DIKLAT GURU PENGEMBANG MATEMATIKA SMK
JENJANG LANJUT TAHUN 2009

PROGRAM LINEAR

Oleh: FADJAR SHADIQ, M.App.Sc.

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK
DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
2009

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas karunia-Nya, bahan ajar ini dapat diselesaikan dengan baik. Bahan ajar ini digunakan pada Diklat Guru Pengembang Matematika SMK Jenjang Lanjut Tahun 2009, pola 120 jam yang diselenggarakan oleh PPPPTK Matematika Yogyakarta.

Bahan ajar ini diharapkan dapat menjadi salah satu rujukan dalam usaha peningkatan mutu pengelolaan pembelajaran matematika di sekolah serta dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat di dalam maupun di luar kegiatan diklat.

Diharapkan dengan mempelajari bahan ajar ini, peserta diklat dapat menambah wawasan dan pengetahuan sehingga dapat mengadakan refleksi sejauh mana pemahaman terhadap mata diklat yang sedang/telah diikuti.

Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah berpartisipasi dalam proses penyusunan bahan ajar ini. Kepada para pemerhati dan pelaku pendidikan, kami berharap bahan ajar ini dapat dimanfaatkan dengan baik guna peningkatan mutu pembelajaran matematika di negeri ini.

Demi perbaikan bahan ajar ini, kami mengharapkan adanya saran untuk penyempurnaan bahan ajar ini di masa yang akan datang. Saran dapat disampaikan kepada kami di PPPPTK Matematika dengan alamat: Jl. Kaliurang KM. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, DIY, Kotak Pos 31 YK-BS Yogyakarta 55281. Telepon (0274) 881717, 885725, Fax. (0274) 885752. email: p4tkmatematika@yahoo.com

Kepala,

Kasman Sulyono
NIP. 130352806

Daftar Isi

KOMPETENSI

Memiliki kemampuan untuk mengembangkan keterampilan siswa dalam melakukan pemodelan (*modelling*) dengan menggunakan sistem persamaan maupun program linear..

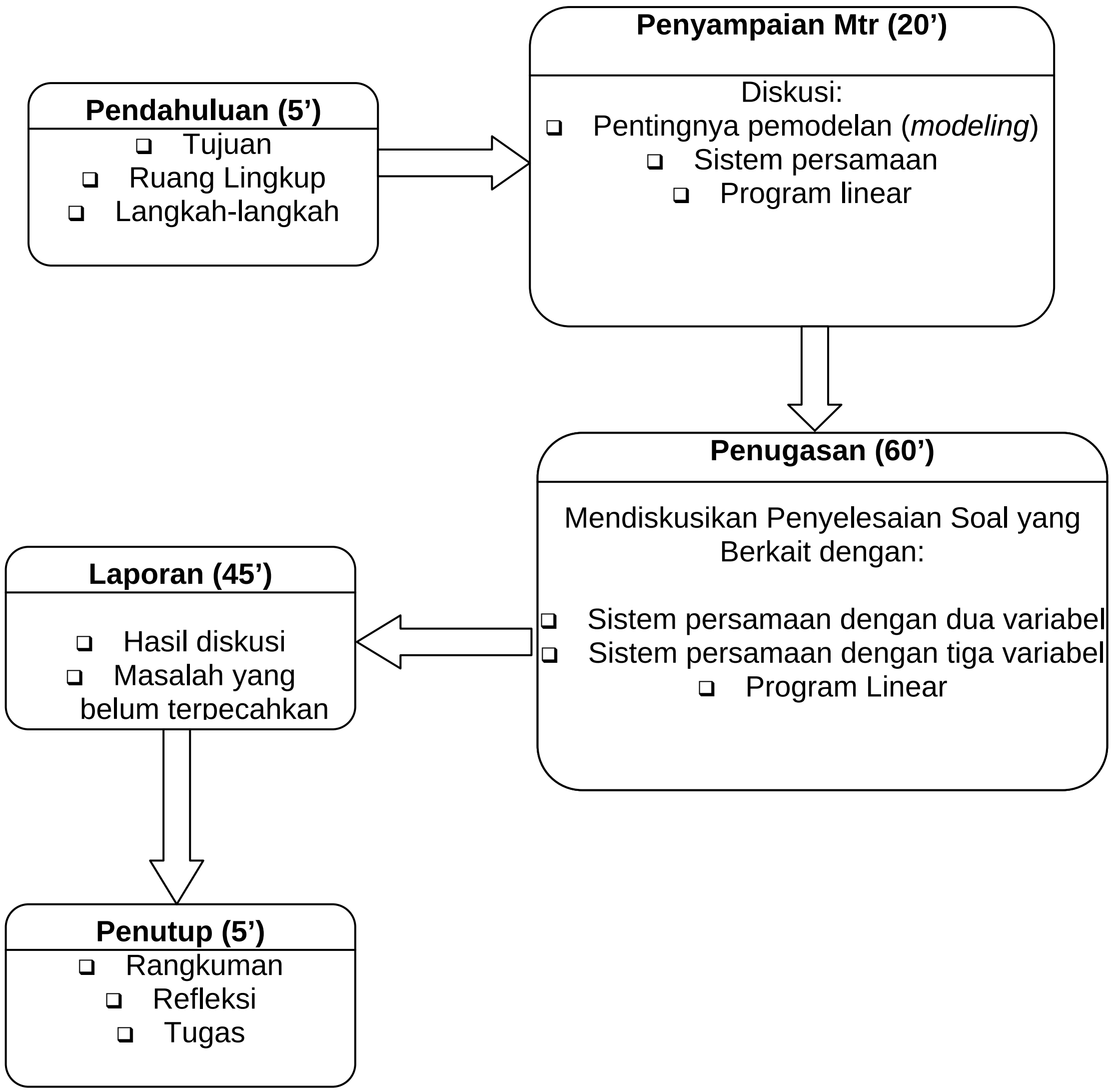
SUB KOMPETENSI

- Memiliki kemampuan mengidentifikasi dan memecahkan permasalahan pembelajaran program linear.
- Memiliki kemampuan mengembangkan proses pembelajaran program linear secara induktif atau konstruktivis.
- Memiliki kemampuan memecahkan masalah yang berkait dengan program linear, yang membutuhkan kemampuan bernalar dan berpikir tingkat tinggi.

PETA BAHAN AJAR

Mata diklat untuk jenjang lanjut ini membutuhkan pengetahuan prasyarat tentang program linear dan sistem persamaan yang telah dipelajari pada diklat jenjang dasar. Pada diklat jenjang lanjut ini, para peserta diklat diharapkan sudah dapat mengembangkan dan meningkatkan kemampuannya, dalam bentuk kemampuan mengidentifikasi dan memecahkan permasalahan pembelajaran program linear, kemampuan mengembangkan proses pembelajaran program linear secara induktif atau konstruktivis, dan kemampuan memecahkan masalah yang berkait dengan program linear yang membutuhkan kemampuan bernalar dan berpikir tingkat tinggi. Dengan bekal seperti ini, diharapkan para peserta diklat jenjang lanjut ini akan mampu membantu teman guru SMK-nya di lapangan.

SKENARIO PEMBELAJARAN



Bab I
Pendahuluan

A. Latar Belakang

Latar belakang lampiran Permendiknas nomor 22 tahun 2006 tentang Standar Isi Mata Pelajaran Matematika SMK (Depdiknas, 2006: 387) menyatakan bahwa: “Pendekatan pemecahan masalah merupakan fokus dalam pembelajaran matematika ....” Pada proses pemecahan masalah di SMK, strategi pemodelan (*modelling*) adalah yang paling sering digunakan, yaitu mengubah masalah umum atau masalah dalam kehidupan sehari-hari menjadi bentuk model matematika. Program linear didefinisikan sebagai cara untuk memecahkan suatu persoalan model matematika yang terdiri dari pertidaksamaan linear. Yang menjadi pengetahuan prasyarat adalah sistem persamaan linear, baik sistem persamaan linear dua maupun tiga variabel.

Karenanya, materi program linear ini beserta materi sistem persamaan akan menjadi materi yang sangat menentukan keberhasilan para siswa SMK dalam memecahkan masalah umum atau masalah dalam kehidupan sehari-hari. Kesulitan yang paling sering ditemui guru berkait dengan sistem persamaan linear maupun program linear adalah kesulitan para siswa dalam menyusun model matematikanya, atau mengubah masalah umum atau masalah dalam kehidupan sehari-hari menjadi bentuk model matematika menjadi persamaan linear, sistem persamaan linear, pertidaksamaan linear, maupun sistem persamaan linear. Itulah sebabnya, pada diklat jenjang lanjut ini, materi program linear masih dibahas namun dengan penekanan kearah pemecahan masalah yang ditemui guru pada proses pembelajaran program linear dan sistem persamaan linear, di samping belajar memecahkan soal atau masalah persamaan dan program linear yang memerlukan kemampuan benalar dan berpikir tingkat tinggi.

B. Tujuan

Modul ini disusun dengan maksud untuk memberikan tambahan pengetahuan berupa wawasan bagi guru SMK yang mengikuti diklat jenjang lanjut di PPPPTK Matematika, dengan harapan dapat digunakan sebagai salah satu sumber untuk memecahkan masalah-masalah pengajaran program linear dan sistem persamaan linear SMK.

C. Cara Penggunaan Modul

Pembahasan pada modul ini lebih menitik-beratkan pada diskusi identifikasi dan pemecahan masalah yang berkait dengan sistem persamaan dan program linear. Di samping itu, akan dibahas juga bagaimana memfasilitasi siswa agar dapat mempelajari materi program linear lebih bermakna. Setiap bagian modul ini dimulai dengan beberapa contoh diikuti dengan teori-teori, dan diakhiri dengan latihan atau tugas. Di samping itu, dikemukakan juga tentang hal-hal penting yang perlu mendapat penekanan para guru di saat membahas pokok bahasan ini di kelasnya. Karenanya, para pemakai modul ini disarankan untuk membaca lebih dahulu teorinya sebelum mencoba mengerjakan latihan yang ada. Selama diskusi, para peserta diharapkan secara aktif mengemukakan keberhasilan maupun kegagalan selama proses pembelajaran. Jika para pemakai modul ini mengalami kesulitan maupun memiliki saran, sudi kiranya menghubungi penulisnya, melalui *email:* fadjar_p3g@yahoo.com, telepon (0274)880762; HP: 08156896973, *website (situs):* www.fadjarp3g.wordpress.com atau melalui PPPPTK Matematika, Kotak Pos 31 YKBS, Yogyakarta dan fax (0274)885752.

Bab II
Sistem Dua Persamaan Linear Dengan Dua Variabel

Pada Bab I telah dinyatakan bahwa program linear adalah cara untuk memecahkan suatu persoalan yang model matematikanya terdiri dari pertidaksamaan linear. Yang menjadi pengetahuan prasyarat adalah sistem persamaan linear, baik sistem persamaan linear dua maupun tiga variabel. Karena itu, paket ini akan dimulai dengan membahas sistem persamaan linear dua variabel dan akan diikuti dengan membahas sistem persamaan linear tiga variabel.

A. Pengantar

Abrahamson dan Gray (1971: 326) menyatakan bahwa masalah berikut telah muncul di dalam buku karangan Newton, yaitu *Aritmetica Universalis* (1707). Masalahnya adalah sebagai berikut:

Tiga macam cairan terbuat dari air, etil-alkohol, dan metil alkohol dalam proporsi (perbandingan) dalam berat seperti ditunjukkan tabel di bawah ini:

	Air	Metil-alkohol	Etil-alkohol
Cairan I	*0,80*	*0,15*	*0,05*
Cairan II	*0,50*	*0,25*	*0,25*
Cairan III	*0,30*	*0,20*	*0,50*

Tentukan perbandingan dari dari cairan I, cairan II, dan cairan III; agar didapat perbandingan dari air, metil-alkohol, dan etil alkohol dalam perbandingan:

a. 0,60 : 0,20 : 0,20
b. 0,70 : 0,20 : 0,10.

Langkah-langkah apa saja yang dapat Anda gunakan untuk memecahkan soal di atas? Berapa hasilnya?

B. Sistem Persamaan Linear

Sekarang, jika dimisalkan bahwa Anda diminta untuk menentukan suatu bilangan yang jika dikalikan 5 akan menghasilkan 10, untuk menentukan bilangan dengan persyaratan tersebut, Anda dapat menggunakan metode atau cara mencoba-coba sehingga didapat bilangan 2 yang kalau dikalikan dengan 5 akan menghasilkan 10. Untuk menyelesaikan soal atau masalah seperti di atas, salah cara atau metode lainnya adalah dengan mengandaikan bahwa penyelesaian dari yang ditanyakan sudah didapat lalu menyesuaikannya dengan yang diketahui untuk melanjutkan menyelesaikan atau memecahkan masalah tadi. Dengan demikian, x dianggap atau dimisalkan sebagai jawabannya. Persamaan yang didapat adalah $2x = 10$; sehingga $x = 5$. Bilangan 5 ini disebut penyelesaian dari $2x = 10$.

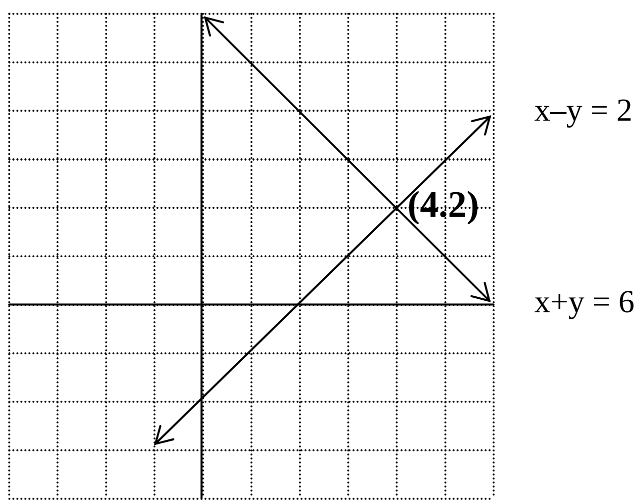
Untuk menyelesaikan persamaan linear $2x + 3y = 5$ adalah dengan mencari pasangan berurutan dari bilangan real x_1, y_1, sedemikian sehingga $2x_1 + 3y_1 = 5$ disebut atau merupakan penyelesaian dari persamaan linear $2x + 3y = 5$. Dengan demikian, (1,1), (–2,3), (4,–1) merupakan tiga contoh penyelesaian persamaan 2x + 3y = 5. Jika semesta pembicaraannya adalah himpunan bilangan real, akan didapat tak hingga banyaknya pasangan berurutan yang memenuhi persamaan linear 2x + 3y = 5. Himpunan dari seluruh penyelesaian persamaan tersebut dapat ditunjukkan secara geometris yang diwakili oleh tak hingga banyaknya titik-titik yang terletak pada suatu garis lurus. Dengan demikian, persamaan dalam bentuk ax + by = c, dengan a, b, dan c anggota himpunan bilangan real R (dengan syarat kedua nilai a dan b tidak boleh sama-sama 0), merupakan bentuk umum dari persamaan linear dengan dua variabel x dan y, sedangkan grafiknya akan berupa garis lurus.

Dua persamaan linear dengan dua variabel x dan y yang saling berkaitan membentuk suatu sistem dari dua persamaan linear dengan dua variabel. Contohnya adalah:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - 5y = 115 \\ 7x + 2y = 40 \end{cases}$$

Dua persamaan linear dengan dua variabel *x* dan *y* yang saling berkait dan membentuk suatu sistem dari dua persamaan linear dengan dua variabel di atas adalah model matematika dari soal seperti: “Tentukan dua bilangan yang jumlahnya 6 dan selisihnya adalah 2.”

Untuk menyelesaikan soal di atas adalah dengan menentukan seluruh pasangan berurutan yang memenuhi kedua persamaan linear tersebut. Jika kedua persamaan linear tersebut digambarkan pada satu sumbu kartesius seperti di bawah ini,



Grafik kedua persamaan tersebut akan berpotongan di titik (4,2) yang merupakan penyelesaian dari sistem persamaan dengan dua variabel tersebut. Untuk mengecek kebenaran hasilnya adalah dengan mengganti variabel x dan y pada sistem persamaan tersebut dengan 4 dan 2 sehingga menghasilkan:

x + y menjadi 4 + 2 = 6 (Kalimat bernilai benar)
x – y menjadi 4 – 2 = 2 (Kalimat bernilai benar)

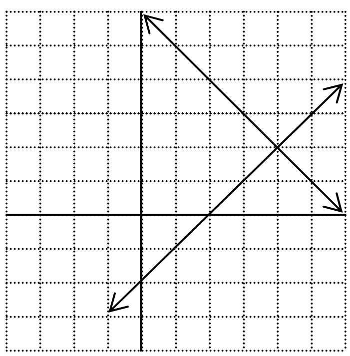
Langkah terakhir dalam proses pemecahan masalah, yaitu menyesuaikan hasilnya dengan yang diketahui dan sekaligus mengecek kebenaran hasil ini sering tidak dilakukan para siswa.

Karena grafik dari persamaan linear dengan dua variabel berupa garis lurus, maka akan terdapat tiga kemungkinan (tiga kasus) yang akan terjadi pada penyelesaian sistem persamaan linear dengan dua variabel, yaitu:

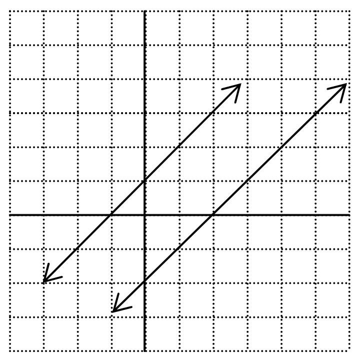
Kemungkinan 1: Grafik dari kedua persamaan linear tersebut berpotongan di satu titik seperti contoh di atas. Dengan demikian, hanya ada satu penyelesaian dan sistem persamaan dengan dua variabel ini disebut sistem yang konsisten.

Kemungkinan 2: Grafik dari kedua persamaan linear tersebut tidak berpotongan karena kedua garisnya sejajar. Dengan demikian, tidak ada penyelesaian dan sistem persamaan dengan dua variabel ini disebut sistem yang tidak konsisten.

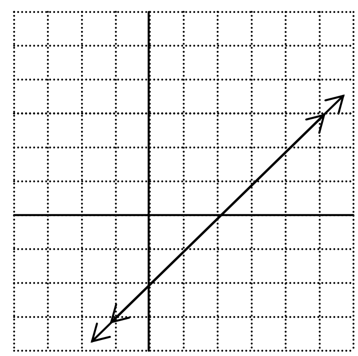
Kemungkinan 3: Grafik dari kedua persamaan linear tersebut saling berimpit, sehingga koordinat setiap titik akan memenuhi sistem persamaannya. Dengan demikian, ada tak terhingga penyelesaian dan sistem persamaan dengan dua variabel ini disebut sistem yang *dependent*.



Ada Satu Penyelesaian



Ada Nol Penyelesaian



Ada Tak Hingga Penyelesaian

Jadi, di saat kita menyelesaikan sistem persamaan dari dua persamaan dengan dua varibel kita akan mengetahui tiga kemungkinan yang akan terjadi, yaitu sistem tersebut akan memiliki satu pasangan berurutan sebagai penyelesaiannya, tidak memiliki penyelesaian, ataupun tak terhingga banyak penyelesaiannya. Perlu diperhatikan juga bahwa menyelesaikan sistem persamaan dengan grafik membutuhkan penggambaran grafik yang akurat.

Cara lain untuk menentukan apakah suatu sistem dua persamaan linear dengan dua variabel termasuk adalah konsisten, tidak konsisten, ataupun dependent (tergantung) tanpa menggambar lebih lebih dahulu adalah dengan membandingkan koefisien variabel-variabelnya dan membandingkan juga konstanta-konstantanya. Pada sistem dua persamaan linear dengan dua variabel:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ px + qx = r \end{cases}$$

akan memiliki satu penyelesaian jika: $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$ (sistem yang konsisten);

tidak akan memiliki penyelesaian jika $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$ (sistem yang tidak konsisten);

ataupun memiliki tak hingga penyelesaian jika $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ (sistem yang saling bergantung atau dependen)

Sesungguhnya, hanya penyelesaian dengan bilangan bulatlah yang agak mudah diselesaikan dengan cara grafik. Karenanya, penyelesaian sistem persamaan dapat dilakukan dengan cara substitusi atau eleminasi. Cara lainnya adalah dengan cara matriks ataupun determinan.

C. Latihan/Tugas Bab II

1. Jumlah dua bilangan adalah –42. Jika bilangan kedua dikurangkan dari bilangan pertama, hasilnya adalah 52. Tentukan kedua bilangan tersebut.

2. Makanan dari kedelai mengandung 16% protein, sedangkan makanan dari jagung hanya mengandung 9% protein. Berapa gram kedelai dan berapa gram jagung harus dicampur agar didapat 350 gram campuran dengan kandungan senilai 12% protein?

3. Campuran A mengandung 25% asam dan campuran B mengandung 50% asam. Berapa liter campuran A dan berapa liter campuran B dibutuhkan untuk mendapatkan 10 liter campuran dengan kadar 40% asam?

4. Cairan anti beku merek A mengandung 18% alkohol, sedangkan yang merek B mengandung 10% alkohol. Tentukan banyaknya cairan A dan cairan B yang dibutuhkan untuk mendapatkan 20 liter cairan yang mengandung 15% alkohol.

5. Pak Amir menginvestasikan uangnya sebesar Rp. 15.000.000,00 . Sebagian dari uang tsb mendapat bunga tunggal sebesar 9% dan sisanya sebesar 10% selama 1 bulan. Jika Pak Amir mendapat bunga sebesar Rp. 1.432.000,00 sebulan, tentukan pembagian investasi Pak Amir tsb!

6. Dua mobil meninggalkan kota A dengan arah berlawanan. Kecepatan mobil pertama adalah 80 km/jam dan yang satu lagi 96 km/jam. Setelah berapa jam kedua mobil akan saling berpisah sejauh 528 km?

7. Diketahui Putri berusia lebih tua 12 tahun dari Andi. Empat tahun lagi umur Andi akan menjadi $^2/_3$ umur Putri. Tentukan umur keduanya sekarang?

8. Ari dan Dina telah berpengalaman mengajar selama 46 tahun. Dua tahun lalu, lama mengajar Ari adalah 2,5 kali lama mengajar Dina. Berapa tahun kedua guru tsb telah mengajar?

9. Suatu bilangan asli terdiri atas dua angka. Angka puluhannya adalah dua lebihnya dari tiga kali angka satuannya. Jika kedua angka pada bilangan tsb dipertukarkan tempatnya, akan didapat suatu bilangan baru yang 13 kurangnya dari separuh bilangan asal tadi. Tentukan bilangan yang dimaksud!

10. Besar suatu sudut adalah 8^o lebihnya dari tiga kali besar sudut pelurusnya. Tentukan besar ukuran kedua sudut tsb!

11. Radiator suatu mobil memuat 16 liter cairan yang terdiri atas air dan zat anti beku, dengan kadar sebesar 30%. Berapa liter cairan yang harus dibuang dan diganti dengan cairan murni anti beku agar didapat cairan dengan kadar 50% anti beku?

12. Ani ke sekolahnya dengan berjalan kaki dan berlari-lari kecil. Kecepatan rata-ratanya berjalan kaki adalah 4 km/jam dan berlari-lari kecil adalah 8 km/jam. Pada suatu hari, Ani menempuh jarak sejauh 6 km dari rumah ke sekolahnya selama 1 jam. Tentukan jarak yang ditempuh Ani untuk berlari-lari kecil!

13. Penyebut suatu pecahan adalah 12 lebihnya dari pembilangnya. Jumlah pembilang dan penyebut pecahan tersebut adalah 5 lebihnya dari tiga kali penyebutnya. Tentukan kebalikan pecahan tersebut!

14. Suatu penerbit mencetak 880 buah buku khusus, harganya Rp. 12.000,00 / buah atau Rp. 20.000,00 untuk dua buku. Uang yang diterima penerbit dari penjualan buku tersebut adalah Rp. 9.840.000,00. Ada berapa orang yang membeli langsung 2 buku?

15. Kereta pertama meninggalkan kota A menuju kota B pada pukul 09.00 pagi. Satu jam berikutnya kereta kedua berangkat dari kota B menuju kota A. Kedua kereta bertemu pada pukul 12.00 tengah hari. Jika kereta kedua berangkat pada pukul 09.00 pagi dan kereta pertama berangkat pada pukul 10.30 pagi, kedua kereta akan bertemu pada pukul 12.00 juga. Tentukanlah perbandingan kecepatan dua kereta tersebut.

Bagian III
Sistem Tiga Persamaan Linear Dengan Tiga Variabel

Setelah membahas sistem persamaan linear dua variabel, maka sekarang akan dibahas sistem persamaan linear tiga variabel. Sekali lagi, hal ini terjadi karena penekanan mata diklat ini adalah pada peningkatan kompetensi guru dalam pemodelan (*modelling*) yang sangat penting dimiliki guru dan siswa dalam memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

A. Pengantar

Perhatikan sekali lagi soal berikut. Abrahamson dan Gray (1971: 326) menyatakan bahwa masalah tersebut telah muncul di dalam buku karangan Newton, yaitu *Aritmetica Universalis* (1707). Masalahnya adalah sebagai berikut:

Tiga macam cairan terbuat dari air, etil-alkohol, dan metil alkohol dalam proporsi (perbandingan) dalam berat seperti ditunjukkan tabel di bawah ini:

	Air	Metil-alkohol	Etil-alkohol
Cairan I	*0,80*	*0,15*	*0,05*
Cairan II	*0,50*	*0,25*	*0,25*
Cairan III	*0,30*	*0,20*	*0,50*

Tentukan perbandingan dari dari cairan I, cairan II, dan cairan III; agar didapat perbandingan dari air, metil-alkohol, dan etil alkohol dalam perbandingan:

a. 0,60 : 0,20 : 0,20
b. 0,70 : 0,20 : 0,10.

Berdasar soal nomor (a) di atas, nampaklah bahwa untuk membuat 1 kg cairan I dibutuhkan 0,80 kg air, 0,15 metil alkohol, dan 0.05 etil alkohol. Masalah yang dikemukakan Newton di atas menunjukkan bahwa Newton, yang lebih dikenal dengan ahli Fisika, ternyata merupakan ahli Matematika juga.

Tidak hanya itu, Newton telah menunjukkan kepada kita, para guru matematika tentang pentingnya soal atau masalah yang berkait langsung dengan kehidupan nyata sehari-hari, sehingga dengan cara seperti itu, keabstrakan matematika lalu menjadi menurun kadarnya. Dengan cara seperti itu pula para siswa diharapkan akan lebih tertarik mempelajari mata pelajaran matematika karena materi yang mereka pelajari akan dapat digunakan langsung di dalam kehidupan mereka sehari-hari.

Menurut Abrahamson dan Gray (1971: 326); untuk menyelesaikan soal atau masalah seperti di atas, salah cara atau metode terbaiknya adalah dengan mengandaikan bahwa penyelesaian dari yang ditanyakan sudah didapat lalu menyesuaikannya dengan yang diketahui untuk melanjutkan menyelesaikan atau memecahkan masalah tadi. Dengan demikian; x, y, dan z berturut-turut merupakan proporsi (dalam ukuran kilogram) dari berat cairan I, cairan II, dan cairan III; sehingga $x + y + z = 1$ Setelah itu, campuran cairan tersebut akan terdiri atas:

Air	(0,80x + 0,50y + 0,30z) = 0,60
Metil Alkkohol	(0,15x + 0,25y + 0,20z) = 0,20
Etil Alkkohol	(0,05x + 0,25y + 0,50z) = 0,20

Tiga persamaan di atas dapat diselesaikan secara aljabar sehingga didapat z = $\frac{1}{7}$; y = $\frac{3}{7}$; dan x = $\frac{3}{7}$. Dengan demikian, didapat berat cairan I : cairan II : cairan III = 3 : 3 : 1 agar didapat perbandingan berat dari air, metil-alkohol, dan etil alkohol dalam perbandingan: 0,60 : 0,20 : 0,20.

B. Sistem Persamaan Linear Dengan Tiga Variabel

Perhatikan sekarang, contoh berikut ini:

Suatu perusahaan memproduksi 3 macam produk yang berbeda, yaitu produk R, S, dan T. Produk tersebut memerlukan jasa dua kelompok pekerja.
Kelompok pertama terdiri dari teknisi-teknisi terlatih dan kelompok lainnya terdiri dari pekerja-pekerja biasa yang tidak terlalu memerlukan keterampilan khusus.
Produk R memerlukan satu hari kerja dengan tenaga terdiri dari 5 teknisi terampil dan 5 pekerja biasa untuk setiap unit produk yang akan dihasilkan, sedangkan produk S memerlukan 10 teknisi terampil dan 10 pekerja biasa untuk tiap unit produksi.
Produk T membutuhkan 2 tenaga teknisi dan 4 pekerja untuk tiap unitnya.
Perusahaan tersebut ingin mengetahui berapa banyak unit tiap produknya yang harus diproduksi setiap harinya agar seluruh karyawan yang terdiri atas 100 teknisi dan 150 pekerjanya terus bekerja.

Jika dimisalkan x_1, x_2 dan x_3 mewakili jumlah unit R, S dan T yang dihasilkan tiap harinya, maka secara matematis, masalahnya akan menjadi:

$$5\,x_1 + 10\,x_2 + 2\,x_3 = 100 \text{ (I)}$$
$$5\,x_1 + 10\,x_2 + 4\,x_3 = 150 \text{ (II)}$$

Sistem persamaan ini terdiri atas dua persamaan dengan tiga variabel x_1, x_2, dan x_3. Seperti contoh di atas, peubah tersebut dapat diganti dengan x, y, dan z. Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan tiga variabel, adalah dengan mencari pasangan berurutan yang terdiri atas tiga bilangan real sedemikian sehingga memenuhi setiap komponen sistem persamaan tersebut.

Dengan mengurangkan persamaan pertama dari persamaan kedua (II – I); akan didapat x_3 = 25. Hasil ini jika disubstitusikan pada tiap-tiap persamaan yaitu persamaan I ataupun II, akan didapat persamaan III, yaitu:

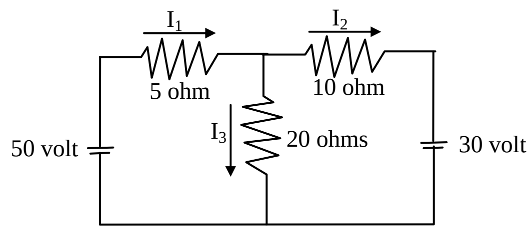
$$5\,x_1 = 50 - 10\,x_2, \text{ atau:}$$
$$x_1 = 10 - 2\,x_2.$$

Karena x_1, x_2, dan x_3 mewakili jumlah produk R, S dan T yang dihasilkan tiap harinya, maka nilai-nilai tersebut tidak mungkin negatif, sehingga nilai yang mungkin untuk x_2 adalah 0, 1, 2, 3, 4, 5. Dengan x_3 = 25, jawaban-jawaban yang didapat untuk x_1 dan x_2 adalah sebagai berikut.

x_1	10	8	6	4	2	0
x_2	0	1	2	3	4	5

Untuk memilih antara kemungkinan-kemungkinan tersebut, perusahaan tersebut perlu menggunakan pertimbangan lain. Dengan demikian, secara matematis; (10, 0, 25), (8, 1, 25), serta (6, 2, 25) merupakan tiga contoh penyelesaian sistem dua persamaan dengan tiga variabel di atas.

Sebuah sistem persamaan linear yang memuat lebih banyak persamaan daripada variabelnya, bisa didapat dari suatu sistem aliran listrik seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini.



Jika I, I_2, dan I_3 mewakili besarnya aliran listrik yang dinyatakan dalam ampere, maka pada sistem sirkuit tersebut akan didapatkan empat persamaan dengan tiga variabel berikut:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$
$$5I_1 + 20\ I_3 = 50$$
$$10\ I_2 - 20\ I_3 = 30$$
$$5\ I_1 + 10\ I_2 = 80$$

Sistem tersebut akan memiliki jawaban yang sesuai dengan setiap komponen persamaannya, yakni untuk $I_1 = 6$, $I_2 = 5$, dan $I_3 = 1$. Tentu saja, ada banyak bentuk lain yang dapat diterapkan untuk m buah persamaan linear dengan n buah variabel yang tidak diketahui.

C. Tafsiran Geometrisnya

Contoh berikut akan menjelaskan tafsiran geometris dari sistem tiga persamaan dengan tiga variabel yang memiliki tepat satu penyelesaian. Pada sistem dengan dua variabel, sistem persamaan tersebut dapat digambarkan pada bidang kartesius. Kelanjutannya, pada sistem dengan tiga variabel, sistem persamaan tersebut dapat digambarkan dalam bentuk dimensi tiga (bangun ruang). Sebagai contoh, perhatikan sistem berikut:

$$\begin{aligned} &(1) \quad x + y + z = 3 \\ &(2) \quad 2y + z = 2 \\ &(3) \quad y + 2z = 2 \end{aligned}$$

Jika suatu bidang datar digambarkan sebagai wakil dari setiap persamaan pada sistem tersebut, maka ketiga gambar akan berpotongan di titik $(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Titik tersebut merupakan satu-satunya titik yang koordinatnya memenuhi ketiga persamaan linear dengan tiga variabel di atas.

D. Latihan/Tugas Bab III

1. Dua macam besi baja P dan Q dihasilkan oleh suatu pabrik, yang menjual produknya dalam ukuran ton, tetapi membeli beberapa bahan bakunya dalam unit dengan berat 100 pon setiap unitnya. Untuk tiap ton besi baja P yang dihasilkan, dibutuhkan 4 unit logam A

dan 4 unit logam B. Tiap ton besi baja Q memerlukan 7 unit logam A dan 3 unit logam B. Jika pabrik tersebut ingin menggunakan tepat 60 unit untuk logam A dan 40 unit untuk logam B setiap hari, berapa ton masing-masing besi baja dapat dihasilkan setiap harinya.

2. Suatu armada truk memiliki 3 macam truk. Truk tersebut dinomori 1, 2 dan 3. Ketiga truk akan digunakan untuk mengangkut 3 tipe mesin yang berbeda pada setiap pengangkutannya, seperti ditunjukkan bagan berikut.

	Truk		
	No.1	No. 2	No. 3
Mesin A	1	1	1
Mesin B	0	1	1
Mesin C	2	1	1

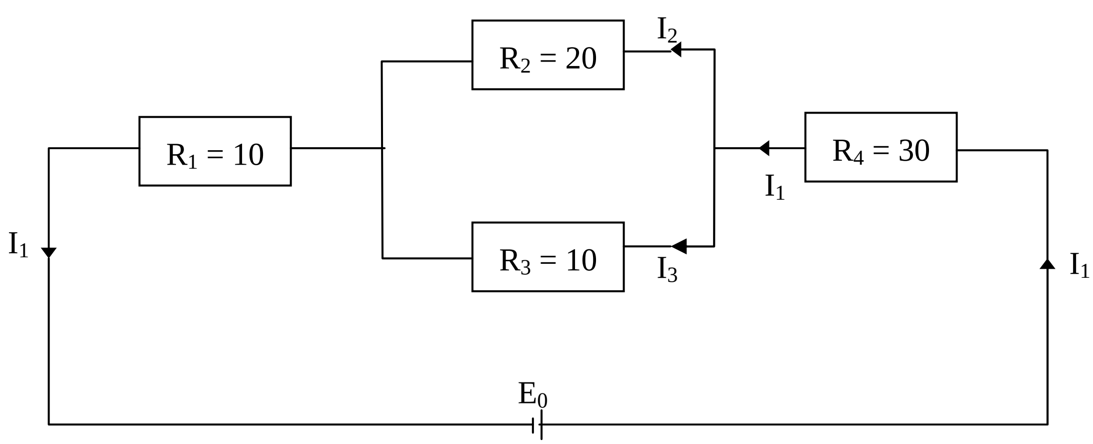
Berapa truk dari tiap tipe yang harus dikirim untuk mengangkut 12 mesin tipe A, 10 mesin tipe B dan 16 mesin tipe C? Anggaplah tiap truk bermuatan penuh.

3. Untuk mengontrol hama tanaman tertentu, diputuskan memakai 6 unit bahan kimia A, 10 unit bahan kimia B, dan 8 unit bahan kimia C. Satu barel produk semprot P berisi 1, 3, dan 4 bahan kimia tersebut secara berurutan. Satu barel Q berisi 3, 3 dan 3 unit bahan kimia tersebut, dan R berisi 2 unit bahan A dan 5 unit bahan B. Berapa banyak semprotan untuk tiap jenisnya harus digunakan sedemikian rupa untuk menyebarkan dalam jumlah yang tepat bahan kimia yang diperlukan untuk mengontrol hama tersebut?

4. Untuk jaringan yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini, hukum Kirchoff berlaku sehingga didapat sistem sistem persamaan berikut.

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ 20I_2 - 10I_3 &= 0 \\ 40I_1 + 20I_2 &= E_0 \end{aligned}$$

Tentukan nilai aliran listrik I_1, I_2, I_3 .



5. Gambarlah bidang x + 2y + 2z = 6, 2x + y + z = 6, dan 3x + 2y + z = 9. Estimasi (duga) korodinat titik potongnya berdasar grafik yang Anda buat. Kerjakan persamaan-persamaan tersebut dengan cara biasa. Apa yang Anda dapatkan?

Bab IV
Program Linear

A. Pengertian Program Linear

Perhatikan masalah yang berkait dengan program linear berikut:

> *Dua pabrik memproduksi tiga macam kualitas kertas, yaitu: kualitas rendah, sedang, dan tinggi. Kontrak dengan perusahaan lain menunjukkan permintaan sebanyak 16 ton, 5 ton, dan 20 ton berturut-turut untuk kertas kualitas rendah, sedang, dan tinggi. Biaya operasi untuk pabrik pertama adalah Rp 10.000.000,00 per hari dan untuk pabrik kedua sebesar Rp 20.000.000,00 per hari. Setiap harinya, pabrik pertama memproduksi 8 ton kertas kualitas rendah, 1 ton kertas kualitas sedang, dan 2 ton kertas kulitas tinggi; sedangkan pabrik kedua memproduksi 2 ton kertas kualitas rendah, 1 ton kertas kualitas sedang, dan 7 ton kertas kulitas tinggi setiap harinya. Berapa harikah waktu yang dibutuhkan oleh setiap pabrik untuk memenuhi kontrak tersebut agar didapatkan biaya produksi seminimal mungkin?*

Penyelesaikan soal di atas adalah dengan program linear. Istilah "program" di sini tidak berkait dengan istilah "program" pada "program komputer." Istilah program di sini berarti program atau pengalokasian banyaknya item atau banyaknya benda-benda yang dibicarakan. Kata atau istilah linear digunakan untuk menunjukkan atau menerangkan bahwa yang ingin dicapai adalah optimalisasi dari nilai suatu fungsi linear dengan pembatas-pembatas (*constraints*) yang berupa sistem pertidaksamaan linear juga. Sebagaimana penyelesaian masalah sistem persamaan linear, untuk menyelesaikan soal atau masalah pada program linear, maka salah cara atau metode terbaiknya adalah dengan mengandaikan bahwa penyelesaian dari yang ditanyakan sudah didapat lalu menyesuaikannya dengan yang diketahui untuk melanjutkan menyelesaikan atau memecahkan masalah tadi. Dengan demikian, variabel x, y, maupun z mewakili banyaknya item-item tersebut. Secara umum, program linear adalah suatu cara untuk mendapatkan bilangan bukan negatif untuk berbagai variabel atau peubah sedemikian sehingga suatu fungsi linear tertentu dari berbagai variabel tersebut akan mencapai nilai optimal (nilai maksimum atau nilai minimum) yang tunduk kepada berberapa pembatas-pembatas tertentu dalam bentuk linear.

Program linear merupakan bagian matematika yang tergolong baru. Beberapa teori dasar dihasilkan pada sekitar tahun 1940-an oleh FL Hitchcock, L Kantorovitch (Rusia), TC Koopmans, dan GB Dantzig. Banyak dari teori-teori tersebut diilhami oleh teori-teori ekonomi dari J Von Neumann dan W Leontief pada sekitar tahun 1930. Pada 1947, Dantzig yang merupakan anggota kelompok kerja pada AU AS yang mempelajari pemecahan masalah pengalokasian item-item, memformulasikan dan mengembangkan metode simplek. Sejak saat itulah, proram linear mendapatkan perhatian yang luas di berbagai bidang, seperti di bidang bisnis, nutrisi, teknik, ekonomi, dan pertanian.

B. Contoh Program Linear

Sekali lagi, perhatikan masalah di atas. Sebagaimana disampaikan di atas, salah satu langkah awal penyelesaian masalah ini adalah dengan mengandaikan bahwa penyelesaian dari yang ditanyakan sudah didapat lalu menyesuaikannya dengan yang diketahui untuk melanjutkan menyelesaikan atau memecahkan masalah tadi. Dengan demikian, variabel x dan y berturut-turut dimisalkan mewakili banyaknya hari yang dibutuhkan oleh pabrik pertama dan kedua untuk memenuhi kontrak tersebut. Untuk memudahkan pekerjaan, dapatlah disusun suatu tabel dari pembatas-pembatas yang diketahui, yaitu:

	Produksi Pabrik I	Produksi Pabrik II	Kebutuhan Kontrak
Kualitas Rendah	8 ton/hari	2 ton/hari	16
Kualitas Sedang	1 ton/hari	1 ton/hari	5
Kualitas Tinggi	2 ton/hari	7 ton/hari	20
Pemisalan	x hari	y hari	
Biaya Op / hari	Rp 10.000.000,00	Rp 20.000.000,00	

Jika dimisalkan x adalah banyaknya hari yang digunakan pabrik pertama (I) dan y adalah banyaknya hari yang digunakan pabrik kedua (II); maka banyaknya kertas berkualitas rendah (dalam ton) yang dapat dihasilkan adalah:

$$\underbrace{(8\ \text{ton/hari})\times(\ x\ \text{hari})}_{\text{Pabrik I}} + \underbrace{(2\ \text{ton/hari})\times(\ y\ \text{hari})}_{\text{Pabrik II}}$$

Jadi, dari pabrik I dan II didapatkan $(8x + 2y)$ ton kertas berkualitas rendah. Karena yang dibutuhkan adalah 16 ton kertas berkualitas rendah, maka didapatkan pertidaksamaan pertama, yaitu: $(8x + 2y \leq 16\ )$. Dengan cara yang sama, akan dapat disusun prtidaksamaan lainnya sehingga didapat sistem pertidaksaamaan berikut:

(1) $8x + 2y \geq 16$ (*paling sedikit ada 16 ton kertas kualitas rendah yang dibutuhkan)*
(2) $x + y \geq 5$ (*paling sedikit ada 5 ton kertas kualitas sedang yang dibutuhkan)*
(3) $2x + 7y \geq 20$ (*paling sedikit ada 20 ton kertas kualitas tinggi yang dibutuhkan)*
(4) $x \geq 0$ dan (5) $y \geq 0$ (*Banyaknya hari tidak boleh negatif*)

Kelima pertidaksamaaan tersebut, bersama-sama lalu membentuk suatu sistem pertidaksamaan linear yang akan menjadi pembatas (*the constraints*) dalam penentuan nilai pasangan berurutan yang akan dicari. Total biaya untuk mengoperasikan dua pabrik tersebut adalah:

$$\underbrace{(\text{Rp } 10 \text{ juta /hari})\times(\ x\ \text{hari})}_{\text{Pabrik I}} + \underbrace{(\text{Rp } 20 \text{ juta /hari})\times(\ y\ \text{hari})}_{\text{Pabrik II}}$$

sehingga didapatkan fungsi berikut, yaitu:

$$10.000.000\ x + 20.000.000\ y$$

agar didapat keuntungan maksimal, maka biaya operasi di atas harus ditekan seminimal mungkin.
Selanjutnya, dari sistem pertidaksamaan ini,

(1) $8x + 2y \geq 16$
(2) $x + y \geq 5$
(3) $2x + 7y \geq 20$
(4) $x \geq 0$ dan
(5) $y \geq 0$

Gambarlah grafiknya, lalu tentukan total biaya minimal untuk mengoperasikan dua pabrik tersebut, sesuai fungsi berikut:

$$10.000.000\ x + 20.000.000\ y$$

C. Latihan/Tugas Bab IV

1. Menggambar garis mudah dilaksanakan jika titik potong dengan sumbu x dan sumbu y merupakan bilangan bulat. Bagaimana caranya jika titik potong bukan merupakan bilangan bulat.

2. Dua tambang minyak, yaitu Tambang I dan Tambang II menghasilkan tiga tingkat kualitas minyak-tanah, yaitu kualitas A, B dan C. Pada setiap penambangan, tingkat kualitas minyak-tanah tersebut diproduksi dalam satu paket proses sehingga jumlahnya tetap dan pasti. Jika satu proses produksi pada tambang 1 menghasilkan 1 unit minyak-tanah kualitas A, 3 unit B dan 1 unit C. Satu proses produksi di tambang II menghasilkan 1 unit minyak-tanah kualitas A, 4 unit B dan 5 unit C. Tambang 1 membutuhkan Rp 3.000.000,00 untuk biaya produksi, dan tambang 2 membutuhkan Rp 5.000.000,00 untuk biaya produksi selama satu proses. Seorang konsumen membutuhkan 100 unit minyak-tanah kualitas A, 340 unit B dan 150 unit C. Bagaimana order tersebut harus dipenuhi jika konsumen menginginkan dengan cara paling ekonomis?

3. Suatu pabrik mobil memiliki dua mesin, yaitu mesin M_1 dan mesin M_2 untuk memproduksi tiga suku cadang mobil, yaitu suku-cadang G_1, G_2 dan G_3. Mesin pertama (M1) akan menghasilkan setiap macam suku cadang dalam waktu 3 jam. Mesin kedua (M_2) akan menghasilkan 3 G_1, dan 1 G_3 dalam waktu 4 jam. Pabrik tersebut mendapat pesanan sebanyak 6 G_1, 2 G_2, dan 4 G_3. Berapa lama waktu yang dibutuhkan setiap mesin untuk memenuhi order tersebut sehingga dapat meminimumkan waktu produksinya?

4. Suatu perusahaan armada truk memiliki dua jenis truk. Truk jenis A memiliki ruang pendingin dengan kapasitas 10 meter kubik dan untuk ruang bukan pendingin dengan kapasitas 15 meter kubik. Truk jenis B memiliki kapasitas 10 meter kubik ruang pendingin dan 5 meter kubik ruang bukan pendingin. Seorang pelanggan ingin mengangkut suatu produknya dalam jarak tertentu yang akan membutuhkan 80 meter kubik ruang pendingin dan 60 meter kubik ruang bukan pendingin. Armada tersebut memperhitungkan bahwa dalam perjalanan akan memerlukan 300 liter solar untuk truk jenis A dan 100 liter solar untuk truk jenis B. Tentukan jumlah truk untuk tiap-tiap jenisnya agar pekerjaan tersebut mengeluarkan biaya solar secara minimum.

5. Seorang ahli gizi di suatu lembaga ingin menyajikan makanan yang mengandung vitamin dan mineral seperti yang dibutuhkan bagi karyawannya. Makanan F_1 dan F_2 mengandung sejumlah vitamin dan mineral per kilogramnya sebagai berikut.

	F_1	F_2
Vitamin	2 unit	4 unit
Mineral	5 unit	2 unit

   Jika paling sedikit 80 unit vitamin dan 60 unit mineral yang harus disediakan, serta biaya untuk makanan F_1 dan F_2 berturut-turut adalah Rp 10.000,00 dan Rp 8.000,00 per kilogramnya, berapa kilogram tiap makanan yang harus dipesan agar memenuhi kebutuhan gizi yang diperlukan dan juga mempertimbangkan biaya total minimal yang harus dibayarkan?

6. Suatu jaringan televisi lokal dihadapkan dengan masalah berikut. Hasil survey menunjukkan bahwa program A dengan waktu tayang selama 20 menit untuk musik dan 1 menit untuk iklan telah menarik 30.000 pemirsa, sedangkan program B dengan waktu tayang selama 10 menit untuk musik dan 1 menit untuk iklan telah menghasilkan 10.000 pemirsa. Dalam satu

minggu, pemasang iklan meminta sedikitnya 6 menit diberikan untuk iklannya dan TV tersebut hanya dapat menyiarkan program musik tidak lebih dari 80 menit. Berapa banyak waktu tiap minggunya untuk masing-masing program diberikan agar mendapatkan jumlah maksimum pemirsa?

7. Seorang grosir buah-buahan mengirimkan 800 kardus buah ke kota tetangganya dengan truk. Jika dia harus mengirimkan sedikitnya 200 kardus jeruk dengan keuntungan Rp 6.000,00 per-kardus, sedikitnya 100 kardus anggur dengan keuntungan Rp 3.000,00 per-kardus, dan paling banyak 200 kardus apel dengan keuntungan Rp 6.000,00 rupiah per-kardus, bagaimana cara dia harus mengisi truknya agar mendapatkan keuntungan maksimal?

Latihan Sistem Persamaan

8. Jika
$$\begin{aligned} a + b + c &= 4 \\ ab + bc + ca &= 6 \\ abc &= 3 \end{aligned}$$
Tentukan nilai dari
   a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
   b) $a^2 + b^2 + c^2$

9. Seseorang memiliki sejumlah uang. Sepertiga bagian dari uangnya dibelanjakan sesuatu dan $\frac{3}{5}$ dari sisa uangnya dicopet seseorang. Sisa uangnya sekarang adalah Rp 120.000,00. Tentukan banyaknya uang orang tersebut pada awalnya.

10. a, b, c, dan d adalah bilangan real sedemikian sehingga $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, dan $ac + bd = 0$. Buktikan bahwa $ab + cd = 0$

11. Selesaikan sIstem persamaan ini.
   a. $\begin{cases} ab = c \\ bc = a \\ ca = b \end{cases}$ b. $\begin{cases} xy = 1 \\ yz = 4 \\ zx = 9 \end{cases}$

Bab V
Penutup

Modul ini disusun dengan maksud untuk memberikan tambahan pengetahuan berupa wawasan bagi guru SMK yang mengikuti diklat jenjang lanjut di PPPPTK Matematika, dengan harapan dapat digunakan sebagai salah satu sumber untuk memecahkan masalah-masalah selama proses pembelajaran di kelas yang berkait dengan program linear dan sistem persamaan linear SMK. Sekali lagi, materi ini menjadi sangat penting, karena latar belakang lampiran Permendiknas nomor 22 tahun 2006 tentang Standar Isi Mata Pelajaran Matematika SMK (Depdiknas, 2006: 387) menyatakan bahwa: “Pendekatan pemecahan masalah merupakan fokus dalam pembelajaran matematika ....” Pada proses pemecahan masalah di SMK, strategi pemodelan (*modelling*) adalah yang paling sering digunakan, yaitu mengubah masalah umum atau masalah dalam kehidupan sehari-hari menjadi bentuk model matematika.

Program linear adalah cara untuk memecahkan suatu persoalan yang model matematikanya terdiri dari pertidaksamaan linear menjadi sangat penting karena dapat mendukung proses pembelajaran tentang pemodelan (*modelling*) yang sekaligus juga dapat meningkatkan kemampuan memecahkan masalah matematika sebagaimana yang dituntut dokumen Permendiknas nomor 22 tahun 2006 tentang Standar Isi Mata Pelajaran Matematika SMK. Dengan demikian, proses pembelajaran program linear dan sistem persamaan linear harus lebih mengacu pada pemodelannya. Selanjutnya, Anda diharapkan dapat mencobakan materi yang ada pada paket ini yang sesuai dengan kondisi di sekolahnya masing-masing. Untuk soal yang terlalu sulit dapat dipermudah ataupun disederhanakan.

Daftar Pustaka

Abrahamson, D; Gray, M.C (1971). *The Art of Algebra*. Adelaide: Rigby Limited.

Campbell, H.G. (1977). *An Introduction to Matrices,Vectors, and Linear Programming (2nd Ed) .* New Jersey: Prentice-Hall, Inc.