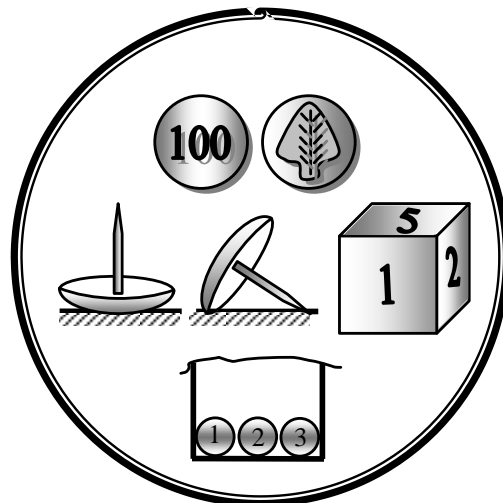


PPPPTK Matematika
Kode Dok : F-PRO-017
Revisi No. : 0



PELUANG

DISAJIKAN PADA
DIKLAT GURU MATEMATIKA SMP
DI PPPPTK MATEMATIKA
TANGGAL ... S.D ... 2009



Oleh:
Drs. MARSUDI RAHARJO, M.Sc.Ed
Widyaiswara Madya P4TK Matematika

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN (PMPTK)
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN (P4TK)
MATEMATIKA YOGYAKARTA

2009

Daftar Isi

Kata Pengantar	i
Daftar Isi	ii
Kompetensi/sub Kompetensi	iii
Peta Bahan Ajar	iv
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Rasional	1
B. Tujuan	1
C. Ruang Lingkup	2
D. Kompetensi Yang Diharapkan	2
BAB II KONSEP DASAR PELUANG	3
A. Eksperimen Fair, Tidak Fair, Ruang Sampel, Titik Sampel, Dan Peristiwa	3
B. Eksperimen dan Peluang Pada Pengundian	4
C. Eksperimen dan Peluang Pada Pengambilan Sampel	6
D. Penurunan Rumus Permutasi	12
E. Penurunan Rumus Kombinasi	15
F. Tinjauan Peluang Secara Aksiomatik	23
G. Kepastian dan Kemustahilan	23
H. Frekuensi Harapan	24
I. Relasi Antar peristiwa	25
Latihan 1	27
J. Beberapa Teorema (Dalil) Dasar Pada Peluang	31
Latihan 2	32
BAB III PENUTUP	35
DAFTAR PUSTAKA	36
LAMPIRAN (Kunci Jawaban Soal-soal Latihan).....	37

PELUANG

KOMPETENSI

Menggunakan bahan kajian akademik peluang untuk menjelaskan dan mengembangkan terapan dasar-dasar peluang. Dasar-dasar peluang meliputi: konsep ruang sampel, titik sampel, peristiwa, prinsip perkalian, banyak anggota ruang sampel (meliputi permutasi, kombinasi, dan bukan keduanya), peristiwa, dan relasi antar peristiwa.

SUB KOMPETENSI

Memiliki kemampuan:

- mengidentifikasi, menjelaskan, dan menggambarkan: obyek eksperimen, cara eksperimen, ruang sampel, titik sampel, dan peristiwa.
- memberikan gambaran/contoh tentang frekuensi, frekuensi relatif, dan perhitungan peluang munculnya suatu peristiwa pada suatu percobaan berulang (terhadap beberapa obyek eksperimen)
- memberikan contoh obyek eksperimen yang menghasilkan ruang sampel yang berdistribusi seragam dan obyek eksperimen yang menghasilkan ruang sampel yang berdistribusi tidak seragam berdasarkan hasil percobaan berulang
- menjelaskan definisi empirik dan definisi klasik peluang
- menjelaskan *prinsip perkalian* berikut contoh terapannya
- memberikan contoh eksperimen yang obyek eksperimennya memuat 2 obyek atau lebih sehingga perhitungan banyak anggota ruang sampel hasil eksperimennya menggunakan prinsip perkalian
- menjelaskan *prinsip penjumlahan* dalam menentukan peluang munculnya suatu peristiwa dalam ruang sampel untuk ruang sampel yang berdistribusi seragam dan ruang sampel yang tidak berdistribusi seragam berikut berlakunya *definisi klasik* khusus untuk ruang sampel yang berdistribusi seragam
- memberi contoh dan menjelaskan relasi antara dua peristiwa dalam ruang sampel yang sama
- menjelaskan terapan peluang sederhana dalam kehidupan sehari-hari.

PETA BAHAN AJAR

No.	Pokok Bahasan	Sub Pokok Bahasan
1	Peluang	1. Pengertian tentang obyek eksperimen, cara eksperimen, hasil-hasil yang mungkin, ruang sampel, titik sampel, dan peristiwa (peristiwa dasar/elementer, dan peristiwa majemuk) 2. Peluang pada pengundian 3. Peluang pada pengambilan sampel, Permutasi, dan Kombinasi.
2	Relasi Antar peristiwa	1. Relasi antara dua peristiwa: <ul style="list-style-type: none">• Lepas• Komplemen• Bebas• Tak Bebas



BAB I

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Peluang merupakan bagian matematika yang membahas tentang ukuran ketidakpastian terjadinya suatu peristiwa yang ada dalam kehidupan (Smith, 1991:3). Memang banyak peristiwa yang tidak dapat dipastikan terjadi atau tidak terjadi di kemudian waktu/kemudian hari. Namun dengan mengetahui ukuran berhasil dan tidaknya suatu peristiwa yang diharapkan akan terjadi maka orang akan lebih dapat mengambil keputusan terbaik dan bijaksana tentang apa yang seharusnya ia lakukan.

Materi peluang secara sederhana mulai dikenalkan di SMP lebih diperdalam di SMA dan ditingkatkan lagi di perguruan tinggi. Namun dari hasil tes penguasaan guru selama ini (SMP dan SMA) ternyata untuk peluang masih sangat kurang. Mungkin guru kurang minat mempelajari atau mungkin kesulitan mendapatkan buku-buku rujukan atau mungkin buku-buku rujukan yang dipelajarinya selama ini belum cukup memberikan benang merah yang memadahi untuk menghayati materi itu (materi yang seharusnya dikuasai guru) sepenuhnya.

Melalui kesempatan ini penulis berupaya memberikan tuntunan pemahaman materi peluang yang perlu dikuasai guru SMP berupa konsep dasar peluang atas dasar paradigma pemberian kecakapan hidup (life skill) yang bersifat akademik menggunakan prinsip *learning to know, learning to do, learning to be, learning to live together dan learning to cooperate* (Depdiknas, 2001:11). Diharapkan para pembaca (guru matematika SMP) dalam memahami makalah ini bekerjasama dengan teman-teman seprofesi: saling membaca, mencoba soal, berdiskusi dan mengadakan konfirmasi (menyampaikan argumentasi/alasan pemecahan masalahnya).

B. TUJUAN

Modul ini ditulis dengan maksud untuk memberikan bahan pemahaman peluang yang perlu dikuasai guru matematika SMP agar lebih berhasil dalam mengajarkan materi itu kepada para siswanya. Setelah dipelajarinya materi ini diharapkan agar peserta Diklat dapat:

1. mengenal pendekatan pembelajaran peluang yang memberikan kecakapan hidup (life skill)
2. mengimbaskan pengetahuannya kepada guru-guru di wilayah MGMP-nya dan rekan-rekan seprofesi lainnya
3. mengajarkan kepada para siswanya sesuai dengan pendekatan terkini (PAKEM) dan Kontekstual)
4. mengembangkan soal-soal yang lebih variatif dan menyentuh kehidupan nyata.



C. RUANG LINGKUP

Materi peluang yang ditulis ini merupakan materi minimal yang harus dikuasai oleh guru SMP. Materi yang dibahas meliputi:

1. Konsep dasar peluang: ruang sampel, titik sampel, peristiwa, peristiwa elementer, konsep peluang, relasi antar peristiwa, kepastian dan kemustahilan, serta teorema dasar peluang.
2. Teknik menghitung banyaknya anggota ruang sampel menggunakan prinsip perkalian.
3. Permutasi dan Kombinasi

Bahan ajar ini dirancang seperti modul, dapat dibaca dan dipahami sendiri termasuk mengerjakan soal-soal latihan dan merujuknya pada kunci jawaban. Untuk itu langkah-langkah penguasaan materinya adalah

1. Pelajari materinya (bersama teman)
2. Bahas soal-soalnya dan lihat kunci jawabannya.
3. Adakan Problem Posing: Ciptakan variasi soal lainnya berikut jawabannya.

D. KOMPETENSI YANG DIHARAPKAN

Setelah mengikuti Diklat dengan bahan ajar ini, peserta Diklat diharapkan memiliki kemampuan dalam hal seperti berikut.

1. Memberikan batasan tentang ruang sampel, titik sampel, peristiwa, dan peristiwa elementer dalam suatu eksperimen.
2. Menentukan peluang suatu peristiwa/kejadian berdasarkan definisi klasik atau berdasarkan definisi empirik.
3. Mengidentifikasi suatu masalah termasuk permutasi atau kombinasi atau bukan keduanya
4. Menentukan frekuensi harapan munculnya suatu peristiwa dalam suatu eksperimen
5. Menentukan peluang dari suatu peristiwa/kejadian elementer dan non elementer (majemuk) dalam suatu eksperimen
6. Menentukan relasi antara dua peristiwa (lepas, bebas, komplemen, tak bebas) dalam suatu eksperimen.

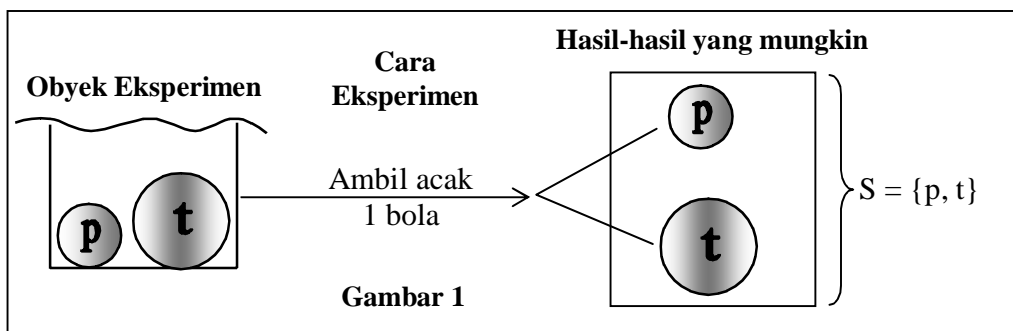
BAB II KONSEP DASAR PELUANG

A. EKSPERIMEN YANG FAIR, TIDAK FAIR, RUANG SAMPEL, TITIK SAMPEL, DAN PERISTIWA

Dalam ilmu peluang, terdapat 3 (tiga) komponen penting untuk dikenalkan ke siswa. Ketiga komponen utama tersebut adalah obyek eksperimen, cara eksperimen dan hasil-hasil yang mungkin terjadi dalam eksperimen tersebut. Pengalaman mengampu diklat peluang selama 12 tahun ternyata ketiga komponen ini merupakan kerangka berpikir yang amat menentukan dalam pemecahan masalah peluang.

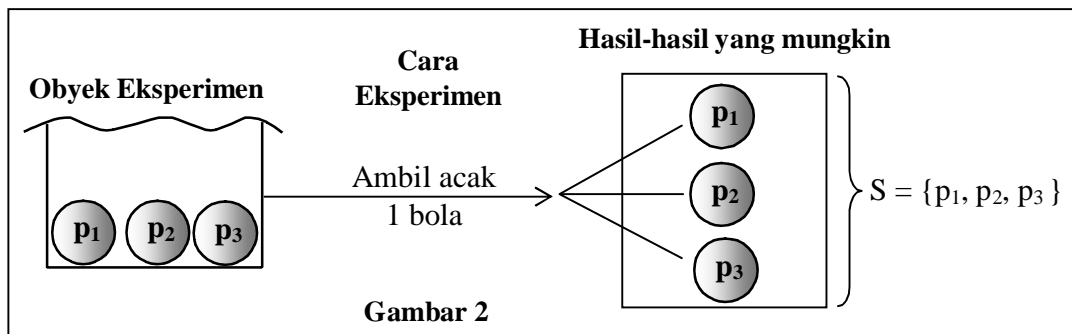
Obyek eksperimen ialah sekumpulan benda yang digunakan dalam eksperimen sedangkan istilah *eksperimen* ialah *tindakan acak* yang dilakukan terhadap obyek eksperimen tersebut. Setelah obyek eksperimen dan cara eksperimennya jelas barulah kita dapat memperkirakan seperti apakah hasil-hasil yang mungkin terjadi dalam eksperimen itu. Berikut diberikan 2 contoh eksperimen.

Contoh 1.



Perhatikan bahwa $S = \{p, t\}$ adalah himpunan semua hasil yang mungkin terjadi dalam eksperimen itu. Sedangkan p dan t masing-masing adalah hasil-hasil yang mungkin terjadi dalam eksperimen itu. *Setiap hasil yang mungkin terjadi* dalam suatu eksperimen disebut *titik sampel*, sedangkan *ruang sampel* adalah *himpunan semua hasil yang mungkin terjadi dalam suatu eksperimen*. Sehingga pada eksperimen tersebut ruang sampelnya adalah $S = \{p, t\}$ dan titik-titik sampelnya adalah p dan t .

Contoh 2.



Perhatikan bahwa pada contoh yang kedua ini ruang sampelnya adalah $S = \{p_1, p_2, p_3\}$ dan titik-titik sampelnya adalah p_1 , p_2 , dan p_3 .

Dari kedua contoh eksperimen tersebut di atas jawablah secara *intuitif* (kata hati) manakah eksperimen yang fair dan manakah eksperimen yang tidak fair?.

Jawabnya tentu eksperimen pertama (contoh 1) adalah *eksperimen yang tidak fair*, sedang eksperimen kedua (contoh 2) adalah *eksperimen yang fair*.

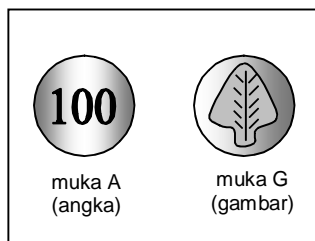
Suatu eksperimen disebut fair (adil/jujur) apabila sipelaku eksperimen tidak dapat mengatur hasil eksperimennya.

Contoh 1 dianggap sebagai eksperimen yang tidak fair sebab sipelaku eksperimen *dapat mengatur hasil* eksperimennya, sedangkan pada contoh yang kedua sipelaku eksperimen *tidak dapat mengatur hasil* eksperimennya.

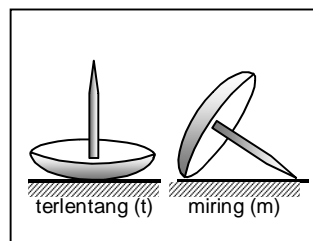
Dengan demikian jelas bahwa *agar eksperimen bersifat fair* maka *obyek eksperimennya harus relatif homogen (seukuran)* baik dalam hal *berat* maupun *besar/volumenya*.

B. EKSPERIMEN DAN PELUANG PADA PENGUNDIAN

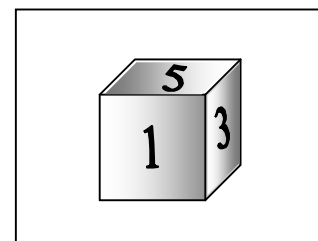
Misalkan kita mengadakan eksperimen dengan cara melambungkan sekeping mata uang, melambungkan sebuah paku payung (fines) dan melambungkan sebuah dadu masing-masing satu kali. Hasil-hasil yang mungkin terjadi adalah: (1) untuk mata uang muka A (angka) atau muka G (gambar), (2) untuk paku payung (fines) adalah posisi terlentang atau posisi miring, sedangkan (3) untuk dadu adalah munculnya mata 1, 2, 3, 4, 5, atau mata 6 (lihat gambar 3).



Gambar 3a



Gambar 3b



Gambar 3c

Setelah diundi sebanyak 20.000 kali munculnya muka angka pada pengundian mata uang logam dan pengundian terhadap 100 paku payung hingga sebanyak 200 kali oleh penulis di tahun 2002 dihasilkan data seperti berikut.

Tabel 1 a

Banyaknya Eksp. (n)	Frek. Muncul muka A (angka) (m)	Frek. Rel. hasilnya m $fr = m/n$
10	8	0,8000
100	62	0,6200
1.000	473	0,4730
5.000	2550	0,5100
10.000	5098	0,5098
15.000	7619	0,5079
20.000	10.038	0,5019

Tabel 1b

Banyaknya Eksp. (n)	Frek. Muncul hasil miring (m)	Frek. Rel. hasilnya m $fr = m/n$
1000	314	0,3140
5.000	1577	0,3154
10.000	3157	0,3157
15.000	4682	0,3121
20.000	6214	0,3107

(Sumber: Anton :1982, *Applied Finite Mathematics*).

Lebih lanjut peluang munculnya suatu hasil yang mungkin terjadi dalam suatu eksperimen mengacu pada definisi seperti berikut.

1. Definisi Empirik

Peluang munculnya suatu peristiwa dalam suatu eksperimen (percobaan) adalah nilai frekuensi relatif munculnya peristiwa itu jika banyaknya percobaan tak terhingga.

2. Definisi Klasik

Jika semua titik sampel dalam ruang sampel S berpeluang sama untuk muncul, maka peluang munculnya peristiwa A dalam ruang sampel S adalah







$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} .$$

$n(A)$ = banyaknya elemen (titik sampel) dalam peristiwa A

$n(S)$ = banyaknya elemen (titik sampel) dalam ruang sampel S .

Dengan mengacu pada definisi empirik, maka secara *intuitif* (kata hati) dari kedua tabel di atas akan kita dapatkan bahwa: untuk mata uang logam peluang munculnya muka angka adalah 0,5 dan untuk paku payung peluang munculnya hasil miring (dalam 1 tempat desimal) adalah 0,3.

Karena untuk mata uang logam hasil-hasil yang mungkin terjadi hanya "muncul muka angka atau muncul muka gambar", jika peluang munculnya muka angka 0,5 maka peluang munculnya muka gambar adalah $1 - 0,5 = 0,5$. Dengan alasan yang sama maka untuk paku payung jika peluang munculnya hasil miring 0,3 maka peluang munculnya hasil terlentang adalah $1 - 0,3 = 0,7$.

Mata uang logam		Paku payung	
			
muka A (angka)	muka G (gambar)	miring (m)	terlentang (t)
$P(\{A\}) = 0,5 = \frac{1}{2}$	$P(\{G\}) = 0,5 = \frac{1}{2}$	$P(\{m\}) = 0,3$	$P(\{t\}) = 0,7$
			Dadu
			$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$

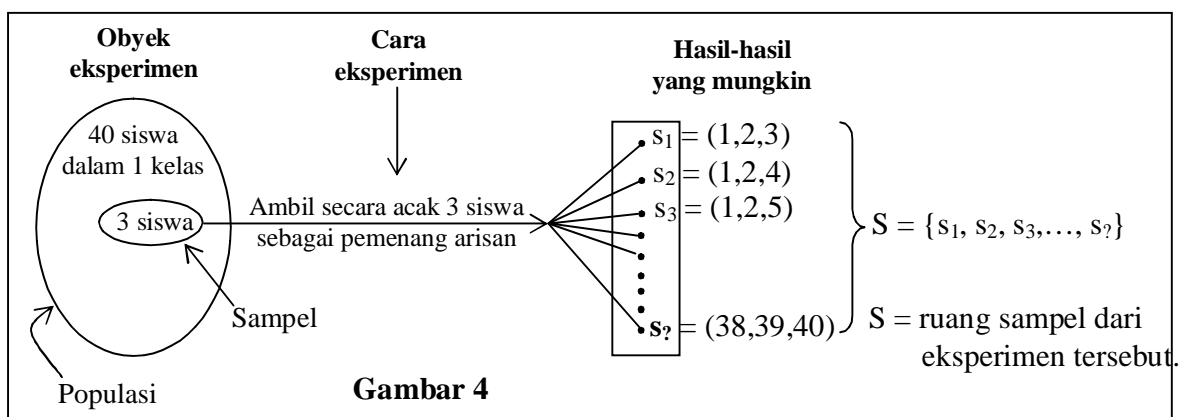
Gambar 4

Tampak pada gambar 4 di atas bahwa obyek eksperimen berupa *mata uang logam* menghasilkan *ruang sampel yang berdistribusi seragam*, sedangkan obyek eksperimen berupa paku payung menghasilkan *ruang sampel yang tidak berdistribusi seragam*.

Dadu termasuk obyek eksperimen yang *berdistribusi seragam*.

C. EKSPERIMEN DAN PELUANG PADA PENGAMBILAN SAMPEL

Untuk diketahui bahwa istilah pengambilan sampel dalam hal ini adalah pengambilan sebagian dari obyek eksperimen yang ada/diketahui pada permasalahan tersebut. Sedangkan obyek eksperimennya dalam hal ini disebut populasi. Agar eksperimennya fair, maka obyek eksperimennya dirancang sedemikian sehingga si pelaku eksperimen tidak dapat mengatur hasil eksperimennya. Caranya antara lain adalah obyek eksperimennya dibuat sejenis dan seukuran (bentuk, berat, dan besarnya relatif sama). Sebagai contoh misal obyek eksperimennya adalah siswa dalam satu kelas berjumlah 40 orang. Mereka mengadakan arisan, cara eksperimennya adalah mengambil acak 3 siswa untuk ditetapkan sebagai pemenang. Agar dapat mengundi secara fair (adil) sehingga tidak akan terjadi protes, maka nama-nama pesertanya diberi nomor urut dan setiap nomornya ditulis pada kertas lintingan yang berjumlah 40. Cara eksperimen yang dilakukan adalah "mengambil secara acak 3 lintingan dari 40 lintingan yang tersedia". Maka obyek eksperimen berupa 40 lintingan yang tersedia itu disebut *populasi* dan 3 lintingan yang diambil disebut *sampel*.



Titik sampel keberapakah s_7 yang dimaksud pada gambar 4 di atas?

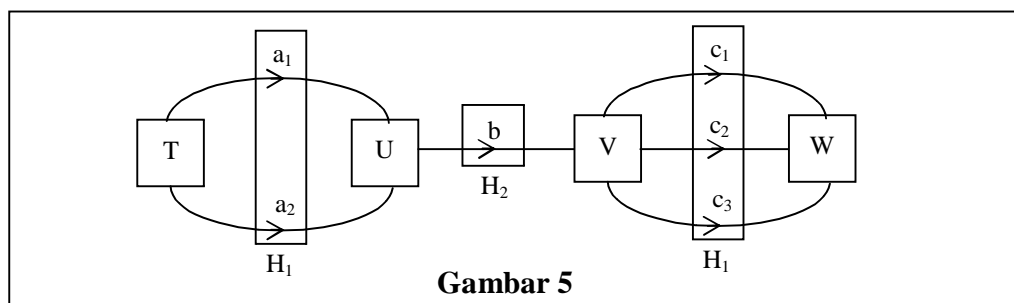
Jika Anda dapat menjawabnya maka secara otomatis dapat anda ketahui banyaknya anggota ruang sampel S .

Dari gambaran tersebut dapatkan Anda menjawab banyaknya titik sampel dalam S ?

Untuk dapat menjawab pertanyaan seperti di atas diperlukan pengetahuan tentang prinsip perkalian, permutasi, dan kombinasi.

1. Prinsip Perkalian

Perhatikan ilustrasi berikut ini. Andaikan:





$H_1 = \{a_1, a_2\}$ adalah macamnya jalur jalan dari kota T ke U
 $H_2 = \{b\}$ adalah macamnya jalur jalan dari kota U ke V
 $H_3 = \{c_1, c_2, c_3\}$ adalah macamnya jalur jalan dari kota V ke W.

Seperti yang dapat kita lihat, maka:

Himpunan semua jalur jalan yang dapat dilewati dari kota T ke kota W melewati kota U dan V adalah $S = \{a_1bc_1, a_1bc_2, a_1bc_3, a_2bc_1, a_2bc_2, a_2bc_3\} = H_1 \times H_2 \times H_3$.

Perhatikan bahwa banyaknya macam jalur yang dimaksud adalah

$$n(S) = 6 = 2 \times 1 \times 3 = n(H_1) \times n(H_2) \times n(H_3).$$

Dengan gambaran tersebut kesimpulan yang diperoleh adalah:

Jika ada 2 jalur dari kota T ke U

1 jalur dari kota U ke V

3 jalur dari kota V ke W

Maka ada

$$2 \times 1 \times 3 = 6 \text{ jalur jalan}$$

yang dapat ditempuh dari kota T ke kota W melewati kota U dan V.

Secara umum berlaku prinsip perkalian seperti berikut.

Prinsip Perkalian

Jika n_1 adalah banyaknya cara untuk mengambil keputusan K_1
 n_2 adalah banyaknya cara untuk mengambil keputusan K_2
 n_3 adalah banyaknya cara untuk mengambil keputusan K_3

⋮

n_r adalah banyaknya cara untuk mengambil keputusan K_r

Maka ada

$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_r$ cara
untuk mengambil semua keputusan.

2. Kombinasi dan Permutasi

Untuk dapat memahami apa yang dimaksud dengan kombinasi, permutasi, bukan keduanya (bukan kombinasi dan bukan permutasi) serta berapa banyaknya anggota masing-masing dari ruang sampel yang dibentuknya diberikan gambaran seperti berikut.

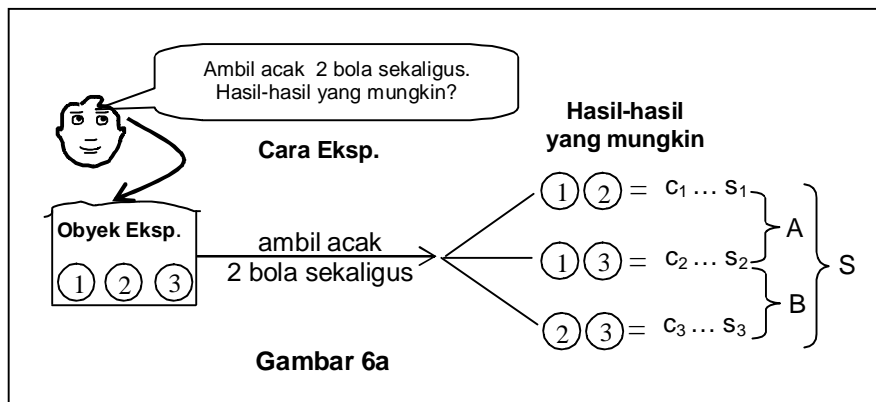
Misalkan pada sebuah kotak terdapat tiga bola pingpong diberi nomor 1, 2, dan 3. Jika dari dalam kotak diambil dua bola:

- sekaligus, ada berapa macam hasil yang mungkin?
- satu demi satu tanpa pengembalian, ada berapa macam hasil yang mungkin?
- satu demi satu dengan pengembalian, ada berapa macam hasil yang mungkin?

Jawab

- Untuk pengambilan sekaligus

Jawabannya adalah ada 3 macam (3 cara) . Gambarnya adalah seperti berikut.



Gambar 6a

Keterangan:

$S = \{s_1, s_2, s_3\}$ adalah ruang sampel dari eksperimen tersebut. Sementara s_1, s_2 , dan s_3 masing-masing adalah titik-titik sampelnya, $s_1 = (1,2)$, $s_2 = (1,3)$, dan $s_3 = (2,3)$.

$A = \{s_1, s_2\}$ adalah peristiwa kedua nomor bola yang terambil maksimal berjumlah 4.

$B = \{s_2, s_3\}$ adalah peristiwa kedua nomor bola yang terambil minimal berjumlah 4.

$A \cap B = \{s_2\}$ adalah peristiwa kedua nomor bola yang terambil berjumlah 4.

A dan B masing-masing disebut peristiwa dalam ruang sampel S. Sementara itu $A \cap B$ disebut peristiwa elementer (peristiwa sederhana) dalam ruang sampel S.

Pada eksperimen berupa pengambilan sampel diberikan definisi seperti berikut.

Definisi Kombinasi

Dalam pengambilan sampel, suatu titik sampel disebut kombinasi jika urutan unsur-unsur yang diperoleh dari obyek eksperimennya tidak diperhatikan.

Pada contoh tersebut misalnya "terambilnya 2 bola pingpong bernomor 1 dan 2 yakni (1,2) tidak dapat dibedakan dengan "terambilnya 2 bola pingpong bernomor 2 dan 1 yakni (2,1)". Sehingga urutan $(1,2) = (2,1)$. Artinya keduanya hanya diwakili oleh 1 titik sampel saja yakni $c_1 = (1,2)$. Karena urutan hasil eksperimen $(1,2) = (2,1)$ dan hanya diwakili oleh 1 titik sampel saja yakni $c_1 = (1,2)$, maka c_1, c_2 , dan c_3 masing-masing disebut *elemen-elemen kombinasi*.

Dalam contoh tersebut ruang sampelnya adalah S dengan

$$S = \{s_1, s_2, s_3\} = \{(1,2), (1,3), (2,3)\} = \{c_1, c_2, c_3\}.$$

Banyaknya kombinasi 2 bola dari 3 bola yang disediakan adalah

$$n(S) = n(\{s_1, s_2, s_3\}) = n(\{(1,2), (1,3), (2,3)\}) = n(\{c_1, c_2, c_3\}) = 3 = C_2^3.$$

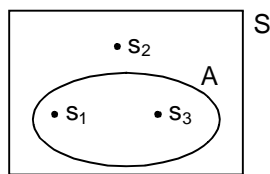
Pada diagram pohon di atas A dan B dalam ruang sampel S disebut peristiwa, sedangkan $A \cap B$ disebut peristiwa sederhana (*elementer*). Keduanya mengacu pada definisi berikut.

Definisi Peristiwa/Kejadian

1. Peristiwa/kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel hasil suatu eksperimen. Peristiwa majemuk adalah peristiwa yang memuat lebih dari satu titik sampel
2. Peristiwa sederhana (elementer) adalah peristiwa yang hanya memuat tepat satu titik sampel.

(Sumber: Anton, *Applied Finite Mathematics*, New York: Anton Texbook Inc, 1982)

Jika digambarkan dalam bentuk diagram Venn maka hasilnya akan seperti berikut.



Gambar 6b

Tabel 2 berikut adalah data hasil eksperimen sebanyak 30.000 kali.

Tabel 2

Banyaknya percobaan	frekuensi (f)		
	①②	①③	②③
	(s ₁)	(s ₂)	(s ₃)
300 kali	92	106	98
3.000 kali	1.012	987	1.001
15.000 kali	4.989	5.008	5.003
30.000 kali	10.012	9.984	10.004

Berdasarkan data empirik (data yang diperoleh dari hasil eksperimen) berupa percobaan berulang hingga sebanyak 30.000 kali tersebut, frekuensi relatif munculnya masing-masing titik sampel adalah

$$F_r(\{s_1\}) = \frac{10.012}{30.000} \approx \frac{1}{3}, F_r(\{s_2\}) = \frac{9.984}{30.000} \approx \frac{1}{3}, \text{ dan } F_r(\{s_3\}) = \frac{10.004}{30.000} \approx \frac{1}{3}.$$

Maka secara intuisi (kata hati) jika percobaan itu dilakukan hingga tak hingga kali hasilnya adalah

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_r(\{s_1\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_r(\{s_2\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_r(\{s_3\}) = \frac{1}{3}.$$

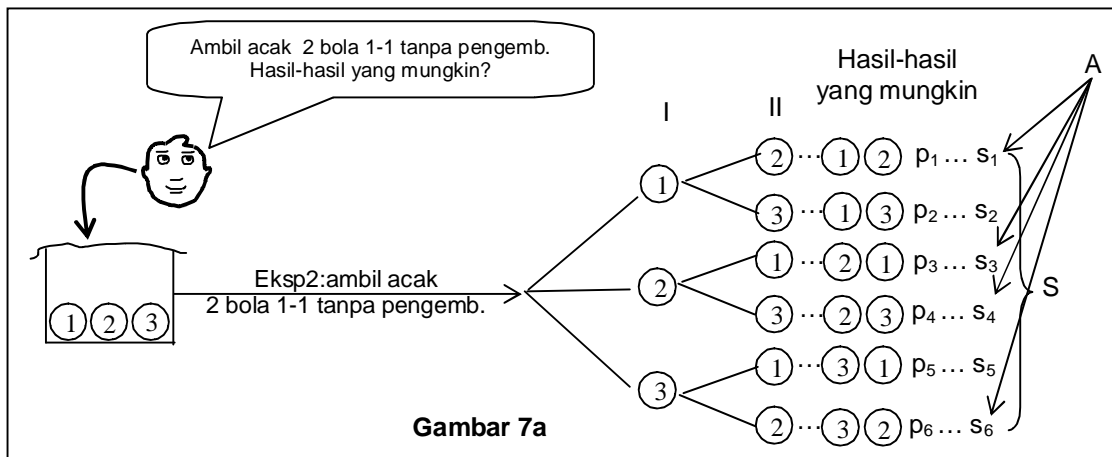
Dengan demikian maka peluang munculnya masing-masing titik sampel dalam eksperimen tersebut adalah

$$P(\{s_1\}) = P(\{s_2\}) = P(\{s_3\}) = \frac{1}{3}.$$

Karena masing-masing titik sampel dalam ruang sampel S pada eksperimen ini berpeluang sama untuk muncul, maka *ruang sampel S* disebut *ruang sampel yang berdistribusi seragam (serba sama)*. Sehingga menurut definisi klasik

$$P(\{s_1\}) = \frac{n(\{s_1\})}{n(S)} = \frac{1}{3}, P(\{s_2\}) = \frac{n(\{s_2\})}{n(S)} = \frac{1}{3}, \text{ dan } P(\{s_3\}) = \frac{n(\{s_3\})}{n(S)} = \frac{1}{3}.$$

b. Untuk pengambilan *satu demi satu tanpa pengembalian* (eksp 2)

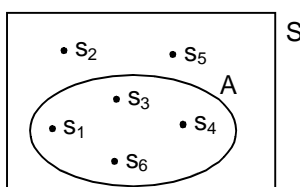


Perhatikan dalam eksperimen di atas bahwa A adalah peristiwa munculnya kedua nomor bola yang terambil berjumlah ganjil, maka $A = \{s_1, s_3, s_4, s_6\}$. Masing-masing titik sampel disebut elemen-elemen permutasi. Hal ini mengacu pada definisi permutasi berikut ini.

Definisi Permutasi

Dalam pengambilan sampel, masing-masing titik sampel yang dihasilkan disebut permutasi jika pengulangan obyek eksperimen pada titik sampel tersebut tidak dimungkinkan dan urutan yang diperoleh dari obyek eksperimennya diperhatikan (punya makna).

Berikut adalah gambaran tentang ruang sampel S , titik-titik sampel dalam S , dan peristiwa A dalam bentuk diagram Venn.



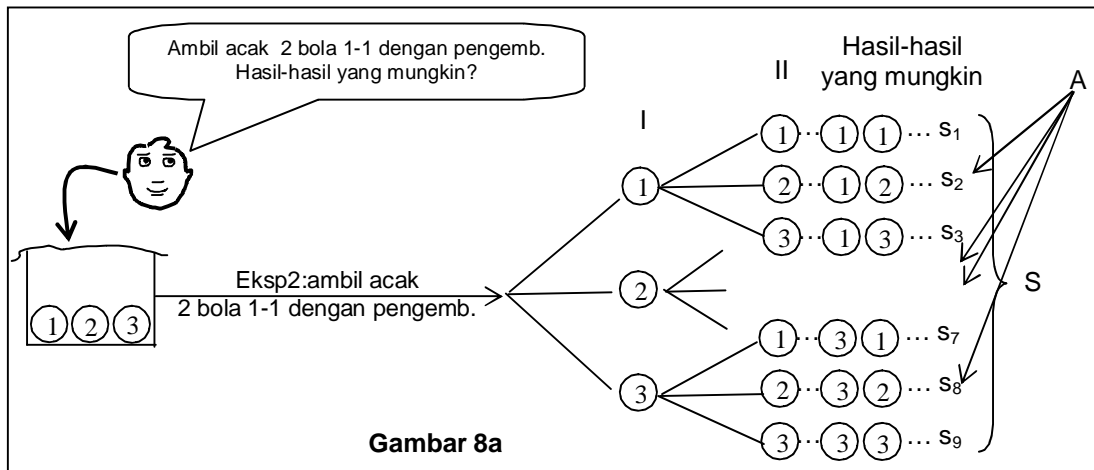
Gambar 7b

Ruang sampel $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_6\}$, maka $n(S) = 6$
 Peristiwa $A = \{s_1, s_3, s_4, s_6\}$, maka $n(A) = 4$.

Karena ruang sampel S berdistribusi seragam, maka peluang munculnya peristiwa A adalah

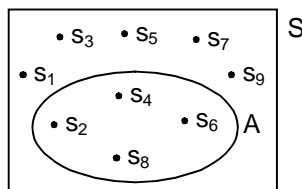
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

c. Untuk pengambilan *satu demi satu dengan pengembalian* (eksp 3)



Perhatikan dalam eksperimen di atas bahwa A adalah peristiwa munculnya kedua nomor bola yang terambil berjumlah ganjil, maka $A = \{s_2, s_4, s_6, s_8\}$.

Berikut adalah gambaran tentang ruang sampel S, titik-titik sampel dalam S, dan peristiwa A dalam bentuk diagram Venn.



Gambar 8b

Ruang sampel $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_9\}$, maka $n(S) = 9$
 Peristiwa $A = \{s_2, s_4, s_6, s_8\}$, maka $n(A) = 4$.

Karena ruang sampel S berdistribusi seragam, maka peluang munculnya peristiwa A adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{9}$$

Catatan

1. Eksp 1: S memuat 3 titik sampel. Masing-masing titik sampel disebut elemen-elemen kombinasi, yakni pengulangan nomor bola tidak dimungkinkan dan urutan nomor bolanya tidak diperhatikan (tak punya makna)
2. Eksp 2: S memuat 6 titik sampel. Masing-masing titik sampel disebut elemen-elemen permutasi, yakni pengulangan nomor bola tidak dimungkinkan dan urutan nomor bolanya diperhatikan (punya makna)
3. Eksp 3: S memuat 9 titik sampel. Masing-masing titik sampelnya bukan elemen-elemen permutasi maupun kombinasi, sebab pengulangan nomor bola dimungkinkan.

Jadi

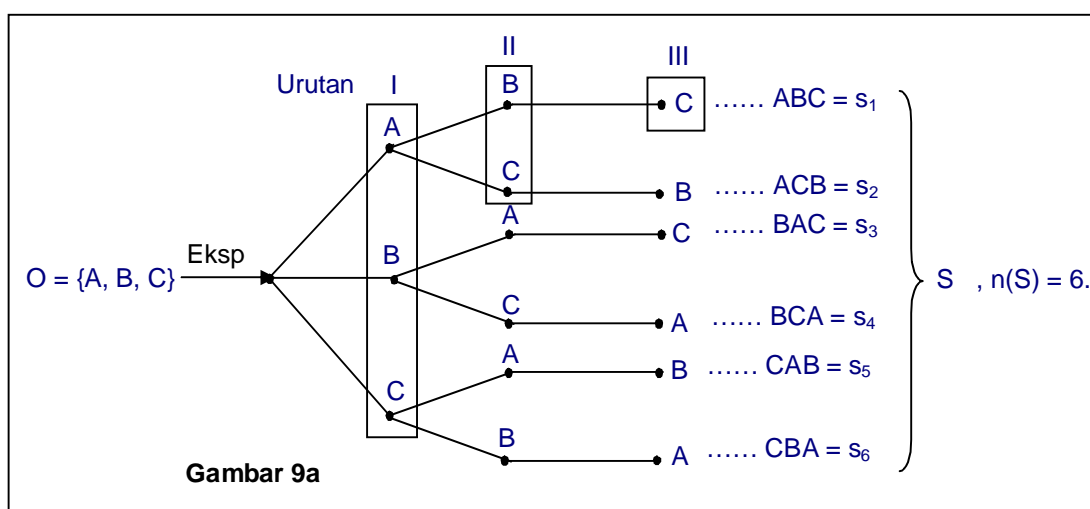
Suatu titik sampel bukan merupakan elemen kombinasi dan bukan merupakan elemen permutasi jika pengulangan elemen dari obyek eksperimennya dimungkinkan.

D. PENURUNAN RUMUS PERMUTASI

Misalkan ada 3 regu peserta tebak tepat tingkat SMP akan bertanding di babak final yang menyediakan 3 macam kategori hadiah (hadiah I, II, dan III). Ada berapa cara hadiah itu dapat diberikan?

Jika para peserta lomba tebak tepat itu adalah regu A, regu B, dan regu C, maka obyek eksperimen yang dimaksud adalah himpunan $O = \{A, B, C\}$. Dengan begitu maka eksperimen yang dimaksud adalah "melakukan lomba tebak tepat untuk menentukan pemenang I, II, dan III". Pemenang I yang dimaksud tentu "juara I". Sehingga pemenang II dan III adalah juara II dan juara III. Sementara ruang sampel dari eksperimen tersebut adalah himpunan para pemenang yang mungkin untuk memenangkan lomba tersebut.

Secara matematika "dianggap masing-masing regu berpeluang sama untuk muncul sebagai pemenang lomba". Sehingga dengan anggapan seperti itu maka gambaran tentang hasil-hasil yang mungkin terjadi pada lomba tersebut adalah sebagai berikut.



Perhatikan bahwa susunan elemen-elemen seperti ABC, ACB, ... hingga CBA masing-masing susunan (titik sampel) disebut *permutasi* (permutasi 3 elemen dari 3 elemen himpunan H). Sebab *susunan hasil-hasil eksperimen* pada masalah tersebut *tidak memungkinkan adanya pengulangan* anggota dari obyek eksperimennya dan urutan elemen-elemen hasilnya diperhatikan (punya makna). Mengapa?.

Jawabnya adalah dalam suatu kejuaraan seperti lomba tebak tepat tidak mungkin sebuah regu memperoleh 2 hadiah sekaligus. Misalnya regu A memperoleh hadiah I sekaligus memperoleh hadiah II, atau regu A memperoleh hadiah II sekaligus memperoleh hadiah III. Itulah sebabnya pengulangan dari obyek eksperimennya tidak dimungkinkan.

Alasan lainnya adalah susunan hasil seperti $s_1 = ABC$ dibedakan dengan susunan hasil seperti $s_4 = BCA$, yakni $s_1 \neq s_4$. Sebab hasil seperti misalnya $s_1 = ABC$ maknanya adalah A sebagai pemenang I, B sebagai pemenang II, dan C sebagai pemenang III. Sementara $s_4 = BCA$ maknanya adalah B sebagai pemenang I, C sebagai pemenang II, dan A sebagai pemenang III.

Karena **pengulangan elemen** pada obyek eksperimennya **tidak dimungkinkan** dan susunan **urutannya diperhatikan** maka lomba cepat tepat merupakan **masalah permutasi**.

Karena merupakan masalah permutasi maka ruang sampel

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$$

disebut **himpunan permutasi 3 elemen dari 3 elemen yang diketahui**.

Selanjutnya banyaknya anggota ruang sampel S (dalam masalah ini) yakni

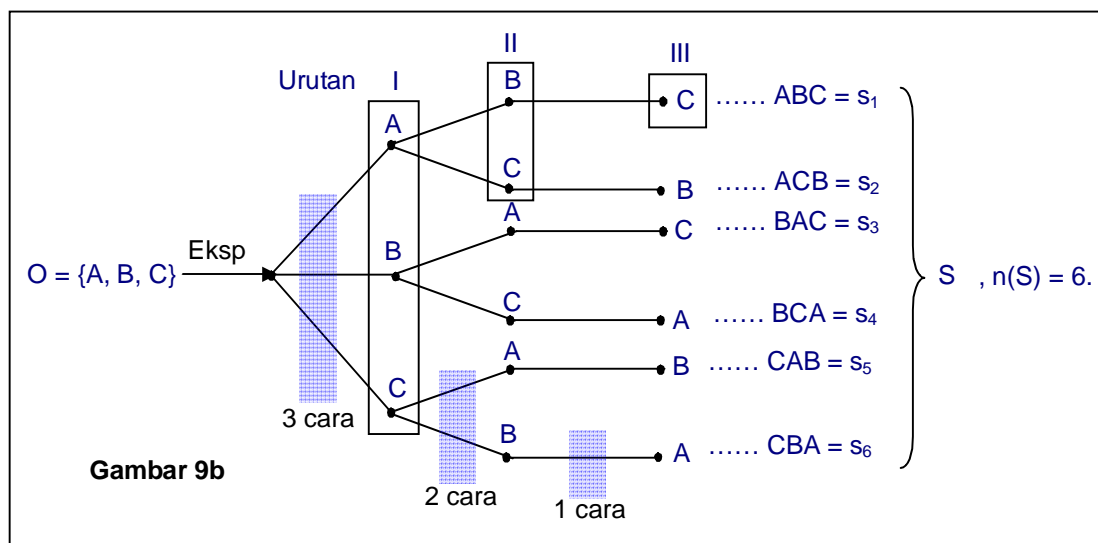
$$n(S) = 6$$

disebut **banyaknya permutasi 3 elemen dari 3 elemen yang diketahui**.

Secara formal (matematis) **banyaknya permutasi r elemen dari n elemen yang diketahui** ditulis dengan lambang

$$P_r^n, \text{ atau } {}_rP_n, \text{ atau } P_{(r,n)}.$$

Sekarang coba perhatikan gambar 9b berikut (yang lebih detail dari pada gambar 9a).



Karena ada

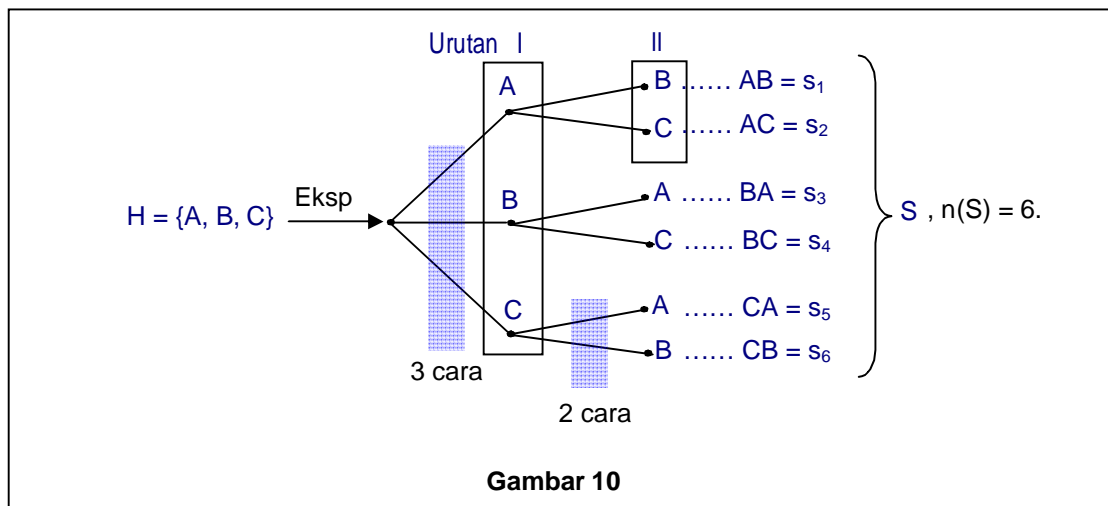
- 3 cara/cabang yang mungkin untuk menentukan pemenang urutan I,
- 2 cara/cabang yang mungkin untuk menentukan pemenang urutan II, dan
- 1 cara/cabang yang mungkin untuk menentukan pemenang urutan III

Maka menurut prinsip perkalian,

Banyaknya cara untuk memilih 3 pemenang dari 3 peserta yang diketahui adalah

$$n(S) = P_3^3 = \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3 \text{ faktor}} = 3! \text{ (baca "3 faktorial").}$$

Sekarang jika dari 3 regu peserta tebak tepat tersebut jika hanya disediakan 2 hadiah (hadiah I dan hadiah II saja), maka gambaran tentang pemenang yang mungkin akan seperti berikut.



Karena ada

3 cara/cabang yang mungkin untuk menentukan pemenang urutan I, dan
2 cara/cabang yang mungkin untuk menentukan pemenang urutan II,

Maka menurut prinsip perkalian,

Banyaknya cara untuk memilih 2 pemenang dari 3 peserta yang diketahui adalah

$$n(S) = P_2^3 = \underbrace{3 \times 2}_{3 \text{ faktor}} = 6.$$

Dari kedua contoh di atas kita dapat menyimpulkan bahwa: jika banyaknya peserta lomba n dan banyaknya hadiah yang disediakan r , dengan $r < n$. Maka ada

n cara/cabang yang mungkin untuk menentukan pemenang urutan I, dan
 $(n - 1)$ cara/cabang yang mungkin untuk menentukan pemenang urutan II,
 $(n - 2)$ cara/cabang yang mungkin untuk menentukan pemenang urutan III,
•
•
•

$(n - r + 1)$ cara/cabang yang mungkin untuk menentukan pemenang urutan ke- r .

Maka menurut prinsip perkalian,

Banyaknya cara untuk memilih r pemenang dari n peserta yang diketahui adalah

$$n(S) = P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1)}_{r \text{ faktor}} \quad (1)$$



Contoh

Pada lomba berpidato diikuti oleh 10 orang finalis memperebutkan 3 hadiah (hadiah I, II, dan III). Ada berapa cara hadiah itu dapat diberikan pada para pemenang?

Jawab

Dengan penalaran yang sama dengan konsep dan contoh pada masalah di atas, maka *banyaknya cara* ketiga hadiah tersebut dapat diberikan pada para pemenang adalah:

$$n(S) = P_3^{10} = 10 \times \underbrace{9 \times 8}_{3 \text{ faktor}} = 720 \text{ cara.}$$

Jadi ada 720 cara ketiga hadiah itu dapat diberikan kepada para pemenang.

Perhatikan banyaknya permutasi pada rumus (1) di atas jika dijabarkan akan diperoleh:

$$\begin{aligned} P_r^n &= n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - r + 1) \\ &= \frac{n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1)(n - r)(n - r + 1) \dots (2)(1)}{(n - r)(n - r - 1) \dots (2)(1)} \\ &= \frac{n!}{(n - r)!} \end{aligned}$$

Sehingga secara umum banyaknya permutasi r obyek dari n obyek yang disediakan adalah:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n - r)!}, \text{ dengan } r < n.$$

E. PENURUNAN RUMUS KOMBINASI

Misalkan dari 4 orang bersaudara diundang 2 orang wakilnya untuk ikut dalam sebuah rapat keluarga. Ada berapa cara undangan itu dapat dihadiri oleh 2 orang wakil dari 4 bersaudara tersebut?. Bagaimana jika yang diundang rapat sebagai wakilnya adalah 3 orang.

Pemecahan masalah

Misalkan 4 orang bersaudara tersebut adalah Ali, Budi, Chandra, dan Dodi. Maka:

Obyek eksperimen yang dimaksud adalah “A, B, C, dan D”. Sehingga

$$O = \{A, B, C, D\}.$$

Cara eksperimen yang dimaksud adalah

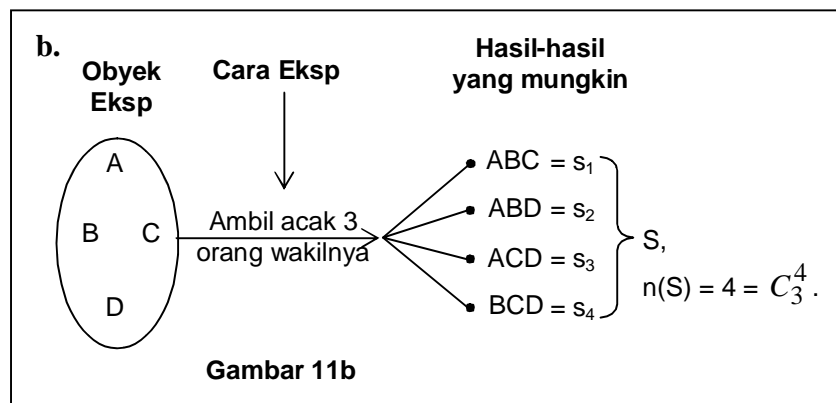
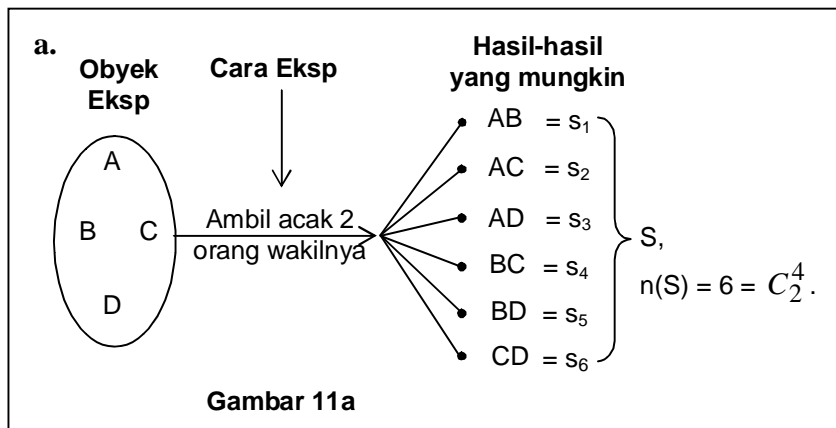
- a. “memilih secara acak 2 orang dari 4 orang yang diwakilinya”.
- b. “memilih secara acak 2 orang dari 4 orang yang diwakilinya”.

Karena dalam hal ini susunan AB berarti yang mewakili rapat keluarga adalah A(Ali) dan B(Budi), sedangkan susunan BA berarti yang mewakili rapat keluarga adalah B(Budi) dan A(Ali).

Karena kita tidak dapat membedakan antara susunan AB dengan susunan BA (AB dan BA mempunyai makna yang sama, yaitu yang mewakili rapat keluarga adalah Ali dan Budi). Dengan demikian maka susunan $AB = BA$.

Karena $AB = BA$ berarti urutan susunannya tidak diperhatikan. Sehingga dapat kita simpulkan bahwa soal cerita di atas adalah soal cerita tentang **kombinasi**.

Lebih lanjut untuk memudahkan pemahaman, perhatikan kedua diagram pohon berikut ini.



Berdasarkan diagram pohon (gambar 11a dan 11b) di atas mudah bagi kita untuk memahami bahwa:

- a. Banyaknya cara memilih 2 orang wakil dari 4 bersaudara adalah $n(S) = 6$.
Karena kasusnya kombinasi, maka dengan lambang kombinasi banyaknya cara yang dimaksud adalah

$$n(S) = C_2^4 = 6.$$

- b. Dengan pemikiran yang sama maka banyaknya cara memilih 2 orang wakil dari 4 bersaudara adalah

$$n(S) = C_3^4 = 4.$$



Untuk memudahkan pemahaman berikutnya, perhatikan sajian pemecahan masalah dari soal di atas dalam bentuk tabel.

Tabel 3

Macam Kombinasi	Jika Elemen-elemen Kombinasi itu dipermutasikan	Banyaknya Permutasi
$s_1 = AB$	AB, BA	2!
$s_2 = AC$	AC, CA	2!
$s_3 = AD$	AD, DA	2!
$s_4 = BC$	BC, CB	2!
$s_5 = BD$	BD, DB	2!
$s_6 = CD$	CD, DC	2!
$C_2^4 = 6$	$P_2^4 = \underbrace{4 \times 3}_{2 \text{ faktor}} = 12.$	$6 \times 2!$

Tabel 4

Macam Kombinasi	Jika Elemen-elemen Kombinasi itu dipermutasikan	Banyaknya Permutasi
$s_1 = ABC$	ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA	3!
$s_2 = ABD$	ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA	3!
$s_3 = ACD$	ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA	3!
$s_4 = BCD$	BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB	3!
$C_3^4 = 4$	$P_3^4 = \underbrace{4 \times 3 \times 2}_{3 \text{ faktor}} = 24$	$4 \times 3!$

Perhatikan bahwa

Dari tabel pertama $\rightarrow P_2^4 = 4 \times 3 = 12 = 6 \times 2! = C_2^4 \times 2!$

Dari tabel pertama $\rightarrow P_3^4 = 4 \times 3 \times 2 = 24 = 4 \times 3! = C_3^4 \times 3!$

Dengan penalaran yang sama, maka secara umum banyaknya kombinasi r obyek dari n obyek yang disediakan adalah:

$$P_r^n = C_r^n \times r! \quad \text{atau} \quad \boxed{C_r^n = \frac{P_r^n}{r!}} = \frac{n!}{r!} \quad \text{atau} \quad \boxed{C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}}.$$

**Contoh penggunaan rumus**

- Hitunglah a. $C_3^{20} = \dots$
b. $C_{17}^{20} = \dots$

Jawab

- a. Karena selisih antara 3 dan 20 relatif jauh, maka rumus yang lebih praktis digunakan adalah

$$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} \text{ sehingga } C_3^{20} = \frac{P_3^{20}}{3!} = \frac{20 \times \overset{3 \text{ faktor}}{\cancel{19}} \times \cancel{18}}{3 \times 2 \times 1} = 1140.$$

- b. Karena 17 dan 20 berselisih relatif dekat, maka rumus yang lebih praktis digunakan adalah $C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$, sehingga

$$C_{17}^{20} = \frac{20!}{(20-17)!17!} = \frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times \cancel{17!}}{6 \times \cancel{17!}} = 1140.$$

Catatan

1. Secara konsep nol faktorial (0!) tidak ada sebab konsep faktorial berasal dari permutasi dan permutasi penalarannya dari banyaknya urutan pemenang yang mungkin pada sebuah pertandingan/kontes/sayembara. Dalam pertandingan pesertanya minimal = 1 dan hadiahnya minimal = 1, sehingga banyaknya urutan = 1. Itulah konsep 1!, tetapi dalam setiap perhitungan yang melibatkan notasi faktorial, hasil perhitungan selalu benar sesuai konsep jika diberikan nilai $0! = 1$. Agar tidak terjadi kontradiksi selanjutnya

Didefinisikan bahwa $0! = 1$.

2. Bilangan-bilangan pada **Segitiga Pascal** bersesuaian dengan kombinasi.

1											C_0^0
	1	1									C_0^1 C_1^1
	1	2	1								C_0^2 C_1^2 C_2^2
	1	3	3	1							C_0^3 C_1^3 C_2^3 C_3^3
	1	4	6	4	1						C_0^4 C_1^4 C_2^4 C_3^4 C_4^4
	1	5	10	10	5	1					C_0^5 C_1^5 C_2^5 C_3^5 C_4^5 C_5^5

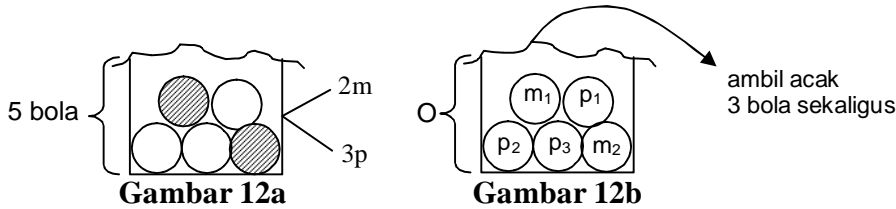
Catatan

Dengan mengetahui bahwa bilangan-bilangan pada segitiga Pascal bersesuaian dengan rumus banyaknya kombinasi seperti di atas, untuk selanjutnya perhitungan banyaknya kombinasi untuk bilangan-bilangan kecil dapat ditulis secara langsung dengan membayangkan pasangan-bilangannya. Misal

$$C_2^4 = 6, C_1^2 = 2, C_3^5 = 10 \text{ dan lain-lain.}$$

Contoh terapan 1

Dalam sebuah kotak terdapat 5 bola terdiri dari 2 bola berwarna merah dan 3 bola berwarna putih (lihat gambar 7.1 dan 7.2). Dari dalam kotak diambil 3 bola sekaligus.



Misalkan

$A = (1m, 2p)$, yakni peristiwa terambilnya 1 bola merah dan 2 bola putih

$B = (2m, 1p)$, yakni peristiwa terambilnya 2 bola merah dan 1 bola putih

$C = (3p)$, yakni peristiwa terambilnya ketiga bola berwarna putih

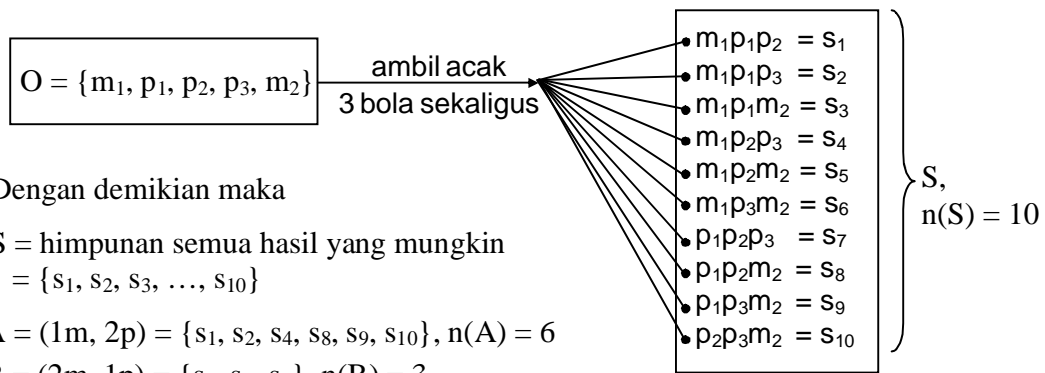
$D = (3m) = \phi$, yakni peristiwa terambilnya ketiga bola berwarna merah, maka peristiwa D adalah sesuatu yang tak mungkin terjadi (sesuatu yang mustahil) sebab dalam kotak hanya terdapat 2 bola berwarna merah sehingga tak mungkin akan terambil 3 bola merah.

Pertanyaan

- Berikan gambaran tentang ruang sampel S dari eksperimen itu, peristiwa A, B, dan C.
- Tentukan peluang munculnya peristiwa A, B, dan C

Jawab

- Dari obyek eksperimen $O = \{m_1, p_1, p_2, p_3, m_2\}$ jika diambil acak 3 bola sekaligus, hasil-hasil yang mungkin dapat diberikan gambaran seperti berikut.



Dengan demikian maka

$S =$ himpunan semua hasil yang mungkin
 $= \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_{10}\}$

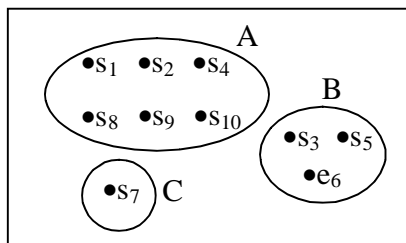
$A = (1m, 2p) = \{s_1, s_2, s_4, s_8, s_9, s_{10}\}$, $n(A) = 6$

$B = (2m, 1p) = \{s_3, s_5, s_6\}$, $n(B) = 3$

$C = (3p) = \{s_7\}$, $n(C) = 1$

Gambar 13

Gambaran mengenai diagram Venn yang sesuai adalah



Gambar 14

S Keterangan

Berdasarkan diagram Venn tampak bahwa A, B, C adalah 3 peristiwa lepas dalam ruang sampel S.

A, B, C merupakan pertisi dari S, sebab

$A \cap B \cap C = \emptyset$ dan $A \cup B \cup C = S$.



- b. Secara intuisi (kata hati) kita dapat meyakini bahwa masing-masing titik sampel dalam ruang sampel S di atas berpeluang sama untuk muncul, oleh karena itu maka kita dapat menggunakan definisi klasik untuk menentukan peluang munculnya masing-masing peristiwa dalam ruang sampel S tersebut, yaitu

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{10}, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{10}, \quad \text{dan} \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{10}.$$

- c. Cara lain untuk menghitung peluang munculnya masing-masing peristiwa A , B , dan C adalah dengan rumus kombinasi.

Cara membayangkan perhitungannya adalah seperti berikut.

$$P(A) = P(1m,2p) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{C_{1m}^{\text{dari } 2m} \cdot C_{2p}^{\text{dari } 3p}}{C_{3 \text{ bola}}^{\text{dari } 5 \text{ bola}}} = \frac{2 \cdot 3}{10} = \frac{6}{10}$$

$$P(B) = P(2m,1p) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{C_{2m}^{\text{dari } 2m} \cdot C_{1p}^{\text{dari } 3p}}{C_{3 \text{ bola}}^{\text{dari } 5 \text{ bola}}} = \frac{1 \cdot 3}{10} = \frac{3}{10}, \text{ dan}$$

$$P(C) = P(3p) = P(0m,3p) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{C_{0m}^{\text{dari } 2m} \cdot C_{3p}^{\text{dari } 3p}}{C_{3 \text{ bola}}^{\text{dari } 5 \text{ bola}}} = \frac{1 \cdot 1}{10} = \frac{1}{10}.$$

- d. Setelah diselidiki lebih lanjut (sayang masalah materi ini di luar konteks diklat guru SMP adanya di diklat guru SMA Lanjut) akan terbukti bahwa:

Peluang munculnya suatu peristiwa pada pengambilan sekaligus sama nilainya dengan peluang munculnya peristiwa yang sama pada pengambilan satu demi satu tanpa pengembalian.

Contoh terapan 2

Misalkan sebuah dadu dan sebuah paku payung diundi sekaligus. Kita ketahui peluang munculnya paku payung miring adalah $\frac{3}{10}$ dan terlentang adalah $\frac{7}{10}$. Misalkan A dan B adalah peristiwa dalam ruang sampel S yang diketahui bentuknya dalam diagram Venn. Hasil-hasil eksperimen yang mungkin adalah sebagai berikut. (lihat tabel 4.1, 4.2, dan 4.3).

P a k u Payung	D a d u					
	1	2	3	4	5	6
miring (m)	(m,1)	(m,2)	(m,3)	(m,4)	(m,5)	(m,6)
terlentang (t)	(t,1)	(t,2)	(t,3)	(t,4)	(t,5)	(t,6)

Tabel 5a



Hasil-hasil yang mungkin itu selanjutnya disebut sebagai titik-titik sampel. Untuk memudahkan pemahaman titik-titik sampel itu kita namai dengan lambang s_1, s_2 , hingga s_{12} (tabel 4.2).

Paku Payung	Dadu					
	1	2	3	4	5	6
miring (m)	• s_1	• s_2	• s_3	• s_4	• s_5	• s_6
terlentang (t)	• s_7	• s_8	• s_9	• s_{10}	• s_{11}	• s_{12}

Tabel 5b

Nilai peluang dari masing-masing titik sampelnya dapat dilihat pada tabel 4.3 berikut ini.

Paku Payung	Dadu					
	1	2	3	4	5	6
miring (m)	$\frac{3}{60}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{3}{60}$
terlentang (t)	$\frac{7}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{7}{60}$

Tabel 5c

jumlah = $\frac{18}{60}$

jumlah = $\frac{42}{60}$

jumlah = $\frac{60}{60} = 1$

→

→

+

Selanjutnya dari tabel hasil eksperimen itu yang dimaksud dengan ruang sampel S, peristiwa A, dan peristiwa B berturut-turut adalah

$$S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_{12}\} \text{ sehingga } n(S) = 12,$$

$$A = \{s_8, s_9, s_{10}, s_{11}\} \text{ sehingga } n(A) = 4, \text{ dan}$$

$$B = \{s_4, s_5, s_9, s_{10}\} \text{ sehingga } n(B) = 4.$$

Nilai peluang dari masing-masing titik sampel dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut. Misal

$$P(\{s_1\}) = P(\{(m,1)\}) = P(\{m\}) \times P(\{1\}) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{60}.$$

Sebab munculnya paku payung miring/terlentang tidak mengatur munculnya mata dadu demikian pula sebaliknya. Itulah yang dalam topik peluang disebut *dua obyek eksperimen yang saling bebas*. Selanjutnya dengan penalaran yang sama kita dapatkan



$$P(\{s_2\}) = P(\{(m,2)\}) = P(\{m\}) \times P(\{2\}) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{60}, \dots \text{ dan seterusnya hingga}$$

$$P(\{s_6\}) = P(\{(m,6)\}) = P(\{m\}) \times P(\{6\}) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{60}.$$

Sementara itu untuk titik-titik sampel $s_7, s_8, s_9, s_{10}, s_{11}$, dan s_{12} masing-masing akan kita dapatkan

$$P(\{s_7\}) = P(\{(t,1)\}) = P(\{t\}) \times P(\{1\}) = \frac{7}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{60},$$

$$P(\{s_8\}) = P(\{(t,2)\}) = P(\{t\}) \times P(\{2\}) = \frac{7}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{60}, \dots, \text{ dan}$$

$$P(\{s_{12}\}) = P(\{(t,6)\}) = P(\{t\}) \times P(\{6\}) = \frac{7}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{60}.$$

Dengan demikian menurut prinsip penjumlahan, peluang munculnya peristiwa

$A = \{s_7, s_8, s_9, s_{10}\}$ adalah

$$P(A) = P(\{s_7\}) + P(\{s_8\}) + P(\{s_9\}) + P(\{s_{10}\})$$

$$= \frac{7}{60} + \frac{7}{60} + \frac{7}{60} + \frac{7}{60} = \frac{28}{60} = \frac{7}{15},$$

dan

$B = \{s_4, s_5, s_8, s_9\}$ adalah

$$P(A) = P(\{s_4\}) + P(\{s_5\}) + P(\{s_8\}) + P(\{s_9\})$$

$$= \frac{3}{60} + \frac{3}{60} + \frac{7}{60} + \frac{7}{60} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}.$$

Prinsip penjumlahan berlaku hanya untuk ruang sampel berhingga, yaitu ruang sampel yang banyak anggotanya tertentu (tidak tak terhingga), secara umum adalah sebagai berikut.

Prinsip Penjumlahan

Jika suatu eksperimen memiliki ruang sampel berhingga, sedangkan E adalah peristiwa dalam ruang sampel S dengan m titik sampel, yakni:

$$E = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$$

maka peluang munculnya peristiwa E adalah

$$P(E) = P(\{s_1\}) + P(\{s_2\}) + \dots + P(\{s_m\}).$$

Sekarang jika kita gunakan definisi klasik, akan kita peroleh

$$A = \{s_7, s_8, s_9, s_{10}\} \text{ maka } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \text{ dan}$$

$$B = \{s_4, s_5, s_8, s_9\} \text{ maka } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$



Ternyata nilai peluang yang dihasilkan untuk peristiwa A berdasarkan prinsip penjumlahan tidak sama dengan yang dihasilkan berdasarkan definisi klasik, yaitu $\frac{7}{15} \neq \frac{1}{3}$. Tetapi secara kebetulan nilai peluang yang dihasilkan untuk peristiwa B berdasarkan prinsip penjumlahan sama dengan yang dihasilkan berdasarkan definisi klasik, yaitu $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Mengapa hal semacam itu dapat terjadi?, jawabannya adalah karena *prinsip penjumlahan berlaku umum* untuk setiap peristiwa dalam suatu eksperimen, sementara *definisi klasik hanya berlaku khusus* untuk ruang sampel S yang berdistribusi seragam, yaitu jika masing-masing titik sampel dalam ruang sampel S berpeluang sama untuk muncul.

F. TINJAUAN PELUANG SECARA AKSIOMATIK

Tinjauan peluang secara aksiomatik dikemukakan oleh A.N. Kolmogorov. Tujuannya agar sebagai bagian dari matematika peluang memenuhi sifat deduktif dan konsisten. Aksioma yang dimaksud adalah seperti berikut.

Aksioma Peluang

Misalkan S adalah ruang sampel. Untuk sembarang peristiwa A dalam S suatu ukuran mengenai sering atau jarangya peristiwa itu muncul dilambangkan dengan P(A). Maka P(A) disebut peluang munculnya peristiwa A jika ketiga aksioma berikut dipenuhi

Aksioma 1 : Untuk setiap peristiwa A, $0 \leq P(A) \leq 1$

Aksioma 2 : $P(S) = 1$

Aksioma 3 : Jika A dan B adalah peristiwa yang saling asing (lepas), maka
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Dengan ketiga macam tinjauan tersebut teorema-teorema tentang peluang dapat dibuktikan sejalan dengan teorema-teorema pada definisi empirik maupun definisi klasik.

G. KEPASTIAN DAN KEMUSTAHILAN

Dalam suatu eksperimen terhadap suatu obyek tertentu ada peristiwa yang pasti terjadi (selalu terjadi) dan ada pula peristiwa yang tak mungkin terjadi (tak pernah terjadi) kapanpun dan dimanapun eksperimen itu dilakukan. Pada topik peluang, peristiwa yang selalu terjadi nilai peluangnya didefinisikan sama dengan satu sedangkan peristiwa yang tidak mungkin terjadi didefinisikan nilai peluangnya sama dengan nol.

Secara matematika ditulis

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow \text{peristiwa A tak mungkin terjadi}$$

$$P(A) = 1 \Leftrightarrow \text{peristiwa A pasti terjadi.}$$

Kepastian adalah suatu jaminan bahwa dalam suatu eksperimen peristiwa yang dimaksud pasti terjadi. Sebaliknya, kemustahilan adalah suatu jaminan bahwa dalam suatu eksperimen peristiwa yang dimaksud tak mungkin terjadi.

**Contoh**

1. Pada eksperimen terhadap paku payung (fines) mungkinkah diperoleh hasil fines berdiri? Tentukan nilai $P(\text{fines berdiri}) = \dots$
2. Pada eksperimen terhadap paku asbes (asbes adalah bahan bangunan untuk atap rumah, ada asbes gelombang besar dan ada asbes gelombang kecil), mungkinkah diperoleh hasil paku asbes miring? Tentukan nilai $P(\text{paku asbes miring}) = \dots$
Praktikkan kedua eksperimen itu!.

H. FREKUENSI HARAPAN

Sebagai gambaran mengenai frekuensi harapan Anda diminta untuk menjawab permasalahan-permasalahan berikut menurut kata hati dan perasaan Anda.

- a. Bila sebuah dadu dilambungkan sebanyak 600 kali, berapa kalikah diharapkan akan muncul mata 5?
- b. Bila kita melambungkan sekeping mata uang logam sebanyak 100 kali. Berapa kalikah diharapkan akan muncul muka G?
- c. Dalam 1000 kali kelahiran (tanpa kelahiran kembar), ada berapa bayi laki-laki yang diharapkan akan lahir?

Apa yang mendasari landasan berpikir kita sehingga kata hati dan perasaan Anda menjawab seperti itu?

Jawaban dari pertanyaan-pertanyaan di atas adalah permasalahan tentang frekuensi harapan yang dimaksud pada studi masalah peluang. Sekarang apa jawaban Anda atas tiga pertanyaan di atas? Jawaban yang mungkin adalah:

1. Jawaban yang mungkin sekitar 100 kali sebab peluang munculnya mata dadu 5 adalah $\frac{1}{6}$ sementara percobaan dilakukan sebanyak 600 kali.
2. Jawaban yang mungkin sekitar 50 kali sebab peluang munculnya muka G adalah $\frac{1}{2}$ sementara percobaan dilakukan sebanyak 100 kali.
3. Jawaban yang mungkin akan lahir sekitar 500 bayi laki-laki sebab peluang lahirnya bayi laki-laki adalah $\frac{1}{2}$ sementara kelahirannya sebanyak 1000 kali.

Jawaban seperti 100 kali, 50 kali, dan 500 kali tersebut di atas adalah nilai dari frekuensi harapan yang dimaksud pada suatu peristiwa. Secara matematik frekuensi harapan dalam suatu peristiwa (kejadian) didefinisikan seperti berikut:

Frekuensi harapan munculnya suatu peristiwa ialah nilai peluang munculnya peristiwa itu dikalikan dengan banyaknya percobaan, sehingga

$$F_h = n \cdot P(E)$$

E adalah peristiwa yang diamati.

Dengan demikian maka jawaban untuk nomor

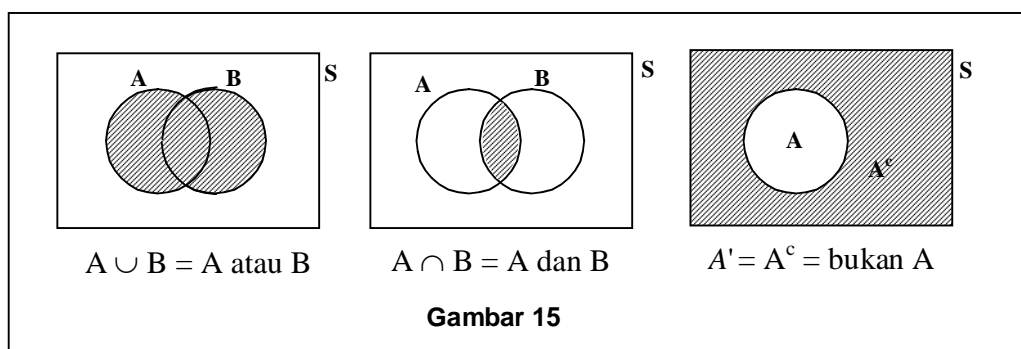
1. Frekuensi harapannya adalah $F_h = n \cdot P(E)$
 $= 600 \times \frac{1}{6} = 100$
2. Frekuensi harapannya adalah $F_h = n \cdot P(E)$
 $= 100 \times \frac{1}{2} = 50$

3. Frekuensi harapannya adalah $F_h = n \cdot P(E)$
 $= 1000 \times \frac{1}{2} = 500.$

I. RELASI ANTAR PERISTIWA

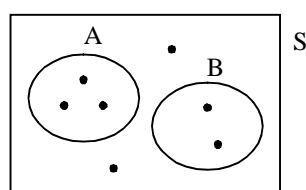
1. Rangkaian Dua Peristiwa

Misalkan S adalah ruang sampel dari suatu eksperimen. A dan B adalah sembarang peristiwa dalam ruang sampel S . Peristiwa tunggal yang mengaitkan antara peristiwa A dengan peristiwa B yakni peristiwa munculnya "A atau B" ditulis dengan lambang " $A \cup B$ " sedangkan peristiwa munculnya "A dan B" ditulis dengan lambang " $A \cap B$ ". Peristiwa "bukan A" atau "komplemen dari A" ditulis dengan lambang A' atau A^c . Bagian yang diarsir pada diagram Venn berikut adalah gambaran dari peristiwa-peristiwa yang dimaksudkan itu.



2. Relasi Lepas

Dua peristiwa A dan B dalam ruang sampel S disebut lepas apabila dalam eksperimen yang menghasilkan ruang sampel S itu kedua peristiwa (A dan B) tidak mungkin terjadi secara bersamaan. Karena tidak mungkin terjadi secara bersamaan dalam eksperimen yang sama maka $A \cap B = \emptyset$.

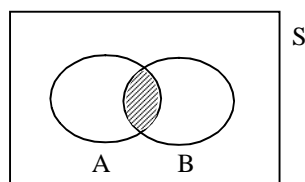


Gambar 16a

A dan B adalah 2 peristiwa lepas.

3. Relasi Bebas

Dua peristiwa A dan B dalam ruang sampel S disebut bebas apabila $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Bila tidak sama maka dikatakan bahwa peristiwa A dan B tidak saling bebas.



Gambar 16b

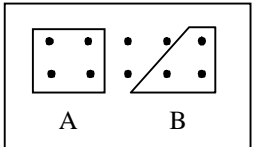
A dan B bebas $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

4. Relasi Komplemen

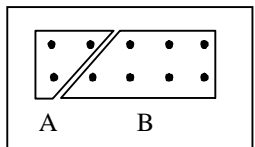
Dua peristiwa A dan B dalam ruang sampel S disebut saling berkomplemen jika $A \cap B = \emptyset$ dan $P(A) + P(B) = 1 = P(S)$ yaitu apabila $P(B) = 1 - P(A)$ atau $P(A) = 1 - P(B)$ atau apabila $A = \text{bukan } B$ dan sebaliknya $B = \text{bukan } A$.

Contoh

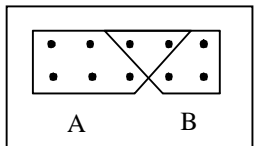
Misalkan S adalah ruang sampel dari suatu eksperimen dengan $n(S) = 10$ dan masing-masing titik sampelnya berpeluang sama untuk muncul. Dua peristiwa A dan B dalam S masing-masing akan mempunyai relasi lepas, bebas, tak bebas, atau komplemen apabila diagram Venn yang ditunjukkannya adalah sebagai berikut.

a.  S A dan B adalah 2 peristiwa lepas.

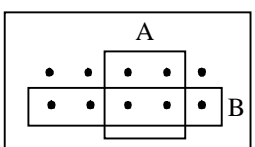
Gambar 17a

b.  S A dan B adalah 2 peristiwa komplemen.
 $A = \text{bukan } B$ atau $B = \text{bukan } A$, ditulis
 $B = A^c \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$.

Gambar 17b

c.  S $P(A) = \frac{7}{10}$, $P(B) = \frac{5}{10}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{10}$.
 Ternyata $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, maka
 A dan B adalah 2 peristiwa tak bebas.

Gambar 17c

d.  S $P(A) = \frac{4}{10}$, $P(B) = \frac{5}{10}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.
 Ternyata $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, maka
 A dan B adalah 2 peristiwa bebas.

Gambar 17d



Fines (paku payung)	Dadu					
	1	2	3	4	5	6
t(terlentang)	•	•	•	•	•	•
m(miring)	•	•	•	•	•	•

Tabel 5.1

Fines (paku payung)	Dadu					
	1	2	3	4	5	6
t(terlentang)	•	•	•	•	•	•
m(miring)	•	•	•	•	•	•

Tabel 5.2

- Tentukan relasi antara peristiwa D dan E
 - Tentukan relasi antara peristiwa D dan F
 - Definisikan masing-masing peristiwa D, E, dan F tersebut
 - Berlakukah jawaban pertanyaan 1d di atas untuk dadu dan paku payung? (dadu masing-masing titik sampelnya berpeluang sama untuk muncul sementara paku payung tidak).
- Sebuah dadu diundi satu kali. Jika A adalah peristiwa munculnya muka dadu maksimal 2, B adalah peristiwa munculnya muka dadu minimal 4, dan C adalah peristiwa munculnya muka dadu prima, tentukan relasi antara peristiwa
 - A dan B
 - A dan C
 - B dan C
 - Misalkan dua buah dadu diundi sekaligus dan S adalah ruang sampelnya. A dan B adalah dua peristiwa dalam S. Tentukan relasi antara A dan B jika
 - A adalah peristiwa munculnya jumlah kedua mata dadu maksimal 4.
B adalah peristiwa munculnya jumlah kedua mata dadu minimal 7.
 - A adalah peristiwa munculnya jumlah kedua mata dadu minimal 9.
B adalah peristiwa munculnya jumlah kedua mata dadu maksimal 8.
 - A adalah peristiwa munculnya muka dadu pertama antara 3 dan 6.
B adalah peristiwa munculnya muka dadu kedua antara 3 dan 6.
 - A adalah peristiwa munculnya muka dadu pertama antara 3 dan 6
B adalah peristiwa munculnya muka dadu pertama antara 3 dan 6 dan dadu kedua minimal 3.

Petunjuk pengerjaan soal no.4.

Gambarkan diagram Venn dari masing-masing peristiwa A dan B tersebut dalam bentuk sketsa seperti gambar di soal nomor 1 dan 2.

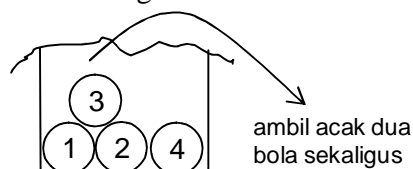
Catatan.

Dalam bentuk soal cerita relasi antara peristiwa A dan B pada suatu eksperimen disebut:

- Lepas**, jika kedua peristiwa dalam eksperimen itu tak mungkin terjadi secara bersamaan.
- Bebas**, jika dalam eksperimen itu peluang munculnya peristiwa yang satu tidak dipengaruhi oleh peluang munculnya peristiwa yang lain demikian pula sebaliknya.

Setelah mengetahui kedua ciri tersebut, coba renungkan apa perbedaan mendasar yang membedakan peristiwa bebas dan tak bebas jika kita hanya melihat diagramnya saja.

5. Sebuah kotak berisi empat buah bola bernomor 1, 2, 3, dan 4 (lihat gambar). Dari dalam kotak diambil dua bola sekaligus.



Gambar 12.1

Misalkan dari dua bola yang terambil itu: A adalah peristiwa terambilnya jumlah bilangan pada kedua bola genap, B adalah peristiwa terambilnya jumlah bilangan pada kedua bola minimal 5, C adalah peristiwa terambilnya jumlah bilangan pada kedua bola habis dibagi 3, D adalah peristiwa terambilnya jumlah bilangan pada kedua bola antara 3 dan 6, serta E adalah peristiwa terambilnya jumlah bilangan pada kedua bola ganjil. Tentukan relasi antara peristiwa

- A dan B
 - A dan C
 - A dan D
 - A dan E.
6. Jika eksperimen yang dilakukan pada soal nomor 5 di atas adalah mengambil acak tiga bola sekaligus, A adalah peristiwa terambilnya ketiga bola jumlahnya maksimal 7, B adalah peristiwa terambilnya ketiga bola jumlahnya 7 atau 8, dan C adalah peristiwa terambilnya ketiga bola jumlahnya minimal 8. Tentukan relasi antara peristiwa
- A dan B
 - A dan C
7. Sebuah kotak berisi 5 buah bola seukuran. Masing-masing bola ditandai dengan angka 1, 2, 3, 4, dan 5. Dari dalam kotak diambil secara acak 2 (dua) bola sekaligus. Jika
- A = peristiwa terambilnya jumlah bilangan pada kedua bola maksimal 4
 - B = peristiwa terambilnya jumlah bilangan pada kedua bola antara 3 dan 7
 - C = peristiwa terambilnya jumlah bilangan pada kedua bola maksimal 8
 - D = peristiwa terambilnya jumlah bilangan pada kedua bola minimal 5
 - E = peristiwa terambilnya jumlah bilangan pada kedua bola minimal 4 dan maksimal 7,
- tentukan relasi antara peristiwa
- A dan B
 - A dan C
 - A dan D
 - A dan E
8. Soal sama dengan no.7, hanya saja pengambilannya 3 bola sekaligus. Jika
- A = peristiwa terambilnya jumlah bilangan pada ketiga bola antara 6 dan 10
 - B = peristiwa terambilnya jumlah bilangan pada ketiga bola maksimal 7
 - C = peristiwa terambilnya jumlah bilangan pada ketiga bola tepat 8



D = peristiwa terambilnya jumlah bilangan pada ketiga bola minimal 11

E = peristiwa terambilnya jumlah bilangan pada ketiga bola tepat sama dengan 6 atau minimal 10, tentukan relasi antara peristiwa

- a. A dan B
- b. A dan C
- c. A dan D
- d. A dan E

9. Setelah Anda mempelajari dengan seksama, coba sekarang jawablah pertanyaan pada contoh masalah pengambilan sampel di halaman 6. Ada berapa cara dalam menentukan pemenang arisan sebanyak 3 orang dari peserta arisan sebanyak 40 orang tersebut?. Rumus mana yang digunakan: *rumus kombinasi* atau *rumus permutasi*?, apa alasannya jelaskan.

10. Ada berapa cara kita dapat menyusun bilangan 3 angka yang angka-angkanya saling berlainan dari $\{1, 3, 5, 7, 9\}$?. Rumus mana yang digunakan: *rumus kombinasi* atau *rumus permutasi*? Atau rumus lainnya, jelaskan alasannya!.

Ada berapa cara pula jika kita ingin menyusun bilangan 3 angka yang angka-angkanya saling berlainan itu dari kumpulan angka jika kumpulan angkanya memuat bilangan nol yakni $\{0, 2, 4, 6, 8\}$?. Rumus mana yang digunakan: *rumus kombinasi* atau *rumus permutasi*? Atau rumus lainnya, jelaskan alasannya!.

11. Misalkan ada suatu sayembara memperebutkan 1 hadiah I, 1 hadiah II, 1 hadiah III, dan 2 hadiah IV. Misalkan sayembara itu diikuti oleh 6 orang peserta.

- a. Gambarkan diagram pohon yang memperlihatkan banyaknya hasil yang mungkin dalam eksperimen tersebut.
- b. Dari bentuk dan pola bilangan yang ada pada diagram pohon itu, nyatakan banyaknya cara yakni $n(S)$ dalam bentuk permutasi dan kombinasi.
- c. Dari gambar diagram pohon itu, ada berapa cara hadiah yang dimaksud dapat diberikan kepada para pemenang?
- d. Ada berapa cara hadiah itu dapat diberikan kepada para pemenang jika pesertanya 10 orang?

12. Dalam sebuah ruangan terdapat 5 kursi kosong. Jika ada 3 orang yang akan menduduki kursi-kursi tersebut, ada berapa cara kelima kursi kosong itu dapat diduduki oleh ketiga orang tersebut?.

J. BEBERAPA TEOREMA (DALIL) DASAR PADA PELUANG

Seperti yang telah dikemukakan sebelumnya bahwa peristiwa adalah himpunan bagian dari ruang sampel. Sedangkan peristiwa elementer ialah peristiwa yang hanya memuat satu titik sampel, peristiwa majemuk adalah peristiwa yang memuat lebih dari satu titik sampel. Selanjutnya apabila

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \text{ maka} \\ P(\{s_1\}) + P(\{s_2\}) + \dots + P(\{s_n\}) = 1.$$

Dengan demikian jika E suatu peristiwa maka $\emptyset \subseteq E \subseteq S$, sehingga peluang munculnya peristiwa E memiliki kisaran $0 \leq P(E) \leq 1$.

$P(E) = 0$ artinya peristiwa E tak mungkin terjadi

$P(E) = 1$ artinya peristiwa E pasti terjadi.

Apabila peristiwa E memuat m titik sampel yaitu

$$E = \{s_1, s_2, \dots, s_m\} \text{ maka } P(E) = P(\{s_1\}) + P(\{s_2\}) + \dots + P(\{s_m\}).$$

Dalil 1. Jika A dan B adalah peristiwa lepas, maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

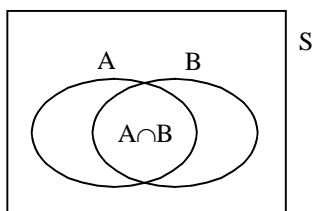
Bukti:

Karena A dan B dua peristiwa lepas (dua peristiwa yang tidak mungkin terjadi secara bersamaan/disjoint/saling asing) maka banyaknya titik sampel pada peristiwa $A \cup B$ sama dengan banyaknya titik sampel pada peristiwa A ditambah banyaknya titik sampel pada peristiwa B. Akibatnya peluang munculnya peristiwa $A \cup B$ sama dengan jumlah dari peluang munculnya semua titik sampel pada peristiwa A dan pada peristiwa B, atau $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ■

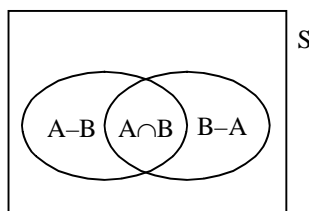
Dalil 2. Jika A dan B adalah sembarang dua peristiwa (dapat berpotongan atau saling asing) dalam suatu ruang sampel S, maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Bukti:



Gb.12.1



Gb.12.2

Seperti yang dapat dilihat pada sajian gambar di atas peristiwa $A \cup B$ dapat dinyatakan sebagai gabungan 3 peristiwa yaitu

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) \dots\dots\dots (1)$$



Karena ketiga peristiwa yang ada di ruas kanan saling asing/lepas maka menurut dalil 1 akan diperoleh bentuk persamaan.

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) \dots\dots\dots (2)$$

Tetapi karena

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \dots\dots\dots (3)$$

$$B = (B - A) \cup (A \cap B) \dots\dots\dots (4)$$

Sedangkan ruas kanan (3) dan (4) masing-masing juga merupakan gabungan dua peristiwa lepas, maka

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \text{ atau } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \dots\dots (5)$$

$$P(B) = P(B - A) + P(A \cap B) \text{ atau } P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \dots\dots(6)$$

Dengan melakukan substitusi persamaan (5) dan (6) ke persamaan (2) akan diperoleh

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B).$$

Sehingga

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \blacksquare$$

Peristiwa Komplemen

Dalil 3. Jika A adalah suatu peristiwa dalam ruang sampel S sehingga peluang munculnya peristiwa A adalah P(A), maka peluang munculnya peristiwa bukan A ialah $P(A') = 1 - P(A)$

Bukti:

Karena $A \cup A' = S$ dan $A \cap A' = \emptyset$ maka dengan menerapkan dalil 1 diperoleh

$$1 = P(S) = P(A \cup A') = P(A) + P(A') \dots\dots \text{sebab A dan A' saling lepas.}$$

Sehingga

$$P(A') = 1 - P(A) \blacksquare$$

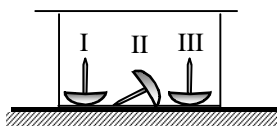
Latihan 2

1. Misalkan A dan B adalah dua peristiwa lepas pada suatu eksperimen. $P(A) = 0,2$ dan $P(B) = 0,5$. Tentukan peluang munculnya peristiwa:
 - (a) A atau B
 - (b) A dan B
 - (c) bukan A

2. Misal A, B, dan C adalah tiga peristiwa yang saling lepas. $P(A) = 0,2$; $P(B) = 0,3$ dan $P(C) = 0,4$. Tentukan peluang:
 - (a) terjadinya peristiwa A atau B
 - (b) terjadinya peristiwa B atau C
 - (c) terjadinya peristiwa A atau B atau C.



3. Misalkan A dan B adalah peristiwa-peristiwa pada suatu eksperimen.
 $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,7$; dan $P(A \cup B) = 0,8$. Tentukan $P(A \cap B)$.
4. Misalkan E dan F adalah peristiwa-peristiwa pada suatu eksperimen.
 $P(E) = 0,30$; $P(F) = 0,10$ dan $P(E \cap F) = 0,05$. tentukan
(a) $P(E')$
(b) $P(F')$
(c) $P(E \cup F)$
5. Misalkan $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ adalah ruang sampel dari suatu eksperimen dengan
 $P(\{s_1\}) = 0,2$; $P(\{s_2\}) = 0,1$; $P(\{s_3\}) = 0,3$; $P(\{s_4\}) = 0,1$ dan $P(\{s_5\}) = 0,3$.
Jika $E = \{s_1, s_3\}$, $F = \{s_1, s_4, s_5\}$, dan $G = \{s_2, s_4, s_5\}$.
Tentukan
(a) $P(E')$ (d) $P(E \cap G)$
(b) $P(E \cup F)$ (e) $P(E \text{ dan } F)$
(c) $P(G \cap F)$ (f) $P(F \text{ atau } G)$
6. Misalkan $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ adalah ruang sampel dari suatu eksperimen. Jika
 $P(\{s_1\}) = P(\{s_2\}) = P(\{s_3\}) = \frac{1}{4}$ dan $P(\{s_4\}) = P(\{s_5\}) = \frac{1}{8}$.
(a) Tunjukkan bahwa peristiwa $A = \{s_1, s_2\}$ dan $B = \{s_2, s_3\}$ adalah dua peristiwa bebas.
(b) Tunjukkan peristiwa $C = \{s_3, s_4\}$ dan $D = \{s_4, s_5\}$ adalah dua peristiwa tak bebas.
7. Misalkan A dan B adalah dua peristiwa yang berhubungan dengan suatu eksperimen.
 $P(A) = 0,5$ dan $P(A \cup B) = 0,8$. Jika $P(B) = x$, tentukan x agar peristiwa.
(a) A dan B merupakan dua peristiwa lepas
(b) A dan B merupakan dua peristiwa bebas.
8. Misalkan di dalam sebuah kotak tertutup terdapat 3 buah paku payung seperti yang dapat dilihat pada gambar. Kotak itu kemudian dikocok sehingga jatuhnya masing-masing paku payung hanya ada 2 kemungkinan saja ($t = \text{terlentang}$ atau $m = \text{miring}$). Jika diketahui bahwa $P(\{t\}) = \frac{7}{10}$, $P(\{m\}) = \frac{3}{10}$ sedangkan A, B, C, D, dan E masing-masing adalah peristiwa sebagai berikut.



- A = ketiga paku payung berposisi miring
B = salah satu paku payung berposisi miring
C = dua paku payung diantaranya berposisi miring
D = ketiga paku payung berposisi terlentang
E = minimal dua diantara paku payung berposisi miring
F = ketiga paku payung berposisi sama (semuanya miring atau semuanya terlentang).

Pertanyaan

- berapa macam titik sampel yang mungkin terjadi dalam eksperimen itu?
- apakah masing-masing titik sampel berpeluang sama untuk muncul?
- tentukan peluang munculnya masing-masing peristiwa



d. tentukan relasi antara peristiwa

- A dan B
- B dan C
- E dan F.

9. Tiga keping mata uang logam diundi sekaligus. Misalkan A, B, C, D, dan E masing-masing adalah peristiwa sebagai berikut.

A = ketiga mata uang memunculkan muka angka,

B = ketiga mata uang memunculkan muka gambar,

C = minimal dua diantara ketiga mata uang memunculkan muka gambar,

D = maksimal dua diantara ketiga mata uang memunculkan muka gambar,

E = ketiga mata uang memunculkan muka yang sama (semuanya muncul muka angka atau semuanya munculmuka gambar).

Pertanyaan

a. berapa macam titik sampel yang mungkin terjadi dalam eksperimen itu?

b. apakah masing-masing titik sampel berpeluang sama untuk muncul?

c. tentukan peluang munculnya masing-masing peristiwa

d. tentukan relasi antara peristiwa

- A dan B
- B dan C
- C dan D
- C dan E

10. Tiga buah dadu setimbang diundi sekaligus. Misalkan A, B, C, D, dan E masing-masing adalah peristiwa sebagai berikut.

A = ketiga dadu memunculkan muka 6,

B = ketiga dadu memunculkan muka bukan 6,

C = minimal dua diantara ketiga dadu memunculkan muka 6,

D = maksimal dua diantara ketiga dadu memunculkan muka 6,

E = ketiga dadu memunculkan muka yang sama.

Pertanyaan

a. berapa macam titik sampel yang mungkin terjadi dalam eksperimen itu?

b. apakah masing-masing titik sampel berpeluang sama untuk muncul?

c. tentukan peluang munculnya masing-masing peristiwa

d. tentukan relasi antara peristiwa

- A dan B
- B dan C
- C dan D
- D dan E.

BAB III PENUTUP

A. KESIMPULAN

Peluang selama ini mungkin dikenal sebagai materi yang kurang jelas konsepnya kini telah menjadi lebih jelas dan gamblang. Kata kuncinya ternyata terletak pada kerangka berpikir/gambaran tentang obyek eksperimennya seperti apa, cara eksperimennya *fair* (adil, dalam arti semua pihak dapat menerima dan tidak ada yang memprotes atas hasil yang kebetulan muncul dalam eksperimen itu) atau *tidak fair* (ada yang memprotes karena merasa diperlakukan tidak adil). Setelah eksperimennya dirasa *fair* barulah dipikirkan hasil-hasil eksperimen yang mungkin seperti apa, masuk akal atau tidak, ruang sampelnya berdistribusi seragam atau tidak, dan terakhir peristiwa yang ditanyakan peluangnya itu memuat berapa titik sampel hingga nilai peluang yang dimaksud dapat ditentukan secara jelas. Penulis dapat berargumen seperti ini setelah mencapai pengalaman mendiklat peluang selama 11 tahun.

Matematika memang bukan pelajaran yang mudah, namun menurut Bruner jika obyek kongkritnya (*enactive*-nya) sudah dikenal siswa, maka yang diperlukan lebih lanjut adalah gambaran tentang kerangka berpikirnya (*econic*-nya). Setelah syarat *enactive* dan *econic*nya jelas barulah mayoritas siswa akan mampu mengadakan abstraksi di alam pikirannya (tahap *symbolic*). Abstraksi yang dimaksud adalah kerangka berpikir yang menghubungkan antara lambang dan gambar yang bersesuaian yang hanya ada di alam pikiran jika sajiannya hanya berupa huruf-huruf, angka-angka, tanda-tanda operasi (+, -, ×, :, ∩, ∪), dan tanda-tanda relasi (<, >, =, ∈, ∉, ⊂, ⊃) saja.

Resep apa sebenarnya yang membuat materi peluang pada kegiatan diklat dapat menarik dan menyenangkan? Jawabnya tidak lain adalah karena sajian materinya diawali secara kontekstual (berangkat dari konteks kehidupan siswa sehari-hari) dan mengikuti teori Bruner, yakni pembelajaran berangkat dari kongkrit (*enactive*), jika kongkritnya sudah dapat dibayangkan dengan jelas, kemudian secara langsung ditindaklanjuti dengan gambar-gambar (semi kongkrit/*econic*), dan barulah diakhiri dengan kegiatan *symbolic* (lambang-lambang) yang sifatnya abstrak. Menurut Bruner, jika pembelajaran berjalan seperti itu, maka siswa akan mampu mengembangkan pengetahuannya jauh melebihi apa yang pernah mereka terima dari gurunya.

B. SARAN

Untuk melakukan pembelajaran peluang secara menyenangkan diberikan saran-saran sebagai berikut.

1. Pikirkan perangkat kerja apa saja yang mendesak dan perlu disiapkan (misal tayangan dalam bentuk power point, atau tayangan yang diulis di kertas manila) untuk dibuat dan segera diterapkan di lapangan.
2. Ceritakan pengalaman selama diklat kepada sesama guru di sekolah, atau rekan-rekan guru di MGMP.
3. Bersemboyanlah “ Apa yang terbaik yang saya miliki dan dapat saya perbuat untuk kemajuan bangsa ini sebagai andil dalam rangka mencerdaskan bangsa”. Tuhan maha mengetahui dan pasti akan memberikan ganjaran yang patut disyukuri berupa sesuatu yang tak terduga di masa depan.

Amin.



DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H – Kolman, B. (1982). *Applied Finite Mathematics (3rd Edition)*. Anton Textbooks, Inc: New York.
- Depdiknas. (2001). *Pola Pelaksanaan Broad Based Education (BBE)*. Buku II. Departemen Pendidikan Nasional: Jakarta.
- (2003). *Kurikulum 2004 (Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika SMP/MI)*. Departemen Pendidikan Nasional: Jakarta.
- (2006). *Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP) Mata Pelajaran Matematika SMP*. Departemen Pendidikan Nasional: Jakarta.
- Harnet, Donald L. (1982). *Statistical Methods (3rd Edition)*. Addison – Wesley Publishing Company, Inc: Philipines.
- Smith, Gary. (1991). *Statistical Reasoning (3rd Edition)*. Allyn and Bacon, A Division of Simon and Schuster Inc: 160 Gould Street, Needham Height, Massachusetts 02194.
- Spiegel, Murary B. (1982). *Probability and Statistics (Theory and Problem)*. Mc Graw – Hill Book Company: Singapore.



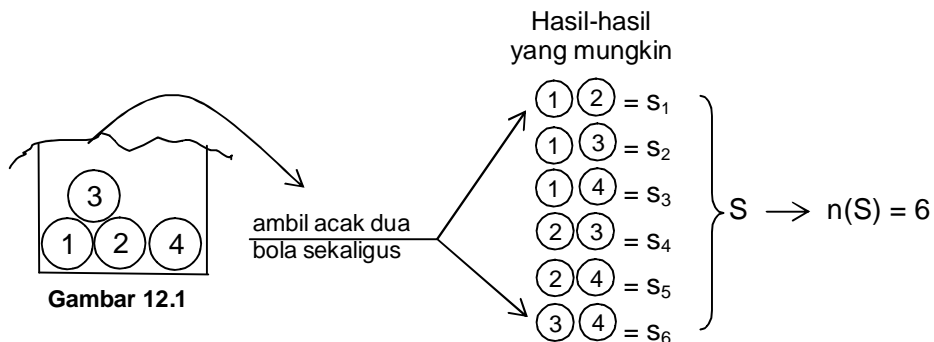
LAMPIRAN

KUNCI JAWABAN SOAL-SOAL LATIHAN

Latihan 1 halaman 27

1. a. bebas b. tak bebas
 c. $A =$ peristiwa munculnya muka dadu 3 atau 4
 $B =$ peristiwa munculnya muka G (gambar) pada mata uang logam
 $C =$ peristiwa munculnya muka dadu maksimal 5 dan muka G pada mata uang logam.
 d. saling bebas jika peristiwa pertama A hanya mensyaratkan munculnya salah satu obyek (dalam hal ini obyek pada dadu saja) dan peristiwa B hanya mensyaratkan munculnya obyek yang lain (dalam hal ini obyek pada mata uang logam saja).
2. a. bebas b. tak bebas
 c. $D =$ peristiwa munculnya muka dadu 3 atau 4
 $E =$ peristiwa munculnya hasil miring pada fines
 $F =$ peristiwa munculnya hasil miring pada fines dan munculnya muka dadu antara 1 dan 6.
 d. berlaku
3. a. lepas b. bebas c. tak bebas
4. a. lepas b. komplemen c. bebas d. tak bebas
5. a. tak bebas b. lepas c. bebas d. tak bebas

Gambaran Pemecahannya



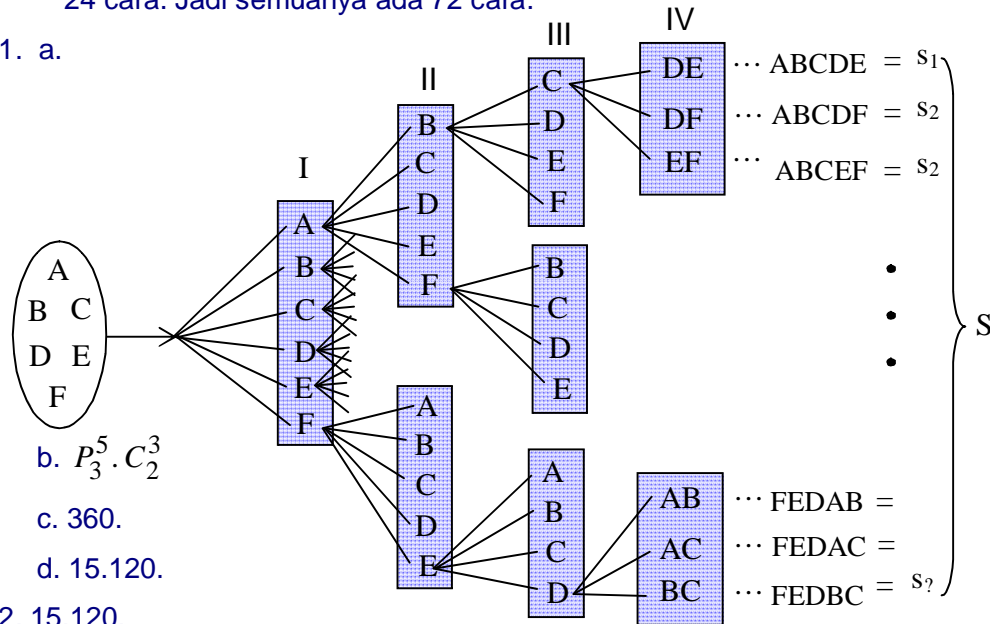
$A = \{s_2, s_6\}$, $B = \{s_3, s_4, s_5, s_6\}$, $C = \{s_1, s_5\}$, teruskan untuk D dan E

6. a. bebas b. komplemen



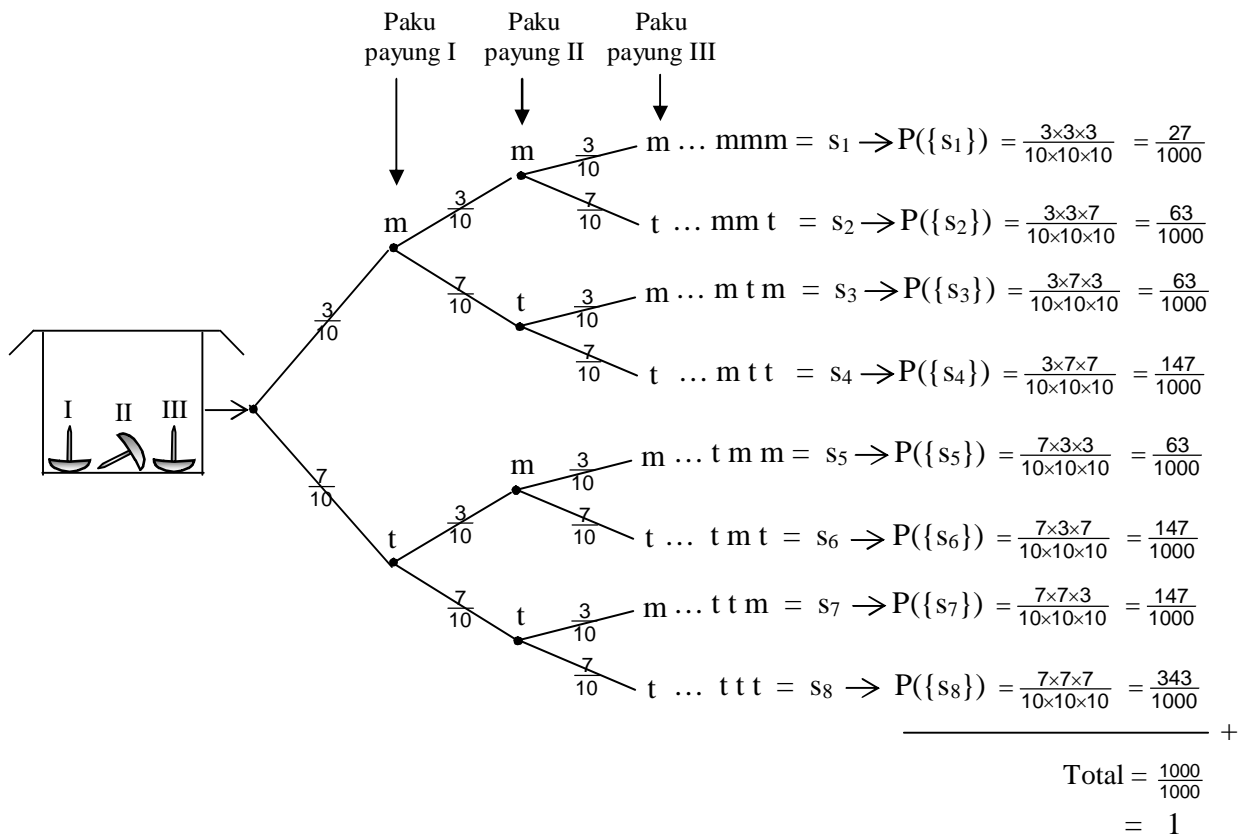
7. a. bebas b. lepas c. komplemen d. tak bebas
 8. a. bebas b. tak bebas c. lepas d. komplemen
 9. 9.880. Kombinasi
 10. a. $5 \times 4 \times 3 = 60$, rumus permutasi P_3^5
 b. Ada 3 tipe dari bilangan 3 angka. Tipe I ketiga angkanya tidak nol = 24 cara,,
 tipe II (tidak nol, nol, tidak nol) = 24 cara, dan tipe III (tidak nol, tidak nol, nol) =
 24 cara. Jadi semuanya ada 72 cara.

11. a.



Latihan 2 halaman 32

1. a. 0,7 b. 0 c. 0,8
 2. a. 0,5 b. 0,7 c. 0,9
 3. a. 0,2
 4. a. 0,70 b. 0,90 c. 0,35
 5. a. 0,5 b. 0,9 c. 0,4 d. 0 e. 0,2 f. 0,7
 6. -
 7. a. 0,3 b. 0,6
 8. Diagram pohon yang bersesuaian dengan eksperimen mengundi 3 buah paku payung sekaligus adalah seperti berikut



Dengan melihat diagram tersebut maka yang dimaksud dengan peristiwa

$A = \{s_1\}$ sehingga $P(A) = P(\{s_1\}) = \frac{27}{1000}$

$B = \{s_4, s_6, s_7\} \rightarrow P(B) = P(\{s_4\}) + P(\{s_6\}) + P(\{s_7\}) = \frac{441}{1000}$

Dengan cara yang sama akan kita peroleh peristiwa-peristiwa lainnya yaitu C, D, dan E berikut peluang munculnya masing-masing titik sampel.

Kunci Jawaban

a. 8 b. tidak

c. $P(A) = \frac{27}{1000}$, $P(B) = \frac{441}{1000}$, $P(C) = \frac{189}{1000}$, $P(D) = \frac{343}{1000}$, dan $P(E) = \frac{216}{1000}$, dan

$P(F) = \frac{370}{1000}$

d. lepas, lepas, tak bebas.

9. a. 8 b. ya c. $\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{1}{4}$

d. lepas, tak bebas, tak bebas, bebas



10. a. 216 b. ya c. $\frac{1}{216}, \frac{215}{216}, \frac{16}{216}, \frac{215}{216}, \frac{6}{216}$

d. komplemen, tak bebas, tak bebas, tak bebas.

Petunjuk

Untuk menentukan peluang masing-masing peristiwa, pertama-tama kita perlu mengidentifikasi berapa titik sampel anggota dari masing-masing peristiwa. Untuk maksud tersebut penalaran yang kita lakukan adalah sebagai berikut. Muka 6 yang kita perhatikan kita anggap sebagai peristiwa sukses dan peristiwa yang gagal adalah munculnya muka bukan 6 (kita lambangkan dengan \square). Sehingga jika dari ketiga dadu itu tidak ada satupun yang memunculkan muka 6, maka kita sebut dengan 0 sukses, selanjutnya jika hanya ada satu dadu yang memunculkan muka 6 maka kita sebut sebagai 1 sukses, demikianlah seterusnya. Perhatikan bahwa sukses sama dengan anggota $\{6\}$, sedangkan \square = gagal adalah selain 6 yaitu anggota dari $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, sehingga $n(\{6\}) = 1$ dan $n(\square) = 5$. Dengan begitu maka pola yang ditunjukkan oleh 0 sukses, 1 sukses, dan seterusnya hingga 3 sukses adalah seperti berikut.

Peristiwa	Pola yang mungkin	Banyaknya titik sampel
0 sukses	$\square \square \square$ (1 pola)	$1 \times 5 \times 5 \times 5 = ?$
1 sukses	$6 \square \square$ (3 pola) $\square 6 \square$ $\square \square 6$	$3 \times 1 \times 5 \times 5 = ?$
2 sukses	$6 6 \square$ (3 pola) $6 \square 6$ $\square 6 6$	$3 \times 1 \times 1 \times 5 = ?$
3 sukses	$6 6 6$ (1 pola)	$1 \times 1 \times 1 \times 1 = ?$

Selidiki apakah jumlahnya sama dengan banyaknya macam titik sampel yang mungkin terjadi dalam eksperimen itu?