton University Press.

Posamentier, Alfred S. dan Jay Steppelman, 1999, *Teaching Secondary Mathematics: Techniques and Enrichment Units*, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.