DIKLAT GURU PENGEMBANG MATEMATIKA SMK
JENJANG LANJUT TAHUN 2009

RELASI DAN FUNGSI





Oleh: Drs. MARKABAN, M.Si.

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK
DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
2009

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas karunia-Nya, bahan ajar ini dapat diselesaikan dengan baik. Bahan ajar ini digunakan pada Diklat Guru Pengembang Matematika SMK Jenjang Lanjut Tahun 2009, pola 120 jam yang diselenggarakan oleh PPPPTK Matematika Yogyakarta.

Bahan ajar ini diharapkan dapat menjadi salah satu rujukan dalam usaha peningkatan mutu pengelolaan pembelajaran matematika di sekolah serta dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat di dalam maupun di luar kegiatan diklat.

Diharapkan dengan mempelajari bahan ajar ini, peserta diklat dapat menambah wawasan dan pengetahuan sehingga dapat mengadakan refleksi sejauh mana pemahaman terhadap mata diklat yang sedang/telah diikuti.

Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah berpartisipasi dalam proses penyusunan bahan ajar ini. Kepada para pemerhati dan pelaku pendidikan, kami berharap bahan ajar ini dapat dimanfaatkan dengan baik guna peningkatan mutu pembelajaran matematika di negeri ini.

Demi perbaikan bahan ajar ini, kami mengharapkan adanya saran untuk penyempurnaan bahan ajar ini di masa yang akan datang. Saran dapat disampaikan kepada kami di PPPPTK Matematika dengan alamat: Jl. Kaliurang KM. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, DIY, Kotak Pos 31 YK-BS Yogyakarta 55281. Telepon (0274) 881717, 885725, Fax. (0274) 885752. email: p4tkmatematika@yahoo.com

Kepala,

Kasman Sulyono
NIP. 130352806

Daftar Isi

Halaman

Kata Pengantar i

Daftar Isi ii

Bab I Pendahuluan

A Latar Belakang 1

B. Tujuan 1

C.. Ruang Lingkup 1

Bab II Aljabar Fungsi, Komposisi Fungsi dan Fungsi Invers

A. Aljabar Fungsi 2

1. Jumlah dan Selisih Dua Fungsi 2

2. Perkalian dan Pembagian Dua Fungsi 2

B. Komposisi Fungsi 3

1. Menentukan Fungsi Komposisi 3

2. Sifat – Sifat Komposisi Fungsi 5

C. Fungsi Invers 6

1. Invers suatu Fungsi 6

2. Fungsi Invers 6

3. Menentukan Rumus Fungsi Invers 7

4. Fungsi Invers dari Fungsi Komposisi 8

Latihan 1 9

Bab III Fungsi Pecah dan Grafiknya

A. Pengertian Fungsi Pecah 10

B. Nilai Nol Fungsi Pecah 10

C. Grafik Fungsi Pecah 11

Latihan 2 20

Bab IV Penerapan Fungsi

A. Penerapan Fungsi dalam Ekonomi 21

1. Fungsi Permintaan 21

2. Fungsi Penawaran 22

3. Keseimbangan Pasar 23
4. Analisis Pulang Pokok 24
B. Penerapan Fungsi dalam Kehidupan Sehari-hari 26
Latihan 3 26
Daftar Pustaka………………………..………. 28

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Apabila kita perhatikan bahwa gejala-gejala di alam semesta ini pada dasarnya akibat dari gejala lainnya yang saling pengaruh mempengaruhi, misalnya jarak yang ditempuh oleh suatu kendaraan dipengaruhi oleh waktu tempuhnya, demand konsumen dipengaruhi oleh quantity barang dan price (harga) yang ada dipasaran, volum suatu benda yang berbentuk balok besarnya tergantung panjang, lebar dan tinggi benda tersebut dan sebagainya. Gejala-gejala dimana variabel dari gejala-gejala satu sama lainnya yang saling pengaruh mempengaruhi itu dapat diukur dan dipelajari dalam matematika yaitu pada relasi dan fungsi, seperti jarak dan waktu dapat diiukur, sehinnga dapat dikatakan bahwa jarak adalah fungsi dari waktu.

Fungsi banyak diterapkan dalam berbagai bidang misalnya: untuk menyelesaikan persoalan-persoalan baik dalam bidang tehnik, ekonomi dan bidang lain yang mempelajari hubungan-hubungan antar variabel. Ruang lingkup fungsi telah dikembangkan lebih lanjut dan diterapkan untuk memecahkan permasalahan pada kehidupan nyata sehari-hari. Oleh karena itu guru Matematika harus menguasai materi ini dan hendaknya mampu mengembangkan pembelajaran matematika di kelas dan memberi kesempatan pada siswa untuk mengembangkan keterampilan siswa dalam melakukan, menerapkan dalam kehidupan sehari-hari

B. Tujuan

Setelah mengikuti diklat peserta diharapkan dapat semakin memantapkan penguasaan materi sehingga mampu mengembangkan keterampilan siswa dalam melakukan, menerapkan dalam kehidupan sehari-hari, dan memecahkan masalah yang berkaitan dengan relasi dan fungsi.

C. Ruang Lingkup

Bahan ajar ini membahas lanjutan dari bahan relasi fungsi sebelumnya yang meliputi: operasi aljabar fungsi, komposisi fungsi, fungsi invers, fungsi pecah dan grafiknya serta penerapan fungsi dalam bidang ekonomi maupun kehidupan sehari-hari.

BAB II

ALJABAR FUNGSI, KOMPOSISI FUNGSI DAN FUNGSI INVERS

A. Aljabar Fungsi

1. Jumlah dan Selisih Dua Fungsi

Apabila f dan g masing-masing adalah fungsi dengan domain D_f dan D_g dan peta-peta f(x) dan g(x) ada pada kedua domain tersebut maka :

1). Jumlah fungsi f dan g ditulis dengan simbol f + g adalah suatu fungsi :

$f + g : x \to f(x) + g(x)$

2). Selisih fungsi f dan g ditulis dengan simbol f - g adalah suatu fungsi :

$f - g : x \to f(x) - g(x)$

Adapun domain dari f + g dan f – g adalah irisan dari D_f dan D_g ($D_f \cap D_g$)

Contoh :

Diketahui fungsi f dan g masing-masing pada R yang didefinisikan dengan $f(x) = x^2$ dan $g(x) = 2x + 3$.

Tentukan : a). f + g

b). f – g

c). prapeta dari 12 untuk fungsi f – g

Jawab:

a). $f + g : x \to f(x) + g(x) = x^2 + (2x + 3) = x^2 + 2x + 3$

Jadi $(f + g)(x) = x^2 + 2x + 3$

b). $f - g : x \to f(x) - g(x) = x^2 - (2x + 3) = x^2 - 2x - 3$

Jadi $(f - g)(x) = x^2 - 2x - 3$

c). $(f - g)(x) = 12 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 12$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = - 3$ atau $x = 5$

Jadi prapeta dari 12 untuk fungsi f – g adalah x = - 3 atau x = 5

2. Perkalian dan Pembagian Dua Fungsi

Apabila f dan g masing-masing adalah fungsi dengan domain D_f dan D_g dan peta-peta f(x) dan g(x) ada pada kedua domain tersebut maka :

1). Hasil kali fungsi f dan g ditulis dengan f □ g didefinisikan dengan :

f □ g : x → f(x) □ g(x)

2). Hasil bagi fungsi f dan g ditulis dengan $\frac{f}{g}$ didefinisikan dengan :

$$\frac{f}{g} : x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \text{ dengan } g(x) \neq 0$$

Adapun domain dari f x g dan $\frac{f}{g}$ adalah irisan dari D_f dan D_g ($D_f \cap D_g$)

Contoh :

Diketahui fungsi f dan g masing-masing pada R yang ditentukan oleh f(x)=2x+3 dan g(x) = x - 1 . Tentukan:

a). rumus fungsi $f \cdot g$ dan $(f \cdot g)(2)$

b). rumus fungsi $\frac{f}{g}$ dan domain $\frac{f}{g}$

Jawab :

a). $f \cdot g : x \rightarrow f(x) \cdot g(x) = (2x + 3)(x - 1) = 2x^2 + x - 3$

Jadi rumus fungsi $(f \cdot g)(x) = 2x^2 + x - 3$ dan $(f \cdot g)(2) = 7$

b). $\frac{f}{g} : x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x+3}{x-1}$

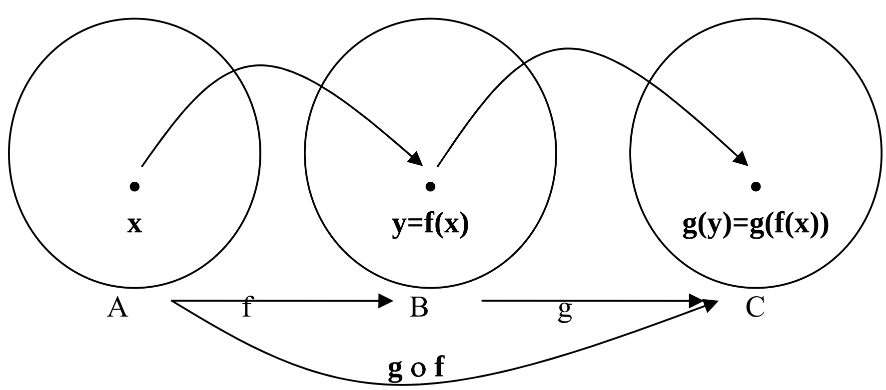
Jadi rumus fungsi $\frac{f}{g}(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ dan domain dari fungsi $\frac{f}{g}$ adalah

$D_f \cap D_g = R - \{ x | x - 1 = 0 \} = \{ x | x \in R, x \neq 1 \}$

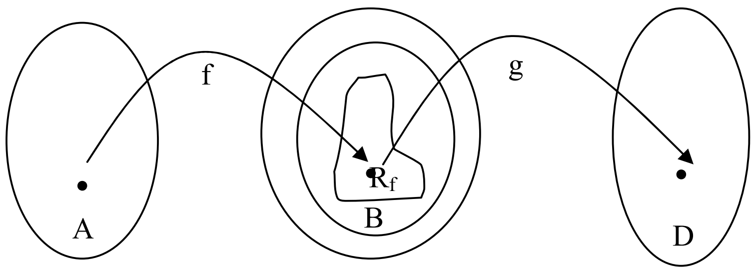
B. Fungsi Komposisi

1. Menentukan Fungsi Komposisi

Misalkan fungsi f memetakan himpunan A ke dalam himpunan B, dan fungsi g memetakan himpunan B ke dalam C sebagaimana ilustrasi di bawah ini :



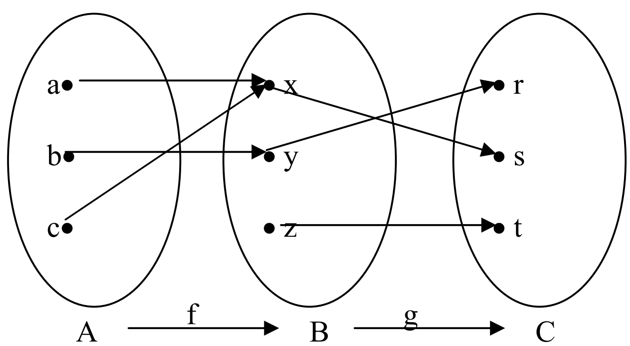
Untuk x∈A maka petanya f(x) berada di B yang juga merupakan domain dari fungsi g, oleh sebab itu pasti diperoleh peta dari f (x) di bawah pemetaan g yaitu g(f(x)). Dengan demikian kita mempunyai suatu aturan yang menentukan setiap elemen $x \in A$ dengan tepat satu elemen $g(f(x)) \in C$. Fungsi baru inilah disebut fungsi komposisi dari f dan g, yang dinyatakan dengan notasi g o f (dibaca “g bundaran f”). Secara singkat, jika $f : A \to B$, dan $g : B \to C$ maka kita definisikan suatu fungsi komposisi $g \circ f : A \to C$ sedemikian hingga $(g \circ f) (x) = g (f (x))$. Perhatikan bahwa fungsi komposisi g o f adalah penggandaan fungsi yang mengerjakan f dahulu, baru kemudian mengerjakan g.



Dengan memperhatikan definisi dari fungsi komposisi di atas , dua fungsi yaitu $f : A \to B$, dan $g : C \to D$ dapat diperoleh fungsi komposisi gof apabila daerah hasil dari fungsi f atau R_f merupakan himpunan bagian dari C(domain g atau D_g). Demikian agar diperoleh fungsi komposisi f o g maka syaratnya daerah hasil dari fungsi g yakni R_g haruslah menjadi himpunan bagian dari domain f, yaitu $R_g \subset A$

Contoh 1:

Misalkan $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ yang didefinisikan sebagai berikut :



$(gof) : A \to C$ ditentukan oleh :

$(gof) (a) = g (f(a)) = g (x) = s$

$(gof) (b) = g (f(b)) = g (y) = r$

$(gof) (c) = g (f(c)) = g (z) = s$

Contoh 2

Fungsi $f : R \to R$, $g : R \to R$ dan $h: R \to R$ yang didefinisikan oleh rumus

$f (x) = x + 2$, $g (x) = 3x^2$ dan $h(x) = 2x - 3$

Tentukan :

a) (gof) (1) dan (fogoh) (1)

b) rumus untuk (gof), (fog) dan (fogoh)

Penyelesaian :

a. (gof) (1) = g (f(1)) = g (1 + 2) = g (3) = 3 (3^2) = 27

   (fogoh) (1) = f (g(h(1))) = f (g(-1)) = f (3) = 3 + 2 = 5

b. (gof) : x $\rightarrow$ (gof) (x) = g (f(x)) = g (x + 2) = 3 (x +2 $)^2$ = $3x^2 + 6x + 12$

   Sehingga (gof) : x $\rightarrow 3x^2 + 6x + 12$

   (fog) : x $\rightarrow$ (fog) (x) = f (g(x)) = f ($3x^2$) = $3x^2 + 2$

   Sehingga (fog) : x $\rightarrow 3x^2 + 2$

   (fogoh) : x $\rightarrow$ (fogoh)(x) = f (g(h(x)))

   = f (g(2x - 3))

   = f (3(2x – 3$)^2$

   = f ($12x^2 - 36x + 27$) = $12x^2 - 36x + 29$

   Sehingga (fogoh) : x $\rightarrow 12x^2 - 36x + 29$

Contoh 3:

Fungsi f : R $\rightarrow$ R dan g : { $x \mid x \geq 1, x \in R$) $\rightarrow$ R didefinisikan oleh rumus f(x) =x+2 dan g(x) = $\sqrt{x-1}$. Selidiki apakah gof ada, jika tidak ada tentukan domain dari f dan g agar diperoleh gof

Penyelesaian :

Karena daerah hasil dari fungsi f atau R_f tidak merupakan himpunan bagian dari domain g, yaitu $R_f \supset D_g$ sehingga gof tidak dapat didefinisikan, misalnya :

f(2) = 4 dan 4 $\in D_g$, tetapi f(-2) = 0 dan $0 \notin D_g$..Agar diperoleh gof maka $R_f \subset D_g$

Dari fungsi g(x) = $\sqrt{x-1}$ dengan domain D_g ={ $x \mid x \geq 1, x \in R$) sedangkan kita peroleh (gof) (x) = g (f(x)) = g(x + 2) = $\sqrt{(x+2)-1} = \sqrt{x+1}$. Dengan demikian domain dari f, yaitu D_f diperoleh dari $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Jadi, D_f = { $x \mid x \geq -1, x \in R$)

2. Sifat-sifat Komposisi Fungsi

Dua buah fungsi f dan g dikatakan sama (f = g) apabila kedua fungsi tersebut mempunyai domain yang sama. Dan setiap elemen di domain $a \in D$ diperoleh peta yang sama dari kedua fungsi, yaitu f(a) = g(a). Dari definisi kesamaan fungsi didapat sifat-sifat komposisi fungsi sebagai berikut :

1). Komposisi fungsi tidak bersifat komutatif (contoh 2b di atas bahwa $gof \neq fog$)

2). Komposisi fungsi bersifat asosiatif $fo(goh) = (fog)oh$

3). Fungsi I yang memetakan $I : x \rightarrow x$ disebut fungsi identitas atau fungsi netral sehingga $Iof = foI = f$

4). Jika untuk fungsi $f : x \rightarrow f(x)$ dan fungsi $g : x \rightarrow g(x)$ yang terdefinisi pada suatu domain sedemikian sehingga diperoleh $fog = gof = I$ dengan I fungsi identitas maka g dapat dikatakan sebagai fungsi invers dari f ditulis dengan notasi f^{-1}. Jadi $fo\, f^{-1} = f^{-1}of = I$

C. Fungsi Invers

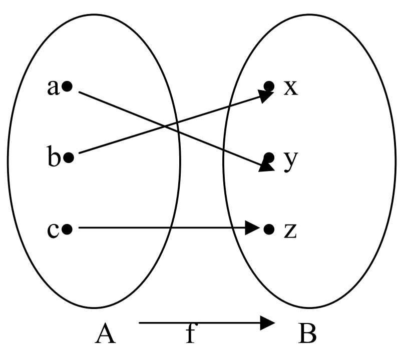
1. Invers Suatu Fungsi

Misalkan f suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B dan misalkan untuk suatu $x \in A$ petanya adalah $f(x) = y \in B$, maka invers dari y (dinyatakan dengan notasi $f^{-1}(y)$) adalah elemen-elemen dalam A yang memiliki $y \in B$ sebagai petanya.

Secara singkat, jika $f : A \rightarrow B$ sedemikian hingga $f : x \rightarrow f(x)$ maka yang dimaksud dengan invers fungsi f adalah : $f^{-1}(y) = \{x \mid x \varepsilon A, f(x) = y\}$

Contoh :

Misalkan $f : A \rightarrow B$ didefinisikan sebagaimana diagram panah berikut :



maka :

$f^{-1}(x) = b$

$f^{-1}(y) = a$

$f^{-1}(z) = c$

2. Fungsi Invers

Misalkan f adalah suatu fungsi dari A ke dalam B. Pada umumnya $f^{-1}(y)$ untuk suatu $y \in B$ dapat terdiri lebih dari satu elemen atau mungkin tidak ada.

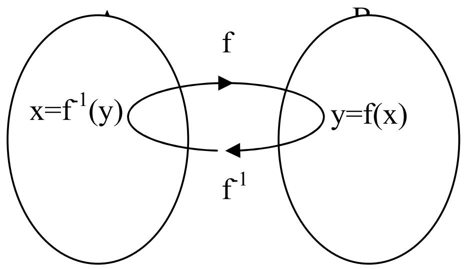
Jika $f : A \rightarrow B$ adalah suatu fungsi yang bijektif, maka untuk setiap $y \in B$, invers $f^{-1}(y)$ akan terdiri dari sebuah elemen tunggal dalam A. Oleh sebab itu f^{-1} adalah suatu fungsi dari B ke dalam A, dan kita tulis fungsi $f^{-1} : B \rightarrow A$. Disini fungsi f^{-1} disebut " fungsi invers dari f ". Dengan demikian suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ akan diperoleh fungsi invers f^{-1}

: B$\rightarrow$ A hanya apabila f suatu fungsi yang bijektif dan f menentukan setiap $x \in A$ ke $y \in B$, dan f^{-1} menentukan setiap $y \in B$ ke $x \in A$, sehingga : $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

3. Menentukan rumus fungsi invers

Telah diuraikan sebelumnya bahwa jika f dan f^{-1} adalah fungsi-fungsi yang saling invers, maka $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

Perhatikan gambar sebagai berikut :



Invers fungsi akan merupakan fungsi jika dipenuhi syarat-syarat sebagai fungsi.

Untuk menentukan rumus fungsi invers dari fungsi f dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

- Memisalkan $f(x) = y$
- Menyatakan x dalam y
- Menentukan rumus dari $f^{-1}(x)$ dengan mengingat $f^{-1}(y) = x$ dan mengganti variable y dengan x

Contoh :

1). Diketahui suatu fungsi $f(x) = ax + b$, tentukan fungsi inversnya !

Penyelesaian :

Misal : $f(x) = y \Rightarrow y = ax + b$

$$\Leftrightarrow ax = y - b$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$$

Jadi, jika $f(x) = ax + b$, maka $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$

2). Jika $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; $x \neq \dfrac{-d}{c}$ maka $f^{-1}(x) = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$; $x \neq \dfrac{a}{c}$ (buktikan !)

4. Fungsi Invers dari Fungsi Komposisi

Misalkan fungsi h merupakan fungsi komposisi dari fungsi f dan g ditulis h = gof maka invers dari fungsi h adalah fungsi invers dari fungsi komposisi h dapat ditulis dengan notasi $h^{-1} = (gof)^{-1}$.

Untuk menentukan fungsi $(gof)^{-1}$ jika masing-masing fungsi f dan g diketahui, salah satu jalan yang dapat ditempuh dengan menentukan terlebih dahulu fungsi komposisi gof kemudian menetukan fungsi inversnya. Dapat juga karena dari sifat komposisi fungsi bahwa $(gof)^{-1}$ adalah fungsi yang jika dikomposisikan dengan gof akan diperoleh fungsi identitas I(x) = x , yaitu $(gof)^{-1} o\ (gof) = I$ sehinga akan kita dapatkan suatu sifat bahwa: $(gof)^{-1} = f^{-1} o\ g^{-1}$ (Buktikan !)

Contoh :

Jika f dan g adalah fungsi pada R yang didefinisikan f(x)= x + 3 dan g(x) =2x–1.
Tentukan : a). f^{-1} dan g^{-1}

b). $g^{-1} o\ f^{-1}$ dan $f^{-1}\ o\ g^{-1}$

c). $(gof)^{-1}$ dan $(fog)^{-1}$

Penyelesaian :

a). $f^{-1}(x) = x - 3$ dan $g^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$

b). $(\ g^{-1} o\ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}(x - 3) = \dfrac{(x - 3) + 1}{2} = \dfrac{x - 2}{2}$

$(f^{-1}\ o\ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}(\dfrac{x+1}{2}) = \dfrac{x+1}{2} - 3 = \dfrac{x - 5}{2}$

c). $(\ go\ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 3) = 2\ (x + 3\ ) - 1 = 2x + 5$

Misalkan : $(\ go\ f)(x) = y \Leftrightarrow 2x + 5 = y$

$\Leftrightarrow 2x = y - 5$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{y - 5}{2}$

$\Leftrightarrow (\ go\ f)^{-1}(x) = \dfrac{x - 5}{2}$

Jadi $(\ go\ f)^{-1}(x) = \dfrac{x - 5}{2}$

$(f\ o\ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1) + 3 = 2x + 2$

Misalkan $(f \circ g)(x) = y \Leftrightarrow 2x + 2 = y$

$$\Leftrightarrow 2x = y - 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y-2}{2}$$

$$\Leftrightarrow (fo\,g)^{-1}(x) = \frac{x-2}{2}$$

Jadi $(fo\,g)^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{2}$

Latihan 1

1. Jika fungsi f dan g terdefinisi pada bilangan real , yang didefinisikan f(x)=2x-1 , dan g(x) = x + 3 maka tentukan :
   a. Rumus fungsi f + g, f – g, f □ g dan $\dfrac{f}{g}$
   b. Derah hasil dari f □ g
   c. Daerah asal dari $\dfrac{f}{g}$
2. Fungsi $f : R \rightarrow R$ dan $g : R \rightarrow R$ ditentukan oleh $f(x) = 3 - 2x$ dan $g(x) = x^2 + 1$
   a. Tentukan (gof)(2) dan (fog)(2)
   b. Tentukan rumus fungsi (gof)(x) dan (fog)(x)
   c. Jika (gof)(x) = 2 , tentukan x !
   d. Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari gof dan fog
3. Fungsi f, g, h adalah terdefinisi pada bilangan real , yang didefinisikan f(x)=x+2 , g(x) = 2x – 3 dan $h(x) = x^2$
   a. Tentukan rumus fungsi (gof)(x) dan (fog)(x)
   b. Tentukan rumus fungsi $(gof)^{-1}(x)$ dan $(fog)^{-1}(x)$.
   c. Tentukan rumus fungsi komposisi (fogoh)(x) dan (hogof)(x)
   d. Carilah x sebagai peta dari (fogoh)(x) = 7 dan (hogof)(x) = 9
4. Tentukan fungsi invers dari :
   a). $f(x) = 3x + 5$ c). $f(x) = \dfrac{2x+4}{3x-6}$
   b). $f(x) = x^2 - 4x + 9$ d). $f(x) = \sqrt{x - \dfrac{2}{5}}$
5. Diketahui $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}, x \neq 3$ Tentukan nilai a, jika $f^{-1}(a) = -4$

BAB III
FUNGSI PECAH DAN GRAFIKNYA

A. Pengertian Fungsi Pecah

Selain dikenal fungsi linear dan fungsi kuadrat yang telah dibicarakan, dikenal pula jenis fungsi yang disebut fungsi pecah. Fungsi pecah kadang-kadang juga disebut sebagai fungsi rasional (rational functions).

Fungsi pecah dapat didefinisikan sebagai berikut.

Fungsi pecah adalah fungsi yang dirumuskan oleh $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dengan P(x) dan Q (x) yang merupakan suku banyak dalam x dan $Q(x) \neq 0$ pada domainnya.

Misalnya, $f(x) = \frac{5}{x}$, $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{3x - 5}$ dan $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x - 5}$

B. Nilai Nol Fungsi Pecah

Jika diketahui fungsi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, maka nilai -nilai x yang menyebabkan f(x)= 0 disebut nilai nol dari fungsi f(x). Nilai nol disebut juga pembuat nol atau harga nol. Dapat dibuktikan bahwa jika f(x) = 0, maka juga P(x)= 0. Jadi, untuk mencari nilai nol fungsi $f(x)= \frac{P(x)}{Q(x)}$, cukup dicari nilai (nilai-nilai) yang menyebabkan P(x)= 0.

Namun perlu diingat bahwa nilai x yang menyebabkan P(x) = 0 belum tentu merupakan nilai nol fungsi f(x). Ini terjadi jika nilai x tersebut ternyata juga membuat Q(x)= 0. Untuk x yang bersama-sama membuat P(x) dan Q(x) bernilai nol menyebabkan f(x) mempunyai nilai tak tentu. Misalnya, pada $f(x) \; \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$, nilai x = 1 bukan nilai nol dari fungsi f(x) sekalipun untuk $P(x) = x^2 + x - 2$ berlaku P(1)= 0. Ini karena juga berlaku Q(1)= 0, sehingga f(1) bernilai tak tentu.

Tentu saja tidak setiap fungsi pecah mempunyai nilai nol. Ini terjadi kalau P(x) tidak mungkin berharga nol.

Seperti diketahui, nilai nol suatu fungsi berkaitan dengan koordinat titik potong grafik dengan sumbu X. Jadi, jika x = a adalah nilai nol dari fungsi f(x), maka (a,0) adalah koordinat titik potong grafik dengan sumbu X.

Contoh 1:

Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{3x - 5}$. Nilai nol dari fungsi tersebut dapat dicari sebagai berikut.

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ atau $x = -3$

Jadi, nilai nol dari fungsi tersebut adalah $x = -1$ dan $x = -3$ dan grafik fungsi f(x) memotong sumbu X di titik (-1,0) dan (-3,0).

Jika pada fungsi $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, dan P(x) dalam bentuk $ax^2 + bx + c = 0$. Ini berarti ada atau tidaknya nilai nol fungsi f(x) tergantung kepada diskriminan dari persamaan kuadrat.

Contoh 2 :

Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 8}{3x - 5}$. Pada fungsi itu, nilai diskriminan dari persamaan $x^2+4x+8 = 0$ adalah $D = 4^2 - (4)(1)(8) = 16 - 32 = -16 < 0$

Karena $D < 0$, maka $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 8}{3x - 5}$ tidak mempunyai nilai nol. Ini berarti juga grafik f(x) tidak memotong sumbu X.

C. Grafik Fungsi Pecah

Di sini akan dibahas grafik fungsi pecah yang berbentuk :

1. $\mathbf{f(x) = \dfrac{ax + b}{px + q}}$ **dengan $\mathbf{p \neq 0}$**
2. $\mathbf{f(x) = \dfrac{ax + b}{px^2 + qx + r}}$ **dengan $\mathbf{p \neq 0}$**
3. $\mathbf{f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}}$ **dengan $\mathbf{a \neq 0}$ dan $\mathbf{p \neq 0}$**
4. $\mathbf{f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}}$ **dengan $\mathbf{a \neq 0}$ dan $\mathbf{p \neq 0}$**

Langkah-langkah mensketsa grafik fungsi pecah :

- Menentukan titik-titik potong dengan sumbu x dan sumbu y
- Menentukan asimptot datar, tegak dan miring

- Membuat tabel yang menunjukkan dimana fungsi bernilai positif (grafik terletak di atas sumbu x) dan bernilai negatif (grafik terletak di bawah sumbu x)
- Menentukan nilai ekstrim fungsi (hanya untuk fungsi pecah bentuk no.2, 3 dan 4)
- Menentukan titik-titik bantu (kalau perlu)
- Mensketsa kurvanya

Jenis-jenis asimptot fungsi pecah :

- Asimptot tegak, diperoleh bila penyebut bernilai nol
- Asimptot datar, diperoleh bila x $\rightarrow$ ~
- Asimptot miring, hanya untuk jenis fumgsi rasional yang pembilangnya mempunyai derajat lebih tinggi satu daripada penyebutnya (khusus fungsi rasional bentuk 3)

1. Fungsi $f(x) = \dfrac{ax+b}{px+q}$

Contoh 1

Sketsalah grafik $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Langkah-langkah mensketsa :

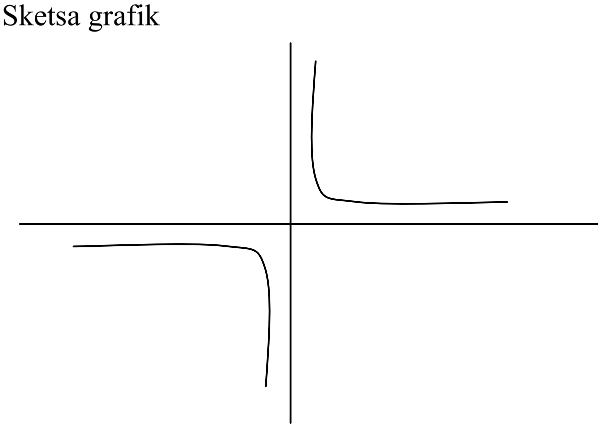
1. Titik potong sumbu x dan sumbu y tidak ada
2. Asimptot-asimptot : tegak : garis x = 0

   datar : untuk x $\rightarrow$ ~ diperoleh y = f(x) = 0

   Jadi garis y = 0 sebagai asimptot datar
3. Titik-titik bantu :

x	-1	-2	-3	-4	-5	1	2	3	4	5
y	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

4. Sketsa grafik



Contoh 2

Sketsalah grafik $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$

Langkah-langkah:

1. titik-titik potong dengan

   sumbu x, syarat $f(x) = y = 0 \Rightarrow 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

   titik potong $(-\frac{2}{3}, 0)$

   sumbu y, syarat $x = 0 \Rightarrow f(x) = y = 2$

   titik potong (0,2)

2. asimptot

   tegak : $x + 1 = 0$

   garis $x = -1$ sebagai asimptot tegak

   datar : $f(x) = \frac{3x+2}{x+1} = \frac{x(3+\frac{2}{x})}{1+\frac{1}{x}} = \frac{3+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

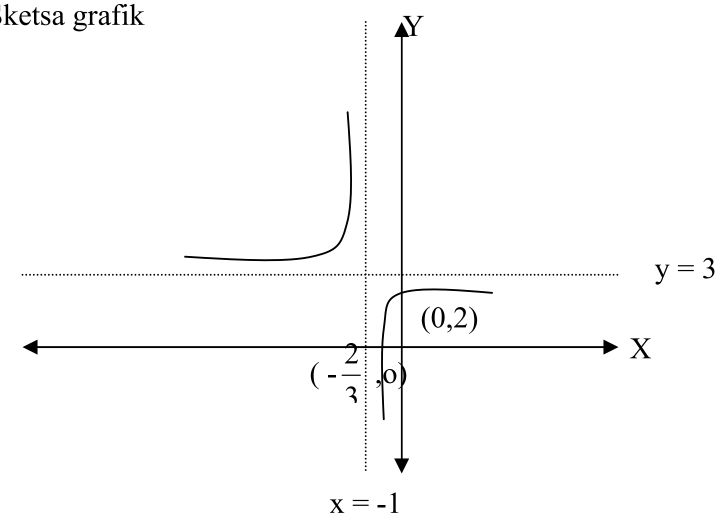
   untuk $x \rightarrow \sim$ maka $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ dan $\frac{2}{x} \rightarrow 0$

   Jadi asimptot datar: garis $y = \frac{3+0}{1+0} = 3$

3. titik-titik bantu

x	-2	-3	-4	1	2	3
y	4	3,5	$3\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{3}{4}$

4. Sketsa grafik



Catatan :

- asimptot datar grafik $y = \dfrac{ax+b}{px+q}$ adalah $y = \dfrac{a}{p}$
- grafik $y = \dfrac{1}{x-a}$ dapat diperoleh dengan cara menggeser grafik $y = \dfrac{1}{x}$ sebanyak a satuan ke kanan
- grafik $y = a + \dfrac{1}{x}$ dapat diperoleh dengan cara menggeser grafik $y = \dfrac{1}{x}$ sebanyak a satuan ke atas

2. Fungsi $\mathbf{f(x) = \dfrac{ax+b}{px^2+qx+r}}$

Contoh 1 : Sketsalah grafik $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$

Langkah-langkah :

1. titik-titik potong dengan

   sumbu x adalah (0,0)

   sumbu y adalah (0,0)

2. asimptot-asimptot :

   - tegak, syarat penyebut sama dengan nol

     $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)\,(x+1) = 0 \Leftrightarrow \; x = 2$ atau $x = -1$

     Jadi garis x = -1 dan x = 2 sebagai asimptot tegak

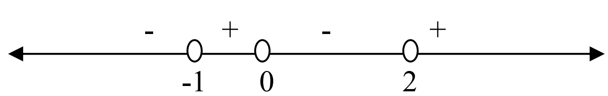
   * datar $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2} = \dfrac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}$

   Jika x $\to \sim$ maka $\dfrac{1}{x} \to$ 0. Jadi asimptot datar adalah garis y = 0 atau sumbu x

3. asimtot tegak dan titik potong dengan sumbu x membagi sumbu x menjadi 4 interval

   yaitu : $x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 2$ dan $x > 2$

   tanda-tanda $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$ pada tiap interval adalah sebagai berikut :



   Tanda + menyatakan grafik terletak di atas sumbu x pada interval itu

   Tanda - menyatakan grafik terletak di bawah sumbu x pada interval itu

4. Nilai ekstrim fungsi

Misalkan y = (x) mempunyai nilai ekstrim, maka :

$p = \dfrac{x}{x^2 - x - 2} \quad \Leftrightarrow px^2 - px - 2p - x = 0$

$\Leftrightarrow px^2 + (-p - 1)x - 2p = 0$

syarat supaya persamaan kuadrat mempunyai akar-akar $D \geq 0$

sehingga : $(-p - 1)^2 - 4p(-2p) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; p^2 + 2p + 1\ 8p^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow 9p^2 + 2p + 1 \geq 0$

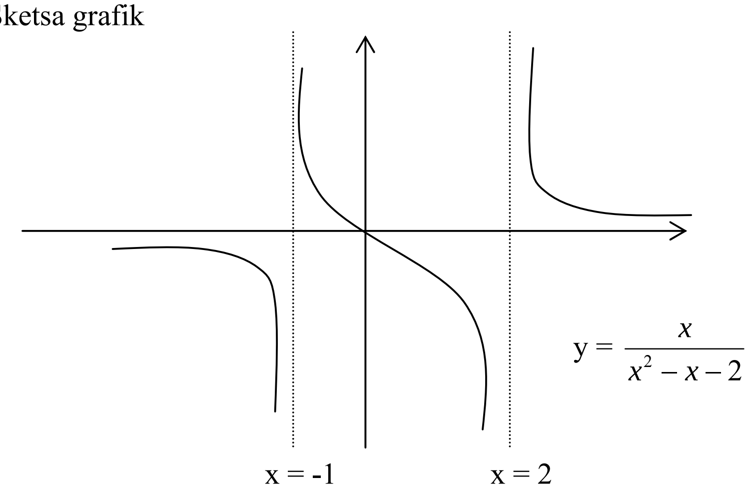
Penyelesaian pertidaksamaan adalah semua $p \in R$ (karena bentuk $9p^2 + 2p + 1$ adalah definit positif). Dengan demikian titik ekstrim tidak ada .

Catatan : Nilai ektrim dapat juga ditentukan dengan menggunakan f'(x) = 0

5. Titik – titik Bantu

x	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$
y	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{10}{27}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{14}{27}$

6. Sketsa grafik



Contoh 2 : Sketsa grafik $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 5x + 4}$

Langkah – langkah :

1. Titik potong dengan sumbu x dan sumbu y adalah (0,0)
2. Asimptot – asimptot :

- tegak, diperoleh bila $x^2 + 5x + 4 = 0$

  $(x + 4)(x + 1) = 0$

  $x = -4$ atau $x = -1$

  asimptot tegak adalah garis x = -4 dan x = -1

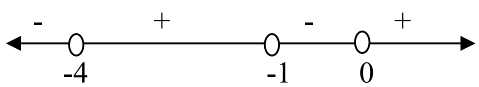
- datar, $f(x) = y = \dfrac{3x}{x^2+5x+4} = \dfrac{x^2(\frac{3}{x})}{x^2(1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2})} = \dfrac{\frac{3}{x}}{1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}$

  untuk $x \to \sim$ maka $\dfrac{1}{x} \to 0$ Sehingga $y = \dfrac{3.0}{1+5.0+4.0} = \dfrac{0}{1} = 0$

  Jadi asimptot datar garis y = 0

3. Sumbu x dibagi menjadi 4 interval oleh titik potong sumbu x dan asimptot tegak.

   Tentukan tanda f (x) untuk masing-masing interval



4. Nilai ekstrim

   Misal f (x) mempunyai nilai ekstrim p. Dengan demikian $p = \dfrac{3x}{x^2+5x+4}$

   $\Leftrightarrow px^2 + 5px + 4p - 3x = 0$

   $\Leftrightarrow px^2 + (5p - 3)x + 4p = 0$

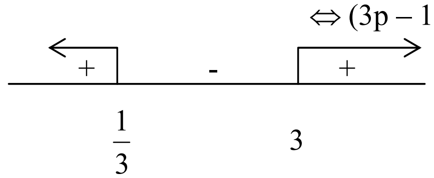
   Syarat supaya persamaan kuadrat mempunyai akar-akar $D \geq 0$ sehingga :

   $(5p-3)^2 - 4p\,(4p) \geq 0 \Leftrightarrow 25p^2 - 30p + 9 - 16p^2 \geq 0$

   $\Leftrightarrow 9p^2 - 30p + 9 \geq 0$

   $\Leftrightarrow 3p^2 - 10p + 3 \geq 0$

   $\Leftrightarrow (3p - 1)(p - 3) \geq 0$



   $p = y \leq \dfrac{1}{3}$ atau $p = y \geq 3$

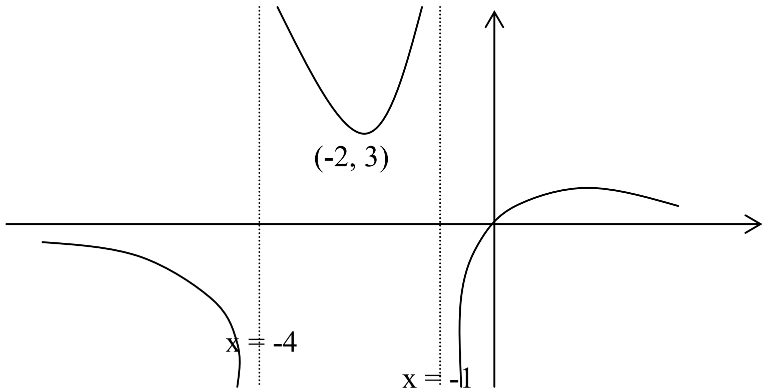
   Ini menujukkan nilai ekstrim minimum y = 3 dan nilai ekstrim maksimum $y = \dfrac{1}{3}$

   Untuk menentukan titik maksimum dan minimum, subtitusi nilai ekstrim maksimum dan minimum ke dalam f (x), diperoleh: titik ekstrim minimum (-2, 3) dan titik ekstrim maksimum $(2\ ,\ \frac{1}{3})$

5. Titik-titik bantu

x	-6	-5	-3	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$-1\frac{4}{5}$	$-3\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{3}{5}$	$3\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{28}$

6. Sketsa grafik



Grafik y = $\frac{ax+b}{px^2+qx+r}$ selalu mempunyai asimptot datar sumbu x

3. Fungsi f (x) = $\frac{ax^2+bx+c}{px+q}$

Contoh 1 : Sketsalah grafik f (x) = $\frac{x^2-4}{x-1}$

Langkah – langkah :

1. titik potong sumbu x adalah (-2 , 0) dan (2, 0)

   titik potong sumbu y adalah (0,4)

2. asimptot – asimtot :

- asimptot datar tidak ada

* tegak : x – 1 = 0 $\Rightarrow$ x = 1, Garis x = 1 sebagai asimptot tegak

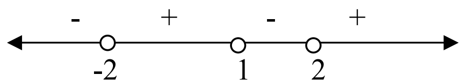
* miring : diperoleh dari hasil bagi pembilang terhadap penyebut

$$
\begin{array}{r l l}
x-1 & \overline{)\; x^2-4 \;} & x+1 \\
 & \underline{x^2-x} & \\
 & \quad x-4 & \\
 & \quad \underline{x-1} & \\
 & \qquad -3 &
\end{array}
$$

Dengan demikian f (x) = y = $\frac{x^2-4}{x-1} = x+1-\frac{3}{x-1}$

Bila x menjadi sangat besar maka $\frac{3}{x-1}$ akan mendekati 0. Ini berarti y mendekati y = x + 1 yang merupakan asimptot miring

3. Sumbu x dibagi menjadi 4 interval oleh titik – titik potong dengan sumbu x dan asimptot tegak. Tanda nilai f (x) untuk interval – interval tersebut :



4. Nilai ekstrim

Misal y = p diperoleh

$$p = \frac{x^2-4}{x-1} \Leftrightarrow px - p = x^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - px + p - 4 = 0$$

Syarat supaya persamaan kuadrat mempunyai akar – akar $D \geq 0$, sehingga :

$p^2 - 4\,(4p - 4) \geq 0$

$\Leftrightarrow p^2 - 4p + 16 \geq 0$

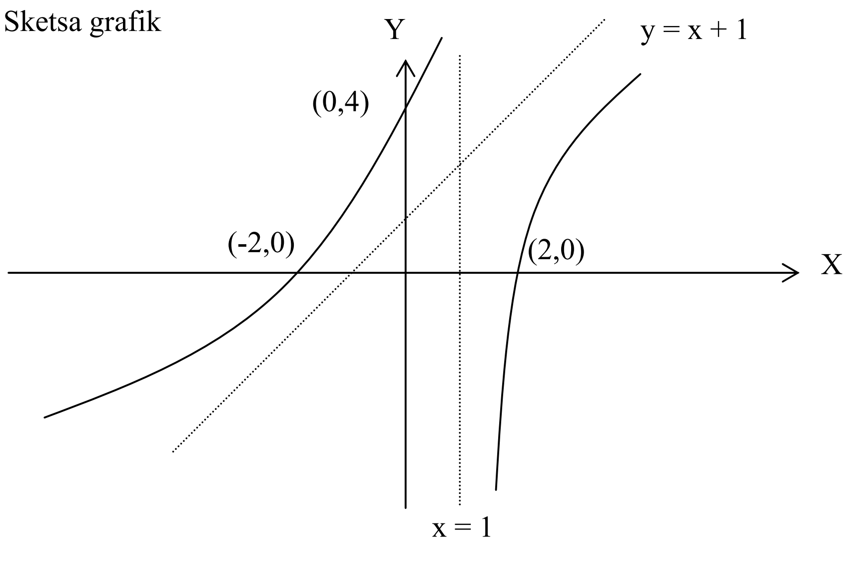
Penyelesaian pertidaksamaan ini adalah setiap $p \in R$ (karena bentuk di atas adalah definit positif)

Jadi tidak ada nilai ekstrim

5. Titik – titik bantu :

x	-5	-4	-3	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	3	4	5
y	$-3\frac{1}{2}$	$-2\frac{2}{5}$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{7}{10}$	$2\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	4	$5\frac{1}{4}$

6. Sketsa grafik



4. Fungsi $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$

Contoh 1 :Sketsalah grafik $f(x) = \dfrac{6x^2}{3x^2+1}$

Langkah – langkah :

1. Titik potong sumbu x dan sumbu y adalah (0,0)
2. Asimptot – asimptot

- tegak : tidak ada
- datar : f (x) = y = $\frac{6x^2}{3+\frac{1}{x^2}}$

untuk $x \to \sim$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ Jadi garis y = $\frac{6}{3+0}$ = 2 merupakan asimptot datar.

3. f (x) selalu bertanda positif untuk x < 0 maupun x > 0
4. Nilai ekstrim

Misal f (x) = y mempunyai nilai ekstrim p. Jadi p = $\frac{6x^2}{3x^2+1}$

$\Leftrightarrow 3px^2 + p - 6x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (3p - 6)x^2 + p = 0$

Syarat supaya persamaan kuadrat mempunyai akar – akar $D \geq 0$

Jadi $-4(3p - 6)p \geq 0$

$\Leftrightarrow -12p^2 + 24p \geq 0$

$\Leftrightarrow 12p(-p + 2) \geq 0$

$$\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \hline & 0 & & 2 & \end{array}$$

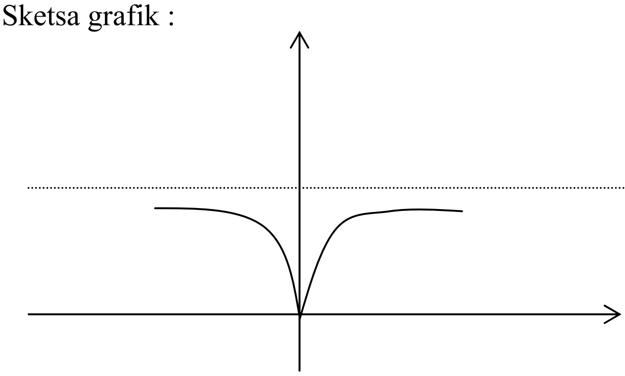
Jadi $0 \leq p \leq 2$ atau $0 \leq y \leq 2$

Ini menyatakan nilai y terletak dalam interval 0 sampai 2. Nilai y minimum adalah 0. titik minimum (0,0). Grafik tidak memiliki nilai maksimum

5. Titik – titik bantu

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	$\frac{27}{14}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{27}{14}$

Sketsa grafik :



Latihan 2

1. Diketahui f(x) = $\frac{2x+5}{x-1}$

   a. Carilah titik potong grafik dengan sumbu X, titik potong grafik dengan sumbu Y, asimtot mendatar, dan asimtot tegaknya.
   b. Tunjukkan bahwa fungsi tersebut tidak mempunyai titik balik.
   c. Sketsalah grafiknya.

2. Tentukan asimtot-asimtot grafik fungsi f(x) = $\frac{ax+b}{cx+d}$, jika grafiknya melalui titik-titik (0,1), (3,2), dan (4,3).

3. Grafik y = $\frac{ax+b}{cx+d}$ melalui titik (-1,4) dan mempunyai asimtot-asimtot x = - $\frac{1}{2}$ dan y = $\frac{1}{2}$. Tentukan rumus fungsinya.

4. Diketahui fungsi f(x) = $\frac{1}{x^2+5x+4}$. Tentukan :

   a. titik potong grafik dengan sumbu-sumbu koordinat
   b. asimtot-asimtotnya
   c. titik balik dan jenisnya
   d. sketsalah grafiknya

5. Seperti soal no 4 untuk fungsi f(x) = $\frac{x-1}{x^2-2x-3}$.

6. Grafik y = $\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ memotong sumbu X di titik-titik (-3,0) dan (2,0) dan mempunyai asimtot garis-garis x = 1, x = - 4 dan y = $\frac{1}{2}$. Tentukan rumus fungsinya.

7. Grafik y = $\frac{ax^2+bx+c}{px \quad +q}$ memotong sumbu-sumbu koordinat di titik-titik (3,0), (-5,0) dan (0,5). Grafik fungsinya mempunyai asimtot garis x = -3. Tentukan rumus fungsinya.

8. Fungsi f(x) = $\frac{x^2+px+q}{x-1}$ mempunyai nilai balik 3 dan 7. Hitung p dan q.

9. Grafik f(x) = $\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ hanya mempunyai asimtot tegak x = -1, melalui titik (-3,-2) dan mempunyai titik balik (1,2). Tentukan rumus fungsi itu.

BAB IV

PENERAPAN FUNGSI

A. Penerapan Fungsi dalam Ekonomi

Dalam bidang ekonomi banyak pembicaraan tentang penerapan fungsi antara lain fungsi permintaan dan penawaran, keseimbangan pasar, analisis pulang pokok dan sebagainya.

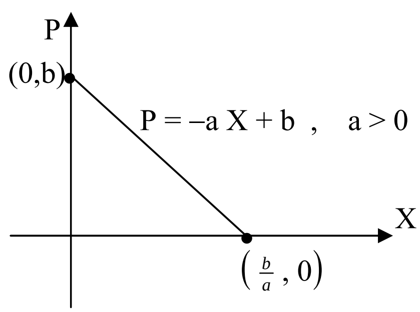
1. Fungsi Permintaan

Fungsi permintaan adalah fungsi yang menyatakan hubungan antara harga (price) dengan jumlah barang/jasa (quantity) yang diminta/dibeli dengan asumsi variabel bebas lainnya konstan (ceteris paribus). Hubungan fungsional antara harga dan kwantitas ini oleh Antoine Augustine Cournot (1801-1877) seorang ahli matematika ekonomi dinyatakan dalam bentuk x = g(p) dimana x menunjukkan kwantita yang ditempatkan pada sumbu mendatar dan p menunjukkan harga yang ditempatkan pada sumbu vertikal. Kemudian hubungan ini oleh A. Marshall (1842-1924) ahli ekonomi sering dinyatakan dalam bentuk p=f(x) yang merupakan fungsi kebalikan dari x = g(p).

Fungsi permintaan berasal dari hukum permintaan yang menyatakan bahwa:

- Jika harga suatu barang naik maka permintaan akan turun
- Jika harga suatu barang turun maka permintaan akan naik.

Perhatikan gambar grafik fungsi permintaan berikut :



Dari gambar tersebut , maka ciri-ciri fungsi permintaan adalah :

1). Variabel x dan p harus positif dan paling kecil sama dengan nol

2). Fungsi berkorespodensi satu-satu

3). Fungsi monoton turun dari kiri ke kanan

Contoh :

Diketahui fungsi permintaan terhadap suatu barang komoditi p = - 5x + 10 Tentukan batas-batas nilai x dan p sehingga memenuhi syarat fungsi permintaan.

Penyelesaian :

Variabel x dan p harus positif dan paling kecil sama dengan nol, sehingga:

Untuk $x = 0 \rightarrow p = -5 . 0 + 10 = 10$

Untuk $p = 0 \rightarrow 0 = -5 . x + 10 = 10 \rightarrow x = 2$

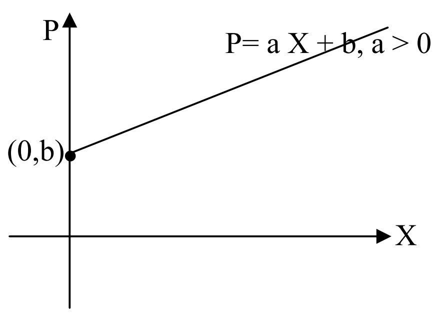
Jadi batas-batas nilai x dan p adalah : $0 \leq x \leq 2$ dan $0 \leq p \leq 10$

2. Fungsi penawaran

Fungsi penawaran adalah fungsi yang menyatakan hubungan antara harga dari suatu barang dengan jumlah barang tersebut yang ditawarkan.

Fungsi penawaran berasal dari hukum penawaran yang menyatakan bahwa:

- Jika harga suatu barang naik maka jumlah barang yang ditawarkan akan meningkat
- Jika harga suatu barang turun maka jumlah barang yang ditawarkan akan menurun



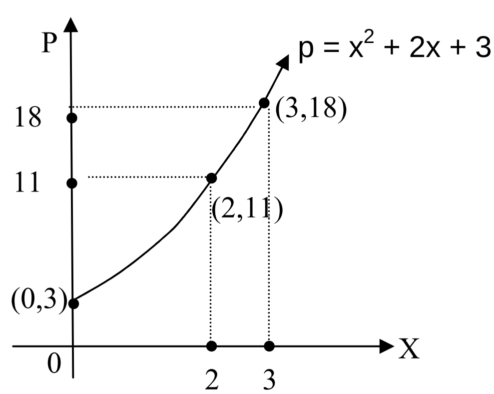
Contoh :

Gambarlah kurva fungsi penawaran yang dirumuskan $p = x^2 + 2x + 3$

Penyelesaian :

Dengan membuat tabel dan menghubungkan titik-titik diperoleh grafik sebagai berikut :

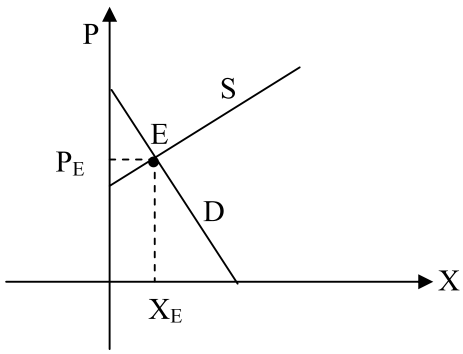
x	0	2	3
p	3	11	18



3. Keseimbangan pasar

Yang dimaksud pasar disini adalah pertemuan (baik langsung maupun tidak langsung melalui komunikasi) antara pembeli dan penjual.

Keseimbangan pasar terjadi jika harga yang diminta sama dengan harga yang ditawarkan, atau jumlah barang yang diminta pasar sama dengan jumlah barang yang ditawarkan.



D: fungsi permintaan (*demand*)

$P = f(x)$

S: fungsi penawaran (*supply*)

$P = g(x)$

Titik keseimbangan pasar (E) merupakan titik perpotongan antara fungsi permintaan dan fungsi penawaran .

P_E adalah harga pada keseimbangan pasar

P_E adalah harga pada keseimbangan pasar

Contoh :

Diketahui suatu fungsi permintaan dan penawaran suatu barang masing-masing adalah $P^2 + x^2 = 109$, dan $P = x + 7$dimana P adalah harga dan x adalah kuantitas barang. Tentukan harga dan kuantitas barang dalam keseimbangan pasar ?

Penyelesaian:

Keseimbangan pasar adalah nilai positip P dan x yang memenuhi persamaan permintaan dan penawaran.

$P^2 + x^2 = 109$ ....(i)

$P = x + 7$ .... (ii)

Substitusikan nilai P dari persamaan (ii) ke dalam persamaan (i) diperoleh :

$(x + 7)^2 + x^2 = 109$

$2x^2 + 14x + 49 = 109$

$x^2 + 7x - 60 = 0$

$(x + 12)(x - 5) = 0$

$x_1 = -12$ (tidak mungkin)atau $x_2 = 5$

Dengan mensubstitusikan $x = 5$ ke dalam persamaan (ii) kita peroleh $P = 12$.

Jadi keseimbangan harga ialah 12 dan kuantitas ialah 5.

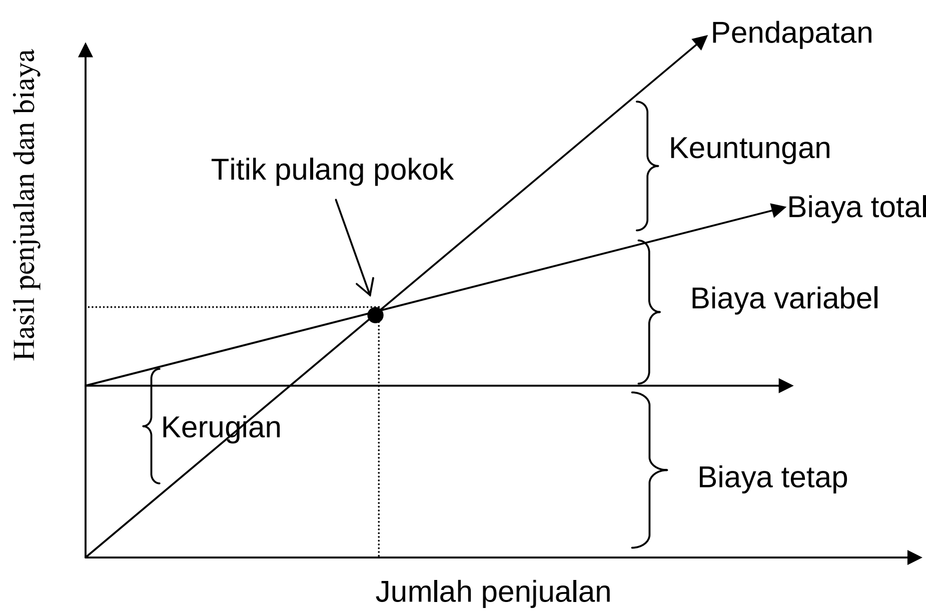
4. Analisis Pulang Pokok

Fungsi dapat digunakan untuk menggambarkan hubungan antara biaya, pendapatan dan keuntungan didalam suatu perusahaan. Setiap pengusaha harus dapat membuat keputusan yang dapat menguntungkan usahanya, sehingga ia dapat membuat suatu model yang menggambarkan hubungan antara biaya, pendapatan dan keuntungan tersebut. Oleh karena itu pengusaha selalu menganalisis hubungan jumlah biaya produksi yang dikeluarkan, pendapatan hasil penjualan barang produksi dan keuntungan yang diperolehnya. Analisis hubungan antara biaya produksi, pendapatan dan keuntungan dikenal dengan analisis pulang pokok, yaitu mempelajari berapa barang yang harus dijual perusahaan tersebut tidak untung dan tidak rugi, dikatakan pulang pokok (breakeven).

Jika fungsi biaya adalah C(x), fungsi pendapatan adalah R(x), maka keuntungannya $\pi(x)$ dirumuskan : $\pi(x) = R(x) - C(x)$

dimana hasil penjualan (R) = harga per unit kali jumlah unit yang terjual atau R = p.x dan biaya total (C) pada umumnya dipisahkan menjadi dua kelompok yaitu biaya tetap (F) dan biaya variabel , yaitu: Biaya total = Biaya Tetap + Biaya Variabel

Untuk lebih jelasnya hubungan antara biaya, pendapatan dan keuntungan dapat kita gambarkan sebagai berikut :



Contoh 1:

Sebuah pabrik menjual produknya dengan harga Rp. 1.000,00 per unit. Biaya pembuatan x unit barang tersebut menurut persamaan $C = 10.000 + 100x + x^2$. Berapa banyak unit barang harus dijual agar memperoleh keuntungan sebesar Rp. 192.500,00 ?

Penyelesaian:

Pendapatan dari hasil penjualan x unit barang : $R = p.\ x = 1.000\ x$.

Biaya pembuatan x unit barang : $C = 10.000 + 100x + x^2$

Keuntungan dari penjualan x unit barang : $\pi\ (x) = R(x) - C(x)$

$$= 1.000x - (10.000 + 100x + x^2)$$

Karena keuntungan yang diketahui sebesar Rp. 192.500,00 maka diperoleh persamaan:

$$1.000x - (10.000 + 100x + x^2) = 192.500$$

$$\Leftrightarrow\ 900x - 10.000 - x^2 = 192.500$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 - 900x + 202.500 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (x - 450)^2 = 0$$

$$\Rightarrow\ x_1 = x_2 = 450$$

Jadi untuk memperoleh keuntungan Rp. 192.500, perlu dibuat 450 unit.

Contoh 2 :

Suatu perusahaan menjual barang produknya dengan harga Rp. 900,00 per unit. Biaya tetap yang dikeluarkan perusahaan tiap bulan Rp. 200.000,00 dan biaya variable per unitnya adalah Rp. 400,00. Berapa jumlah barang yang dijual tiap bulan pada titik pulang pokok dan gambarlah sket grafiknya ?

Penyelesaian :

Misalkan jumlah barang yang diproduksi tiap bulan adalah x unit, maka biaya totalnya adalah $C = 400\ x + 200.000$. Barang yang terjual tiap bulan sebanyak x unit, berarti hasil penjualannya $R = 900\ x$,sehingga titik pulang pokok diperoleh dari : $C(x) = R(x)$

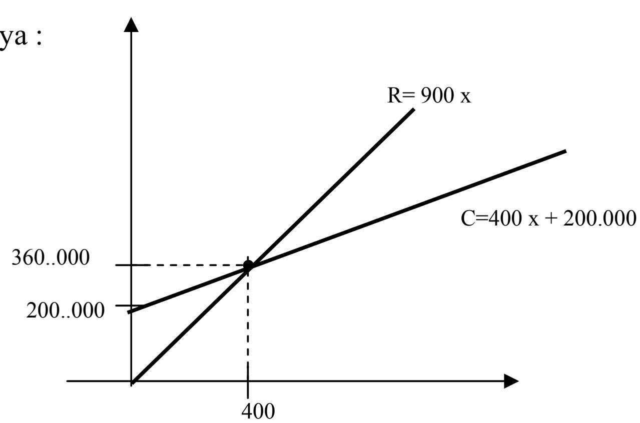
$$400\ x + 200.000 = 900\ x$$

$$200.000 = 900\ x - 400\ x$$

$$x = \frac{200.000}{500} = 400$$

Dengan mensubstitusikan nilai x ke dalam $R = 900\ x$, didapat $R = 360.000$

Grafiknya :



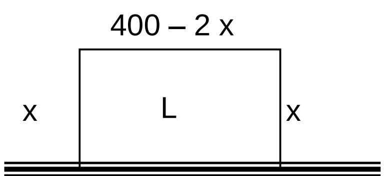
Jadi titik pulang pokok pabrik itu terjadi pada produksi 400 unit yang menghasilkan Rp. 360.000,00

B. Penerapan Fungsi dalam Kehidupan Sehari-hari

Dalam kehidupan sehari-hari banyak contoh-contoh penerapan fungsi, misalnya pada permainan bola basket bahwa pemain berusaha memasukkan bola ke keranjang dengan pelemparan tidak lurus tetapi dilemparkan ke atas melampaui tempat jaringnya menuju jaringnya dengan lintasan bolanya berbentuk parabola, bagaimana menentukan ukuran lipatan talang seng agar talangnya dapat mengalirkan air sebanyak mungkin, dan sebagainya. Bagaimana memecahkan masalah, misalnya perhatikan contoh berikut ini:

Sebidang tanah terletak sepanjang suatu tembok. Tanah itu akan dipagari dengan kawat untuk kandang ayam. Pagar kawat yang tersedia 400 m, dan kandang itu dibuat berbentuk persegi panjang. Tentukanlah ukurannya agar terdapat kandang yang seluas-luasnya.

Penyelesaian:



Misalkan lebar kandang x meter, maka panjangnya $(400 - 2x)$ meter. Luas kandang dalam m^2 adalah : $L = x(400 - 2x) = 400x - 2x^2$

Dari persaman luas tersebut yang berbentuk fungsi kuadrat dapat ditentukan nilai ekstremnya sebagai berikut :

$$L = 400x - 2x^2 = -2x^2 + 400x$$

$$= -2(x - 100)^2 + 20000$$

Agar luas kandang maksimum maka $x - 100 = 0$ atau $x = 100$. Sehingga untuk $x = 100$ terdapat luas kandang maksimum $L = 20.000$

Jadi luas maksimum yang ditanyakan adalah 20.000 m^2 yang terjadi jika lebarnya 100 m dan panjangnya 200 m.

Latihan 3

1. Seorang siswa akan membuat kotak tanpa tutup dengan sehelai karton yang berukuran 30 cm x 20 cm dengan cara menggunting keempat sudutnya. Tentukan panjang sisi yang digunting pada sudut karton tersebut agar volumenya maksimum.

2. Diketahui fungsi permintaan dan penawaran suatu barang komoditi masing-masing adalah D: $p^2 + x^2 = 25$ dan S: $p = x + 1$. Tentukan jumlah dan harga barang dalam keadaan keseimbangan pasar.
3. Sebuah pabrik memproduksi mainan anak-anak dengan biaya variabel sebesar Rp. 4.000,00 per buah sedangkan biaya tetap setiap bulannya sebesar Rp. 12.000.000,00. Jika mainan itu dijual seharga Rp. 10.000,00 per buah, tentukan titik pulang pokok!
4. Keuntungan harian suatu pabrik dalam jutaan rupiah diperoleh dengan produksi x satuan barang perhari dinyatakan dengan $\pi(x) = - 3x^2 + 30x - 36$. Tentukan banyaknya produksi setiap harinya agar pabrik itu memperoleh keuntungan maksimum dan berapa keuntungan maksimumnya.
5. Tentukan ukuran talang terbuka seperti bentuk “U“ agar dapat mengalirkan air sebanyak mungkin dari segulung bahan talang yang lebarnya 60 cm

DAFTAR PUSTAKA

Alders, C.J (1961). *Ilmu Aljabar*(disadur oleh H. Soemantri) Jakarta : Noer Komala

Abrahamson, B. and Gray, M.C. (1971). *The Art of Algebra.* Sydney: Rigby Limited

Krismanto, Al. (2001). *Aljabar*.(Bahan Penataran Standar). Yogyakarta: PPPG Matematika

Klimartha *Eka* Putri M, Herry Sukarman. 2002. *Bahan Ajar Matematika SMK Kelompok Bidang Keahlian Non Teknik*. Yogyakarta: PPPG Matematika

Legowo, 1984 ; *Dasar-dasar Kalkulus Penerapannya dalam Ekonomi*, Jakarta, Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

M. Nababan , 1993 ; *Pengantar Matematika untuk Ilmu Ekonomi dan Bisnis,* Jakarta , Penerbit Erlangga

Maman Abdurrahman. 2000. *Matematika SMK Bisnis dan Manajemen Tingkat I*. Bandung: Armico

Purcell, E.J dan D.Varberg (1989).*Kalkulus dan Geometri Analitis* (disadur oleh I Nyoman Susila , Bana Karta Sasmita , dan Rawuh) . Jakarta : Erlangga

Tim PPPG Matematika (2003) . *Aljabar Fungsi* .(Bahan Penataran) Yogyakarta : PPPG Matematika

Zuckerman, M.M. (1976). *Intermediate Algebra. A Straightforward Approach*. New York: John Wiley & Sons.