SMP

PROGRAM BERMUTU

Better Education Through Reformed Managemant and Universal Teacher Upgrading

PEMBELAJARAN KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH DALAM KAJIAN ALJABAR DI SMP

KEMENTERIAN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

PPPPTK MATEMATIKA YOGYAKARTA

PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

Modul Matematika SMP Program BERMUTU

PEMBELAJARAN KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH DALAM KAJIAN ALJABAR DI SMP

Penulis:
Atmini Dhurori
Markaban

Penilai:
Muchtar Abdul Karim
Baharuddin

Editor:
Edi Prayitno

Layouter:
Ratna Herawati

Kementerian Pendidikan Nasional
Direktorat Jenderal Peningkatan Mutu Pendidik dan Tenaga Kependidikan
Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika
2010

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas karunia, petunjuk, dan bimbingan-Nya sehingga Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika dapat mewujudkan modul pengelolaan pembelajaran matematika untuk guru SD dan SMP. Pada penyusunan modul untuk tahun 2010 telah tersusun sebanyak dua puluh judul, terdiri dari sepuluh judul untuk guru SD dan sepuluh judul lainnya untuk guru SMP.

Modul-modul ini disusun dalam rangka memfasilitasi peningkatan kompetensi guru SD dan SMP di forum Kelompok Kerja Guru (KKG) dan Musyawarah Guru Mata Pelajaran (MGMP), khususnya KKG dan MGMP yang dikelola melalui program *Better Education through Reformed Management and Universal Teacher Upgrading* (BERMUTU). Modul yang telah tersusun, selain didistribusikan dalam jumlah terbatas ke KKG dan MGMP, juga dapat diakses melalui *website* PPPPTK Matematika dengan alamat www.p4tkmatematika.com.

Penyusunan modul diawali dengan kegiatan *workshop* yang menghasilkan kesepakatan tentang daftar judul modul, sistematika penulisan modul, dan garis besar (*outline*) isi tiap judul modul. Selanjutnya secara berturut-turut dilakukan kegiatan penulisan, penilaian (telaah), *editing*, dan *layouting* modul.

Penyusunan modul melibatkan beberapa unsur, meliputi Widyaiswara dan staf PPPPTK Matematika, Dosen Lembaga Pendidikan Tenaga Kependidikan (LPTK), Widyaiswara Lembaga Penjaminan Mutu Pendidikan (LPMP), Guru SD dan Guru Matematika SMP dari berbagai propinsi. Untuk itu, kami sampaikan penghargaan dan terima kasih yang tak terhingga kepada semua pihak yang telah membantu terwujudnya penyusunan modul tersebut.

Mudah-mudahan dua puluh modul tersebut dapat bermanfaat optimal dalam peningkatan kompetensi para guru SD dan SMP dalam mengelola pembelajaran matematika, sehingga dapat meningkatkan kualitas dan kuantitas hasil belajar matematika siswa SD dan SMP di seluruh Indonesia.

Kami sangat mengharapkan masukan dari para pembaca untuk menyempurnakan modul-modul ini, demi peningkatan mutu layanan kita dalam upaya peningkatan mutu pendidikan matematika di Indonesia.

Akhirnya, kami ucapkan selamat membaca dan menggunakan modul ini dalam mengelola pembelajaran matematika di sekolah.

Yogyakarta, Maret 2010
Kepala PPPPTK Matematika

Herry Sukarman, M.Sc.Ed.
NIP.195006081975031002

DAFTAR ISI

\

PENDAHULUAN

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Peraturan Pemerintah Nomor 19 Tahun 2005 tentang Standar Nasional Pendidikan (SNP) adalah kriteria minimal tentang sistem pendidikan di seluruh wilayah hukum Negara Kesatuan Republik Indonesia. Standar proses adalah standar nasional pendidikan yang berkaitan dengan pelaksanaan pembelajaran pada satu satuan pendidikan untuk mencapai standar kompetensi lulusan. Proses pembelajaran pada satuan pendidikan diselenggarakan secara interaktif, inspiratif, menyenangkan, menantang, memotivasi peserta didik untuk berpartisipasi aktif, serta memberikan ruang yang cukup bagi prakarsa, kreativitas, dan kemandirian sesuai dengan bakat, minat, dan perkembangan fisik serta psikologis peserta didik. Pemecahan masalah merupakan hal yang penting dalam pembelajaran matematika karena hampir di semua Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar, akan dijumpai penegasan diperlukannya kemampuan pemecahan masalah. Hal ini ditegaskan pada tujuan pembelajaran matematika yang ke tiga yaitu: mata pelajaran matematika bertujuan agar peserta didik memiliki kemampuan memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh (Depdiknas, 2006: 1). Dalam rambu-rambu pelaksanaan kurikulum mata pelajaran matematika secara tegas disebutkan bahwa dalam pembelajaran matematika, pendekatan pemecahan masalah merupakan fokus dalam pembelajaran matematika, yang mencakup masalah tertutup, mempunyai solusi tunggal, terbuka atau masalah dengan berbagai cara penyelesaian.. Untuk meningkatkan kemampuan memecahkan masalah perlu dikembangkan keterampilan memahami masalah, membuat model matematika, menyelesaikan masalah, dan menafsirkan solusinya (Depdiknas, 2006: 4). Dari uraian di atas jelas bahwa pemecahan masalah adalah sangat penting di dalam pembelajaran matematika, khususnya masalah aljabar. Di samping itu masih banyaknya guru dalam menyampaikan materi pelajaran matematika yang terkait aljabar hanya menjelaskan tanpa melibatkan siswa, kemudian memberikan contoh soal dan pekerjaan rumah sehingga model pembelajarannya masih konvensional atau sering dikatakan bersifat "*teacher-centered"*. Dengan demikian untuk melibatkan siswa aktif dalam pembelajaran matematika yang sesuai dengan tujuan pelajaran matematika perlu disusun suatu modul yang membahas bagaimana agar siswa mampu memecahkan masalah. Dalam modul ini dibahas materi aljabar, dengan judul pembelajaran kemampuan memecahkan masalah dalam kajian aljabar di SMP. Modul ini merupakan kelanjutan dari modul BERMUTU yang berjudul " Kapita Selekta Pembelajaran Aljabar di Kelas VII SMP" dan "Kapita Selekta Pembelajaran Aljabar di Kelas VIII SMP."

B. Tujuan

Penulisan modul yang berjudul Pembelajaran Kemampuan Memecahkan Masalah dalam Kajian Aljabar di SMP ini mempunyai beberapa tujuan, diantaranya: memfasilitasi MGMP Matematika SMP dalam mengelola kegiatan agar lebih profesional di bidangnya, meningkatkan kompetensi guru matematika SMP dalam menyelenggarakan proses pembelajaran di sekolah khususnya materi ajar aljabar, dan menambah wawasan bagi guru dalam menyusun rencana pelaksanaan pembelajaran yang berorientasi pemecahan masalah.

C. Peta Kompetensi

Standar kompetensi guru dikembangkan secara utuh dari empat kompetensi utama, yaitu kompetensi pedagogik, kepribadian, sosial, dan profesional. Keempat kompetensi tersebut terintegrasi dalam kinerja guru. Standar kompetensi yang diharapkan dalam modul ini seperti tertuang dalam tabel berikut.

Tabel 1. Peta Kompetensi

No.	KOMPETENSI INTI GURU	KOMPETENSI GURU MATA PELAJARAN
Kompetensi Pedagogik		
1.	Menguasai teori belajar dan prinsip-prinsip pembelajaran yang mendidik.	Menerapkan berbagai pendekatan, strategi, metode, dan teknik pembelajaran yang mendidik secara kreatif dalam mata pelajaran yang diampu.

Kompetensi Profesional		
1.	Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu	Menggunakan konsep-konsep aljabar.
2	Menguasai standar kompetensi dan kompetensi dasar mata pelajaran yang diampu.	Memahami standar kompetensi mata pelajaran yang diampu. Memahami kompetensi dasar mata pelajaran yang diampu. Memahami tujuan pembelajaran yang diampu.
3	Mengembangkan materi pembelajaran yang diampu secara kreatif.	Memilih materi pembelajaran yang diampu sesuai dengan tingkat perkembangan peserta didik Mengolah materi pelajaran yang diampu secara kreatif sesuai dengan tingkat perkembangan peserta didik.

D. Ruang Lingkup

Penulisan modul ini dimaksudkan untuk memberikan gambaran bagi guru matematika SMP tentang pembelajaran kemampuan memecahkan masalah sesuai tujuan mempelajari matematika yang ada pada lampiran Permendiknas No. 22 Tahun 2006 tentang Standar Isi yang menyangkut standar kompetensi dalam menyelenggarakan proses pembelajaran khususnya materi aljabar. Materi yang akan dibahas tertuang dalam tiga modul, yaitu

Modul 1 : Pembelajaran Pemecahan Masalah Terkait Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

Modul 2 : Pembelajaran Pemecahan Masalah Terkait Relasi, Fungsi dan Persamaan Garis Lurus

Modul 3 : Pembelajaran Pemecahan Masalah Terkait Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

E. Saran Cara Penggunaan Modul di MGMP/ Sekolah

Dalam menggunakan modul ini, sebaiknya sesama anggota MGMP perlu berdiskusi terlebih dulu mengenai permasalahan pembelajaran pemecahan masalah yang dijumpai di sekolah sehingga anggota MGMP mengetahui permasalahan secara umum. Untuk mengetahui bagaimana solusi dari permasalahan yang ada, terlebih dahulu memahami isi modul dengan memulai dari modul 1. Bila belum memahami ulangi lagi pemahaman modul 1, barulah dapat beralih ke modul-modul berikutnya. Untuk mencari alternatif pemecahan diskusikan dengan anggota lain, bagaimana menurut anggota dan naskah ini sebagai wawasan pemecahannya.

Penggunaan modul ini di MGMP dapat merupakan salah satu bahasan dalam kegiatan *in-service training*, sebagai bahan bahasan dalam kegiatan MGMP diluar kegiatan 16 pertemuan, sebagai rujukan dalam menyelesaikan tugas mandiri pada kegiatan rurin 16 pertemuan, sebagai referensi belajar secara individu atau dengan teman sejawat baik yang ikut program BERMUTU maupun tidak. Waktu yang diperlukan untuk mempelajari modul ini antara 8 sampai 10 jam pelajaran.

Bila timbul permasalahan yang perlu dibicarakan lebih lanjut dengan penulis atau dengan PPPPTK Matematika, silahkan menghubungi alamat email PPPPTK Matematika: **p4tkmatematika@yahoo.com** atau alamat surat: PPPPTK Matematika, Kotak Pos 31 Yk-Bs, Jalan Kaliurang Km 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, Yogyakarta, 55281, Telpon (0274) 885752, 881717, 885725. Faks. (0274) 885752.

MODUL 1
PEMBELAJARAN PEMECAHAN MASALAH TERKAIT PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINEAR SATU VARIABEL

MODUL 1
PEMBELAJARAN PEMECAHAN MASALAH TERKAIT PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINEAR SATU VARIABEL

Pada modul ini Anda akan mempelajari tentang pembelajaran pemecahan masalah yang terkait dengan persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel. Kemampuan memecahkan masalah menjadi salah satu tujuan utama dari belajar matematika di antara tujuan yang lain. Mengapa demikian? Karena orang yang trampil memecahkan masalah akan mampu berpacu dengan kebutuhan hidupnya, menjadi pekerja yang lebih produktif, dan memahami isu-isu kompleks yang berkaitan dengan masyarakat global. Hal ini juga di semua Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar dalam lampiran Permendiknas No 22 Tahun 2006 tentang Standar Isi yang menyatakan adanya kemampuan memecahkan masalah. Apakah siswa Anda sudah dilatih kemampuannya dalam memecahkan masalah yang terkait dengan persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel?

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan mampu memahami pembelajaran pemecahan masalah, memahami bentuk akar, dan mampu memecahkan masalah persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel serta menggunakan strategi pembelajaran kemampuan memecahkan masalah yang terkait dengan materi persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel.

Untuk membantu Anda agar dapat menguasai kemampuan tersebutdengan baik, pembahasan ini dikemas dalam 3 (tiga) kegiatan belajar (KB) sebagai berikut:

KB-1: Memahami Pembelajaran Pemecahan Masalah

KB-2: Memahami Bentuk Aljabar, Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

KB-3: Menggunakan Strategi Pemecahan Masalah dalam Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

Cermati uraian pada masing-masing kegiatan belajar dan kemudian selesaikan tugas sebagai latihan pada akhir Modul 1 ini. Bila Anda masih ragu terhadap penyelesaian tugas yang telah Anda kerjakan, atau ada hal lain yang perlu diklarifikasi, berdiskusilah dengan teman sejawat atau dengan fasilitator Anda. Pada akhir proses belajar Modul 1 ini Anda perlu melakukan refleksi diri terkait penguasaan Anda terhadap bahasan dalam modul ini.

Dalam mempelajari Modul 1 ini hendaknya Anda mencermati juga naskah modul Kapita Selekta Pembelajaran Aljabar di Kelas VII SMP. Di samping itu Anda disarankan agar menggunakan buku-buku teks matematika yang ada di sekitar Anda sebagai bahan referensi.

A. Kegiatan Belajar 1: Memahami Pembelajaran Pemecahan Masalah

Pernahkah Anda membaca tujuan Mata Pelajaran Matematika di SMP? Tujuan tersebut dimuat dalam Standar Isi Mata Pelajaran Matematika SMP pada Permendiknas Nomor 22 Tahun 2006 tentang Standar Isi (SI). Dalam SI tersebut dinyatakan lima tujuan mata pelajaran matematika. Salah satu dari lima tujuan tersebut adalah agar siswa mampu memecahkan masalah matematika yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh. Oleh karena itu setiap guru SMP yang mengelola pembelajaran matematika perlu memahami maksud dari memecahkan masalah matematika. Kecuali itu setiap guru juga harus melatih ketrampilannya dalam membantu siswa belajar memecahkan masalah matematika. Apakah Anda telah melakukan pembelajaran di kelas dengan pendekatan pemecahan masalah?

Banyak ahli pendidikan matematika menyatakan bahwa masalah merupakan pertanyaan yang harus dijawab atau direspon, namun mereka juga menyatakan bahwa tidak semua pertanyaan otomatis akan menjadi masalah. Suatu pertanyaan akan menjadi masalah hanya jika pertanyaan itu menunjukkan adanya suatu tantangan (*challenge)* yang tidak dapat dipecahkan oleh suatu prosedur rutin *(routine procedure*) yang sudah diketahui oleh pemecah masalah, seperti yang dinyatakan Cooney, et.al. (1975:245) berikut: ”.... *for a question to be a problem, it must present a challenge that cannot be resolved by some routine procedure known to the student.”*

Menurut Polya (1973), ada dua macam masalah yaitu (1) menemukan (bilangan, lukisan, dan sebagainya), dan (2) membuktikan. Untuk memecahkan kedua masalah tersebut strategi pemecahan dapat berbeda, tergantung pada jenis atau substansi masalahnya. Masalah ”menemukan” kadang-kadang bersifat terbuka atau investigatif, maka yang perlu dimiliki pemecah masalah adalah kreativitas melalui latihan.

Dalam memecahkan masalah, Polya menyarankan 4 langkah utama sebagai berikut.

1. Memahami masalah
    a. Apa yang diketahui dan yang ditanyakan?
    b. Apakah datanya cukup untuk mememecahkan masalah itu? Atau datanya tidak cukup sehingga perlu ‘pertolongan’? Atau bahkan datanya berlebih sehingga harus ada yang diabaikan?
    c. Jika perlu dibuat diagram yang menggambarkan situasinya.
    d. Pisah-pisahkan syarat-syaratnya jika ada. Dapatkah masalahnya ditulis kembali dengan lebih sederhana sesuai yang diperoleh di atas?
2. Menyusun rencana memecahkan masalah
    a. Apa yang harus dilakukan? Pernahkah Anda menghadapi masalah tersebut?
    b. Tahukah Anda masalah lain yang terkait dengan masalah itu? Adakah teorema yang bermanfaat untuk digunakan?
    c. Jika Anda pernah menghadapi masalah serupa, dapatkah strategi atau cara memecahkannya digunakan di sini?
    d. Dapatkah masalahnya dinyatakan kembali dengan lebih sederhana dan jelas?
    e. Dapatkah Anda menarik sesuatu gagasan dari data yang tersedia?
    f. Apakah semua data telah Anda gunakan? Apakah semua syarat telah Anda gunakan?

3. Melaksanakan rencana
   a. Melaksanakan rencana pemecahan masalah dengan setiap kali mengecek kebenaran di setiap langkah.
   b. Dapatkah Anda peroleh bahwa setiap langkah telah benar?
   c. Dapatkah Anda buktikan bahwa setiap langkah sungguh benar?
4. Menguji kembali atau verifikasi
   a. Periksalah atau ujilah hasilnya. Periksa juga argumennya.
   b. Apakah hasilnya berbeda? Apakah secara sepintas dapat dilihat?

Contoh 1

Perhatikan soal lomba MIPA SLTP Tingkat Nasional Tahun 2003 berikut.

Untuk menarik minat pelanggannya, manajer suatu restoran makanan cepat saji memberikan kupon berhadiah kepada setiap orang yang membeli makanan di restoran tersebut dengan nilai lebih dari Rp25.000,00. Di balik setiap kupon tersebut, tertera salah satu dari bilangan-bilangan berikut: 9, 12, 42, 57, 69, 21, 15, 75, 24, atau 81. Pembeli yang berhasil mengumpulkan beberapa kupon dengan jumlah bilangan-bilangan di balik kupon tersebut sama dengan 100 akan diberi hadiah TV 21 inci. Kalau pemilik restoran tersebut menyediakan sebanyak 10 buah TV 21 inci, berapa banyak TV yang harus diserahkan kepada pelanggannya?

Untuk menyelesaikan masalah di atas dapat dilakukan langkah-langkah, yaitu

1. Memahami masalahnya

   Apa yang diketahui dan yang ditanyakan, sehingga masalah yang terdiri dari beberapa kalimat dapat diubah menjadi inti persoalan yaitu.

   Diketahui sepuluh bilangan, yaitu: 9, 12, 15, 21, 24, 42, 57, 69, 75, dan 81

   Ditanyakan gabungan satu atau beberapa bilangan di atas yang jumlahnya 100
2. Menyusun rencana memecahkan masalah

   Misalnya. Ani memperoleh sebuah kupon, memiliki bilangan yang tertera pada kupon tersebut adalah 81. Bila ia ingin memperoleh jumlah bilangan-bilangan dari kupon yang ia miliki menjadi 100, maka orang tersebut harus mendapat bilangan berapa yang tertera pada kupon lain? Apa yang harus dilakukan? Dengan cara mencoba-coba memasukkan ke dalam tabel ataukah dengan cara lain berfikir logis dengan menggunakan sifat-sifat bilangan?

3. Melaksanakan rencana

   Berdasar rencana di atas, dapat dilaksanakan pengisian tabel untuk mengisi bilangan yang jumlahnya 100 dapat disajikan sebagai berikut.

Tabel 2. Rencana Pengisian

Bil.1	**Bil.2**	**Bil.3**	**Bil.4**	**Bil. 5**	**Bil. 6**	**Bil.7**	**dst**	**Ket**
75	25 (tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 25)							TM
69	31 (tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 31)							TM
57	43 tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 43)							TM
42	42	16 (tidak ada gabungan bil. tersisa yang jumlahnya 16)						TM
42	58 (tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya 58)							TM
24	24	24	28 (tidak ada bil. tersisa yang jumlahnya 28)					TM
24	24	52 (tidak ada gabungan bil. tersisa yang jumlahnya 52)						TM
21	21	21	21	16 tidak ada bil.tersisa yang jumlahnya 16				TM
21	21	21	37 (tidak ada bil. tersisa yang jumlahnya 37)					TM
21	21	58 (tidak ada gabungan bil. tersisa yang jumlahnya 58)						TM
21	79 (tidak ada gabungan bil. tersisa yang jumlahnya 79)							TM
Bilangan 15 atau kelipatannya dan tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya merupakan sisa dari kelipatan 15 dengan 100								TM
Bilangan 12 atau kelipatannya dan tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya merupakan sisa dari kelipatan 12 dengan 100								TM
Bilangan 9 atau kelipatannya dan tidak ada gabungan bilangan tersisa yang jumlahnya merupakan sisa dari kelipatan 9 dengan 100								TM

TM : Tidak Mungkin

4. Menguji kembali atau verifikasi

   Dari tabel di atas, dapat disimpulkan bahwa tidak mungkin ada gabungan satu atau beberapa nilai berikut: 9, 12, 15, 21, 24, 42, 57, 69, 75, dan 81; yang menghasilkan nilai 100. Jadi pengusaha makanan cepat saji tersebut tidak akan mungkin memberikan TV 12 inci kepada pelanggannya.

Untuk memecahkan masalah, ada beberapa cara, langkah, tata kerja, pemikiran, penalaran, bahkan "akal" yang perlu digunakan dalam merencanakan tindakan pemecahan masalah. Cara yang biasa digunakan dan sering berhasil pada proses pemecahan masalah, yang disebut dengan strategi pemecahan masalah.

Adapun beberapa strategi yang sering digunakan menurut Polya (1973) dan Pasmep (1989) diantaranya adalah sebagai berikut.

1. Mencoba-coba

   Biasanya digunakan untuk mendapatkan gambaran umum pemecahan masalahnya dengan mencoba-coba (*trial and error*). Proses mencoba-coba ini tidak akan selalu berhasil, adakalanya gagal. Karenanya, proses mencoba-coba dibutuhkan analisis yang tajam.
2. Membuat diagram

   Strategi ini berkait dengan pembuatan sketsa atau gambar untuk mempermudah memahami masalahnya dan mempermudah mendapatkan gambaran umum penyelesaiannya.
3. Mencobakan pada soal yang lebih sederhana

   Strategi ini berkait dengan penggunaan contoh-contoh khusus yang lebih mudah dan lebih sederhana, sehingga gambaran umum penyelesaian masalahnya akan lebih mudah dianalisis dan akan lebih mudah ditemukan.
4. Membuat tabel

   Strategi ini digunakan untuk membantu menganalisis permasalahan atau jalan pikiran kita, sehingga segala sesuatunya tidak hanya dibayangkan oleh otak yang kemampuannya sangat terbatas.
5. Menemukan pola

   Strategi ini berkait dengan pencarian keteraturan-keteraturan. Dengan keteraturan yang sudah didapatkan akan lebih memudahkan kita menemukan penyelesaian masalahnya.
6. Memecah tujuan

   Strategi ini berkait dengan pemecahan tujuan umum yang hendak kita capai menjadi dua atau lebih tujuan bagian. Tujuan bagian ini dapat digunakan sebagai batu loncatan untuk mencapai tujuan yang sesungguhnya.

7. Memperhitungkan setiap kemungkinan

   Strategi ini berkait dengan penggunaan aturan-aturan yang dibuat sendiri oleh pemecah masalah selama proses pemecahan masalah berlangsung, sehingga dapat dipastikan tidak akan ada satupun alternatif yang terabaikan.

8. Berpikir logis

   Strategi ini berkaitan dengan penggunaan penalaran ataupun penarikan kesimpulan yang sah atau valid dari berbagai informasi atau data yang ada.

9. Bergerak dari belakang

   Dengan strategi ini, kita memulai dari proses pemecahan masalahnya dari yang diinginkan atau yang ditanyakan lalu menyesuaikan dengan yang diketahui.

10. Mengabaikan hal yang tidak mungkin

    Dari berbagai alternatif yang ada, alternatif yang sudah jelas tidak mungkin agar diabaikan sehingga perhatian dapat tercurah sepenuhnya untuk hal-hal yang tersisa dan masih mungkin saja.

Dari beberapa strategi di atas, tidak semuanya disarankan oleh para pakar dalam pemecahan masalah harus muncul sebagai strategi. Beberapa yang harus dilakukan adalah memahami masalahnya secara teliti, membedakan mana yang merupakan hal yang diketahui dan mana yang merupakan masalah yang harus dipecahkan. Seseorang akan dengan lebih mudah memecahkan masalah hanya jika sering menghadapi masalah yang beragam dan mampu memecahkan permasalahannya. Karena itu bekal utama yang diperlukan dalam memecahkan masalah adalah keuletan yang dilandasi pengetahuan dasar yang luas.

Strategi pemecahan masalah tersebut perlu dilatihkan kepada siswa dalam pembelajaran, karena dapat digunakan atau dimanfaatkan ketika mereka mempelajari matematika atau mata pelajaran lain. Adapun cara meningkatkan kemampuan memecahkan masalah matematika dapat Anda lakukan dalam pembelajaran dengan beberapa cara antara lain adalah sebagai berikut.

1. Memulai dari masalah yang sederhana.
2. Memberikan masalah berupa open-ended problem dan investigasi.
3. Menggunakan sebanyak mungkin strategi pemecahan masalah yang relevan.

4. Mencari kesesuaian antara kemampuan berpikir dan strategi pemecahan masalah
5. Memberikan kesempatan yang cukup untuk memformulasikan dan memecahkan masalah, kemudian mencoba untuk menyelesaikan dengan cara lain
6. Menggunakan pemodelan untuk menjelaskan dan menganalisis proses berpikir
7. Memberikan kesempatan untuk merefleksikan dan mengklarifikasi serta melihat kembali kemungkinan lain, mengatakan dengan bahasa sendiri dan mencoba untuk mencari strategi pemecahan masalah yang lebih baik
8. Memperbolehkan untuk berekspresi dengan maksud untuk memperkuat konseptualisasi dan pengembangan dari kebiasaan berpikir kritis

B. Kegiatan Belajar 2: Memahami Bentuk Aljabar, Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

Pernahkah Anda membaca cara menyusun model matematika dalam memecahkan masalah verbal? Cara tersebut dimuat dalam modul Kapita Selekta Pembelajaran Aljabar di Kelas VII SMP halaman 29. Dalam modul tersebut telah diberikan beberapa contoh untuk menyusun kalimat terbuka yang berupa persamaan dan pertidaksaman dari suatu ungkapan. Oleh karena itu setiap guru SMP yang mengajar Aljabar perlu memahami hal tersebut.

Dalam kehidupan sehari-hari, Anda dapat menggunakan bentuk aljabar untuk mempermudah memecahkan masalah, baik yang menyangkut persamaan maupun pertidaksamaan, misalnya contoh masalah sederhana di sekitar kita: “Ketika kita melihat tulisan maksimum 60 km di tepi jalan.” Apa arti tulisan maksimum 60 km di tepi jalan tersebut? Jika kita memisalkan kecepatan kendaraan di jalan itu v km/jam, bagaimana bentuk aljabar untuk menyatakan kecepatan kendaraan di jalan itu?

Anda telah memahami bahwa semua angka dan huruf yang menyatakan suatu ekspresi, dan dikenal sebagai suatu bentuk aljabar. Dua bentuk aljabar yang memuat variabel dikatakan ekivalen (dilambangkan dengan”⇔”), jika salah disubstitusikan dengan suatu bilangan pada kedua bentuk aljabar tersebut menghasilkan nilai yang sama, misalnya: $3a + 5a$ dengan $8a$ adalah ekivalen karena untuk setiap $a \in$ D (D adalah domain) manapun, hasil substitusi kedua bentuk aljabar adalah sama. Bentuk aljabar dari masalah yang sederhana tentang tulisan maksimum 60 km di tepi jalan di atas mengandung maksud bahwa kecepatan kendaraannya paling tinggi 60 km. Dalam bentuk aljabar ditulis $v \leq 60$. Setelah siswa memahami bentuk aljabar, baik yang berupa persamaan maupun pertidaksamaan linear satu variabel, barulah Anda menyimpulkan bersama siswa tentang konsep dan sifat-sifat persamaan yang akan digunakan untuk menyelesaikan himpunan penyelesaian persamaan linear satu variabel. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut.

1. Persamaan Linear Dengan Satu Variabel

Bentuk umum persamaan linear dengan satu variabel adalah $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$. Persamaan tersebut juga dapat dinyatakan dengan $ax = b$ dengan $a = a_1 - a_2$ dan $b = b_2 - b_1$ serta $a \neq 0$.

Langkah dasar untuk menyelesaikan persamaan linear satu variabel ialah "memisahkan suku yang memuat variabel di ruas kiri dan yang memuat konstanta di ruas kanan." dan menggunakan sifat dasar bahwa: suatu persamaan akan ekivalen atau tidak berubah himpunan penyelesaiannya jika kedua ruas persamaan:

a. ditambah dengan bilangan yang sama,
b. dikurangi dengan bilangan yang sama,
c. dikalikan dengan bilangan yang sama, dan
d. dibagi dengan bilangan yang sama, asal pembaginya bukan 0.

Contoh 2

Tentukan himpunan penyelesaian $-x - 5 = 2x + 7$

Jawab: $-x - 5 = 2x + 7$

$\Leftrightarrow \quad -x - 5 - 2x = 2x + 7 - 2x$ *kedua ruas ditambah –2x*

$\Leftrightarrow$	$-3x-5 = 7$	
$\Leftrightarrow$	$-3x-5+5 = 7+5$	*kedua ruas ditambah 5*
$\Leftrightarrow$	$-3x = 12$	
$\Leftrightarrow$	$x = -4$	*kedua ruas dikalikan* $-\frac{1}{3}$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x = -4\}$

2. Pertidaksamaan linear dengan satu variabel

Bentuk umum pertidaksamaan linear dengan satu variabel adalah:

$$ax + c_1 \; \boxed{\ldots} \; bx + c_2, \text{ dengan } \boxed{\ldots} \text{ satu di antara } <, \leq, >, \text{ atau } \geq .$$

Langkah dasar penyelesaiannya ialah "memisahkan suku yang memuat variabel di ruas kiri dan konstanta di ruas kanan" dan menggunakan sifat pertidaksamaan yaitu:

a. pertidaksamaan tidak berubah tandanya jika kedua ruas ditambah atau dikurangi dengan bilangan yang sama,
b. pertidaksamaan tidak berubah tandanya jika kedua ruas dikalikan dengan bilangan positif yang sama, dan
c. pertidaksamaan berbalik tandanya jika kedua ruas dikalikan dengan bilangan negatif yang sama.

Jika dalam suatu persoalan pertidaksamaan diharuskan memenuhi dua syarat (atau lebih) yang syaratnya menggunakan kata "dan," maka harus ditentukan irisan himpunan penyelesaiannya, sedangkan apabila syaratnya menggunakan kata "atau," maka harus ditentukan gabungan himpunan penyelesaiannya.

Contoh 3

Tentukan himpunan penyelesaian $-x-5 < 2x+7$

Jawab:

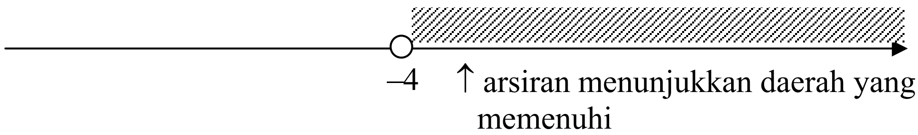
	$-x-5 < 2x+7$	
$\Leftrightarrow$	$-x-5-2x < 2x+7-2x$	*kedua ruas ditambah* $-2x$
$\Leftrightarrow$	$-3x-5 < 7$	
$\Leftrightarrow$	$-3x-5+5 < 7+5$	*kedua ruas ditambah 5*

$\Leftrightarrow \qquad -3x < 12$

$\Leftrightarrow \qquad x > -4 \qquad$ *kedua ruas dikalikan* $-\frac{1}{3}$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x > -4\}$

Grafik himpunan penyelesaiannya:



Tentukan himpunan penyelesaian $2x - 1 < x + 1 \le 3 - x$

Jawab: Ingat: $a < b < c$ sama artinya dengan $a < b$ dan $b < c$

$2x - 1 < x + 1 \le 3 - x$ mempunyai arti bahwa:

$\Leftrightarrow 2x - 1 < x + 1$ dan $x + 1 \le 3 - x$

$\Leftrightarrow 2x - 1 - x + 1 < x + 1 - x + 1$ dan $x + 1 + x - 1 \le 3 - x + x - 1$

$\Leftrightarrow x < 2$ dan $2x \le 2$

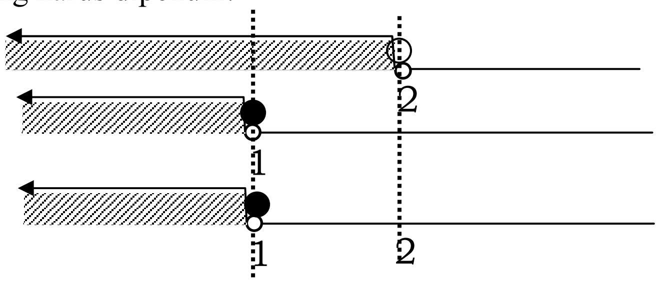
$\Leftrightarrow x < 2$ dan $x \le 1$

Jadi, ada dua syarat bersama yang harus dipenuhi:

$x < 2$, grafiknya

dan $x \le 1$, grafiknya:

irisannya: $x \le 1$



Karena harus memenuhi keduanya, maka yang memenuhi bersama adalah $x \le 1$

Jadi, himpunan penyelesaian $2x - 1 < x + 1 \le 3 - x$ adalah $\{x \mid x \le 1\}$

Untuk menyelesaikan masalah verbal secara umum menurut pendapat Krismanto (2007:8) dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

a. Pilihlah (satu atau jika perlu lebih) variabel. Variabel ini biasanya adalah sesuatu yang ditanyakan, atau dapat juga yang terkait langsung dengan yang ditanyakan.
b. Nyatakan setiap bilangan yang ada dalam masalah verbal itu dengan variabel terpilih, atau jika tidak, tuliskan bilangan itu sebagai konstanta.

c. Nyatakan relasi antara bilangan-bilangan dan variabel yang telah diperoleh sehingga tersusun kalimat terbuka. Relasi yang mungkin dalam aljabar adalah dengan "=," "<," ">," "≤," atau "≥."
d. Selesaikan kalimat terbukanya.
e. Nyatakan jawabnya sesuai yang ditanyakan pada masalah itu dalam bentuk verbal.
f. Periksa kembali kebenaran jawabnya.

Contoh 4

Karim mengendarai sepeda motor dengan kecepatan 40 km/jam. Dari tempat yang sama, sejam kemudian Budi berkendaraan ke arah yang sama dengan kecepatan 56 km/jam.

a. Setelah berapa jam, Budi menyalip/mendahului Karim?
b. Berapa jarak yang mereka tempuh pada saat Budi mendahului Karim?

Langkah-langkah penyelesaiannya:

1. Memilih variabel

   Pertanyaan pertama memilih variabel untuk lama perjalanan Budi dari berangkat sampai mendahului. Misalkan lama perjalanan Budi sampai mendahului adalah t jam.
2. Menyatakan setiap bilangan yang muncul pada soal dengan variabel yang telah dipilih

   Bilangan 40 terkait dengan Karim. Karim berangkat 1 jam lebih dahulu daripada Budi. Berarti ketika Karim didahului Budi, ia telah berjalan selama $(t+1)$ jam. Kecepatannya 40 km/jam. Jadi jarak yang ditempuh Karim sampai didahului Budi adalah $40 \times (t+1)$ km.

   Bilangan 56 terkait dengan Budi. Ia berkendaraan selama t jam, kecepatannya 56 km/jam. Berarti jarak yang ditempuh sampai mendahului Karim adalah $56 \times t$ km.
3. Menyatakan relasi antara bentuk-bentuk aljabar

Pada saat Budi mendahului Karim, keduanya menempuh jarak yang sama, Berarti: $56 \times t = 40 \times (t + 1)$. Ini merupakan kalimat terbuka (persamaan) yang terbentuk.

4. Menyelesaikan kalimat terbuka

   $56t = 40(t + 1) \Leftrightarrow 56t = 40t + 40 \Leftrightarrow 16t = 40 \Leftrightarrow t = 2{,}5$

5. Menyatakan jawabnya sesuai pertanyaan

   Jadi penyelesaiannya:

   a. Budi mendahului Karim setelah Budi berjalan selama 2,5 jam
   b. Jarak yang ditempuh Budi (dan Karim) saat Budi mendahului Karim adalah $(56 \times 2{,}5)$ km = 140 km.

   Dapat pula dengan menggunakan pemisalan sebagai berikut. Pada saat Karim didahului Budi jarak yang ditempuh karim $40t$ km. Jarak yang ditempuh Budi $56(t\text{-}1)$ km. Coba diskusikan dengan sesama anggota MGMP Anda apakah hasilnya sama?

C. Kegiatan Belajar 3: Menggunakan Strategi Pemecahan Masalah dalam Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

Perhatikan persoalan yang dialami anaknya Bu Ani seperti berikut ini.

"Ketika Ibu Ani minta tolong kepada anaknya untuk membelikan 3 kilogram gula pasir dengan memberikan selembar uang limapuluh ribu rupiah dan setelah anaknya membelanjakan uang tersebut ke warung, ibunya menanyakan kepada anaknya, berapa harga 1 kilogram gula pasir yang dibelinya? Anaknya dapat menjawab dengan tepat harga 1 kilogram gula pasir tersebut walaupun tidak diberi tahu oleh penjual berdasarkan uang pengembaliannya sebesar Rp17.000,00." Bagaimana cara Anda memperoleh harga 1 kilogram gula pasir tersebut dan bagaimana langkah-langkah Anda atau strategi pemecahan dalam pembelajaran untuk menjelaskan masalah sederhana yang terkait dengan persamaan ini kepada siswa?

Untuk menjelaskan kepada siswa agar siswa mampu memecahkan masalah yang terkait dengan persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel, Anda dapat memulainya dengan masalah yang sederhana, yaitu membuat ungkapan-ungkapan atau contoh kalimat verbal kemudian siswa diminta untuk menuliskan bentuk aljabarnya atau sebaliknya, misalnya (1) Seorang peternak mempunyai sejumlah sapi. Setelah membeli lagi 7 ekor jumlah sapinya sekarang menjadi 35 ekor, berapa ekor sapi yang dimilikinya mula-mula? (2) Suatu iklan menawarkan pekerjaan sebagai peragawati. Salah satu syaratnya, tinggi pelamar tidak kurang dari 160 cm. Nyatakan hal ini dalam bentuk aljabar! Salah satu bentuk aljabar yang berkaitan dengan konteks(ungkapan 1) tersebut di atas adalah $x + 7 = 35$ dan konteks 2 adalah $x \geq 160$. Dengan ungkapan-ungkapan ini siswa akan memahami bentuk aljabar. Hal ini perlu dilatihkan kepada siswa agar siswa trampil menyusun kalimat terbuka yang mengaitkan suatu peristiwa karena sangat membantu siswa belajar memecahkan masalah yang terkait persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel.

Masalah "sederhana" sering merupakan pengalaman belajar yang baik untuk memecahkan masalah yang lebih kompleks. Dalam "masalah sederhana" tersebut sering terjadi bahwa setelah memahami masalahnya, perlu mengubahnya ke dalam model matematika, baru memecahkannya. Arya dan Lardner (1981:63), dan Auvil dan Poluga (1984:115) yang dikutip Krismanto, menyarankan langkah-langkah dasar menyelesaikan masalah verbal sebagai berikut

1. Pilihlah suatu variabel.
2. Susunlah bentuk-bentuk aljabar.
3. Susunlah model matematika dari relasinya.
4. Carilah penyelesaian kalimat terbuka atau model matematikanya.
5. Nyatakan jawabnya sesuai yang ditanyakan pada masalah itu.
6. Periksa kebenaran jawaban dengan "mengembalikannya" ke persoalan awal.

Contoh 5

Panjang suatu persegipanjang 4 cm kurang dari tiga kali lebarnya. Keliling persegipanjang tersebut sama dengan keliling suatu persegi yang luasnya 3.136 cm^2. Tentukanlah ukuran persegipanjang tersebut.

Penyelesaian:

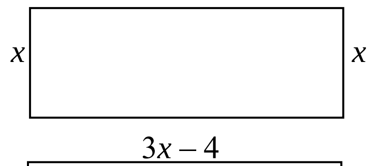
1. Memilih/menentukan variabel

   Misalkan ukuran lebar persegipanjang x cm.

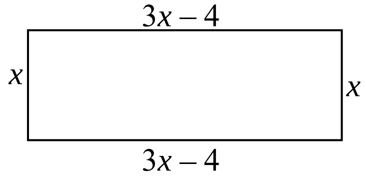
2. Menyusun bentuk aljabar

   Membuat diagram/sketsa situasi

   berdasar lebar persegipanjang x cm



(i)

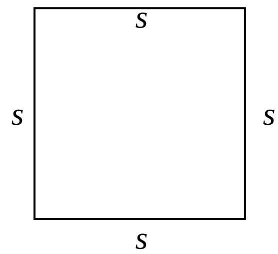


(ii)

   Panjangnya $\underbrace{4 \text{ cm kurang dari}}_{-4}$ $\underbrace{\text{tiga kali lebarnya}}_{3 \times x}$.

   Panjangnya adalah $-4 + 3x$ atau $3x - 4$

   Panjang sisi persegi = s, keliling = $4s$



(iii)

3. Menyusun model matematika dari relasinya

   Luas persegi = 3.136 cm^2, maka $s^2 = 3136$

   Keliling persegi = $4s$

   Keliling persegipanjang = $x + 3x - 4 + x + 3x - 4 = 8x - 8$

   Karena keliling persegipanjang = keliling persegi, maka $8x - 8 = 4s$

4. Menyelesaikan kalimat terbuka (model matematika)

   Karena $s^2 = 3136$ maka $s = \sqrt{3.136} = 56$, sehingga $4s = 4 \times 56 = 224$

   Dengan demikian $8x - 8 = 4s$ diperoleh :

   $8x - 8 = 224$

   $\Leftrightarrow 8x = 232 \quad \Leftrightarrow x = 29$

   Sehingga panjang persegipanjang: $3x - 4 = 3 \times 29\text{cm} - 4\text{cm} = 83$ cm

5. Menyatakan jawabnya sesuai yang ditanyakan pada masalah itu.

   Jadi ukuran panjang dan lebar persegipanjang berturut-turut 83 cm dan 29 cm.

6. Pemeriksaan**:**

   Panjangnya 4 cm kurang dari 3 × lebarnya benar, sebab 83 = 3 × 29 – 4 (benar)

   Keliling persegipanjang = 2 ×(29 + 83) = 224 cm

   Keliling persegi = keliling persegipanjang = 224 cm, sehingga panjang sisi persegi = 224 cm : 4 = 56 cm. Jadi luas persegi = (56 × 56) cm^2 = 3.136 cm^2, (*benar* sesuai yang diketahui).

Di samping masalah sederhana yang terkait dengan persamaan dan pertidaksamaan linear dengan satu variabel, ia juga harus memahami konsep dan sifat-sifat persamaan maupun pertidaksamaan yang akan digunakan untuk menyelesaikan himpunan penyelesaian persamaan dan pertidaksamaan linear dengan satu variabel sebelum memecahkan masalah kontekstual serta memiliki kemampuan mengubah atau menyusun kalimat terbuka yang mengaitkan suatu peristiwa, kemudian diberikan masalah yang berupa *open-ended problem* dan investigasi.

Agar siswa mempunyai kemampuan untuk memecahkan masalah sebaiknya pembelajarannya dengan pendekatan kooperatif yang kegiatannya memperbanyak siswa diskusi dalam kelas yang menimbulkan siswa aktif. Pemodelan ini untuk menjelaskan dan menganalisis proses berpikir, memberikan kesempatan yang cukup untuk memformulasikan, merefleksikan dan mengklarifikasi serta mencoba untuk mencari strategi pemecahan masalah yang lebih baik. Untuk memberikan gambaran bagaimana strategi pemecahan masalah terkait dengan persamaan dan pertidaksamaam linear satu variabel disajikan contoh berikut.

1. Stategi pemecahan masalah persamaan linear satu variabel

Dalam memecahkan masalah yang terkait dengan persamaan, Anda juga dapat menunjukkan kepada siswa tentang kesalahan yang sering terjadi, misalnya membagi (sebenarnya bukan mencoret) seperti pengerjaan berikut, pada langkah yang mana terdapat kesalahan dan jelaskan alasannya!

	$a = b$	
$\Leftrightarrow$	$a^2 = ab$	kedua ruas dikalikan a
$\Leftrightarrow$	$a^2 - b^2 = ab - b^2$	kedua ruas dikurangi b^2

$\Leftrightarrow$	$(a + b)\ (a - b) = b(a - b)$	kedua ruas difaktorkan
$\Leftrightarrow$	$(a + b) = b$	kedua ruas dibagi $(a - b)$
$\Leftrightarrow$	$2b = b \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 1$	

Kelihatannya proses pengerjaan di atas tidak ada kesalahan konsep, tetapi hasilnya menjadi salah, ini disebabkan pada langkah membagi $(a - b)$ tidak diperbolehkan karena membagi dengan nol. Maka harus berhati-hati jangan sampai menimbulkan salah konsep untuk menyelesaikan masalah persamaan, karena kadang-kadang siswa mengalami salah konsep. Sekarang menurut Anda bagaimana berikut ini.

Misalkan $x = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots$

Maka $\quad 3x = 3 + 9 + 27 + \ldots$

Akibatnya: $-2x = 1 \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{1}{2}$

Jadi: $\quad 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots = -\dfrac{1}{2}$

Dimana letak kesalahannya? Coba diskusikan dengan sesama anggota MGMP Anda.

Untuk memberikan gambaran dalam menggunakan strategi memecahkan masalah, berikut ini merupakan contoh strategi memecahkan masalah yang terkait dengan persamaan linear dengan satu variabel.

Contoh 6

Kapasitas tangki bensin mobil Ali dua kali kapasitas tangki bensin mobil Budi. Jika masing-masing tangki diambil 8 liter, maka isi tangki bensin mobil Ali tiga kali isi tangki bensin mobil Budi. Tentukan kapasitas tangki bensin mobil Ali!

Penyelesaian

Masalah ini akan diselesaikan dengan menggunakan strategi pengerjaannya bergerak dari belakang dan juga dapat diselesaikan dengan strategi penyelesaian lainnya.

Anda dapat melihat soal di atas bahwa hasil akhir perbandingan dua tangki bensin ini diketahui dengan jelas. Misalkan a = isi tangki bensin mobil Budi pada keadaan terakhir, maka isi tangki bensin mobil Ali pada keadaan terakhir adalah $3a$.

Sebelum pengambilan 8 liter untuk masing-masing tangki, mobil Ali berisi $(3a + 8)$ liter dan mobil Budi berisi $(a + 8)$ liter.

Pada saat keadaan awal, kapasitas tangki bensin mobil Ali dua kali kapasitas tangki bensin mobil Budi. Hal ini berarti $3a + 8 = 2(a + 8)$, sehingga $a = 8$.`

Jadi kapasitas tangki bensin mobil Ali adalah 3×8 liter + 8 liter = 32 liter

Dapat pula diselesaikan sebagai berikut.

Misal isi tangki mobil Budi a liter, maka isi tangki mobil Ali $3a$ liter. Diskusikan dengan teman MGMP, apakah hasilnya sama?

Contoh 7

Di perpustakaan, Windy dan Tika membaca buku yang sama. Windy telah membaca 24 halaman pertama, sedangkan yang belum dibaca Tika sebanyak 96 halaman. Ternyata banyaknya halaman yang belum dibaca Windy dua kali banyak halaman yang telah dibaca Tika. Berapakah banyak halaman buku tersebut

Penyelesaian

Masalah ini dapat diselesaikan dengan menggunakan strategi membuat diagram untuk mempermudah memahami masalah dan gambaran penyelesaiannya dan juga dengan strategi penyelesaian lainnya dengan langkah-langkah.

a. Memisalkan banyaknya halaman buku: x alaman

b. Membuat diagram

halaman yang belum di baca Windy	halaman yang telah di baca Tika
$x - 24$	$x - 96$

c. Mencari hubungan antara variabel

$x - 24 = 2(x - 96)$

d. Menyelesaikan kalimat terbukanya

$x - 24 = 2(x - 96) \Leftrightarrow x - 24 = 2x - 192 \Rightarrow x = 168$

Jadi banyak halaman buku adalah 168 halaman

Contoh 8

Windy mempunyai enam uang logam Rp500,00 lebih banyak dari pada uang logam Rp1.000,00. Jika jumlah semua nilai uang logam yang dimilikinya adalah Rp24.000,00, berapa banyaknya uang logam Rp500,00 dan uang logam Rp1.000,00 yang dimiliki Windy?

Penyelesaian

Misalkan: banyaknya uang logam Rp500,00 adalah x.

Dibuat tabel:

Tabel 3. Banyaknya uang yang dimiliki Windy

Uang logam	Banyaknya uang logam	Nilai uang
Rp500,00 Rp1.000,00	x $(x - 6)$	$500\,x$ $1000\,(x - 6)$

Bentuk persamaannya:

$$
\begin{aligned}
& 500\,x + 1000\,(x - 6) = 24000 \\
\Leftrightarrow\quad & 500\,x + 1000\,x - 6000 = 24000 \\
\Leftrightarrow\quad & 1500\,x = 30000 \\
\Leftrightarrow\quad & x = 20
\end{aligned}
$$

Jadi, banyaknya uang Rp500,00 adalah 20 keping dan uang logam Rp1.000,00 adalah 14 keping

Contoh 9

Suatu bilangan yang terdiri atas empat angka $x56y$, di mana x dan y berturut-turut angka pertama dan angka terakhir dari bilangan tersebut, dan bilangan tersebut habis dibagi dengan 9. Berapa nilai $x + y$?

Penyelesaian:

Masalah ini dapat juga diselesaikan dengan strategi mencoba-coba (*trial and error),* sehingga jika dihadapkan pada pertanyaan seperti ini, biasanya siswa segera mencoba mencari berbagai nilai x dan y untuk mencari yang habis dibagi 9. Meskipun langkah ini kadang digunakan, namun demikian hal ini tidak perlu. Untuk itu perlu perpaduan antara informasi yang diberikan dengan berfikir logis.

Perlu diingat kembali sifat bahwa suatu bilangan habis dibagi sembilan jika jumlah angka-angkanya merupakan kelipatan dari 9, atau $x + 5 + 6 + y = 9M$, atau $x + y + 11 = 9M$.

Kemungkinan terbesar dari $x + y = 9 + 9 = 18$ tetapi $18 + 11 = 29$ yang tidak habis dibagi 9, sehingga kemungkinan terbesar $x + y$ haruslah sama dengan 16, misal untuk $9 + 7$. Kemungkinan $x + y + 11$ terkecil yang habis dibagi 9 adalah sama dengan 7, misalnya untuk $x = 3$ dan $y = 4$. Sehingga $x + y = 7$, dan tidak ada kemungkinan yang lain. Jadi $x + y = 16$ atau 7

Contoh 10

Carilah nilai x yang memenuhi persamaan $\sqrt{3x+\sqrt{3x+\sqrt{3x+\ldots}}} = 9$

Penyelesaian

Masalah ini dapat diselesaikan dengan strategi berpikir logis dengan menguadratkan kedua ruas persamaan, diperoleh

$$3x + \sqrt{3x + \sqrt{3x + \sqrt{3x + \ldots}}} = 81, \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

karena $\sqrt{3x + \sqrt{3x + \sqrt{3x + \ldots}}} = 9$ maka persamaan (1) dapat ditulis:

$$3x + 9 = 81$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x = 72$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 24$$

2. Strategi Pemecahan Masalah Pertidaksamaan Linear Satu Variabel

Bagaimana cara membelajarkan siswa agar siswa mampu memecahkan masalah yang terkait dengan pertidaksamaan linear dengan satu variabel.

Agar penerapan pertidaksamaan dapat dikuasai lebih mudah, senantiasa perlu diusahakan adanya masalah kontekstual dalam pembelajaran baik yang disajikan guru, maupun minta siswa untuk memberikan contohnya. Siswa diberikan pengalaman belajar untuk memahami menyelesaikan pertidaksamaan linear dengan menggunakan sifat-sifat operasi pada pertidaksamaan melalui contoh, dengan tekanan: variabel di ruas kiri dan konstanta di ruas kanan serta memahami penerapan pengertian $a < b < c \Leftrightarrow b > a$ dan $b < c$ serta makna 'atau' dalam $x < a$ atau $x > b$.

Setelah memahami berbagai strategi pemecahan masalah, siswa harus memiliki kompetensi atas konsep dan sifat-sifat pertidaksamaan sebelum digunakan untuk menyelesaikan pertidaksamaan serta memberikan dasar pengembangan berikutnya, misalnya menyebutkan $x > 0$ dengan "*x positif*".

Untuk memberikan gambaran dalam menggunakan strategi memecahkan masalah berikut ini disajikan contoh strategi memecahkan masalah yang terkait dengan pertidaksaman linear satu variabel.

Contoh 11

Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan real a dan b sembarang berlaku:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Penyelesaian

Masalah ini dengan menggunakan strategi pemecahan bergerak dari belakang, sehingga pada buram pembuktian siswa justru bergerak dari belakang. Dengan menganggap $a^2 + b^2 \geq 2ab$ benar, dari sini kita bergerak kebelakang:

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 \geq 2ab \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (a - b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Hasil terakhir ini bermuara pada teorema pada bilangan real bahwa kuadrat setiap bilangan real adalah non negatif.

Berangkat dari buram pembuktian di atas kemudian langkah pembuktiannya dengan membalik langkah-langkah tersebut, misalnya dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Untuk setiap bilangan real a dan b maka $(a - b)$ adalah bilangan real dan $(a-b)^2$ akan selalu non negatif dan sering dinyatakan dengan notasi:

$$\begin{aligned} & a \in R \text{ dan } b \in R \text{ sehingga } (a - b) \in R \\ \Rightarrow \quad & (a - b)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 + b^2 \geq 2\text{ab} \quad \text{(terbukti).} \end{aligned}$$

Contoh 12

Buktikan bahwa $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$ untuk setiap bilangan real positif a.

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan masalah ini kita menggunakan sifat bahwa kuadrat sembarang bilangan real selalu non negatif, kemudian dengan mengambil sudut pandang yang berbeda dapat kita buktikan sebagai berikut.

Cara I: Kuadrat sembarang bilangan real selalu non negatif maka:

$$(a - 1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + 1 \geq 2a \qquad \textit{kedua ruas dibagi a}$$

$$\Leftrightarrow \quad a + \frac{1}{a} \geq 2 \text{ (terbukti).}$$

Cara II: Kuadrat sembarang bilangan real selalu non negatif maka:

$$(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a - 2 + \frac{1}{a} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a + \frac{1}{a} \geq 2 \text{ (terbukti).}$$

Contoh 13

Jika, $10 \leq x \leq 20$ dan $40 \leq y \leq 50$, berapakah hasil terbesar dari $\frac{x^2}{2y}$

Penyelesaian

Masalah ini dapat diselesaikan dengan menggunakan strategi berpikir logis bahwa suatu pecahan nilainya akan semakin besar apabila pembilangnya semakin besar dan penyebutnya semakin kecil, dengan demikian kita mengambil nilai $x = 20$ dan $y = 40$ diperoleh $\frac{x^2}{2y} = \frac{20^2}{2.40} = \frac{400}{80} = 50$. Jadi hasil terbesar dari $\frac{x^2}{2y}$ adalah 50

Contoh 14

Suatu industri rumah tangga setiap minggu memproduksi produk yang memerlukan biaya produksi sebesar Rp6.000,00 per unit dengan biaya tetap Rp1.500.000,00 per minggu. Setiap unit dijual seharga Rp15.000,00. Jika keuntungan yang diperoleh setiap minggunya tidak kurang dari Rp750.000,00, berapa unit yang dihasilkan dan dijualnya setiap minggu?

Penyelesaian:

Misal: Setiap minggunya diproduksi/dijual x unit

Pemasukan : $15000\ x$

Pengeluaran: $1500000 + 6000\ x$

Keuntungan = Pemasukan – Pengeluaran = $15000\ x - (1500000 + 6000\ x)$

Karena keuntungan yang diperoleh setiap minggunya tidak kurang dari Rp750.000,00, maka:

$$15.000\ x - (1.500.000 + 6.000x) \geq 750.000$$

$$\Leftrightarrow \quad 9.000\ x \geq 2.250.000$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 250$$

Jadi, yang dihasilkan dan dijual setiap minggu paling sedikit 250 unit

D. Ringkasan

1. Proses pemecahan masalah matematika dapat dikelompokkan menjadi empat langkah: (1) memahami masalah matematika secara benar, (2) menyusun strategi yang mungkin dilakukan, (3) mengimplementasikan strategi yang dipilih, dan (4) memeriksa kembali hasil pekerjaan.
2. Beberapa strategi memecahkan masalah diantaranya adalah: (1) mencoba-coba (*trial and error*), (2) membuat diagram, (3) mencobakan pada soal yang lebih sederhana, (4) membua tabel, (5) menemukan pola, (6) memecah tujuan, (7) memperhitungkan setiap kemungkinan, (8) berpikir logis, (9) bergerak dari belakang, dan (10) mengabaikan hal yang tidak mungkin,
3. Langkah dasar untuk menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel ialah “memisahkan suku yang memuat variabel di ruas kiri dan konstanta di ruas kanan,” dan menggunakan sifat dasar bahwa:
   a. Suatu persamaan tidak berubah himpunan penyelesaiannya jika kedua ruas persamaan:
      1) ditambah atau dikurangi dengan bilangan yang sama,dan
      2) dikalikan atau dibagi dengan bilangan yang sama asal pembaginya bukan 0.
   b. Pertidaksamaan tidak berubah tandanya jika kedua ruas ditambah atau dikurangi dengan bilangan yang sama.

   c. Pertidaksamaan tidak berubah tandanya jika kedua ruas dikalikan dengan bilangan positif yang sama.
   d. Pertidaksamaan berbalik tandanya jika kedua ruas dikalikan dengan bilangan negatif yang sama, dengan variabel di ruas kiri dan konstanta di ruas kanan.
4. Untuk menyelesaikan masalah yang terkait dengan soal cerita senantiasa mengikuti langkah-langkah umum menyelesaikan soal cerita: (1) memilih variabel, jika perlu membuat diagram situasi, (2) menyusun bentuk aljabar, (3) menyusun kalimat terbuka, (4) menyelesaikan kalimat terbuka, (5) memvalidasi jawaban, dan (6) menyatakan jawaban sesuai konteksnya.
5. Cara meningkatkan kemampuan memecahkan masalah aljabar;
   a. Memulai dari masalah yang sederhana.
   b. Memberikan masalah berupa *open-ended problem* dan investigasi.
   c. Menggunakan strategi pemecahan masalah yang relevan.
   d. Memperkuat konseptualisasi dan pengembangan dari kebiasaan berpikir kritis.
   e. Mencari kesesuaian antara kemampuan berpikir dan strategi pemecahan masalah.
   f. Memberikan kesempatan untuk memformulasikan dan memecahkan masalah.
   g. Menggunakan pemodelan untuk menjelaskan dan menganalisis proses berpikir.
   h. Memberikan kesempatan untuk merefleksikan dan mengklarifikasi.

E. Latihan 1

Kegiatan Belajar 1, 2 dan 3

1. Sebutkan empat langkah dalam memecahkan masalah menurut Polya!
2. Susunlah lima ungkapan atau peristiwa yang terkait dengan masalah persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel, kemudian buatlah bentuk aljabarnya. Tukarkan hasil ungkapan tersebut dengan teman MGMP dan diminta teman Anda mengoreksinya. Diskusikan jika ada masalah yang tidak jelas.
3. Tika berusia 4 tahun lebih muda dari Windy. Jika jumlah usia keduanya adalah 26 tahun, berapa tahun usia Tika?

4. Seekor amuba berkembang biak 2 kali lipat setiap hari di dalam tabung. Setelah 100 hari tabung penuh dengan amuba. Pada hari ke berapa $\frac{1}{4}$ tabung berisi amuba?
5. Tersedia dua larutan alkohol jenis A dan B. Larutan A yaitu Alkohol yang berkadar 75% dan larutan B yaitu Alkohol yang berkadar 50%. Jika seseorang akan membuat 100cc campuran Alkohol yang berkadar 60%, maka berapa cc dari setiap jenis Alkohol A dan B yang diperlukan?
6. Ada 35 kelereng di dalam lima kotak. Jumlah kelereng pada kotak I dan II adalah 12 butir, jumlah kelereng pada kotak II dan III adalah 13 butir, jumlah kelereng pada kotak III dan IV adalah 17 butir, dan jumlah kelereng pada kotak IV dan V adalah 18 butir. Berapa banyaknya kelereng pada masing-masing kotak?
7. Jika $x+\frac{1}{x}=\frac{13}{6}$, tentukan nilai $x^2+\frac{1}{x^2}$ (Soal *Canadian Mathematics Competition* tahun 2000)
8. Jika $-2 \leq x \leq 5$; $-3 \leq y \leq 7$; $4 \leq z \leq 8$ dan $w = xy - z$, berapakah nilai terkecil yang mungkin dari w?
9. Buktikan bahwa jika $a > 2$ dan $b > 3$, maka: $ab + 6 > 3a + 2b$
10. Pada mata pelajaran matematika, akan diadakan tiga kali ulangan dengan masing-masing ulangan skor maksimum 100. Seorang siswa dinyatakan berkompeten dan akan mendapat predikat amat baik jika skor rata-rata ulangan tersebut sekurang-kurangnya 90. Apabila seorang siswa telah memperoleh skor 91 dan 86 pada kedua ulangan, berapakah skor ulangan ketiga yang harus diraihnya agar memperoleh predikat amat baik?

Anda dapat mengecek kebenaran jawaban latihan yang telah Anda kerjakan dengan cara menyampaikan jawaban secara tertulis atau lisan kepada teman sejawat atau kepada fasilitator atau dengan melihat lampiran kunci jawaban. Bila tingkat kebenaran jawaban Anda sudah mencapai minimal 75% berarti Anda sudah memahami materi belajar dalam Modul 1 ini. Selanjutnya Anda dapat meneruskan belajar Modul 2. Bila tingkat kebenaran jawaban Anda belum mencapai minimal 75%, jangan segan untuk membaca lagi uraian materi dalam Modul 1 ini, atau bertanyalah kepada fasilitator atau sejawat Anda yang lebih memahami agar Anda memahami modul ini.

Daftar Pustaka

Al Krismanto. 2007. *Aljabar (Makalah Diklat Guru Pemandu/Pengembang Matematika SMP Jenjang Dasar)*, Yogyakarta: PPPPTK Matematika

Al Krismanto. 2009. *Kapita Selekta Pembelajaran Aljabar di Kelas VII SMP (Modul Matematika SMP Program BERMUTU)*, Yogyakarta: PPPPTK Matematika

Cooney, T.J, Davis E.J, and Henderson, K.B. 1975. *Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics*. Boston: Hougton Mifflin Company.

Depdiknas. 2006. *Standar Isi Mata Pelajaran Matematika SMP*. Jakarta: Depdiknas

Pasmep. 1989. *Solve It, Problem Solving in Mathematics III*. Perth: Curtin University of Tehchnology

Polya, G. 1973. *How to Solve It (2nd Ed)*. Princeton: Princeton University Press.

Tim PPPPTK Matematika. 2007. *Penalaran, Pemecahan Masalah dan Komunikasi (Makalah Diklat Guru Pemandu/Pengembang Matematika SMP Jenjang Dasar)*, Yogyakarta: PPPPTK Matematika

MODUL 2
PEMBELAJARAN PEMECAHAN MASALAH TERKAIT RELASI, FUNGSI DAN PERSAMAAN GARIS LURUS

MODUL 2
PEMBELAJARAN PEMECAHAN MASALAH TERKAIT RELASI, FUNGSI DAN PERSAMAAN GARIS LURUS

Pada modul ini akan dibahas tentang pembelajaran pemecahan masalah yang terkait dengan relasi, fungsi dan persamaan garis lurus.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan mampu memahami pengertian relasi, fungsi, persamaan garis lurus dan mampu memecahkan masalah yang berkaitan dengan relasi, fungsi, dan persamaan garis lurus seta menguasai strategi pembelajaran kemampuan memecahkan masalah yang terkait dengan materi relasi, fungsi, persamaan garis lurus dalam pembelajaran matematika.

Untuk membantu Anda menguasai kemampuan tersebut, pembahasan ini dikemas dalam dua Kegiatan Belajar (KB) sebagai berikut.

Kegiatan Belajar 1: Menggunakan Strategi Pemecahan Masalah dalam Relasi dan Fungsi

Kegiatan Belajar 2: Menggunakan Strategi Pemecahan Masalah Persamaan Garis Lurus.

Agar Anda dapat menguasai isi modul ini, cermati uraian pada masing-masing kegiatan belajar dan kemudian selesaikan tugas sebagai latihan pada akhir modul ini. Bila Anda masih menemui kesulitan dalam penyelesaian tugas yang telah Anda kerjakan, atau ada hal lain yang perlu diklarifikasi, berdiskusilah dengan teman sejawat atau dengan fasilitator Anda. Dalam mempelajari Modul 2 ini hendaknya Anda juga mencermati naskah modul Kapita Selekta Pembelajaran Aljabar di Kelas VIII SMP yang diterbitkan oleh P4TK pada tahun 2009. Di samping itu Anda disarankan agar menggunakan buku-buku teks matematika yang ada di sekitar Anda sebagai bahan referensi. Pada akhir proses belajar Modul 2 ini Anda perlu melakukan refleksi diri terkait penguasaan Anda terhadap bahasan dalam modul ini.

A. Kegiatan Belajar 1: Menggunakan Strategi Pemecahan Masalah dalam Pembelajaran Relasi dan Fungsi

Dalam modul Kapita Selekta Pembelajaran Alajabar Kelas VIII SMP yang diterbitkan oleh P4TK pada tahun 2009 halaman 27 s.d 38 telah dibahas secara detail mengenai pengertian Relasi dan fungsi beserta contoh-contohnya.

Tahukah Anda, ada berapa propinsi di Indonesia saat ini?
coba Anda pilih enam propinsi, kemudian sebutkan nama tarian daerah dari propinsi tersebut. Hubungan antara tarian daerah dan propinsi asalnya merupakan salah satu contoh relasi.

Berikut ini akan diberikan secara garis besar konsep-konsep yang terkait dengan relasi dan fungsi.

1. Pengertian Relasi

Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan yang memasangkan anggota-anggota himpunan A ke anggota-anggota himpunan B.
Untuk dapat menentukan relasi biner antar elemen-elemen dari satu atau lebih himpunan diperlukan:

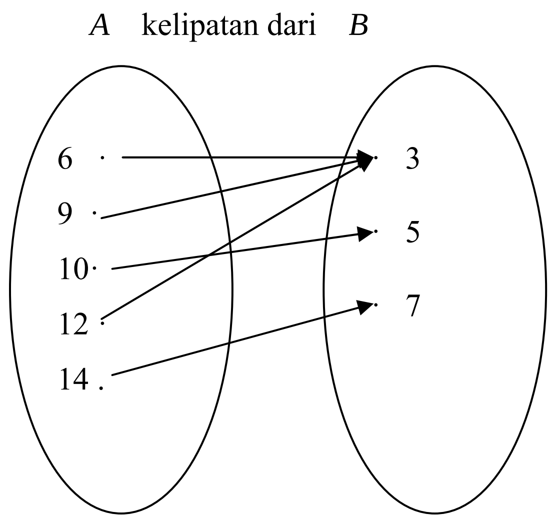
a. suatu himpunan A yang tidak kosong,
b. suatu himpunan B yang tidak kosong,
c. suatau kalimat terbuka, yang dinyatakan sebagai $P(x,y)$, dimana $P(a,b)$ dapat bernilai benar atau salah untuk setiap pasangan terurut (a,b).

Relasi dari himpunan A ke himpunan B, dapat dinyatakan dengan:

a. Diagram Panah

Contoh 1

Diketahui $A = \{6, 9, 10, 12, 14\}$ dan $B = \{3, 5, 7\}$. Jika relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah "kelipatan dari", maka gambar diagram panahnya adalah:

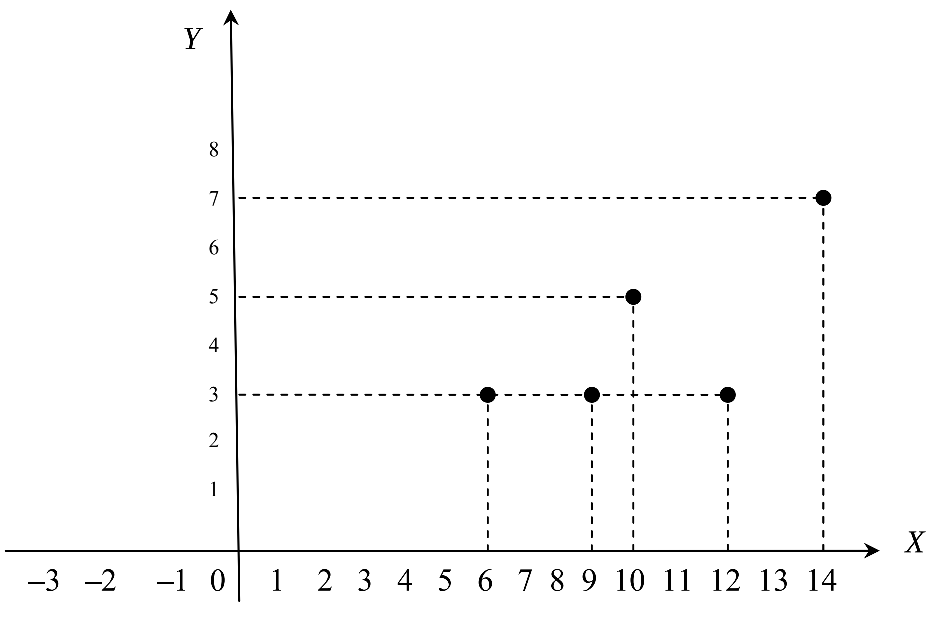


b. Himpunan Pasangan Berurutan

Jika contoh pada bagian (a) dinyatakan dalam pasangan berurutan adalah sebagai berikut: R = {(6,3), (9,3), (10,5), (12,3), (14,7)}

c. Diagram Cartesius

Jika relasi R = {(6,3), (9,3), (10,5), (12,3), (14,7)} dari contoh di atas dinyatakan dalam diagram Cartesius maka grafiknya akan tampak sebagai sebagai berikut.



2. Pengertian Fungsi

Suatu fungsi *f* dari himpunan *A* ke himpunan *B* adalah suatu relasi yang memasangkan setiap anggota himpunan *A* dengan tepat satu anggota himpunan *B*.

Fungsi *f* dari himpunan *A* ke dalam himpunan *B* biasa ditulis dengan notasi:

$f : A \rightarrow B$ dibaca " fungsi *f* memetakan *A* ke dalam *B*.

Notasi yang biasa digunakan untuk menyatakan suatu fungsi *f* yang memetakan setiap anggota x dari himpunan *A* ke anggota *y* dari himpunan *B* adalah

$f : x \rightarrow y$, dibaca "*f* memetakan *x* ke *y*", sehingga notasi fungsi dapat ditulis $f(x) = y$.

Elemen tunggal di dalam *B* yang dihubungkan dengan $a \in A$ oleh *f* dinyatakan dengan $f(a)$ dan disebut bayangan atau peta *a* oleh *f*, atau disebut juga nilai pada *a*. Dalam hal ini *a* disebut prapeta dari $f(a)$.

3. Fungsi –fungsi Khusus

a. Fungsi Konstan

Misalkan *f* suatu fungsi dari *A* ke *B*. Fungsi *f* dinamakan fungsi konstan jika untuk semua elemen di *A* berkawan dengan satu elemen di *B*.

Sebagai contoh : $f(x) = 5$ adalah fungsi konstan.

b. Fungsi Identitas

Suatu fungsi $f : A \rightarrow A$ yang didefinisikan oleh rumus $f(x) = x$, dinamakan fungsi identitas (fungsi satuan). Fungsi tersebut memetakan setiap elemen di *A* dengan elemen itu sendiri. Fungsi identitas dinotasikan dengan I.

c. Fungsi Linear

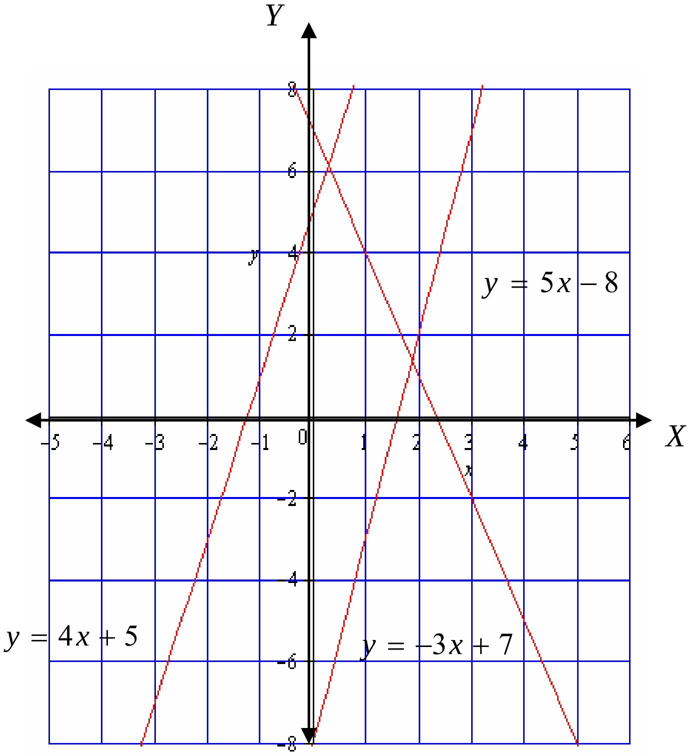
Fungsi linear *f* adalah fungsi pada himpunan bilangan real *R* yang ditentukan oleh $f(x) = ax + b$, dengan *a*, *b* bilangan real dan $a \neq 0$.

Grafik dari fungsi linear berupa garis lurus.

Contoh 2

1) $f(x) = 4x + 5$
2) $f(x) = -3x + 7$
3) $f(x) = 5x - 8$

Grafik dari contoh-contoh tersebut adalah sebagai berikut.



d. Fungsi Kuadrat

Di dalam Standar Isi, fungsi kuadrat belum diajarkan kepada siswa SMP, tetapi materi ini dapat digunakan untuk pengayaan siswa yang kemampuannya di atas rata-rata.

Fungsi kuadrat f adalah fungsi pada himpunan bilangan real R yang ditentukan oleh $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan a, b, dan c bilangan real dan $a \neq 0$.

Perhatikan fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1.) Jika $a > 0$ maka grafiknya berupa parabola terbuka ke atas sehingga mempunyai nilai minimum.

2.) Jika $a < 0$ maka grafiknya berupa parabola terbuka ke bawah sehingga mempunyai nilai maksimum.

Nilai minimum atau maksimum dari $f(x) = ax^2 + bx + c$ terjadi pada titik puncak parabola, yaitu pada $P\left(\frac{-b}{2a}, \frac{D}{-4a}\right)$, dengan $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$ yang disebut diskriminan dari $f(x) = ax^2 + bx + c$.

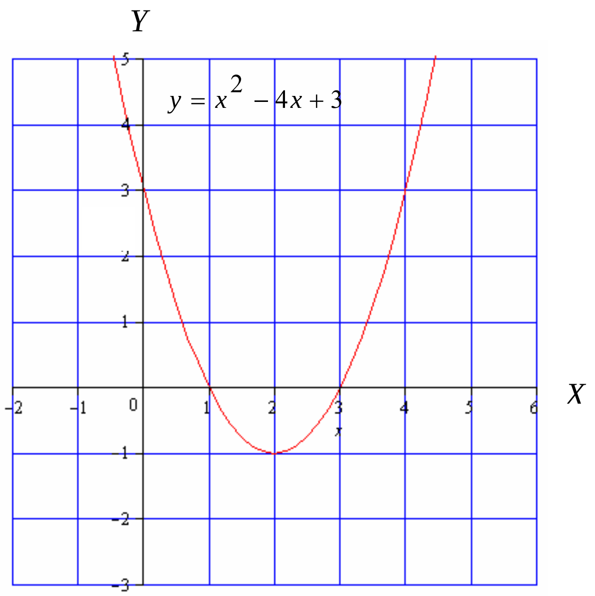
Contoh 3

Diketahui fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Grafik dari fungsi kuadrat tersebut berupa parabola terbuka ke atas sehingga mempunyai nilai minimum.

Puncak parabola adalah $P\left(\frac{-(-4)}{2}, \frac{(-4)^2 - 4(1)(3)}{-4}\right)$, sehingga $P(2,-3)$.

jadi nilai minimumnya adalah -3.

Grafik dari fungsi kuadrat tersebut adalah sebagai berikut

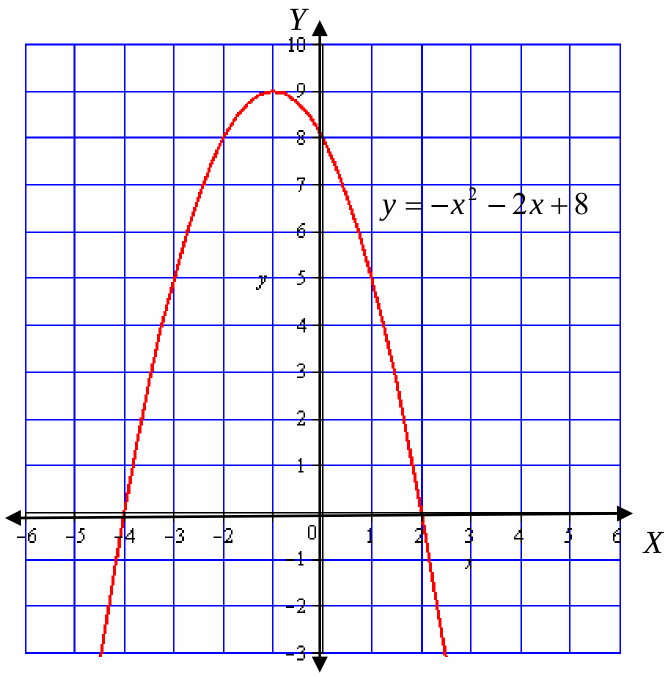


Contoh 4

Diketahui fungsi kuadrat $f(x) = -x^2 - 2x + 8$. Grafik dari fungsi kuadrat tersebut berupa parabola terbuka ke bawah, sehingga mempunyai nilai maksimum. Puncak parabola adalah $P\left(\frac{-(-2)}{-2}, \frac{(-2)^2 - 4(-1)(8)}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 9\right)$.

Sehingga nilai maksimumnya adalah 9.

Grafik dari fungsi tersebut adalah sebagai berikut:



4. Strategi Pemecahan Masalah pada Pembelajaran Relasi dan Fungsi

a. Strategi Pemecahan Masalah Relasi

Berikut ini diberikan suatu contoh masalah yang berkaitan dengan konsep relasi. Untuk menggambarkan suatu relasi dapat dinyatakan dengan tiga cara, yakni, dengan diagaram panah, pasangan berurutan dan diagram Cartesius.

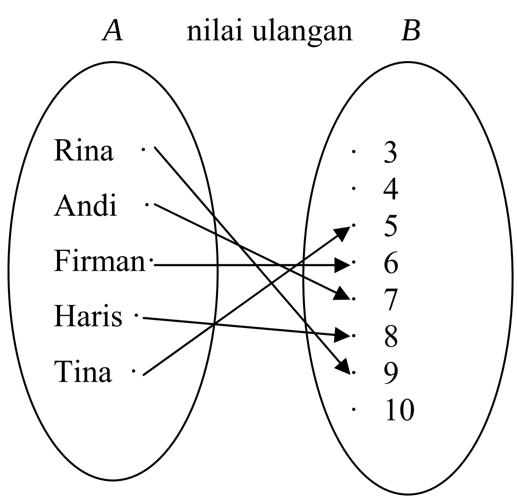
Contoh 5

Hasil ulangan matematika Risna, Andi, Firman, Haris, dan Tina berturut-turut adalah 9, 7, 6, 8, dan 5. Jika A = { Rina, Andi, Firman, Haris, Tina} dan $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Nyatakan relasi dari himpunan A ke himpunan B tersebut dengan:

1) diagram panah
2) pasangan berurutan
3) diagram Cartesius

Penyelesaian

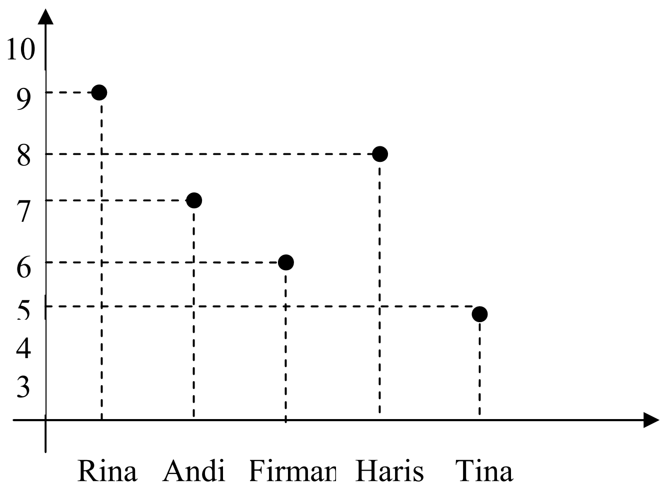
1) Untuk menggambarkan diagram panah dari relasi yang diberikan, yakni dengan menempatkan anggota himpunan A pada diagram sebelah kiri dan menempatkan anggota himpunan B pada diagram sebelah kanan. Selanjutnya, dibuat panah dari anggota himpunan A ke anggota himpunan B sesuai relasi yang diketahui. Diagram panah yang dimaksud digambarkan sebagai berikut.



2) Untuk menyatakan relasi tersebut dengan pasangan berurutan, caranya sebagai berikut.

   Misal, Rina dengan nilai 9 dituliskan dengan pasangan berurutan (Rina, 9), Andi dengan niali 7 dituliskan sebagai pasangan berurutan (Andi, 7) dan seterusnya sehingga diperoleh pasangan berurutan untuk relasi yang diberikan, yakni, $R = \{(\text{Rina},9), (\text{Andi},7), (\text{Firman},6), (\text{Haris},8), (\text{Tina},5)\}$.

3) Untuk menyatakan relasi dengan diagram Cartesius maka dibuat dua sumbu, sumbu mendatar menyatakan anggota himpunan *A* dan sumbu tegak menyatakan anggota himpunan *B*. Gambar relasi di atas sebagai berikut.



b. Strategi Pemecahan Masalah yang Berkaitan dengan Fungsi

Berikut ini akan diberikan beberapa contoh masalah yang berkaitan dengan fungsi serta cara mengajarkan penyelesaian dari masalah tersebut.

Contoh 6

Andi mengendarai mobil memerlukan waktu dua jam untuk menempuh perjalanan dari kota *A* ke kota *B*. Sedangkan Beni memerlukan waktu tiga jam untuk menempuh perjalanan yang sama. Andi mengendarai mobil dengan kecepatan 12 km/jam lebih cepat dari pada Beni. Tentukan jarak kota *A* ke kota *B*.

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut langkah-langkahnya sebagai berikut.

1. Memilih variabel.

   Misalkan waktu yang diperlukan Andi untuk menempuh perjalanan dari kota *A* ke kota *B* adalah t_a, dengan kecepatan V_a, dan misalkan waktu yang diperlukan Beni untuk menempuh perjalanan dari kota *A* ke kota *B* adalah t_b, dengan kecepatan V_b Jarak dari kota *A* ke kota *B* dimisalkan *S*.

2. Menyatakan setiap bilangan yang muncul pada soal dengan variabel yang telah dipilih

   Andi memerlukan waktu 2 jam untuk menempuh jarak dari kota *A* ke kota *B* dengan kecepatan V_a. Jarak merupakan fungsi waktu, berarti $S = t_a V_a$. Jadi, $S = 2V_a$.

   Beni memerlukan waktu 3 jam untuk menempuh jarak dari kota *A* ke kota *B* dengan kecepatan V_b , berarti $S = t_b V_b$ sehingga $S = 3V_b$. Andi mengendarai mobil 12 km/jam lebih cepat dari pada Beni, berarti $V_a = 12 + V_b$.

3. Menyatakan hubungan antara variabel

   S = jarak yang ditempuh Andi dan Beni sama, berarti $S = 2V_a = 3V_b$.

4. Menyelesaikan kalimat terbuka

   $2V_a = 3V_b$

   $3V_b = 2(12 + V_b) = 24 + 2V_b$

   $V_b = 24$.

   Sehingga di peroleh $S = t_b V_b \Leftrightarrow S = 3(24) = 72$.

5. Menyatakan jawaban sesuai pertanyaan

   Jadi, jarak kota *A* dan *B* adalah 72 km.

Contoh 7

Toni, Iwan, dan Hairul bersepeda dengan kecepatan yang sama. Jarak tempuh yang mereka lalui setelah t menit dapat dinyatakan dengan fungsi $s(t) = 2t^2 + 3t + 5$ (meter). Setelah p menit, Toni berhenti bersepeda. Jarak yang ditempuh Toni setelah p menit adalah 95 meter. Iwan berhenti bersepeda 2 menit kemudian. Hairul berhenti bersepeda setelah 2 kali p menit. Jika jarak yang ditempuh Iwan 157 meter dan jarak yang ditempuh Hairul adalah 329 meter. Berapa lama masing-masing Toni, Iwan, dan Hairul bersepeda?

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut langkah-langkahnya sebagai berikut.

1. Memilih variabel

   Dalam soal ini variabel yang terkait sudah diketahui, yakni waktu t, fungsi dari jarak terhadap waktu diketahui $s(t) = 2t^2 + 3t + 5$.

   Waktu tempuh Toni p menit.

   Waktu tempuh Iwan $p + 2$ menit.

   Waktu tempuh Hairul $2p$ menit.

2. Menyatakan setiap bilangan yang muncul pada soal dengan variabel yang telah dipilih:

   Jarak tempuh Toni selama p menit 95 meter.

   Jarak tempuh Iwan selama $p + 2$ menit 157 meter.

   Jarak tempuh Hairul selama $2p$ menit 329 meter.

3. Menyatakan hubungan antara variabel

   Fungsi jarak : $s(t) = 2t^2 + 3t + 5$

   Jarak yang ditempuh Toni : $s(p) = 2p^2 + 3p + 5$

   $$95 = 2p^2 + 3p + 5$$

   $$2p^2 + 3p = 90 \qquad \text{.......................1)}$$

Jarak yang ditempuh Iwan : $s(p+2) = 2(p+2)^2 + 3(p+2) + 5$

$$157 = 2(p^2 + 4p + 4) + 3p + 6 + 5$$

$$157 = 2p^2 + 11p + 19$$

$$2p^2 + 11p = 138 \qquad \text{..................2)}$$

Jarak yang ditempuh Hairul: $s(2p) = 2(2p)^2 + 3(2p) + 5$

$$329 = 8p^2 + 6p + 5$$

$$8p^2 + 6p = 324 \qquad \text{...................3)}$$

4. Menyelesaikan kalimat terbuka

   Dari persamaan 1) dan 2) diperoleh

$$\begin{array}{r} 2p^2 + 3p = 90 \\ 2p^2 + 11p = 138 \; - \\ \hline -8p = -48 \\ p = 6 \end{array}$$

5. Menyatakan jawaban sesuai pertanyaan

   Dengan memperhatikan langkah (2) dan mengganti $p = 6$, diperoleh waktu yang diperlukan masing-masing untuk bersepeda adalah 6 menit, 8 menit dan 12 menit.

Contoh 8

Suatu fungsi mempunyai sifat $f(2x+3) = 2f(x) + 3$ untuk setiap nilai x. Jika $f(0) = 6$, berapakah nilai $f(9)$?

(Soal Canadian Mathematics Competition tahun 2003)

Penyelesaian

Dalam soal ini variabel yang terkait adalah x dan hubungan antara variabel sudah diketahui, yakni $f(2x+3) = 2f(x) + 3$.

Untuk menyelesaikan soal ini karena diketahui $f(0)=6$, maka dengan mensubtitusikan nilai *x* = *0* ke persamaan $f(2x+3)=2f(x)+3$ akan diperoleh hasil sebagai berikut.

$$f(2.0+3)=2f(0)+3 \Leftrightarrow f(3)=2(6)+3 \Leftrightarrow f(3)=15.$$

Untuk menentukan nilai $f(9)$ substitusikan nilai *x* = 3 ke dalam persamaan $f(2x+3)=2f(x)+3$, sehingga diperoleh

$$f\left(2(3)+3\right)=2f(3)+3 \Leftrightarrow f(9)=2(15)+3 \Leftrightarrow f(9)=33.$$

Jadi, nilai dari $f(9)$=33.

Contoh 9

Fungsi kuadrat $f(x)=-2x^2-(a+1)x+2a$ mempunyai nilai maksimum 8.

Tentukan nilai a.

Penyelesaian

Dalam soal ini variabel yang terkait adalah *x* dan hubungan antara variabel sudah diketahui, yakni $f(x)=-2x^2-(a+1)x+2a$.

Untuk menentukan nialia *a*, dicari terlebih dahulu variabel yang terkait dengan nilai maksinum, yakni, $f(x)_{maks}=\dfrac{D}{-4a}=\dfrac{b^2-4ac}{-4a}$.

Karena diketahui nilai maksimumnya 8, berarti $\dfrac{b^2-4ac}{-4a}=8$.

Sehingga diperoleh $\dfrac{(-(a+1))^2-4(-2)(2a)}{-4(-2)}=8$.

Diperoleh persamaan $a^2+2a+1+16a=64$

Sehingga $a^2+18a-63=0 \Leftrightarrow (a-3)(a+2)=0 \Leftrightarrow a-3=0$ atau $a+2=0$

Diperoleh $a=3$ atau $a=-2$

Jadi, $a=3$ atau $a=-2$.

Contoh 10

Diketahui $f(n) = n(n+1)$ dengan n bilangan asli. Tentukan nilai m dan n (jika ada) sedemikian hingga $4f(n) = f(m)$ dengan m bilangan asli.

Penyelesaian

Variabel-variabel dan hubungan antara variabel-variabel dalam permasalahan tersebut sudah diketahui, yakni $f(n) = n(n+1)$, sehingga penyelesaiakan dapat dilakukan dengan mengasumsikan bahwa $4f(n) = f(m)$. Karena $f(n) = n(n+1)$, maka diperoleh $4n(n+1) = m(m+1) \Rightarrow 4n^2 + 4n = m^2 + m$.

Jika kedua ruas masing-masing ditambah 1, diperoleh

$$4n^2 + 4n + 1 = m^2 + m + 1$$

Sehingga diperoleh $(2n+1)^2 = m^2 + m + 1$, tetapi ruas kanan tidak dapat dinyatakan dalam bentuk kuadrat sempurna. Berarti tidak ada bilangan asli m dan n yang memenuhi $4f(n) = f(m)$.

Contoh 11

Diketahui fungsi f didefinisikan oleh $f(3n) = n + f(3n-3)$ dengan n bilangan bulat positif $n \geq 1$ dan $f(3n) = 1$ jika $n = 1$. Tentukan nilai $f(12)$.

Penyelesaian

Variabel-variabel dan hubungan antara variabel-variabel dalam permasalahan tersebut sudah diketaui, yakni $f(3n) = n + f(3n-3)$, sehingga penyelesaikan dapat dilakukan sebagai berikut.

Fungsi di atas dapat dinyatakan dalam bentuk $f(3n) = \begin{cases} n + f(3n-3) & jika\ n > 1 \\ 1 & jika\ n = 1 \end{cases}$

Dari persamaan $f(3n) = n + f(3n-3)$ diperoleh

$$f(3n) - f(3n-3) = n$$

Dengan menggunakan penjumlahan “telescopic” diperoleh.

$$
\begin{aligned}
f(3n) - f(3n-3) &= n \\
f(3n-3) - f(3n-6) &= n-1 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad &\qquad \vdots \\
f(6) \quad - \quad f(3) \quad &= \quad 2
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh $f(3n) - f(3) = 2 + 3 + \ldots\ldots.. + n$

Karena $f(3) = 1$ maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
f(3n) &= 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots.. + n \\
&= \frac{1}{2} n(n+1)
\end{aligned}
$$

Jadi $f(12) = f(3(4)) = \frac{1}{2}(4)(5) = 10.$

Jadi, $f(12) = 10$.

B. Kegiatan Belajar 2: Menggunakan Strategi Pemecahan Masalah dalam Pembelajaran Persamaan Garis Lurus

Dalam modul Kapita Selekta Pembelajaran Alajabar Kelas VIII SMP yang diterbitkan oleh P4TK pada tahun 2009 halaman 57 s.d 65 telah dibahas secara detail mengenai pengertian Persamaan Garis Lurus beserta contoh-contohnya.

Pernahkah Anda melewati jalan yang menanjak? Jalan yang menanjak memiliki kemiringan yang berbeda-beda, semakin menanjak kemiringannya semakin besar. Kemiringan tersebut berkaitan dengan konsep gradien garis lurus.

Berikut ini akan diberikan secara garis besar konsep-konsep yang terkait dengan persamaan dan gradien garis lurus.

1. Bentuk Umum Persamaan Garis Lurus

Bentuk umum persamaan garis lurus adalah $y = ax + b$, $a, b \in R$ dan $a \neq 0$.

Untuk menggambar persamaan garis lurus pada koordinat Cartesius dapat menggunakan tabel pasangan berurutan. Untuk menggambar sebuah garis lurus, diperlukan paling sedikit dua titik yang dilalui garis tersebut.

Contoh 12

Gambarlah grafik persamaan garis lurus $y = 3x + 6$

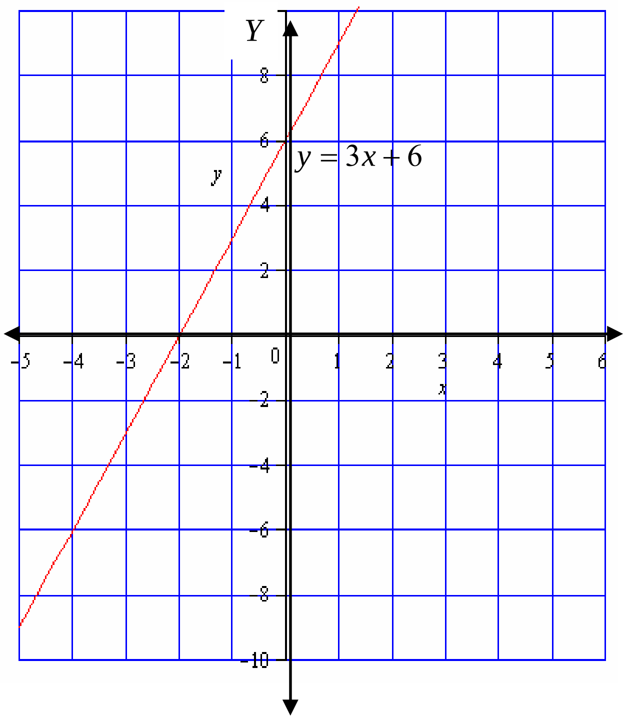
Penyelesaian

Tabel 4. Pasangan berurutan:

x	**0**	**-2**
y	6	0
Titik	(0,6)	(-2,0)

Pasangan berurutan tersebut merupakan titik potong grafik dengan sumbu Y, yakni (0,6) dan titik potong sumbu X, yakni (-2,0).

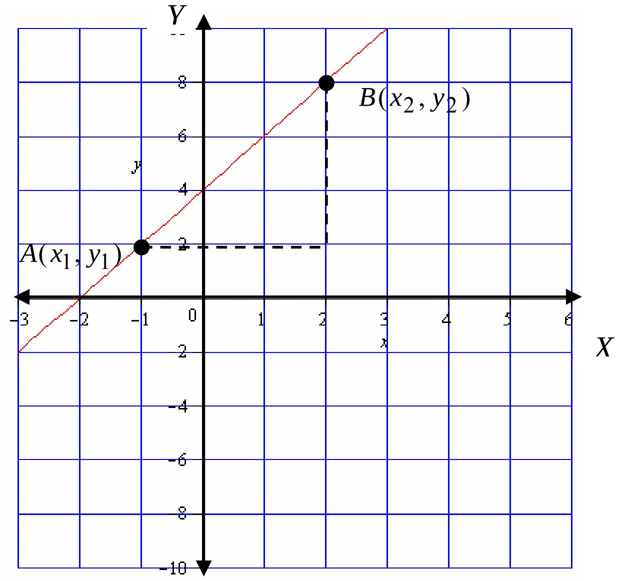
Gambar grafiknya sebagai berikut:



a. Gradien garis yang melalui dua titik

Gradien ruas garis yang melalui dua titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ adalah:

$$m_{AB} = \frac{komponen \quad y \quad garis \quad AB}{komponen \quad x \quad garis \quad AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Contoh 13

Tentukan gradien ruas garis yang melalui titik $A(-3, 7)$ dan $B(2, 5)$

Penyelesaian

Gradien ruas garis yang melalui titik $A(-3, 6)$ dan $B(2, 5)$ adalah

$$m_{AB} = \frac{5-7}{2-(-3)} = -\frac{2}{5}.$$

b. Gradien garis-garis sejajar

Garis-garis yang sejajar (tidak tegak) mempunyai gradien yang sama.

Contoh 14

Tentukan persamaan garis yang sejajar dengan garis $y = 3x + 5$ dan melalui titik $A(3, -4)$

Penyelesaian

Gradien garis $y = 3x + 5$ adalah 3. Misalkan garis yang sejajar dengan garis $y = 3x + 5$ adalah garis *h,* maka gradien garis *h* adalah *m = 3.*

Persamaan garis *h* adalah $y = 3x + b$, karena garis *h* melalui titik $A(3, -4)$, maka berlaku $-4 = 3(3) + b$, sehingga nilai b = -13.

Jadi, persamaan garis *h* adalah $y = 3x - 13$.

c. Gradien garis-garis yang saling tegak lurus

Jika diketahui dua garis saling tegak lurus, maka hasil kali gradien garis-garis yang saling tegak lurus adalah -1.

Contoh 15

Diketahui garis *g* melalui titik (4, -4) dan titik (2, 3) dan garis *h* melalui titik (2,3) dan (-2, -11). Selidiki apakah garis *g* tegak lurus garis *h*.

Penyelesaian

Untuk mengetahui apakah garis *g* tegak lurus garis *h,* ditentukan terlebih dahulu gradien garis *g* dan gradien garis *h*, nyatakan dengan m_g dan m_h.

Garis *g* melalui titik (4, -4) dan titik (2, 3), maka $m_g = \dfrac{3-(-4)}{2-4} = -\dfrac{7}{2}$.

Garis *h* melalui titik (2, 3) dan titik (-5, 1), maka

$$m_h = \frac{1-3}{-5-2} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}.$$

Hasil kali antara m_g dan m_h adalah m_g x $m_h = -\frac{7}{2} \times \frac{2}{7} = -1$.

Jadi, garis *g* tegak lurus garis *h*.

2. Persamaan Garis Lurus

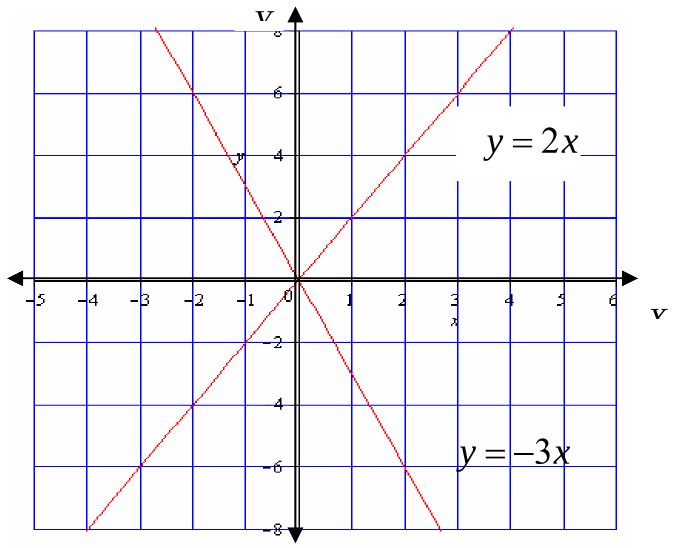
a. Persamaan garis $y = mx$

Persamaan garis $y = mx$ adalah persamaan garis lurus yang selalu melalui titik (0,0) dengan gradien *m*.

Contoh 16

1) Garis $y = 2x$ adalah garis yang melalui titik (0,0) dengan gradien 2.
2) Garis $y = -3x$ adalah garis yang melalui titik (0,0) dengan gradien -3.

Grafik dari ke empat garis tersebut adalah sebagai berikut:



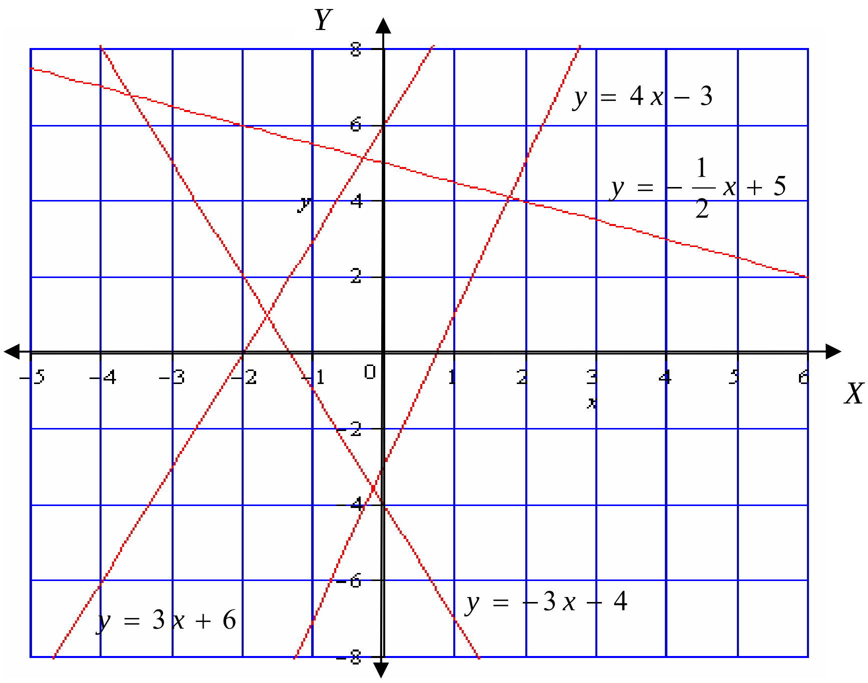
b. Persamaan garis $y = mx + c$

Persamaan garis $y = mx + c$ merupakan suatu persamaan garis dengan gradien m dan memotong sumbu *Y* di titik *A*(0,*c*).

Contoh 17

1) Garis $y = 3x + 6$ adalah garis yang melalui titik (0,6) dengan gradien 3.
2) Garis $y = -3x - 4$ adalah garis yang melalui titik (0,-4) dengan gradien -3.
3) Garis $y = -\frac{1}{2}x + 5$ adalah garis yang melalui titik (0,5) dengan gradien $-\frac{1}{2}$.
4) Garis $y = 4x - 3$ adalah garis yang melalui titik (0,-3) dengan gradien 4.

Grafik dari ke empat garis tersebut adalah sebagai berikut:



3. Menentukan Persamaan Garis Lurus

a. Persamaan garis lurus yang melalui suatu titik tertentu dengan gradien m.

Persamaan garis lurus yang melalui suatu titik $P(x_1, y_1)$ dengan gradien m adalah: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Contoh 18

Tentukan persamaan garis lurus yang bergradien $-\frac{2}{3}$ dan melalui titik $(3,-4)$.

Penyelesaian

Persamaan garis yang melalui (3,-4) dengan gradien $-\frac{2}{3}$ adalah

$$y-(-4)=-\frac{2}{3}(x-3) \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}(x-3)-4 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x-2 .$$

Jadi persamaan garis yang melalui (3,-4) dengan gradien $-\frac{2}{3}$ adalah $y=-\frac{2}{3}x-2$.

b. Persamaan Garis Lurus yang Melalui Dua Titik.

Persamaan garis lurus yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ merupakan persamaan garis yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ dengan gradien $m_{PQ}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, yakni

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$
$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

:

Contoh 19

Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik $P(-3, 5)$ dan $Q(4,-6)$

Penyelesaian

Persamaan garis lurus yang melalui titik $P(-3, 5)$ dan $Q(4,-6)$ adalah:

$$\frac{y-5}{-6-5}=\frac{x-(-3)}{4-(-5)} \Leftrightarrow \frac{y-5}{-11}=\frac{x+3}{9} \Leftrightarrow 9y=-11x+12$$

Jadi persamaan garis yang melalui titik $P(-3, 5)$ dan $Q(4,-6)$ adalah

$9y=-11x+12$

4. Strategi Pemecahan Masalah dalam Pembelajaran Persamaan Garis Lurus

Berikut ini akan disajikan beberapa contoh masalah yang berkaitan dengan persamaan garis lurus serta cara mengajarkan penyelesaian dari masalah yang berkaitan dengan persamaan garis lurus.

Contoh 20

Tentukan persamaan garis *g* yang melalui ititik *A*(-5,4) dan sejajar dengan garis *h* dengan persamaan $2y=-4x+5$.

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut langkah-langkahnya sebagai berikut.

a. Menentukan gradien garis *h*, yakni dengan mengubah persamaan $2y=-4x+5$ menjadi persamaan dalam bentuk $y=-2x+\frac{5}{2}$, sehingga diperoleh gradiennya yaitu -2.
b. Menentukan persamaan garis g, karena garis *g* sejajar garis *h*, maka gradien garis *g* adalah -2. Garis g melalui A(-5,4) dengan gradien -2, maka persamaan garis adalah $y-4=-2(x-(-5)) \Leftrightarrow y=-2x-6$.

   Jadi persamaan garis *g* adalah $y=-2x-6$.

Contoh 21

Tentukan persamaan garis *l* yang melalui ititik *A*(-4,7) dan tegak lurus dengan garis *p* dengan persamaan $4y=-3x+6$.

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut langkah-langkahnya sebagai berikut

a. Menentukan gradien garis *p*, yakni dengan mengubah persamaan $4y = -3x + 6$ menjadi persamaan dalam bentuk $y = -\frac{3}{4}x + 3$, sehingga diperoleh gradiennya yaitu $-\frac{3}{4}$.

b. Menentukan persamaan garis *l*, karena garis *l* sejajar garis *p*, maka gradien garis *l* adalah $\frac{4}{3}$. Garis *l* melalui A(-4,7) dengan gradien $\frac{4}{3}$, persamaan garis *l* adalah $y - 7 = \frac{4}{3}(x - (-4))$, sehingga diperoleh $3y = 4x + 37$.

   Jadi, persamaan garis *l* adalah $3y = 4x + 37$.

Contoh 22

Diketahui garis *k* melalui titik *A*(-1, -6) dan titik *B*(a, 4). Tentukanlah nilai *a* jika gradien garis *k* adalah $\frac{4}{5}$. Kemudian tentukan persamaan garis *k* tersebut.

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut langkah-langkahnya sebagai berikut.

(1) Untuk menentukan nilai *a*, dicari terlebih dahulu gradien garis *k* yang melalui *A*(-1, -6) dan titik *B*(a, 4) dan gradien tersebut akan sama dengan $\frac{4}{5}$. Gradien garis *k* adalah $\frac{2-(-6)}{a-(-1)}$, sehingga diperoleh

$$\frac{4}{5} = \frac{2-(-6)}{a-(-1)} \Leftrightarrow \frac{4}{5} = \frac{8}{a+1} \Leftrightarrow 4(a+1) = 8 \Leftrightarrow 4a + 4 = 8 \Leftrightarrow a = 1.$$

Jadi, nilai $a = 1$, sehingga titik B(1,4).

(2) Menentukan persamaan garis *k* caranya sebagai berikut:

$$\frac{y-(-6)}{4-(-6)}=\frac{x-(-1)}{1-(-1)} \Leftrightarrow \frac{y+6}{10}=\frac{x+1}{2} \Leftrightarrow 2(y+6)=10(x+1)$$

Sehingga diperoleh $2y=10x-2 \Leftrightarrow y=5x-1$

Jadi, persamaan garis *k* adalah $2y=10x-2 \Leftrightarrow y=5x-1$.

Contoh 23

Diketahui garis *g* melalui titik *R*(3,-5) dan titik *S*(5,*c*). Tentukan nilai c jika garis g tegak lurus dengan garis *k* yang persamaannya $3y=-6x+4$. Kemudian tentukan persamaan garis garis *g*.

Penyelesaian

Akan ditentukan terlebih dahulu nilai *c*. Gradien garis k adalah m_k = -2.

Karena garis g dan garis k saling tegak lurus, maka $m_g . m_k = -1$

Sehingga diperoleh $m_g . -2 = -1$, dari persamaan ini diperoleh $m_g = \frac{1}{2}$.

Karena garis g melalui R(3,-5) dan titik S(5,c), maka gradien garis g adalah $\frac{c-(-5)}{5-3}$.

Sehingga diperoleh $\frac{c-(-5)}{5-3}=\frac{1}{2}$. Dari persamaan tersebut diperoleh $-2=2c+10$, sehingga nilai $c=-6$.

Jadi garis *g* melalui titik R(3,-5) dan titik S(5,-6), selanjutnya akan ditentukan persamaan garis g sebagai berikut:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Rightarrow \frac{y-(-5)}{-6-(-5)}=\frac{x-3}{5-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+5}{-1}=\frac{x-3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2y+10=-x+3$$

$$\Leftrightarrow 2y=-x-7.$$

Jadi, persamaan garis g adalah $2y=-x-7$.

Contoh 24

Diketahui garis *h* melalui titik G(*a*, -5) dan titik H(-4, 3). Tentukan nilai *a* jika garis *h* sejajar dengan garis k dengan persamaan $3y = 2x + 5$. Kemudian tentukan persamaan garis *h*.

Penyelesaian

Untuk menentukan nilai *a* adalah sebagai berikut.

Gradien garis *k* adalah $m_k = \frac{2}{3}$, karena garis *h* sejajar garis *k*, maka gradien garis *h* sama dengan gradien garis *k*, jadi $m_h = \frac{2}{3}$.

Karena garis h melalui titik *G*(*a*, -5) dan titik *H*(-4, 3), maka gradien garis *h* adalah $\frac{-5-3}{a-(-4)}$ sehingga diperoleh $\frac{-8}{a+4} = \frac{2}{3}$. Diperoleh *a* = -16.

Jadi garis *h* melalui titik *G*(-16, -5) dan titik *H*(-4, 3), sehingga persamaan garis h adalah $\frac{y+5}{3+5} = \frac{x+16}{-4+16}$.

Jadi, persamaan garis *h* adalah $3y = 2x + 17$.

C. Ringkasan

Relasi dari himpunan *A* ke himpunan *B* adalah suatu aturan yang memasangkan anggota-anggota himpunan *A* ke anggota-anggota himpunan *B*. Untuk menyatakan suatu relasi ada tiga cara, yakni, dengan diagram panah, pasangan berurutan, dan dengan diagram Cartesuius

Suatu fungsi *f* dari himpunan *A* ke himpunan *B* adalah suatu relasi yang memasangkan setiap anggota himpunan *A* dengan tepat satu anggota himpunan *B*. Beberapa fungsi khusus yang sering kita jumpai adalah fungsi konstan, fungsi identitas, fungsi linear, dan fungsi kuadrat.

Bentuk umum persamaan garis lurus adalah $y = ax + b$, $a, b \in R$ dan $a \neq 0$.

Gradien garis lurus yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ adalah

$$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Dua buah garis yang sejajar mempunyai gradien sama. Jika dua buah garis saling tegak lurus maka hasil kali gradiennya adalah -1.

Persamaan garis lurus yang melalui suatu titik $P(x_1, y_1)$ dengan gradien m adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Persamaan garis lurus yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ adalah

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

D. Latihan 2

Selesaikan soal-soal berikut:

1. Diketahui himupnan $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ dan himpunan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dengan relasi *tiga lebihnya dari*. Nyatakan relasi tersebut dengan pasangan berurutan.
2. Diketahui fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + 6x + (a+1)$ mempunyai sumbu simetri $x = 3$. Tentukan nilai ekstrim fungsi tersebut dan tentukan jenisnya.
3. Diketahui fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$. Jika nilai-nilai $f(1) = 2$, $f(-1) = -4$, dan $f(3) = 10 f(-1)$, tentukanlah nilai *a, b,* dan *c*.
4. Diketahui garis *k* melalui titik *E*(1,1) dan *F*(4,5), dan garis *h* yang melalui titik *G*(8, 2) dan *H*(12, -1). Tunjukkan bahwa kedua garis tersebut saling tegak lurus, kemudian gambarlah grafiknya dalam koordinat Cartesius.
5. Diketahui garis *g* melalui titik *K*(-2, 5) dan titik *L*(3, b). Tentukan nilai *b* jika garis *g* tegak lurus dengan garis *k* yang persamaannya $4y = -3x + 1$. Kemudian tentukan persamaan garis garis *g*.

Skor untuk penyelesaian tiap soal adalah 20. Jadi, nilai akhir sama dengan 100.

Anda dapat mengecek kebenaran jawaban latihan yang telah Anda kerjakan dengan cara menyampaikan jawaban secara tertulis atau lisan kepada teman sejawat atau kepada fasilitator atau dengan melihat lampiran kunci jawaban. Bila tingkat kebenaran jawaban Anda sudah mencapai minimal 75% berarti Anda sudah memahami materi belajar dalam Modul 2 ini. Selanjutnya Anda dapat meneruskan belajar Modul 3. Bila tingkat kebenaran jawaban Anda belum mencapai minimal 75%, jangan segan untuk membaca lagi uraian materi dalam Modul 2 ini, atau bertanyalah kepada fasilitator atau sejawat Anda yang lebih memahami.

Daftar Pustaka

Alfred S. Posaminter &. Charles T. Salkind. 1988. *Challenging Problems in Algebra*. Dover Publications, INC., 31 East 2nd Street, Mincola, N.Y.11501

Bob Foster & Herlin. 2002. *Soal dan Pembahasan Matematika*. Erlangga. Jakarta.

Marsigit, dkk. 2007. *Matematika 2 SMP Kelas VIII*. Penerbit Quadra Yudhistira.

Setiawan dan Rachmadi W. 2009. *Kapita Selekta Pembelajaran Aljabar di Kelas VIII SMP (Modul Matematika SMP Program BERMUTU)*, Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

Varberg, D and E.J Purcell. 2001. *Kalkulus Edisi Tujuh* (Terjemahan). Interaksara. Batam.

MODUL 3
PEMBELAJARAN PEMECAHAN MASALAH TERKAIT SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL (SPLDV)

MODUL 3
PEMBELAJARAN PEMECAHAN MASALAH TERKAIT SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL (SPLDV)

Pada modul ini akan dibahas tentang pembelajaran pemecahan masalah yang terkait dengan persamaan linier dua variabel

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan mampu memahami pengertian persamaan linier dua variabel dan dapat mengajarkan cara penyelesaian permasalahan yang berkaitan dengan persamaan linier dengan dua variabel.

Untuk membantu Anda menguasai kemampuan tersebut, pembahasan ini dikemas dalam Tiga Kegiatan Belajar (KB) sebagai berikut.

Kegiatan Belajar 1 : Menggunakan Strategi Pemecahan Masalah dalam Pembelajaran Persamaan Linier Dua Variabel (PLDV),

Kegiatan Belajar 2 : Menggunakan Strategi Pemecahan Masalah dalam Pembelajaran Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV).

Kegiatan Belajar 3 : Menggunakan Strategi Pemecahan Masalah dalam Pembelajaran Sistem Persamaan Non Linear Dua Variabel (SPLNDV).

A. Kegiatan Belajar 1: Menggunakan Strategi Pemecahan Masalah dalam Pembelajaran Persamaan Linear Dua Variabel

Pada buku Kapita Selekta Pembelajaran Alajabar Kelas VIII SMP yang diterbitkan tahun 2009 halaman 74 s.d 81 telah dibahas secara detail mengenai pengertian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) beserta contoh-contohnya.

Untuk itu pada Kegiatan Belajar 1 berikut ini akan diberikan secara garis besar konsep-konsep yang terkait dengan Persamaan Linear Dua Variabel (PLDV), untuk mengingat kembali pengertian-pengertian tersebut.

Suatu hari, Risti ingin menukar uang senilai Rp100.000,00 dengan uang sepuluh ribuan dan lima ribuan. Berapa banyaknya uang sepuluh ribuan dan lima ribuan yang mungkin?Bagaimana cara Anda menghitungnya?

Masalah di atas berkaitan dengan konsep persamaan linear dua variabel. Berikut ini akan dibahas mengenai konsep PLDV dan strategi pemecahan masalah di atas.

1. Persamaan Linear Dua Variabel

Bentuk umum Persamaan Linear Dua Variabel adalah $ax + by = c$ dengan *a*, *b*, *c* bilangan real dan $a \neq 0, b \neq 0$, x dan y disebut variabel. Selanjutnya *a* dinamakan koefisien x, *b* dinamakan koefisien *y*, dan *c* disebut konstanta.

Karena bentuk umum PLDV adalah $ax + by = c$, merupakan persamaan linear, maka grafik persamaan $ax + by = c$ merupakan garis lurus. Menyelesaikan PLDV berarti menentukan nilai *x* dan *y* yang memenuhi PLDV, sehingga penyelesaian PLDV akan berbentuk himpunan penyelesaian yaitu $\{(x, y) \mid ax + by = c, \quad x, y \in R\}$

2. Strategi Pemecahan masalah dalam Pembelajaran Persamaan Linear Dua Variabel

Untuk menyelesaikan permasalah yang berkaitan dengan PLDV dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

a. Membaca soal dengan teliti sampai memahami permasalahannya, mengerti apa yang diketahui dan apa yang akan dicari.
b. Memilih variabel atau memisalkan suatu kuantitas yang belum diketahui dengan variabel, misalnya *x*
c. Menyatakan setiap bilangan yang muncul pada soal dengan variabel yang telah dipilih
d. Menentukan hubungan antara variabel-variabel tersebut (model matematika).

e. Menyelesaikan persamaan tersebut dan jawablah seluruh pertanyaan dari permasalahan tersebut.
f. Mengecek jawaban yang diperoleh dan menyatakan kembali jawaban tersebut ke dalam pertanyaan semula.

Contoh 1

Pak Karto berdagang buah di pasar, ia membawa satu kardus berisi 3 bungkus apel yang beratnya sama dan 4 bungkus jeruk yang beratnya sama. Berat satu kardus tersebut 24 kg, jika harga satu kilogram apel Rp15.000,00 dan harga satu kilogram jeruk Rp9.000,00, berapa harga satu kardus buah yang dibawa pak Karto?

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut langkah-langkahnya sebagai berikut.
Memilih variabel

a. Misal berat 1 bungkus apel x dan berat 1 bungkus jeruk y
b. Menyatakan setiap bilangan yang muncul pada soal dengan variabel yang telah dipilih
   Tiga bungkus apel ditulis $3x$ dan 4 bungkus jeruk ditulis $4y$
c. Menyatakan hubungan antara variabel
   Pak Karto membawa satu kardus yang beratnya 24 kg, persamaan linear yang menyatakan masalah tersebut adalah $3x + 4y = 24$
d. Menyelesaikan kalimat terbuka
   Dari persamaan $3x + 4y = 24$, diperoleh $x = \frac{24 - 4y}{3}$, sehingga penyelesaian x bernilai bulat positif diperoleh untuk nilai $y = 3$. Dengan mensubstitusikan $y = 3$ pada $x = \frac{24 - 4y}{3}$, diperoleh

$$x = \frac{24 - 4y}{3} = \frac{24 - 4.3}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

e. Menyatakan jawaban sesuai pertanyaan:

Nilai $x = 4$ dan $y = 3$ memenuhi persamaan $3x + 4y = 24$.

Jadi, berat 1 bungkus apel 4 kg dan berat 1 bungkus jeruk 3 kg.

Harga satu kilogram apel Rp15.000,00, dan 1 bungkus apel beratnya 4 kg, berarti harga semua apel Rp 60.000. Harga 1 kg jeruk Rp 9.000,00 dan 1 bungkus jeruk beratnya 3 kg, berarti harga semua jeruk Rp27.000. Harga semuanya adalah Rp60.000,00 + Rp27.000,00 = Rp87.000,00.

Contoh 2

Ratna membeli 4 kg salak dan 5 kg jeruk di toko buah dengan harga Rp69.000,00. Jika harga 1 kg jeruk Rp9.000,00, berapa harga 1 kg salak?

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut langkah-langkahnya sebagai berikut.

a. Memilih variabel

Misal harga 1 kg salak adalah x dan harga 1 kg jeruk adalah y.

b. Menyatakan setiap bilangan yang muncul pada soal dengan variabel yang telah dipilih

Ratna membeli 4 kg salak dapat ditulis $4x$, dan 5 kg jeruk dapat ditulis $5y$.

Harga 1 kg jeruk Rp9.000,00

c. Menyatakan hubungan antara variabel

d. Ratna membeli 4 kg salak dan 5 kg jeruk, dapat ditulis $4x + 5y = 69000$

e. Menyelesaikan kalimat terbuka

Dari persamaan $4x + 5y = 69000 \Leftrightarrow 4x = 69000 - 5y \Leftrightarrow x = \dfrac{69000 - 5y}{4}$

Karena diketahui harga 1 kg jeruk Rp9.000,00 maka $y = 9000$ sehingga diperoleh:

$$x = \frac{69000 - 5(9000)}{4} = \frac{69000 - 45000}{4} = \frac{24000}{4} = 6000.$$

f. Menyatakan jawabnya sesuai pertanyaan:

Jadi, harga satu kg salak adalah Rp6.000,00.

B. Kegiatan Belajar 2: Menggunakan Strategi Pemecahan Masalah dalam Pembelajaran Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV)

Pada buku Kapita Selekta Pembelajaran Alajabar Kelas VIII SMP yang diterbitkan oleh P4TK pada Tahun 2009 telah dibahas secara detail mengenai pengertian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) beserta contoh-contohnya.

Tiga tahun yang lalu umur Adi dua kali umur Rima. Lima tahun yang akan datang jumlah umur mereka 46 tahun. Dapatkah Anda menghitung berapa umur Adi dan Rima saat ini?

Masalah di atas berkaitan dengan konsep sistem persamaan linear dua variabel. Berikut ini akan dibahas mengenai konsep SPLDV dan strategi pemecahan masalah di atas.

Dalam Kegiatan Belajar 2 ini akan disampaikan secara singkat pengertian SPLDV selanjutnya akan dibahas stratetegi pemecahan masalah yang berkaitan dengan SPLDV dengan mengambil beberapa contoh permasalahan SPLDV.

1. Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Bentuk umum Sistem Persamaan Linear Dua Variabel adalah

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

dengan a, b, c, d, p, dan q merupakan bilangan real.

Untuk menentukan penyelesaian SPLDV ada tiga metode, yakni, metode grafik, metode substitusi dan metode eliminasi.

a. Metode Grafik

Metode grafik digunakan untuk menyelesaikan SPLDV dengan penyelesaian bilangan bulat. Langkah-langkah untuk menyelesaikan SPLDV dengan metode grafik adalah sebagai berikut:

Gambarlah masing-masing grafik PLDV yang terdapat pada SPLDV dalam satu bidang koordinat Cartesius.

Tentukan titik potong grafik-grafik PLDV tersebut.

Titik potong tersebut merupakan penyelesaian SPLDV yang dicari.

Contoh 3

Diketahui SPLDV

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Penyelesaian

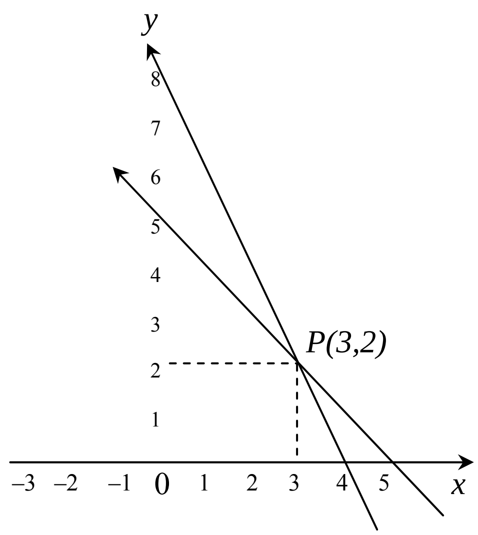
Langkah-langkah untuk menyelesaikan SPLDV adalah sebagai berikut.

1.) Menggambar grafik persamaan $2x + y = 8$ dan grafik persamaan $x + y = 5$, dengan cara menentukan titik bantu sebagai berikut

2.) Untuk persamaan $2x + y = 8$, jika $x = 0$ diperoleh $y = 8$ sehingga titik potong dengan sumbu y adalah (0,8), sedangkan jika $y = 0$ diperoleh $x = 4$ sehingga titik potong dengan sumbu x adalah (4,0).

3.) Untuk persamaan $x + y = 5$, jika $x = 0$ diperoleh $y = 5$ sehingga titik potong dengan sumbu y adalah (0,5), sedangkan jika $y = 0$ diperoleh $x = 5$ sehingga titik potong dengan sumbu x adalah $(5,0)$.

Gambarlah grafik kedua PLDV tersebut pada koordinat Cartesius, yakni



b. Metode Substitusi

Menyelesaikan SPLDV dengan metode substitusi berarti mengganti satu variabel dengan variabel yang lain untuk mendapatkan PLDV.

Misalkan, diberikan SPLDV berikut.

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

Langkah-langkah untuk menyelesaikan SPLDV dengan metode substitusi adalah sebagai berikut:

1.) Dari persamaan pertama $ax + by = p$, jika $b \neq 0$ maka nyatakan y dalam x. Sehingga diperoleh $y = \frac{p}{b} - \frac{a}{b}x$.

2.) Substitusikan $\frac{p}{b} - \frac{a}{b}x$ untuk mengganti y pada persamaan kedua, sehingga diperoleh PLDV yang berbentuk $cx + d\left(\frac{p}{b} - \frac{a}{b}\right)x = q$.

3.) Selesaikan PLDV tersebut untuk mendapatkan nilai x.

4.) Substitusikan nilai x yang diperoleh pada persamaan $ax + by = p$ untuk mendapatkan nilai y.

c. Metode Eleminasi

Menyelesaikan SPLDV dengan metode eleminasi berarti menghapus salah satu variabel dari PLDV.

Misalkan, diberikan SPLDV berikut.

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

Langkah-langkah untuk menyelesaikan SPLDV dengan metode eliminasi adalah sebagai berikut:

1) Melakukan eliminasi variabel x dari SPLDV

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \begin{vmatrix} \times c \\ \times a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow acx + bcy = cp \\ \Rightarrow acx + ady = aq \end{array}$$

$$\underline{\hspace{6cm}} -$$

$$(bc - ad)y = cp - aq$$

$$y = \frac{cp - aq}{bc - ad}$$

2) Melakukan eliminasi variabel y dari SPLDV

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \begin{vmatrix} \times d \\ \times b \end{vmatrix} \begin{aligned} &\Rightarrow adx + bdy = dp \\ &\Rightarrow bcx + bdy = bq \end{aligned}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$(ad - bc)x = dp - bq$$

$$x = \frac{dp - bq}{ad - bc}$$

2. Strategi Pemecahan Masalah pada Pembelajaran Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV)

Untuk menyelesaikan permasalah yang berkaitan dengan SPLDV dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

a. Memilih variabel, yakni memisalkan suatu kuantitas yang belum diketahui dengan variabel, misalnya *x*.
b. Menyatakan setiap bilangan yang muncul pada soal dengan variabel yang telah dipilih.
c. Menentukan hubungan antara variabel-variabel tersebut (model matematika).
d. Menyelesaikan sistem persamaan tersebut dengan menggunakan metode grafik, substitusi, eliminasi atau gabungan antar ketiganya.
e. Menjawab seluruh pertanyaan dari permasalahan tersebut.
f. Menyatakan jawaban sesuai pertanyaan semula.

Contoh 4

Empat tahun yang lalu, jumlah umur ayah dan ibu adalah 62 tahun. Enam tahun yang akan datang, umur ayah ditambah tiga kali umur ibu adalah 162 tahun. Berapakah umur ayah dan umur ibu saat ini?

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan soal tersebut dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Memilih variabel

Misal, umur ayah saat ini x tahun dan umur ibu saat ini y tahun.

b. Menyatakan setiap bilangan yang muncul pada soal dengan variabel yang telah dipilih.

Empat tahun yang lalu umur ayah ($x - 4$) tahun dan umur ibu ($y - 4$) tahun. Selanjutnya, umur ayah enam tahun yang akan datang ($x + 6$) tahun dan umur ibu enam tahun yang akan datang ($y + 6$) tahun.

c. Menentukan hubungan antara variabel-variabel tersebut

Jumlah umur ayah dan ibu empat tahun yang lalu adalah 62 tahun, berarti $(x-4)+(y-4)=62$. Enam tahun yang akan datang umur ayah ditambah 3 kali umur ibu adalah 162, berarti $(x+6)+3(y+6)=162$

d. Membuat tabel hubungan antara variabel-variabel sebagai berikut.

Tabel 5, Hubungan antar variabel

Nama	umur 4 tahun yang lalu	umur sekarang	umur 6 tahun yang akan datang
Ayah	$x - 4$	x	$x + 6$
Ibu	$y - 4$	y	$y + 6$
Jumlah umur	62		162

Dari informasi tersebut, diperoleh SPLDV berikut,

$$\begin{cases} (x-4)+(y-4)=62 \\ (x+6)+3(y+6)=162 \end{cases}$$

e. Menyelesaikan sistem persamaan tersebut dengan menggunakan metode substitusi, sehingga diperoleh

$$\begin{cases} (x-4)+(y-4)=62 \\ (x+6)+3(y+6)=162 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=70 \\ x+3y=138 \end{cases}$$

Dari persamaan $x+y=70$ diperoleh $y=70-x$

Substitusikan nilai $70-x$ untuk mengganti y pada pada persamaan $x+3y=138$, diperoleh $x+3(70-x)=138 \Leftrightarrow -2x=-72 \Leftrightarrow$

$x = 36$ (umur ayah sekarang)

Sehingga $y = 70 - x = 70 - 36 = 34$. Jadi $y = 34$ (umur ibusekarang)

f. Menyatakan jawaban sesuai pertanyaan.

Jadi, umur ayah dan ibu saat ini berturut-turut 36 tahun dan 34 tahun.

Contoh 5

Tiga tahun yang lalu umur Rini dua kali umur Dodi. Tujuh tahun yang akan datang jumlah umur mereka 59 tahun. Berapakah selisih umur Rini dan Dodi saat ini?

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan soal tersebut dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Memilih variabel

Misal, umur Rini sekarang x tahun, umur Dodi sekarang y tahun.

b. Menyatakan setiap bilangan yang muncul pada soal dengan variabel yang telah dipilih.

Umur Rini tiga tahun yang lalu $(x – 3)$ tahun, umur Dodi tiga tahun yang lalu $(y – 3)$ tahun. Umur Rini tujuh tahun yang akan datang $(x + 7)$ tahun, umur Dodi tujuh tahun yang akan datang $(y + 7)$ tahun.

c. Menentukan hubungan antara variabel-variabel tersebut

Tiga tahun yang lalu umur Rini dua kali umur Dodi, berarti $(x - 3) = 2(y - 3)$

Tujuh tahun yang akan datang jumlah umur mereka 59 tahun, berarti $(x + 7) + (y + 7) = 59$.

d. Membuat tabel hubungan antara variabel-variabel sbb:

Tabel 6. Hubungan antar variabel

Nama	umur 3 tahun yang lalu	umur sekarang	umur 7 tahun yang akan datang
Rini	$x - 3$	x	$x + 7$
Dodi	$y - 3$	y	$y + 7$
Jumlah umur			59

Dari informasi tersebut, diperoleh SPLDV berikut,

$$\begin{cases} (x-3) = 2(y-3) \\ (x+7)+(y+7) = 59 \end{cases}$$

e. Menyelesaikan sistem persamaan tersebut dengan menggunakan metode substitusi, sehingga diperoleh

Dari informasi tersebut, diperoleh SPLDV berikut,

$$\begin{cases} (x-3) = 2(y-3) \\ (x+7)+(y+7) = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y-3 \\ x+y = 45 \end{cases}$$

Substitusi x dengan $2y-3$ ke persamaan $x+y=35$ sehingga diperoleh

$$2y-3+y=45 \Leftrightarrow 3y=48 \Leftrightarrow y=16 \text{ (umur Dodi sekarang)}$$

Sehingga diperoleh nilai $x = 2y-3 = 2(16)-3 = 32-3 = 29$.

Jadi $x = 29$ (umur Rini sekarang)

f. Menyatakan jawaban sesuai pertanyaan semula

Jadi, umur Rini dan Dodi saat ini berturut-turut 29 tahun dan 16 tahun sehingga selisih umur mereka saat ini adalah 13 tahun.

Contoh 6

Pak Hasyim mempunyai kolam berbentuk persegi panjang. Lima kali panjang kolam ditambah lebar kolam sama dengan 20 m. Jika panjang kolam ditambah 5 m dan lebar kolam ditambah 4 m, maka kelilingnya menjadi 34 m. Berapakah luas kolam pak Hasyim mula-mula?

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan soal tersebut dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Memilih variabel

   Misalkan panjang kolam *x* meter dan lebarnya *y* meter.

b. Menyatakan setiap bilangan yang muncul pada soal dengan variabel yang telah dipilih.

   Lima kali panjang kolam, berarti 5*x*.

   Lebar kolam, berarti *y*.

   Panjang kolam ditambah 5, berarti $(x+5)$, lebar kolam ditambah 5 berarti $(y+5)$.

c. Menentukan hubungan antara variabel-variabel tersebut

   Lima kali panjang kolam ditambah lebarnya sama dengan 20 m, diperoleh persamaan $5x+y=20$.

   Kelilingnya kolam 34 m., diperoleh persamaan $2(x+5)+2(y+4)=34$.

   Dari informasi tersebut diperoleh SPLDV berikut

$$\begin{cases} 5x+y=20 \\ 2(x+5)+2(y+4)=34 \end{cases}$$

d. Menyelesaikan sistem persamaan tersebut dengan menggunakan metode substitusi, sehingga diperoleh

   Dari persamaan $5x+y=20$ diperoleh $y=20-5x$, kemudian nilai y tersebut disubstitusikan ke persamaan kedua, diperoleh

   $2(x+5)+2(20-5x+4)=34 \Leftrightarrow 2x+10+40-10x+8=34 \Leftrightarrow$ Sehingga diperoleh: $-8x=34-58=24 \Leftrightarrow x=3$ (panjang kolam mula-mula)

   Dengan mensubstitusikan $x=3$ pada persamaan $5x+y=20$ diperoleh $y=5$ (lebar kolam mula-mula)

e. Menyatakan jawaban sesuai pertanyaan semula.

   Jadi, panjang kolam 3 m dan lebar kolam 5 m, sehingga luasnya 15 m^2.

C. Kegiatan Belajar 3: Menggunakan Strategi Pemecahan Masalah dalam Pembelajaran Sistem Persamaan Non Linear Dua Variabel

Kadang-kadang kita menemukan permasalahan yang melibatkan sistem persamaan non linear dua peubah yang penyelesaiannya menggunakan persamaan linear dua peubah. Untuk itu dalam kegiatan belajar 3 ini akan dibahas sistem persamaan non linear dua peubah.

1. Sistem Persamaan Non Linear Dua Variabel (SPNLDV)

Persamaan non linear dua variabel adalah semua persamaan dua variabel selain persamaan linear. Contoh persamaan non linear dua variabel:

1) $\frac{5}{x}+\frac{3}{y}=6$ 2) $x^2+y^2=16$ 3) $4x-5\sqrt{y}=6$.

2. Strategi Pemecahan Sistem Persamaan Non Linear Dua Variabel (SPNLDV)

Untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear dua variabel, maka persamaan tersebut dapat diubah dahulu ke dalam persamaan linier dua variabel, kemudian kita lanjutkan langkah-langkahnya seperti menyelesaikan sistem persamaan linear.

Contoh 7

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} 3x^2+y^2=31 \\ 2x^2-y^2=14 \end{cases}$$

Penyelesaian

Cara 1

Kita ubah dulu sistem persamaan non linear tersebut ke dalam persamaan linear sebagai berikut:

Misalkan $x^2=p$ dan $y^2=q$. Dengan mensubstitusinya pada sistem persamaan non linear di atas akan diperoleh SPLDV sebagai berikut:

$$\begin{cases} 3p + q = 31 \\ 2p - q = 14 \end{cases}$$

Dengan menggunakan eliminasi pada q akan diperoleh nilai p sebagai berikut:

$$\begin{array}{r} 3p + q = 31 \\ 2p - q = 14 \\ \hline 5p = 45 \\ p = 9 \end{array} +$$

Substitusikan p dengan 9 ke persamaan $3p + q = 31$. Sehingga diperoleh

$3(9) + q = 31$, diperoleh $q = 4$.

Karena $x^2 = p$ maka diperoleh,

$$x^2 = 9$$

$x = 3$ atau $x = -3$

Karena $y^2 = q$ maka diperoleh $y^2 = 4$ sehingga $y = 2$ atau $y = -2$

Jadi himpunan penyelesaian dari SPNLDV tersebut adalah

{(-3,-2), (-3,2), (3,-2), (3,2)}.

Cara 2

Penyelesaian masalah tersebut dapat juga dilakukan secara langsung, yaitu

$$\begin{array}{r} 3x^2 + y^2 = 31 \\ 2x^2 - y^2 = 14 \\ \hline 5x^2 = 45 \\ x^2 = 9 \\ x = \pm 3 \end{array} +$$

Substitusikan nilai x ke persamaan $3x^2 + y^2 = 31$, sehingga diperoleh $y = 2$ atau $y = -2$. Jadi himpunan penyelesaian dari SPNLDV tersebut adalah

{(-3,-2), (-3,2), (3,-2), (3,2)}.

Contoh 8

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{y}=1 \\ \dfrac{9}{x}-\dfrac{4}{y}=5 \end{cases}$$

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear tesebut kita ubah dulu sistem persamaan non linear tersebut ke dalam persamaan linear sebagai berikut.

Misalkan $\dfrac{1}{x}=p$ dan $\dfrac{1}{y}=q$. Dengan mensubstitusinya pada sistem persamaan non linear di atas akan diperoleh SPLDV sebagai berikut:

$$\begin{cases} 6p+2q=1 \\ 9p-4q=5 \end{cases}$$

Dengan menggunakan eliminasi pada q akan diperoleh nilai p sebagai berikut.

$$\begin{cases} 6p+2q=1 \,\big|\times 2\big| \Rightarrow 12p+4q=2 \\ 9p-4q=5 \,\big|\times 1\big| \Rightarrow 9p-4q=5 \end{cases}$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \; +$$

$$21p=7$$

$$p=\frac{1}{3}$$

Kemudian substitusikan p dengan $\dfrac{1}{3}$ ke persamaan $9p-4q=5$. Sehingga diperoleh

$$9p-4q=5$$

$$9\left(\frac{1}{3}\right)-4q=5$$

$$3-4q=5$$

$$q=-\frac{1}{2}.$$

Kemudian dicari nilai x dan y berdasarkan nilai p dan q yang telah diperoleh.

Karena $p = \frac{1}{3}$ dan $q = -\frac{1}{2}$ maka diperoleh,

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{x} \qquad\qquad -\frac{1}{2} = \frac{1}{y}$$

$$x = 3 \qquad\qquad y = -2$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari SPNLDV tersebut adalah $\{(3,-2)\}$.

D. Ringkasan

1. Bentuk umum persamaan linear dua variabel adalah $ax + by = c$ dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0, b \neq 0$, x dan y disebut variabel. Selanjutnya a dinamakan koefisien x, b dinamakan koefisien y, dan c disebut konstanta.

   Bentuk umum Sistem Persamaan Linear Dua Variabel adalah

   $$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

   dengan dan q merupakan bilangan real.

2. Persamaan non linear dua variabel adalah semua persamaan dua variabel selain persamaan linear. Contoh persamaan non linear dua variabel:

   a. $\frac{5}{x} + \frac{3}{y} = 6$ b. $x^2 + y^2 = 16$ c. $4x - 5\sqrt{y} = 6$.

   Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua peubah dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

   a. Membaca soal dengan teliti sampai memahami permasalahannya, mengerti apa yang diketahui dan apa yang akan dicari.
   b. Memisalkan suatu kuantitas yang belum diketahui dengan variabel, misalnya x, dan menyatakan kuantitas lain yang belum diketahui dengan variabel, misalnya y.
   c. Menentukan hubungan antara variabel-variabel tersebut (model matematika).
   d. Selesaikan persamaan tersebut dan jawablah seluruh pertanyaan dari permasalahan tersebut.
   e. Uji ulang jawaban yang diperoleh dan nyatakan kembali jawaban tersebut ke dalam soal semula.

Untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear dua peubah adalah dengan mengubah persamaan non linear menjadi persamaan linear, kemudian langkah-langkahnya hampir sama dengan menyelesaikan sistem persamaan linear.

E. Latihan 3

Selesaikanlah soal-soal berikut:

1. Panjang sisi suatu persegi panjang sama dengan lima kali lebarnya. Tentukan luas persegi panjang tersebut jika kelilingnya 36 m.
2. Tentukan dua bilangan bulat positif yang jumlahnya 16 dan selisihnya 10.
3. Jumlah nilai Rani setelah mengkuti tiga kali ulangan fisika adalah 234. Jika nilai-nilai Rani selama mengikuti tiga kali ulangan fisika merupakan bilangan genap yang berurutan, tentukan nilai tertinggi yang diraih Rani.
4. Empat tahun yang lalu umur Rahmat tiga tahun lebih muda dari pada umur Faris. Adapun lima tahun yang akan datang, umur Faris ditambah dua kali umur Rahmat adalah 36 tahun. Tentukan masing-masing umur Rahmat dan Faris.
5. Tentukan himpunan penyelesaian dari SPNLDV berikut:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 31 \\ 4x^2 - y^2 = 32 \end{cases}$$

Skor untuk penyelesaian tiap soal adalah 20. Jadi, nilai akhir sama dengan 100.

Anda dapat mengecek kebenaran jawaban latihan yang telah Anda kerjakan dengan cara menyampaikan jawaban secara tertulis atau lisan kepada teman sejawat atau kepada fasilitator atau dengan melihat lampiran kunci jawaban. Bila tingkat kebenaran jawaban Anda sudah mencapai minimal 75% berarti Anda sudah memahami materi belajar dalam Modul 2 ini. Selanjutnya Anda dapat meneruskan belajar Modul 3. Bila tingkat kebenaran jawaban Anda belum mencapai minimal 75%, jangan segan untuk membaca lagi uraian materi dalam Modul 2 ini, atau bertanyalah kepada fasilitator atau sejawat Anda yang lebih memahami.

Daftar Pustaka

Alfred S. Posaminter &. Charles T. Salkind.1988. *Challenging Problems in Algebra*. Dover Publications, INC. 31 East 2nd Street, Mincola, N.Y.11501

Anton, H and Rorres. 2005. *Elementary Linear Algebra, Applications Version,9th ed*. USA: John Wiley & Sons.Inc

Bob Foster & Herlin. 2002. *Soal dan Pembahasan Matematika*. Erlangga. Jakarta

Marsigit, dkk. 2007. *Matematika 2 SMP Kelas VIII*. Penerbit Quadra Yudhistira.

Setiawan dan Rachmadi W. 2009. *Kapita Selekta Pembelajaran Aljabar di Kelas VIII SMP (Modul Matematika SMP Program BERMUTU)*, Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

PENUTUP

PENUTUP

A. Rangkuman

Dari uraian pada modul 1 sampai dengan modul 3, dapat dirangkum sebagai berikut:

1. Proses pemecahan masalah matematikadan strategi untuk memecahkan masalah sangatlah penting dalam pembelajaran Matematika
2. Untuk memecahkan masalah aljabar, siswa perlu dilatih membuat ungkapan-angkapan dan mengubah kedalam bentuk model matematika.
3. Dalam menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel , perlu dipahami sifat-sifat persamaan dan pertidaksamaan
4. Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua peubah dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Membaca soal dengan teliti sampai memahami permasalahannya, mengerti apa yang diketahui dan apa yang akan dicari.
   b. Memisalkan suatu kuantitas yang belum diketahui dengan variabel, misalnya x, dan menyatakan kuantitas lain yang belum diketahui dengan variabel, misalnya y.
   c. Menentukan hubungan antara variabel-variabel tersebut (model matematika).
   d. Selesaikan persamaan tersebut dan jawablah seluruh pertanyaan dari permasalahan tersebut.
   e. Uji ulang jawaban yang diperoleh dan nyatakan kembali jawaban tersebut ke dalam soal semula.
5. Untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear dua variabel adalah dengan mengubah persamaan non linear menjadi persamaan linear, kemudian langkah-langkahnya hampir sama dengan menyelesaikan sistem persamaan linear.

B. Penilaian/Tugas

Selesaikan soal-soal berikut:

1. Diketahui fungsi f didefinisikan oleh $f(3n) = n^2 + f(3n-3)$ dengan n bilangan bulat positif $n \geq 1$ dan $f(3n) = 1$ jika $n = 1$. Tentukan nilai $f(15)$.
2. Diketahui fungsi kuadrat $f(x) = 2ax^2 + 4x + 5a$ mempunyai nilai maksimum 3. Tentukan nilai $25a^2 + 5a$.
3. Diketahui garis s melalui titik A(2,-2) dan B(5,-11), dan garis t yang melalui titik C(0, 6) dan D(-3, 15). Tunjukkan bahwa kedua garis tersebut saling sejajar, kemudian gambarlah grafiknya dalam koordinat Cartesius.
4. Diketahui garis h melalui titik G(a, 6) dan titik H(4, 2). Tentukan nilai a jika garis h sejajar dengan garis k yang persamaannya $3y = 2x + 5$. Kemudian tentukan persamaan garis h.
5. Diketahui garis $k : y = -2x + 3$ dan $l : y = 2x - 3$, berpotongan di titik A. Garis g melalui A dan sejajar dengan $h : y = 3x + 7$. Jika garis g memotong sumbu Y di titik (0,b), tentukanlah nilai b.
6. Sebuah taman berbentuk persegi panjang, panjang sisinya tiga kali lebarnya. Keliling persegi panjang tersebut 64 m. Taman tersebut akan ditanami rumput Gajah, harga satu meter persegi rumput Rp10.000,00. Berapakah harga seluruh rumput yang digunakan untuk membuat taman?
7. Pada suatu ruang terdapat 85 orang. Banyaknya wanita di ruangan tersebut empat kali banyaknya pria. Tentukan banyaknya wanita di ruangan tersebut.
8. Lima tahun yang akan datang, umur Dedi akan menjadi empat kali umur Rangga. Jumlah umur mereka saat ini adalah 40 tahun. Tentukan umur Dedi dan Rangga sekarang.
9. Irma dan Hesti pergi ke toko alat tulis. Irma membeli 3 pensil dan satu ballpoin seharga Rp.10.000,00. Hesti membeli 2 pensil dan 3 ballpoin dengan merk yang sama seharga Rp16.000. Berapakah harga masing-masing satu pensil dan satu ballpoin?
10. Tentukan himpunan penyelesaian dari SPNLDV berikut:

$$\begin{cases} 5\sqrt{x} + \sqrt{y} = 20 \\ 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

Skor untuk penyelesaian tiap butir soal adalah 10. Jadi, nilai akhir sama dengan 100.

Anda dapat mengecek kebenaran jawaban Tugas yang telah Anda kerjakan dengan cara menyampaikan jawaban secara tertulis atau lisan kepada teman sejawat atau kepada fasilitator atau dengan melihat lampiran kunci jawaban. Bila tingkat kebenaran jawaban Anda sudah mencapai minimal 75% berarti Anda sudah memahami materi belajar dalam Modul 1 samapi 3. Bila tingkat kebenaran jawaban Anda belum mencapai minimal 75%, jangan segan untuk membaca lagi uraian materi dalam Modul ini, atau bertanyalah kepada fasilitator atau sejawat Anda yang lebih memahami.

LAMPIRAN

LAMPIRAN

A. Kunci Jawaban Latihan 1

1. Langkah-langkah pemecahan masalah matematika adalah : (1) memahami masalah matematika secara benar, (2) menyusun strategi yang mungkin dilakukan, (3) mengimplementasikan strategi yang dipilih, dan (4) memeriksa kembali hasil pekerjaan.
2. Jawaban tergantung hasil diskusi dengan sesama teman MGMP.
3. Usia Tika 11 tahun.
4. Hari ke-98.
5. Larutan A memerlukan 40 cc dan larutan B memerlukan 60 cc.
6. Banyaknya masing-masing kotak I s.d IV berturut-turut adalah 5, 7, 3, 8 dan 12 butir.
7. $\frac{97}{36}$.
8. Dengan berpikir logis bahwa hasil pengurangan akan semakin kecil apabila yang dikurangi semakin kecil dan pengurangnya semakin besar nilainya, jawaban $w = -23$.
9. Alternatif pembuktian dengan strategi bergerak dari belakang dan sifat kuadrat suatu bilangan pertidaksamaan akan terbukti.
10. Lebih dari atau sama dengan 93.

B. Kunci Jawaban Latihan 2

1. $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

   Pasangan berurutan $R = \{(4,1), (5,2), (6,3), (7,4), (8,5)\}$
2. Nilai ekstrimnya maksimum adalah 9, karena $a = -1 \quad (negatif)$
3. $a = -6, \quad b = 3, \quad c = 5$. Jadi $f(x) = -6x^2 + 3x + 5$
4. Gradien garis *k* adalah $m_k = \frac{4}{3}$, gradien garis *h* adalah $m_k = -\frac{3}{4}$.

Sehingga diperoleh $m_k.m_h = \frac{4}{3}\left(-\frac{3}{4}\right) = -1$. Jadi garis k dan garis k saling tegak lurus.

5. Nilai $b = \frac{35}{3}$.

C. Kunci Jawaban Latihan 3

1. Luas persegi panjang adalah 45 m^2
2. Bilangannya adalah 13 dan 3.
3. Nilainya adalah : 76 , 78, 90. Nilai tertingginya adalah 90.
4. Umur Rahmat 6 tahun, umur Faris 9 tahun.
5. HP = {(3,2), (3,-2), (-3,2), (-3,-2)}

D. Kunci Jawaban Tugas

1. $f(15) = 55$
2. $a = -\frac{2}{5}$ sehingga $25a^2 + 5a = 2$
3. $m_s = \frac{-11+2}{5-2} = -3$, $m_s = \frac{15-6}{-3+0} = -3$
4. Nilai a = 10. Persamaan garis h adalah $3y = 2x - 2$
5. Nilai b = -7
6. Harga rumput Rp320.000,00
7. Banyaknya wanita di ruangan tersebut adalah 68 orang.
8. Umur Dedi adalah 35 tahun, umur Rangga adalah 5 tahun.
9. Harga pensil Rp 2.000,00, dan harga ballpoin Rp4.000,00
10. $x = 9$ dan $y = 25$

PPPPTK MATEMATIKA

Jalan Kaliurang Km. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, Yogyakarta
Kotak Pos 31 YKBS YOGYAKARTA 55281
Telepon (0274) 881717, Faksimili 885752
Web site: p4tkmatematika.com E-mail: p4tkmatematika@yahoo.com