PPPPTK Matematika

Kode Dok : F-PRO-002

Revisi : 0

BAHAN AJAR DIKLAT PENGEMBANG MATEMATIKA SMA JENJANG DASAR

PEMBELAJARAN FUNGSI PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN ALJABAR

Oleh :

Drs. Setiawan, M.Pd.

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL

DIREKTORAT PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN

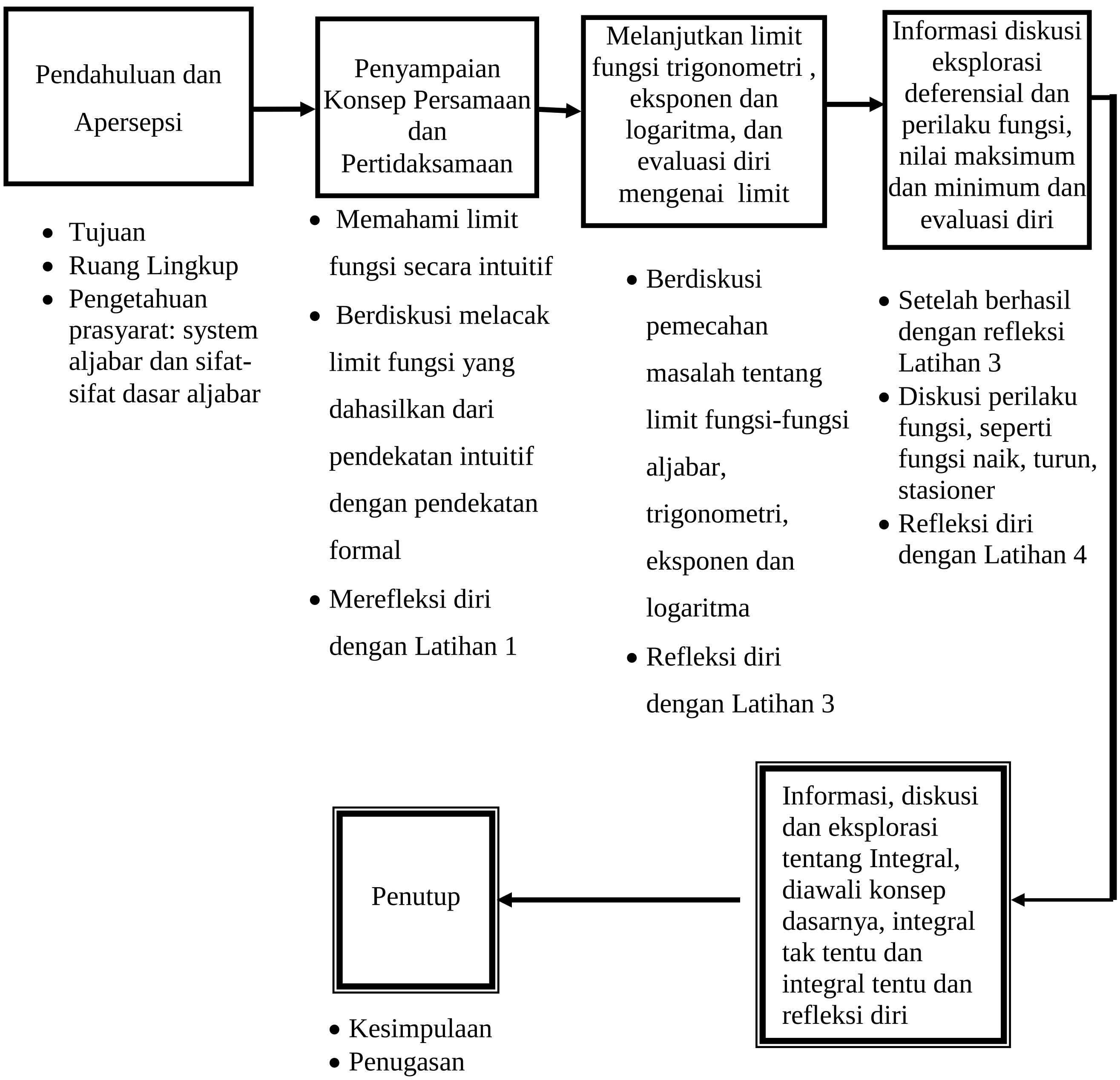
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA

2010

DAFTAR ISI

PETA KOMPETENSI

SKENARIO PEMBELAJARAN



Bab I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Seiring diundangkannya Standar Nasional Pendidikan yang berupa Peraturan Pemerintah RI nomor 19 tahun 2005, yang ditindak lanjuti dengan Permendiknas nomor 22 tahun 2005 yang berupa Standar Isi, yang diikuti dengan standar-standar yang lain, dengan harapan segera diikuti peningkatan kualitas pembelajaran matematika, karena acuan standarnya sudah ada.

Kenyataan di lapangan berbicara lain, hasil belajar siswa tentang matematika belum ada bukti bahwa peningkatan hasilnya signifikan. Termasuk di dalamnya masalah aljabar, seperti halnya bahan ajar yang lain, cap matematika sebagai mata pelajaran yang sukar dan kurang menarik masih sukar untuk ditanggalkannya

Untuk menanggulangi masalah ini diupayakan banyak langkah, antara lain melalui peningkatan kemampuan, keterampilan dan kompetensi guru melalui penataran, diskusi maupun dengan penulisan Paket Fasilitasi Peningkatan MGMP Matematika SMA ini,. dimaksudkan untuk membantu guru lewat forum MGMP nya membahas masalah Relasi, Fungsi, Persamaan dan Pertidaksamaan baik pada fungsi aljabar maupun fungsi eksponen dan logaritma, pada bagian yang merupakan kesulitan pada umumnya.

B. Tujuan Penulisan Modul

Modul ini disusun dengan tujuan:

1. untuk meningkatkan kemampuan, kompetensi dan wawasan guru dalam melaksanakan tugas.
2. menjadi wacana dan bahan diskusi di forum MGMP Matematika SMA, terutama yang menyangkut materi Relasi, Fungsi, Persamaan dan Pertidaksamaan yang kadang-kadang menjadi kerikil tajam di lapangan.

C. Sasaran

Sasaran dari pengguna Modul ini adalah:

1. Peserta Kegiatan Pemberdayaan MGMP Matematika SMA
2. Para guru mata pelajaran matematika SMA pada umumnya

D. Ruang Lingkup

Ruang lingkup materi yang dibahas pada paket ini adalah

1. Kaidah pokok aljabar yang menjadi landasan pokok dalam aljabar
2. Persamaan dan pertidaksamaan aljabar, maupun fungsi eksponen
3. Relasi dan fungsi aljabar, termasuk fungsi eksponen dan logaritma

E. Pedoman Penggunaan Modul

Langkah pertama hendaknya pengguna modul ini mencermati uraian tentang materi relasi, fungsi, persamaan dan pertidaksamaan aljabar ini sebaik-baiknya.

Jika sudah dipandang cukup maka pembaca perlu segera merefleksikan diri dengan menjawab persoalan-persoalan yang disertakan dalam modul inil

Untuk mengevaluasi diri maupun *self assessment* apakah yang dipelajari sudah mencapai kompetensi yang diharapkan, maka pembaca dapat mencocokkan jawabnya dengan Alternatif Kunci Jawab yang disertakan pada bagian akhir dari modul ini.

Jika ada masalah yang dirasa kurang jelas atau belum dipenuhinya kompetensi yang diharap, maka masalah tersebut dapat didiskusikan pada forum MGMP baik sekolah maupun tingkat kabumen/kota, atau dapat berkirim ke PPPPTK Matematika dengan alamat Jl. Kaliurang km. 6, Sambisari Depak Sleman Yogyakarta, Kotak Pos 31 YK-BS, Yogyakarta 552281. Telp. (0271) 881717, 885725, Fax: (0271) 885752 website: www.p4tkmatematika.com atau lewat e-mail: p4tkmatematika@yahoo.com atau langsung kontak dengan penulis *e-mail:* setiawan_p4tkm@yahoo.com

Bab II
PERSAMAAN DAN PERTIDAK SAMAAN

A. Persamaan

Mengacu pada Standar Isi yang telah ditetapkan oleh Mendiknas dalam Peraturan Nomor 20 Tahun 2005 ini, menyangkut matematika, disebutkan bahwa persamaan kuadrat yang pada kurikulum sebelumnya dibicarakan di SMP, maka pada KTSP ini seluruhnya materi tentang persamaan kuadrat dibahas di SMA.

1. Persamaan Kuadrat

a. Di bawah ini disajikan contoh masalah-masalah yang dapat dijadikan konteks, yang model matematikanya merupakan persamaan kuadrat, untuk mengawali pembelajaran persamaan kuadrat:

1) Pak Adi bermaksud menjadikan tanah pekarangan di samping yang berbentuk empat persegipanjang berukuran 60 m × 80 m

Dia merencanakan jalan stapak mengelilingi taman tersebut dengan lebar yang sama. Setelah taman tersebut jadi, ternyata luas tamannya tinggal seperenam luas tanah pekarangan semula. Berapa lebar jalan setapak yang dibuat Pak Edi?

2) Suatu kotak tanpa tutup untuk penyerahan kenang-kenangan teman yang berulang tahun, dibuat dari kertas karton berbentuk empat persegi panjang, ukuran 10 cm × 20 cm dengan jalan menggunting keempat sudutnya suatu persegi, luas alasnya adalah 96 cm^2. Hitunglah panjang sisi dari keempat persegi yang digunting pada sudut karton tersebut.

3) Suatu bingkai gambar berukuran 14 cm × 20 cm, menampilkan gambar yang luasnya 160 cm^2. Berapakah lebar bingkai gambar tersebut ?

Setelah pembaca mencoba menentukan model matematikanya, maka akan dihasilkan ekspresi matematika sebagai mberikut:

1) Dengan memisalkan lebar jalan setapak x m, diperoleh:

   (80 – 2x)(60 – 2x) = $\frac{1}{6} \times 60 \times 80 \Leftrightarrow x^2 - 70x + 1000 = 0$

2) Dengan memisalkan lebar sisi yang digunting sebesar x cm, diperoleh ekspresi aljabar sebagai berikut:

   (10 – 2)(20 – 2) = 96 $\Leftrightarrow x^2 - 15x + 26 = 0$

3) Dengan memisalkan lebar bigkai x cm, diperoleh ekspresi aljabar sebagai berikut:

   (14 – 2x)(20 – 2x) = 96 $\Leftrightarrow x^2 - 17x + 46 = 0$

Bahwa model matematika dari persoalan-persoalan di atas, berupa kalimat terbuka yang derajat tertinggi peubahnya dua, yang untuk selanjutnya disebut **persamaan kuadrat.**

Catata:

Sebagaimana dijelaskan secara rinci pada lampiran, yang dimaksud dengan:

a) **Peubah (variable)** adalah lambang yang dapat mewakili (menunjuk) anggota sembarang dari semesta pembicaraannya.

b) **Kalimat terbuka** adalah kalimat yang di dalamnya memuat variable, dan akan berubah menjadi pernyataan jika variabelnya disubstitusi dengan konstanta dari semesta pembicaraanya.

b. Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Sesuai dengan model matematika yang didesain dari contoh masalah diatas, dapat disimpulkan bahwa :

Bentuk umum dari persamaan kuadrat adalah ***ax²* + *bx* + *c* = *0*,** dengan a $\neq 0$ dan a,b,c $\in$ R. Setiap konstanta pengganti *x* yang menjadikan pernyataannya bernilai benar disebut *penyelesaian persamaan kuadrat* atau *akar-akar persamaan kuadrat* tersebut.

Dari persoalan nomor 1 di atas, diperoleh model matematika bahwa lebar jalan setapak Pak Adi, memenuhi persamaan:

$x^2 - 70x + 1000 = 0$

Aturan pokok yang dijadikan dasar penyelesaian kuadrat adalah sifat dalam bilangan real yang kita lampirkan dalam modul ini, adalah bahwa:

Aturan pokok untuk menyelesaikan persamaan aljabar:

Untuk setiap a,b $\in$ R jika dipenuhi a.b = 0 maka a = 0 atau b = 0

Dari persaoalan nomor 1 di atas,

$x^2 - 70x + 1000 = 0$

$\Leftrightarrow (x-20)(x-50) = 0$

$\Leftrightarrow x - 20 = 0$ atau $x - 50 = 0$

$\Leftrightarrow x = 20$ atau $x = 50$

Jawab ini jika direfleksikan kembali ke persoalannya, maka lebar jalan setapak yang mungkin adalah 20 m. (pembaca dapat mencari jawab mengapa tidak 50 m)

Cara yang pembaca lakukan di atas dikenal sebagai menyelesaikan persamaan kuadrat dengan memfaktorkan, secara umum, penyelesaian persamaan kuadrat dapat dilakukan dengan cara :

1) memfaktorkan, cara ini akan sangat efektif bila diskriminannya merupakan kuadrat sempurna.
2) melengkapkan kuadrat sempurna, dan
3) menggunakan rumus, yang biasa kita sebut sebagai rumus abc.

Dengan contoh-contoh penyelesaiannya sebagai berikut.

1) Menyelesaikan persamaan kuadrat dengan memfaktorkan

Pada prinsipnya pemfaktoran merupakan kebalikan dari penjabaran, langkah selanjutnya adalah digunakannya Teorema II dari Hukum Dasar Aljabar yang penulis sertakan dalam lampiran ini.

Contoh 1

Selesaiakan persamaan kuadrat $x^2 - 5x + 6 = 0$

Jawab :

$x^2 - 5x + 6 = 0$

dikalikan : $(-2)\times(-3) = 6$ (=c)

$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) = 0$

dijumlah : $(-2)+(-3) = -5$ (=b)

$\Leftrightarrow$ x – 2 = 0 atau x – 3 = 0 (Teorema II)

$\Leftrightarrow$ x = 2 atau x = 3

Jadi himpunan penyelesaiannya { 2, 3}

Contoh 2

Selesaiakan persamaan kuadrat $3x^2 + 2x - 5 = 0$

Jawab :

$3x^2 + 2x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 3x - 5 = 0$ (koefisien dari x yaitu 2 dipecah menjadi dua bilangan yang jumlahnya b (yaitu 2), sedangkan hasil kalinya a.c ($3\times-5 = -15$), yaitu 5 dan –3)

$\Leftrightarrow$ x(3x + 5) – (3x + 5) = 0 (distributif)

$\Leftrightarrow$ (x – 1)(3x + 5) = 0 (distributif)

$\Leftrightarrow$ x – 1 = 0 atau 3x + 5 = 0 (Teorema II)

$\Leftrightarrow$ x = 1 atau x = $-\frac{5}{3}$

Jadi himpunan penyelesaiannya { 1, $-\frac{5}{3}$ }

2) Penyelesaian Persamaan Kuadrat dengan Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Penyelesaian kuadrat sempurna dengan cara melengkapakan kuadrat sempurna pada dasarnya menggunakan sifat-sifat :

a) Jika $x^2 = p$ untuk $p \geq 0$, maka $x = \pm\sqrt{p}$ (artinya $x = \sqrt{p}$ atau $x = -\sqrt{p}$)

b) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Jika dalam persamaan kuadrat diskriminan ($D = b^2 - 4ac$) bukan kuadrat sempurna, maka cara ini adalah sangat efektif, demikian juga cara ini justru dapat digunakan dasar penyelesaian umum persamaan kuadrat, dan dalam pengembangannya dapat untuk menentukan nilai-nilai ekstrim fungsi kuadrat, mencari sumbu simetrinya dan sebagainya.

Contoh 1

Tentukan penyelesaian dari persamaan kuadrat $x^2 + 4x - 5 = 0$

Jawab :

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x = 5$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 5 + 4$ (kedua ruas ditambah kuadrat dari $\frac{1}{2}b$ atau $(\frac{1}{2}(4))^2 = 4)$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 = 9$

$\Leftrightarrow x + 2 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$\Leftrightarrow x + 2 = 3$ atau $x + 2 = -3$

$\Leftrightarrow x = 1$ atau $x = -5$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{1, -5\}$

<u>Contoh 2</u>

Tentukan penyelesaian dari $3x^2 - 5x + 1 = 0$

Jawab :

$3x^2 - 5x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 5x = -1$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{3}x = -\frac{5}{3}$ (kedua ruas dibagi dengan 3)

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = -\frac{5}{3} + \frac{25}{36}$ (kedua ruas ditambah $(\frac{1}{2}(-\frac{5}{3}))^2$)

$\Leftrightarrow (x - \frac{5}{6})^2 = \frac{13}{36}$

$\Leftrightarrow x - \frac{5}{6} = \pm\sqrt{\frac{13}{36}} = \pm\frac{1}{6}\sqrt{13}$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{13}$ atau $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{13}$

Jadi penyelesaian dari persamaan ini adalah $\{\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{13}, \frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{13}\}$

3) Menurunkan Rumus Penyelesaian Persamaan Kuadrat dengan Rumus (abc)

Menurunkan rumus penyelesaian persamaan kuadrat dapat dipercayakan kepada siswa, tetapi syaratnya penyelesaian dengan melengkapkan kuadrat telah dikuasai dengan baik. Dengan pengarahan yang baik maka siswa dapat diarahkan menurunkan rumus mencari akar persamaan kuadrat. Cara menurunkan rumus penyelesaian kuadrat di bawah ini dapat dijadikan referensi tambahan guru pada saat memfasilitasi siswa me-*reinvent* rumus ini, di samping cara menurunkan rumus yang sudah sering kita kenal.

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad ax^2 + bx = -c$

$\Leftrightarrow \quad 4a(ax^2 + bx) = -4ac$ (kedua ruas dikali 4a)

$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$ (kedua ruas ditambah b^2)

$\Leftrightarrow (2ax)^2 + 2(2ax)(b) + b^2 = b^2 - 4ac$

$\Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$\Leftrightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Leftrightarrow 2ax = -b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Jadi rumus untuk mencari akar-akar persamaan kuadrat :

$ax^2 + bx + c = 0$ untuk $a \neq 0$ maka akar-akarnya adalah:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Contoh: Selesaikanlah akar-akar persamaan $3x^2 - 5x + 1 = 0$

Jawab: di sini a = 3, b = –5 dan c = 1, sehingga :

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.(3)(1)}}{2(3)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Jadi himpunan penyelesaiannya $\left\{ \dfrac{5+\sqrt{13}}{6}, \dfrac{5-\sqrt{13}}{6} \right\}$

Catatan

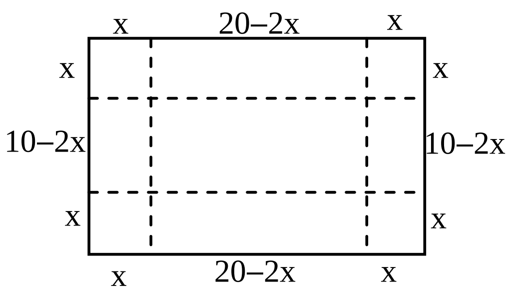
Mengacu pada definisi akar kuadrat, bahwa nilai pengakaran dari bilangan real non negatif a, yang ditulis dengan lambang $\sqrt{a}$ adalah b, sedemikian hingga dipenuhi $b^2 = a$. Dan merujuk konsistensi dari matematika, maka akar kuadrat dari bilangan non negatif, didefinisikan bernilai non negatif pula.

Sebagai misal $\sqrt{9} = 3$, sebab 9 positif dan $3^2 = 9$.

Contoh Penerapan Persamaan Kuadrat.

Dari persoalan yang kita jadikan konteks menuju ke persamaan kuadrat di depan Suatu kotak tanpa tutup untuk penyerahan kenang-kenangan teman yang berulang tahun, dibuat dari kertas karton berbentuk empat persegi panjang, ukuran 10 cm × 20 cm dengan jalan menggunting keempat sudutnya suatu persegi. Luas alasnya adalah 96 cm^2. Hitunglah panjang sisi dari keempat persegi yang digunting pada sudut karton tersebut!

Solusi :



Misalkan dipotong persegi di keempat sudutnya dengan panjang sisinya x cm. Maka kotak karton tanpa tutup yang terbentuk, mempunyai alas yang berbentuk empat persegi panjang dengan ukuran $(20 - 2x)$ cm × $(10 - 2x)$ cm.

Dari sini kita hasilkan persamaan :

$(20 - 2x)(10 - 2x) = 96$

Dengan menggunakan sifat distributif untuk menjabarkan ruas kiri kita hasilkan

$200 - 60x + 4x^2 = 96$

$\Leftrightarrow\ 4x^2 - 60x + 104 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 15x + 26 = 0$ (kedua ruas dibagi dengan 4)

$\Leftrightarrow\ (x - 2)(x - 13) = 0$

$\Leftrightarrow\ x - 2 = 0$ atau $x - 13 = 0$ (Teorema II)

$\Leftrightarrow x = 2$ atau $x = 13$

Dari hasil ini dapat ditarik kesimpulan bahwa harus dipotong persegi dengan ukuran sisi 2 cm agar diperoleh kotak dengan ukuran itu, dan tidak mungkin dipotong 13 cm (mengapa ?)

Latihan 1

Kerjakan soal-soal berikut tanpa melihat kunci jawab terlebih dulu!

1. Konstruksikan beberapa buah persoalan yang dapat dijadikan konteks untuk pendekatan ke persamaan kuadrat
2. Selesaikanlah persamaan- persamaan kuadrat berikut :
   a. $x^2 + 3x - 28 = 0$
   b. $\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-4} = \frac{5}{4}$
   c. $5x^2 - 6x + 5 = 0$
   d. $\frac{2x^2 - 1}{x-3} = x + 3 + \frac{17}{x-3}$
   e. $\frac{y}{2p} = \frac{3p}{6y - 5p}$
3. Sebuah bilangan positif lebih besar 5 dari tiga kali bilangan lainnya. Hasil kali kedua bilangan itu adalah sama dengan 68. Carilah bilangan itu!
4. Tentukan ukuran dari empat persegi panjang yang kelilingnya 50 kaki dan luasnya 150 kaki persegi.
5. Sisi miring sebuah segitiga adalah 34 inci. Carilah panjang dua kaki lainnya, apabila kaki yang satu 14 inci lebih panjang dari kaki lainnya

2. Persamaan Irasional

Persamaan irasional ialah persamaan yang peubahnya terletak di bawah tanda akar. Untuk menyelesaiakannya pada prinsipnya adalah dengan mengkuadratkan kedua ruas. Tetapi dengan mengkuadratkan kedua ruas, ada kemungkinan kita menyelundupkan akar. Maka hasil solusi harus diperiksa kembali.

<u>Contoh 1</u>

Tentukan nilai x yang memenuhi identitas $\sqrt{(x-5)^2} = x - 5$

Jawab:

Agar berlaku identitas $\sqrt{(x-5)^2} = x - 5$, harus dipenuhi

Syaratnya $(x - 5) \geq 0$ sebab hasil pengakaran adalah non negatif

Sehingga $x \geq 5$

Contoh 2

Tentukan penyelesaian dari $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{x+2}$

Jawab:

Uji prasyarat:

$x^2-4\geq 0 \;\Rightarrow\; x\leq -2$ atau $x\geq 2$, dan

$x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -2$

Dari $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{x+2}$, kedua ruas dikuadratkan, akan diperoleh

$\Leftrightarrow x^2-4=x+2$

$\Leftrightarrow x^2-x-6=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=3$ *atau* $x=-2$

Dengan memperhatika uji prasyarat tadi, maka himpunan penyelesaian dari persamaan di atas adalah { – 2, 3 }

Contoh 3

Tentukan nilai x yang memenuhi $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+1}=6$

Jawab:

Uji prasyarat:

1) $x+5\geq 0 \Rightarrow x\geq -5$

2) $2x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{1}{2}$

3) $6-\sqrt{2x+1}\geq 0$, sebab dari $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+1}=6 \Leftrightarrow \sqrt{x+5}=6-\sqrt{2x+1}$

$2x+3\leq 6 \Rightarrow x\leq 17\frac{1}{2}$

Dari prasyarat 1), 2) dan 3) diperoleh interval prasyarat: $-\frac{1}{2}\leq x\leq 17\frac{1}{2}$

Untuk menyelesaikan persamaan:

$\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+1}=6$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+5}=6-\sqrt{2x+1}\rightarrow$ kedua ruas dikuadratkan,

$\Leftrightarrow$ x + 5 = 36 – 12$\sqrt{2x+1}$ + (2x + 1)

$\Leftrightarrow$ 12$\sqrt{2x+1}$= x + 32 $\rightarrow$ kedus ruas dikuadratkan lagi, diperoleh

$\Leftrightarrow$ 144(2x + 1) = x^2 + 64x + 1024

$\Leftrightarrow$ x^2 – 224 x + 880 = 0

$\Leftrightarrow$(x – 4)(x – 220) = 0

$\Leftrightarrow$ x = 4 atau x = 220

Mengacu hasil uji prasyarat, diperoleh himpunan penyelesaiannya: {4}

Untuk x = 220 $\rightarrow \sqrt{225} + \sqrt{441} = 6$ (salah) sehingga 220 bukan akar atau yang penulis maksud akar yang diselundupkan.

2. Persamaan Nilai Absolut (Harga Mutlak)

Notasi absolut untuk suatu bilangan real a ditulis dengan notasi | a |, dan yang dimaksudkan dengan:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ jika } x \geq 0 \\ -x \text{ jika } x < 0 \end{cases}$$

Contoh:

| 13 | = 13

| - 13 | = 13

| 0 | = 0

| 3 - 7 | = 4

Berangkat dari definisi di atas, maka dapat kita turunkan sifat-sifat:

a. $\sqrt{x^2}$ = x

b. |a.b| = |a||b|, a,b $\in$ R

c. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, a,b $\in$ R

Contoh 1

Tentukan x dari | 1 - 3x | = 6

Jawab: | 1 - 3x | = 6

$\Leftrightarrow$ (1 - 3x) = 6 untuk 1 - 3x $\geq$ 0 atau - (1 - 3x) = 6 untuk 1 - 3x < 0

$\Leftrightarrow$ $x = -\frac{5}{3}$ untuk $x \leq \frac{1}{3}$ atau $x = \frac{7}{3}$ untuk $x > \frac{1}{3}$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah { $-\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$ }

Contoh 2

Tentukan x yang memenuhi | 2x - 1| = | x + 2|

Jawab: dari sifat harga mutlak di atas, dari | 2x - 1| = | x + 2| $\Leftrightarrow$ $(2x - 1)^2 = (x + 2)^2$

$\Leftrightarrow$ $4x^2 - 4x + 1 = x^2 + 4x + 4$

$\Leftrightarrow$ $3x^2 - 8x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ (3x + 1)(x - 3) = 0

$\Leftrightarrow\ x = -\frac{1}{3}$ atau x = 3

Contoh 3

Tentukan x yang memenuhi | x^2 - x | = 2

Jawab:

| x^2 - x | = 2 $\Leftrightarrow$ x^2 - x = 2 atau - (x^2 - x) = 2

$\Leftrightarrow$ x^2 - x - 2 = 0 atau x^2 - x + 2 = 0

$\Leftrightarrow$ (x + 1)(x - 2) = 0 atau x = $\frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} \notin R$

Jadi, himpunan penyelesaian = { - 1, 2 }

Latihan 2

Kerjakakan latohan soal-soal di bawah ini tanpa mel;ihat kunci jawab terlebih dahulu!

1. Tentukan nilai x dari persamaan berikut:
   a. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x - 2$
   b. $\sqrt{4x^2 + 12x + 9} = 2x + 3$

2. Tentukan x dari persamaan berikut:
   a. $\sqrt{6x^2 - 4x + 4} = x + 2$
   b. $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = 1$
   c. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4} = 7$

Tentukan nilai x yang memenuhi:

3. $\sqrt{5x-1} + \sqrt{2x} = \sqrt{10x+5}$
4. $\sqrt{2x+8} - \sqrt{3x-4} = \sqrt{x-5}$
5. $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{10x+6}$
6. $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+6} = \sqrt{x-9}$
7. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3} - \sqrt{x-3}$
8. $\sqrt{3x-2} - \sqrt{5x-1} + \sqrt{4x+1} = \sqrt{x+2}$
9. $\sqrt{x(x+1)} + 4 = 2x - 2 + 2\sqrt{3}$
10. $\sqrt{x^2} - \sqrt{(x-5)^2} = 5$
11. Tentukan x yang memenuhi:

a. | x - 3 | = 4

b. | 1 - 3x | = 5

c. | 2 - 5x | = 4

d. | 3 - 4x | = 6

12. Tentukan himpunan penyelesaiannya jika x $\in$ R

a. $\left|\frac{2x-5}{5x+2}\right| = 4$

b. $\left|\frac{3x-1}{2-x}\right| = 4$

c. $\left|\frac{2x-4}{x+2}\right| = 4$

d. $\left|\frac{3x+1}{x-2}\right| = 1$

13. Tentukan himpunan penyelesaian jika x $\in$ R

a. | 3x + 1 | = 4x + 6

b. $|(2x - 1) - \frac{1}{2}(2x+4)| = 2x-3$

14. Tentukan himpunan penyelesaian jika x $\in$ R

a. $| x^2 | = 4$

b. $| x^2 - 3x | = 4$

c. $| x^2 - 4x | = 5$

d. $| x^2 - x | = x$

4. Persamaan Eksponen

Misalkan siwa dihadapkan pada persoalan sebagaimana di bawah ini.

Suatu perusahaan mengeluarkan produk *handphone* terbaru. Saat diluncurkan beberapa waktu yang lalu, harganya adalah Rp 7.000.000,00 per unitnya. Namun dengan besarnya persainan dalam dunia produksi HP, perusahaan melakukan strategi dagang dengan jalan menyusut harganya 5% dari harga tahun sebelumnya. Adi sangat tertarik untuk memiliki ponsel jenis ini, namun uangnya hanya Rp 5.000.000,00, jadi setelah berapa tahun Adi bisa membeli ponsel jenis ini?

Persoalan di atas jika kita tulis model matematikanya akan berupa persamaan:

$$7.000.000(1-\frac{5}{100})^t = 5.000.000$$

Jika diperhatikan soal di atas, maka variabelnya terletak pada pangkat dari bilangan berpangkatnya, persamaan seperti ini dinamakan persamaan eksponen.

Cara menyelesaikan persamaan eksponen ini tergantung dari bentuk persamaan eksponen itu sendiri. Bentuk-bentuk persamaan eksponen tersebut da antaranya adalah:

a. Pesamaan Bentuk: $a^{f(x)} = 1$, a $\neq 0$

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $(\frac{1}{6})^{3x^2-4x+1} = 1$

Jawab:

$$(\tfrac{1}{6})^{3x^2-4x+1} = 1 \Leftrightarrow (\tfrac{1}{6})^{3x^2-4x+1} = (\tfrac{1}{6})^0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (3x - 1)(x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \tfrac{1}{3} \text{ atau } x = 1$$

Jadi himpunan penyelesaiannya { $\frac{1}{3}$, 1 }

b. Persamaan Bentuk: $a^{f(x)} = a^p$

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari: $5^{x^2-7x+7} = 0{,}008$

Jawab:

$$5^{x^2-7x+7} = 0{,}008 \Leftrightarrow 5^{x^2-7x+7} = \frac{1}{125}$$
$$\Leftrightarrow 5^{x^2-7x+7} = 5^{-3}$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 7 = -3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 5) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ atau } x = 5$$

Jadi himpunan penyelesaiannya { 2, 5 }

c. Persamaan Bentuk: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari: $5^{x-1} + 5^{2-x} = 6$

Jawab:

$$5^{x-1} + 5^{2-x} = 6 \Leftrightarrow 5^{x-1} + 5^{1-(x-1)} = 6$$
$$\Leftrightarrow 5^{x-1} + \frac{5}{5^{x-1}} = 6$$, selanjutkna kita misalkan $y = 5^{x-1}$
$$\Leftrightarrow y + \frac{5}{y} = 6$$
$$\Leftrightarrow y^2 - 6y + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow (y - 1)(y - 5) = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 1 \text{ atau } y = 5$$

Untuk $y = 1 \Rightarrow 5^{x-1} = 1 = 5^0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Untuk $y = 5 \Rightarrow 5^{x-1} = 5$

$\Leftrightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

Jadi himpunan peneyelesaiannya { 1, 2 }

d. Persamaan Bentuk: $f(x)^{g(x)} = 1$

Untuk menyelesaiakan persamaan bentuk ini, maka penyelesaian diperoleh dari:

1) Pangkat = 0, jadi g(x) = 0, hasil yang diperoleh jika disubstitusikan bilangan pokok yaitu f(x), hasilnya tidak nol.
2) Bilangan pokok = 1
3) Bilangan pokok = - 1, dan hasilnya dicek dengan mensubstitusikannya ke dalam x, dan nilai pangkatnya harus bilangan genap.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari: $(2x - 5)^{x^2-x-2} = 1$

1) Untuk pangkat = 0

   $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$

   $\Leftrightarrow x = -1 \text{ atau } x = 2$

   Selanjutnya dicek dengan jalan disubstitusikan ke dalam 2x - 5

   Untuk $x = -1 \Rightarrow 2.1 - 5 = -3 \neq 0$, sehingga -1 merupakan penyelesaian

   Untuk $x = 2 \Rightarrow 2.2 - 5 = -1 \neq 0$, sehingga 2 merupakan penyelesaian

2) Untuk bilangan pokok = 1, $2x - 5 = 1 \Rightarrow x = 3$

3) Untuk bilangan pokok = - 1, $\Rightarrow$ 2x - 5 = -1 $\Rightarrow$ x = 2, diuji ke pangkat diperoleh: $2^2 - 2 - 2 = 0$ suatu bilangan genap, sehingga - 1 merupakan penyelesaian.
Jadi himpunan penyelesaiannya { -1, 2, 3 }

e. Bentuk: $h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$

Penyelesaian bentuk-bentuk ini diperoleh dari kemungkinan-kemungkinan:
1) Pangkat sama
2) Bilangan pokok = 1
3) Bilangan pokok = -1, pangkat harus sama-sama genap atau sama-sama ganjil
4) Bilangan pokok = 0, pangkat harus positif

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $(2x+3)^{x^2+x-2} = (2x+3)^{3x+1}$

Jawab:

1) Untuk pangkat yang sama:
$x^2 + x - 2 = 3x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$ atau $x = 3$

2) Bilangan pokok = 1
$2x + 3 = 1 \Rightarrow x = -1$

3) Bilangan pokok = - 1
$2x + 3 = -1 \Rightarrow x = -2$, hasil ini diujikan pada pangkatnya:

$x^2 + x - 2$	$3x + 1$
$(-2)^2 + 2 - 2 = 0$ (genap)	$3(-2) + 1 = -5$ (ganjil)

4) Bilangan pokok = 0
$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$, hasil ini diujikan pada pangkatnya:

$x^2 + x - 2$	$3x + 1$
$(-\frac{3}{2})^2 + (-\frac{3}{2}) - 2 = -\frac{5}{2}$ (negatif)	$3(-\frac{3}{2}) + 1 = -\frac{7}{2}$ (negatif)

Sehingga hasil ini bukan penyelesaian
Jadi himpunan penyelesaiannya: {-1, 3 }

g. Bentuk: $f(x)^{g(x)} = h(x)^{g(x)}$

Penyelesaian persamaan bentuk ini, diperoleh dari kemungkinan-kemungkinan:
1) Pangkat nol untuk bilangan pokok $\neq 0$
2) Bilangan pokok sama

Contoh:

Selesaikan persamaan $(x^2 - x - 6)^{x^2+x-12} = (2x^2 + 5x + 2)^{x^2+x-12}$

Jawab:

1) Pangkat = 0
$x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 3) = 0$
$\Leftrightarrow x = -4$ atau $x = 3$, hasil ini diuji pada bilangan pokok:

	$x^2 - x - 6$	$2x^2 + 5x + 2$
x = - 4	$(-4)^2 - (-4) - 6 = 14 \neq 0$	$2(-3) + 5(-3) + 2 = 24 \neq 0$
x = 3	$3^2 - 3 - 6 = 0$	$2(3^2) + 5(3) + 2 = 35 \neq 0$

2) Bilangan pokok sama
$x^2 - x - 6 = 2x^2 + 5x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 2)(x + 4) = 0$
$\Leftrightarrow x = -2$ atau $x = -4$

Jadi himpunan penyelesaian { -2 , -4}

Latihan:

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan berikut:

1. a. $5^{3x-6} = 1$
   b. $e^{2x^2-x-6} = 1$
   c. $(\frac{1}{4})^{4-3x} = 1$
   d. $(0{,}125)^{x^2-x-12} = 1$
   e. $\dfrac{4}{2^{5x+6}} = 1$

2. a. $5^{4x-1} = 125$
   b. $2^{x^2} = 16$
   c. $3^{2x+4} = 16$
   d. $6^{2x+3} = \frac{1}{216}$
   e. $3^{5x} \div 27^{x+7} = 9$

3. a. $3^{5x-1} = 27^{2x+3}$
   b. $6^{2x-6} = 6 \times 216^{x+1}$
   c. $2^{x} \div 8^{x+2} = 64 \times 4^{3x}$
   d. $4^{x^2+5x-11} = 4^{-2x-3}$
   c. $\dfrac{\sqrt[3]{4^{5-x}}}{8} = \dfrac{1}{\sqrt{8^{x+4}}}$

4. a. $4^{x} - 2^{x+1} = 8$
   b. $2^{2x+3} + 2^{x+1} = 36$
   c. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$
   d. $2^{2x+1} - 2^{x} = 6$
   e. $4^{1-x} + 2^{3-x} = 12$

5. a. $5^{2-x} + 5^{x-1} = 6$
   b. $2^{x+5} + 2^{5-x} = 64$
   c. $3^{2x} + 3^{-2x+5} = 36$
   d. $5^{4x-3} + 25^{3-2x} = 30$
   e. $6^{2x-1} + 6^{4-2x} = 42$

6. a. $(2x-3)^{5-x} = 8$
   b. $(x^2 - 3x + 1)^{2x^2+x-3} = 1$
   c. $(x^2 - 3x + 1)^{x+2} = (x+4)^{2+x}$
   d. $(x^2 - 3x + 1)^{x^2+2x-8} = (x^2 - 3x + 1)^{2x+3}$
   e. $(x^2 - x + 1)^{3x-7} = (x^2 - x + 1)^{x^2-2x+2}$

4. **Persamaan Logaritma**

Sebelum mempelajari persamaan logaritma terlebih dulu diingatkan konsep logaritma yang merupakan operasi invers dari eksponen.

Pandanglah persamaan eksponen, tentukan x sedemikian hingga $2^x = 8$, persamaan di atas dapat ditulis dengan notasi $x = {}^2\log 8$.

Sehingga: ${}^g\log a = p \Leftrightarrow g^p = a$

Dari notasi di atas:

g dinamakan bilangan pokok (basis) logaritma, dengan g > 0 dan $g \neq 1$

a dinamakan numerus, yaitu bilangan yang ditarik logaritmanya dengan a > 0

p disebut pangkat

Catatan:

1) Untuk logaritma dengan bilangan pokok e $\approx$ 2,7182... (bilangan Euler) disebut logaritma naturalis atau logaritma Napier dan ditulis dengan notasi ln, sehingga $\ln x = {}^e\log x$.
2) Untuk logaritma dengan bilangan pokok 10, disebut logaritma Briggs dan ditulis dengan notasi log, sehingga $\log x = {}^{10}\log x$

Yang dimaksud dengan persamaan logaritma adalah persamaan yang variabelnya sebagai numerus atau sebagai bilangan pokok dari suatu logaritma.

1. Bentuk ${}^a\log f(x) = {}^a\log p$

Prinsip penyelesaian: ${}^a\log f(x) = {}^a\log p \Leftrightarrow f(x) = p$

Contoh:

Tentukan penyelesaian dari persamaan ${}^2\log(x+1) + {}^2\log(5-x) - {}^2\log(x-2) = 3$

Jawab:

$$
\begin{aligned}
{}^2\log(x+1) + {}^2\log(5-x) - {}^2\log(x-2) = 3 &\Leftrightarrow {}^2\log\frac{(x+1)(5-x)}{(x-2)} = {}^2\log 8 \\
&\Leftrightarrow \frac{(x+1)(5-x)}{(x-2)} = 8 \\
&\Leftrightarrow (x + 1)(5 - x) = 8(x - 2) \\
&\Leftrightarrow 4x - x^2 + 5 = 8x - 16 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 4x - 21 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x + 7)(x - 3) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -7 \text{ atau } x = 3
\end{aligned}
$$

Untuk x = -7 adalah tidak mungkin sebab numerus mesti bilangan positif, jadi himpunan penyelesaiannya { 3 }.

2. Persamaan bentuk: ${}^a\log f(x) = {}^b\log f(x)$

Prinsip penyelesaian bentuk : ${}^a\log f(x) = {}^b\log f(x) \Leftrightarrow f(x) = 1$

Contoh:

Tentukan penyelesaian persamaan: ${}^3\log(x^2 + 2x - 7) = {}^5\log(x^2 + 2x - 7)$

Jawab:

$$
\begin{aligned}
{}^3\log(x^2 + 2x - 7) = {}^5\log(x^2 + 2x - 7) &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 7 = 1 \\
&\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x + 4)(x - 2) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -4 \text{ atau } x = 2
\end{aligned}
$$

Jadi himpunan penyelesaiannya { -4, 2 }

3. Persamaan bentuk: $^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)$

Prinsip penyelesaian bentuk $^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Contoh:

Tentukan penyelesaian persamaan: $\frac{1}{^{(x+6)}\log x} + {}^{x}\log(x-1) = 2 + \frac{1}{^{2}\log x}$

Jawab:

$\frac{1}{^{(x+6)}\log x} + {}^{x}\log(x-1) = 2 + \frac{1}{^{2}\log x} \Leftrightarrow {}^{x}\log(x+6) + {}^{x}\log(x-1) = {}^{x}\log x^2 + {}^{x}\log 2$

(ingat $\frac{1}{^{a}\log b} = {}^{b}\log a$)

$\Leftrightarrow {}^{x}\log(x+6)(x-1) = {}^{x}\log 2x^2$

$\Leftrightarrow (x + 6)(x - 1) = 2x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ atau $x = 3$

Jadi himpunan penyelesaiannya { 2, 3 }

4. Persamaan bentuk: $^{f(x)}\log g(x) = {}^{f(x)}\log h(x)$

Prinsip penyelesaian bentuk $^{f(x)}\log g(x) = {}^{f(x)}\log h(x)$ adalah $g(x) = h(x)$, dengan syarat nilai $g(x)$ dan $h(x)$ keduanya positif, dan $f(x)$ harus positif dan tidak sama dengan 1 (satu).

Contoh:

Tentukan penyelesaian persamaan: $^{(2x-1)}\log(x+3) = {}^{(2x-1)}\log(2x-5)$

Jawab:

$^{(2x-1)}\log(x+3) = {}^{(2x-1)}\log(2x-5) \Leftrightarrow x + 3 = 2x - 5$

$\Leftrightarrow x = 8$

Untuk $x = 8$, nilai $x + 3$, $2x - 5$, dan $2x - 1$ ketiganya positif dan $2x - 1 \neq 1$

Jadi himpunan penyelesaiannya { 8 }

5. Persamaan bentuk: $a\,{}^{g}\log^2 f(x) + b\,{}^{g}\log f(x) + c = 0$

Prinsip penyelesaian bentuk $a\,{}^{g}\log^2 f(x) + b\,{}^{g}\log f(x) + c = 0$ adalah dengan memisalkan $^{g}\log f(x) = y$, sehingga diperoleh persamaan kuadrat $ay^2 + by + c = 0$ yang syarat agar dapat diselesaiakan adalah $b^2 - 4ac \geq 0$

Contoh:

Tentukan penyelesaian $x^{\log x} - 10.x^{-\log x} = 9$

Jawab:

$x^{\log x} - 10.x^{-\log x} = 9 \Leftrightarrow x^{\log x} - \frac{10}{x^{\log x}} = 9$

Dengan dimisalkan $x^{\log x} = p$, maka diperoleh: $p - \frac{10}{p} = 9$

$\Leftrightarrow p^2 - 10 = 9p$

$\Leftrightarrow p^2 - 9p - 10 = 0$

$\Leftrightarrow (p + 1)(p - 10) = 0$

$\Leftrightarrow p = -1$ (tidak memenuhi) atau $p = 10$

Untuk $p = 10$ maka $x^{\log x} = 10$, sehingga $\log x^{\log x} = \log 10$

$\Leftrightarrow \log x \cdot \log x = 1$

$\Leftrightarrow \log^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \log x = \pm 1$

Untuk x = 1 maka log x = 1 sehingga x = 10

Untuk x = -1 maka log x = -1 sehingga x = $\frac{1}{10}$

Jadi himpunan penyelesaiannya { $\frac{1}{10}$, 10 }

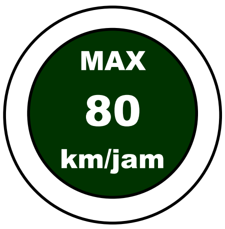
Latihan:

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan logaritma di bawah ini:

1. $\log x + \log (2x - 1) = 1$
2. ${}^2\log (x - 3) + {}^2\log (x - 2) = {}^4\log 5 \times {}^5\log 4$
3. ${}^x\log (x + 12) - 3\ {}^x\log (x + 1) = 0$
4. ${}^6\log (6^x - 30) = 3 - x$
5. $\dfrac{x^{\log 5x}}{5x^{\log x}} = 25$
6. $\log(\log (4x + 12)) = \log(\log 4x - \log 4) + \log 2$
7. $\dfrac{{}^2\log(2x-3)}{\log x} - {}^x\log(x+6) + \dfrac{1}{{}^{x+2}\log x} = 1$
8. $\dfrac{1}{{}^{x+2}\log x} + {}^x\log(x-3) + {}^x\log 5 = \dfrac{\log 30}{\log x}$
9. $x^{3+\log x} = 10.000$
10. $(2x)^{1+{}^2\log 2x} = 64x^3$

B. Pertidak samaan

Perhatikan persoalan–persoalan berikut :

1. Kursus komputer di LPK Bina Bangsa akan diselenggarakan jika peserta yang terdaftar paling tidak 10 orang.
2. 

Sebetulnya Budi sangat tergesa-gesa karena kebetulan pagi ini bernagkat terlalu siang, padahal hari ini adalah hari pertama ia harus mengikuti Ujian Nasional untuk mata pelajaran matematika. Tetapi waktu masuk ke jalan Gajah Mada yaitu jalan di mana sekolah Budi berada, pada mulut jalan ada tanda seperti di samping, bagaimana jalan yang harus ditempuh Budi.
3. Awal tahun pelajaran yang lalu Kepala Sekolah memberi tahu pada rapat pleno Komite Sekolah, bahwa kriteria ketuntasan minimal untuk mata pelajaran matematika adalah 65%. Budi kebingungan mendengar pengumuman kepala sekolah tersebut, melalui ayahnya yang hadir pada rapat komite sekolah, tersebut, dapatkah anda membantu menjelaskan kepada Budi ?

Persoalan-persoalan di atas dapat pembaca jadikan konteks untuk memfasilitassi siswa menuju ke konsep pertidaksamaan. Dan sebagaimana telah disinggung di depan bahwa pertidak samaan adalah kalimat terbuka berkaitan dengan relasi >, $\geq$, <, $\leq$, dan $\neq$.

Pada pembahasan di bawah ini akan dibahas bahwa pada setiap lapangan *(field)* himpunan bilangan real misalnya, berlaku aksioma terurut (*ordered*) yang merupakan kaidah dasar dalam pertidaksamaan. Kaidah-kaidah pokok pertidak samaan ini penulis sajikan dengan pendekatan deduktif, penulis maksudkan untuk memperkuat latar belakang materi bagi guru, dan untuk siswa sebaiknya dipilih pendekatan induktif (misalnya dengan contoh-contoh bilangan nyata (bukan sekedar simbul)) untuk mendukung pendekatan kontekstualnya.

1. Kaidah-kaidah Pokok Pertidak Samaan

a. Aksioma I : Aksioma Trichotomy

Jika a dan b $\in$ R, maka satu dan hanya satu pernyataan berikut benar :

(i) a > b, (ii) a = b (iii) b > a

b. Aksioma II : Aksioma Transitif

Jika a, b, dan c $\in$ R, sedemikian hingga a > b dan b > c, maka a > c

c. Aksioma III : Aksioma Penjumlahan

Jika a, b, dan c $\in$ R, sedemikian hingga a > b, maka a + c > b + c

d. Aksioma IV Perkalian

Jika a, b, dan c $\in$ R, sedemikian hingga a > b dan c > 0, maka ac > bc

Definisi I

Jika a dan b $\in$ R, dikatakan a < b bila dan hanya bila b > a

Definisi II :

Suatu bilangan real a adalah positif bila a > 0 dan negatif bila a < 0

Dari definisi-definisi dan aksioma-aksioma di atas dapat diturunkan teorema-teorema pokok pertidak samaan sebagai berikut :

Teorema 1 : Jika a dan b $\in$ R,

(i) a > b jika dan hanya jika $-a < -b$

(ii) a < b jika dan hanya jika $-a > -b$

Bukti : Kita akan membuktikan (i) sedang (ii) caranya sama

$a > b$

$\Leftrightarrow a + ((-a) + (-b)) > b + ((-a) + (-b))$ (aksioma III)

$\Leftrightarrow (a + (-a)) + (-b) > (b + (-b)) + (-b)$ (komutatif dan asosiatif lapangan)

$\Leftrightarrow 0 + (-b) > 0 + (-b)$ (sifat elemen invers)

$\Leftrightarrow -b > -a$ (sifat elemen netral aditif)

$\Leftrightarrow -a < -b$ (qed) (definisi I)

Perluasan Teorema 1, Jika $a>0$, maka $-a < 0$ (Buktikan !, dan ingat $-0 = 0$)

Teorema 2 : $1 > 0$

Bukti : Mengacu aksioma I (trichotomy), satu dan hanya satu sifat ini dipenuhi : (i) $1 > 0$, (ii) $1 = 0$, atau (iii) $1 < 0$

$1 \neq 0$ (untuk setiap $a \in R$, $a\times0 = 0$, sedang 1 identitas perkalian, $a\times1 = a$)

Andaikan $1 < 0$, maka $-1 > 0$ (teorema 1), sehingga

$(-1)(-1) > 0.(-1)$ (aksioma IV)

$1 > 0$ (sifat elemen 0 dan $(-a)(-b) = ab$)

Hal ini bertentangan dengan asumsi $1 < 0$, jadi satu-satunya kemungkinan hanyalah $1 > 0$

Perluasan Teorema 2 : $-1 < 0$ (Buktikan!)

Teorema 3 : Jika $a > b$ dan $c < 0$, maka $ac < bc$

Bukti : Dari $c < 0$, berarti $-c > 0$ (perluasan teorema 1)

$a > b \Leftrightarrow a(-c) > b(-c)$ (aksioma IV)

$\Leftrightarrow -(ac) > -(bc)$ (teorema III Kaidah pokok aljabar)

$\Leftrightarrow ac < bc$ (qed) (teorema 1)

Teorema 4 : Jika $a > b$ dan $c > d$ maka $a + c > b + d$

Bukti : $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$ (aksioma III)

$c > d \Leftrightarrow b + c > b + d$ (aksioma III)

$\Leftrightarrow a + c > b + d$ (qed) (aksioma transitif)

Teorema 5 : Jika a, b, c dan d adalah bilangan positif, $a > b$ dan $c > d$ maka $ac > bd$

Bukti : $\left.\begin{matrix} a > b \\ c > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$ ac > bc (aksioma IV)

$\left.\begin{matrix} c > d \\ b > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$ bc > bd (aksioma IV),

Dari dua kenyataan di atas, dapat disimpulkan bahwa ac > bc (aksioma II)

2 Pertidaksamaan Linear Satu Peubah

Perhatikan persoalan yang dapat kita jadikan konteks ke pertidak samaan linear berikut Pada pelajaran sejarah, akan diselenggarakann tiga kali pengujian, dan seseorang dinyatakan berkompeten (tuntas) dan Anda akan mendapatkan predikat A jika jumlah ketiga skor tersebut sekurang-kurangnya 270. Anda telah memperoleh skor 91 dan 86 pada kedua tes terdahulu. Berapa skor pada tes ketiga yang harus diraihnya, agar memperoleh predikat A.

Model matematikanya dari persoalan di atas, diperoleh dengan memisalkan skor tes ketiga x, maka diperoleh : $91 + 86 + x \geq 270 \Leftrightarrow x + 177 \geq 270$, bentuk yang terakhir ini merupakan pertidaksamaan linear satu variabel. Sehingga dari sini dapat disimpulkan bahwa :

Bentuk umum pertidak samaan linear satu variabel adalah : **ax + b > 0, a $\neq$ 0** (termasuk di sini relasi < , $\geq, \leq$, dan $\neq$)

Penyelesaian umum pertidaksamaan linear :

$ax + b > 0$

$\Leftrightarrow \quad ax + b + (-b) > 0 + (-b)$ (aksioma III)

$\Leftrightarrow \quad ax + (b + (-b)) > -b$ (asosiatif dan sifat netral aditif)

$\Leftrightarrow ax + 0 > -b$

$\Leftrightarrow ax > -b$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a}(ax) > \frac{1}{a}(-b)$ jika a > 0 atau $\frac{1}{a}(ax) < \frac{1}{a}(-b)$ jika a < 0

$\Leftrightarrow (\frac{1}{a}.a)x > -\frac{b}{a}$ jika a > 0 atau $(\frac{1}{a}.a)x < -\frac{b}{a}$ jika a < 0 (asosiatif)

$\Leftrightarrow \quad 1.\ x > -\frac{b}{a}$ jika a > 0 atau $1.x < -\frac{b}{a}$ jika a < 0

$\Leftrightarrow \quad x > -\frac{b}{a}$ atau $x < -\frac{b}{a}$

Jadi himpunan penyelesaiannya $\{ x \mid x > -\frac{b}{a} \}$ untuk a > 0, atau $\{ x \mid x < -\frac{b}{a} \}$ untuk a < 0.

Contoh 1

Tentuka solusi dari persoalan : $x + 177 \geq 270$

Jawab : $x + 177 \geq 270$

$\Leftrightarrow \quad x + 177 + (-177) \geq 270 + (-177)$

$\Leftrightarrow \quad x + 0 \geq 93$

$\Leftrightarrow \quad x \geq 93$

Jadi agar diperoleh predikat A maka pada ujian ketiga sekurang-kurangnya harus memperoleh skor 93

Contoh 2

Tentukan nilai x yang memenuhi $\frac{x}{2} - \frac{1}{3} < \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}$

Jawab : $\frac{x}{2} - \frac{1}{3} < \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 6\ (\frac{x}{2} - \frac{1}{3}) < 6(\frac{2x}{3} + \frac{1}{2})$ (aksioma IV)

$\Leftrightarrow 3x - 2 < 4x + 3$

$\Leftrightarrow 3x - 4x < 3 + 2$ (hasil kedua ruas ditambah dengan $(-4x + 3)$)

$\Leftrightarrow -x < 5$

$\Leftrightarrow x > -5$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{ x \mid x > -5 \}$

Latihan 4

Kerjakan soal-soal latihan di bawah ini tanpa melihat kunci jawab terlebih dulu!

1. Susunlah paling sedikit lima buah ungkapan atau persoalan yang model matematikanya merupakan pertidaksamaan linear satu variabel. Tukarkan hasilnya dengan temanmu agar dapat disusunn model matematikanya, dan diskusikan jika ada hal-hal yang kurang jelas.
2. Buktikan bahwa relasi $\geq$ merupakan relasi *anti simetris*, artinya jika $a \geq b$ dan $b \geq a$ maka $a = b$
3. Jika diketahui $a > b > 0$ maka buktikan $a^2 > b^2$
   Apakah jika $a > b$ maka selalu $a^2 > b^2$
4. Jika diketahui $x > y$ maka buktikan bahwa $x > \frac{1}{2}(x + y) > y$

5. Buktikan bahwa $2xy < x^2 + y^2$ untuk setiap $x, y \in R$
6. Carilahn nilai x yang memenuhi pertidak samaan :
   a. $2(x + 3) > 3(x - 1) + 6$
   b. $\frac{x}{4}+\frac{2}{3}\leq\frac{2x}{3}-\frac{1}{6}$
   c. $\frac{1}{x}+\frac{3}{4x}>\frac{7}{8}$
7. Untuk nilai x yang manakah memenuhi :

a. $\begin{cases} x-2\leq 3x-6 \\ 2x-5<x+4 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 4x-2\leq x+7 \\ 1-2x<x-2 \end{cases}$

8. Jika yang dimaksud dengan a < b < c adalah a < b dan b < c, maka tentukan penyelesaian dari :
   a. $2x - 3 \leq 4x + 5 < x + 47$ c. $2x + 1 \leq 3x - 1$ atau $x + 3 \leq 2x$
   b. $-\frac{3}{4}\leq\frac{1-x}{12}\leq-\frac{1}{3}$

3. Pertidaksamaan Pecahan

Pertidak samaan pecahan adalah pertidaksamaan yang berbentuk pecahan, dan mengandung peubah pada penyebutnya

Perlu diingat bahwa bentuk $\frac{a}{b}$ akan bernilai 0 hanya untuk a = 0, nilai yang menyebabkan $\frac{a}{b}$ sama dengan nol disebut pembuat nol dari pertidak samaan itu, dan untuk b = 0, yang menyebabkan pecahan bernilai tak terdefinisi, disebut pembuat kutub. Baik pembuat nol maupun pembuat kutub akan menandai perubahan tanda dari positif ke negatif dan sebaliknya.

Contoh

Tentukan penyelesaian dari $\frac{2x+1}{5x-1}\leq 1$

Jawab:

Langkah pertama buat ruas kanan sama dengan nol,

$$\frac{2x+1}{5x-1}-1\leq 0$$

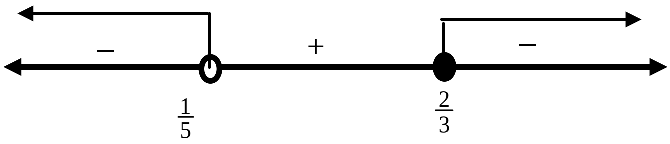
$$\Leftrightarrow \frac{2x+1-(5x-1)}{5x-1} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x+2}{5x-1} \le 0$$

Pembuat nol –3x + 2 = 0 $\Rightarrow$ x = $\frac{2}{3}$

Pembuat kutub 5x – 1 = 0 $\Rightarrow x = \frac{1}{5}$

Garis bilangan penyelesaiannya:



Jadi himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan tersebut adalah

HP = { x | x < $\frac{1}{5}$ atau x ≥ $\frac{2}{3}$ }

Latihan 5

Kerjakan soal-soal di bawah ini tanpa melihat kunci jawab terlebih dahulu!

Tentukan batas-batas x yang memenuhi:

1. $\frac{2x+1}{x-2} \ge 1$
2. $\frac{2x-1}{x-2} \le \frac{x+5}{x+2}$
3. $\frac{2-x}{x+2} \ge \frac{x-1}{3-x}$
4. $\frac{3-2x}{3x+1} \le \frac{2x-1}{4-3x}$
5. $\frac{9x-6}{x} - \frac{3(2x-3)}{x} > -9$
6. $3 < \frac{1-3x}{2x+1} \le 4$
7. $\frac{x-1}{x^2} < \frac{x+1}{x^2+x+1} \le \frac{1}{x+1}$
8. $\frac{x+1}{x^2+x+1} < \frac{1}{x-1}$
9. $-4 \le \frac{2x^2+7x-8}{x^2+3x-7} < 2$

10. $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x^2+4x+3} \geq \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{5-x}{3x^2-4x-7} < \dfrac{2x}{3x-7} \end{cases}$

4. Pertidaksamaan Irasional

Pada pertidak samaan irasional di samping ketentuan yang diminta, yang juga harus diperhatikan adalah sebagai berikut.

a. Yang ada di bawah tanda akar ≥ 0

b. Hasil penarikan akar ≥ 0

Contoh

Tentukan batas-batas x yang memenuhi $\sqrt{x+4} < \sqrt{2-x}$

Jawab:

$\sqrt{x+4} < \sqrt{2-x}$ jika kedua ruas dikuadratkan.

$(x + 4) < (2 - x)$

$2x < -2$

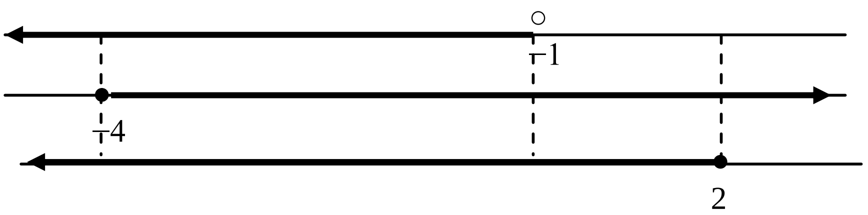
$x < -1$

Syarat tambahan:

(i) $x + 4 \geq 0 \rightarrow x \geq -4$

(ii) $2 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 2$

Jika ketiga interval ini kita iriskan, akan ketemu penyelesaian pertidaksamaan tersebut



Himpunan penyelesaianya, yang merupakan irisan ketiga interval itu adalah:

HP = $\{ x \mid -4 \leq x < -1 \}$

Latihan

Kerjakan soal-soal di bawah ini tanpa melihat kunci jawab terlebih dulu!

Tentukan batas-batas yang memenuhi pertidaksamaan di bawah ini

1. $\sqrt{6+2x} < 2$

2. $\sqrt{4-2x} > 5$

3. x − 3 < $\sqrt{2x-1}$

4. x − 3 < $\sqrt{x^2+2x-48}$

5. $\sqrt{x^2+x-12} < x$

6. $\sqrt{4x^2-4x-3} > 2x$

7. $\sqrt{-(x^2+8x)} < \sqrt{x^2+3x+2}$

8. $\sqrt{x^2-4x} < \sqrt{x^2+2x+1}$

9. $\sqrt{4x+17} > 2x - \sqrt{8x+17}$

10. $\sqrt{2x-6} < 2 + \sqrt{1+x}$

5. Pertidaksamaan Nilai Absolut

Berangkat dari definisi nilai absolut, bahwa untuk setiap x $\in$ R:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ jika } x \geq 0 \\ -x \text{ jika } x < 0 \end{cases}$$

Dapat ditarik suatu kesimpulan bahwa | x | $\geq$ 0, sehingga dapat diturunkan beberapa sifat sebagai berikut:

1. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
2. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ atau $x > a$

Untuk membuktikan kedua sifat di atas digunakan ekuivalensi $|x| \Leftrightarrow x^2$, mengingat $x^2 \geq 0$, juga, sehingga $|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2$

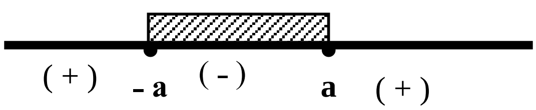
Sifat 1: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

Bukti: $|x| < a \Leftrightarrow x^2 < a^2$

$\Leftrightarrow x^2 - a^2 < 0$

$\Leftrightarrow (x + a)(x - a) < 0$

Pembuat nol, x = - a dan x = a



Sehingga $-a < x < a$

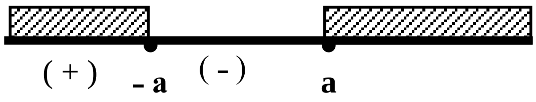
Sifat 2: $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ atau $x > a$

Bukti: $|x| > a \Leftrightarrow x^2 > a^2$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - a^2 > 0$

$\Leftrightarrow$ $(x + a)(x - a) > 0$

Pembuat nol: $(x + a)(x - a) = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = - a$ atau $x = a$



Sehingga $x < -a$ atau $x > a$

Latihan

Selesaikanlah petidaksamaan-pertidaksamaan di bawah ini:

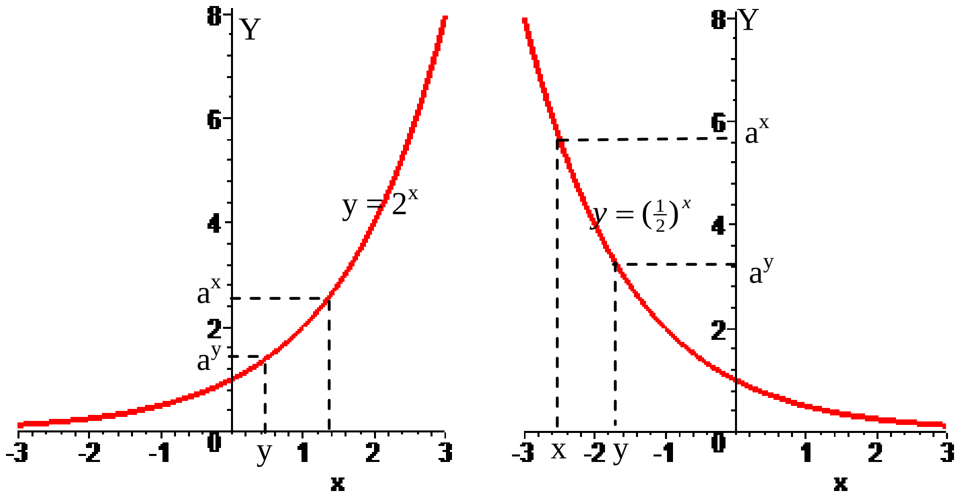
1. $| x + 2 | \geq 5$
2. $|3x – 1| < 6$
3. $|x^2 – 1| , 7$
4. $|2x^2 – 8x – 1 | \geq 9$
5. $|x^2 – x – 1 | > 1$
6. $|x^2 – 2| > 1$
7. $|x^2 – x| < 1$
8. $\left|\dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}\right| < 1$
9. $\left|\dfrac{x+1}{x^2+1}\right| < 1$
10. $| x – 3 | < |x – 1 |$

6. Pertidak Samaan Eksponen

Untuk memahami hubungan x dan y pada $a^x < a^y$ dan $a^x > a^y$, maka dapat diperlihatkan dengan grafik $y = a^x$ untuk $a > 1$ dan $0 < a < 1$.

Sebagai ilustrasi perhatian grafik fungsi $y = 2^x$ dan $y = (\frac{1}{2})^x$ sebagaimana grafik di bawah ini:

a^x



Dengan memperhatikan kedua grafik di atas cukup memberi gambaran, bahwa:

> (1) Untuk $a > 1$:
>
> (a) $a^x > a^y \Rightarrow x > y$
>
> (b) $a^x < a^y \Rightarrow x < y$
>
> (2) Untuk $0 < a < 1$:
>
> (a) $a^x > a^y \Rightarrow x < y$
>
> (b) $a^x < a^y \Rightarrow x > y$

Contoh:

1. Tentukan batas-batas x yang memenuhi: $4^{2x+1} \le 8^{x+5}$

   Jawab:

   $$4^{2x+1} \le 8^{x+5} \Leftrightarrow (2^2)^{2x+1} \le (2^3)^{x+5}$$
   $$\Leftrightarrow 2^{4x+2} \le 2^{3x+15}$$
   $$\Leftrightarrow 4x + 2 \le 3x + 15$$
   $$\Leftrightarrow x \le 13$$

   Jadi batas-batas nilai x adalah $x \le 13$

2. Tentukan batas-batas x yang memenuhi pertidaksamaan: $(\frac{1}{3})^{x^2-x} > (\frac{1}{9})^{x+2}$

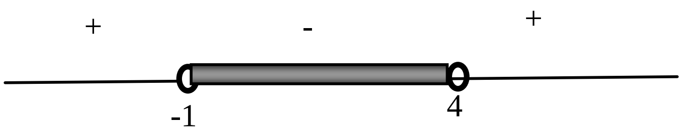
   Jawab:

   $$(\tfrac{1}{3})^{x^2-x} > (\tfrac{1}{9})^{x+2} \Leftrightarrow (\tfrac{1}{3})^{x^2-x} > (\tfrac{1}{3})^{2x+4}$$
   $$\Leftrightarrow x^2 - x < 2x + 4$$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 < 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 4) < 0$

Pembuat nolnya: x = -1 dan x = 4



Jadi bats-batas x adalah $-1 < x < 4$

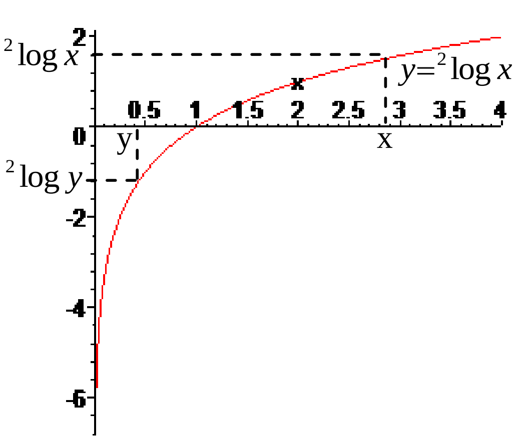
Latihan:

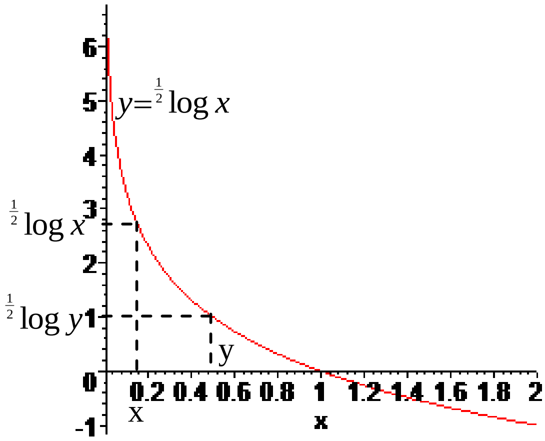
Tentukan batas-batas nilai x yang memnuhi pertidaksamaan berikut! -

1. $2^{3x+1} \geq 4^{x-1}$
2. $5^{3x+3} \geq (\frac{1}{125})^{3-2x}$
3. $(\frac{1}{4})^{3x-2} < (\frac{1}{16})^{4x+5}$
4. $(\frac{1}{2})^{x^2-2x-5} < 2^{-1}$
5. $3^{x^2-2x-5} < \frac{1}{9}$
6. $(\frac{1}{4})^{x^2+4x+1} > (\frac{1}{4})^{x+5}$
7. $(\frac{1}{16})^{x^3-2x^2+1} > (\frac{1}{8})^{4x+\frac{4}{3}}$
8. $3^{2x+3} - 10.3^{x+1} + 3 < 0$
9. $5^{4x-3} + 25^{3-2x} \geq 30$
10. $4^{1-x} + 2^{3-x} > 12$

7. Pertidaksamaan Logaritma

Untuk dapat memahami sifat-sifat dari peridak samaan logeritma maka perhatikanlah grafik fungsi logaritma di bawah ini untuk gambaran hubungan-hubungan tersebut:





Memperhatikan gambaran grafik fungsi logaritma di atas, dapat ditarik suatu kesimpulan umum:

(1) Untuk a > 1 $\Rightarrow \begin{cases} {}^a\log f(x) > {}^a\log g(x) \Rightarrow f(x) > g(x) \\ {}^a\log f(x) < {}^a\log g(x) \Rightarrow f(x) < g(x) \end{cases}$

(2) Untuk 0 < a < 1 $\Rightarrow \begin{cases} {}^a\log f(x) > {}^a\log g(x) \Rightarrow f(x) < g(x) \\ {}^a\log f(x) < {}^a\log g(x) \Rightarrow f(x) > g(x) \end{cases}$

Dengan syarat tambahan: (1) f(x) > 0 dan (2) g(x) > 0

Contoh-contoh menyelesaikan soal-soal pertidaksamaan logaritma:

1. Tentukan batas-batas x yang memenuhi pertidak samaan ${}^6\log(x^2 + x - 6) < 1$

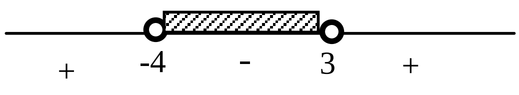
   Jawab: ${}^6\log(x^2 + x - 6) < 1 \Leftrightarrow {}^6\log(x^2 + x - 6) < {}^6\log 6$

   $\Leftrightarrow x^2 + x - 6 < 6$

   $\Leftrightarrow x^2 + x - 12 < 0$

   $\Leftrightarrow (x + 4)(x - 3) < 0$

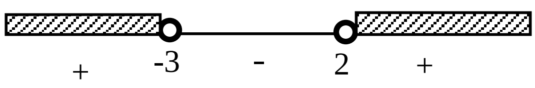
   Pembuat nola (x + 4)(x – 3) = 0 $\Rightarrow$ x = -4 atau x = 3



   Dari garis bilangan di atas diperoleh -4 < x < 3 .... (1)

   Syarat tambahan: $x^2 + x - 6 > 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 2) > 0$

   Pembuat nolanya (x + 3)(x – 2) = 0 $\Leftrightarrow$ x + -3 atau x = 2



   Dari garis bilangan di atas diperoleh: x < -3 atau x > 2 .....(2)

Himpunan penyelesaian pertidak samaan di atas adalah irisan dari (1) dan syarat tambahan (2), yakni: {x | -4 < x < -3 atau 2 < x < 3}

2. Tentukan batas-batas x agar deret: ${}^{2}\log(x-1)+{}^{2}\log^{2}(x-1)+{}^{2}\log^{3}(x-1)+...$ dapat ditentukan jumlah tak hingganya!

   Jawab:

   Deret di atas adalah deret geometri dengan ratio: ${}^{2}\log(x-1)$

   Syarat agar dapat ditentukan limit takhingganya adalah: $-1 < {}^{2}\log(x-1) < 1$

   $\Leftrightarrow {}^{2}\log 2^{-1} < {}^{2}\log(x-1) < {}^{2}\log 2$

   $\Leftrightarrow 2^{-1} < x-1) < 2$

   $\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x - 1 < 2$

   $\Leftrightarrow 1\frac{1}{2} < x < 3$

   Jadi batas-batas x yang merupakan syarat-syarat agar deret tersebut dapat dicari jumlah tahhingganya adalah: $1\frac{1}{2} < x < 3$

Latihan:

Tentukan batas-batas x yang memnuhi pertidak samaan logaritma di bawah ini:

1. ${}^{\frac{1}{4}}\log(5x+1) \geq -1$
2. $\log x^2 > \log(x + 2)$
3. ${}^{\frac{1}{2}}\log(x^2-x) > {}^{\frac{1}{2}}\log(x-3)$
4. ${}^{3}\log(2x-3) \leq {}^{3}\log(x^2+2x-15)$
5. $\log(x^2 - x - 6) > \log(x^2 - 2x)$
6. ${}^{\frac{1}{3}}\log(12x^2+x-1) < {}^{\frac{1}{3}}\log(6x^2+x-1)$
7. ${}^{24}\log(x^2-x-6) \leq 1$
8. $\log(x^2 - 3x) \leq \log(x) + \log(x - 3)$
9. Tentukan batas-batas x agar derat: log x + $\log^2$ + log ^{3}x + ...konvergen!
10. Tentukan batas-batas x agar deret ${}^{2}\log(x-5)+{}^{2}\log^{2}(x-5)+{}^{2}\log^{3}(x-5)+...$ dapat ditentukan jumlah takhingganya!

BAGIAN III
RELASI DAN FUNGSI

A. Relasi

Masalah yang sangat penting dan esensial dalam matematika adalah konsep fungsi, dan untuk mendesain konsep fungsi maka konsep dasar yang digunakan adalah konsep relasi. Oleh karena itu maslah relasi di sini kita bahas agak mendalam, sehingga dapat digunakan guru matematika untuk memperkuat latar belakang materinya, sehingga dengan mudah dapat memilih pendekatan dan konteks yang serasi untuk pembel;ajaran matematikanya.

1. Pengertian Relasi

Dari data pribadi siswa yang dapat diambil dari Bimbingan dan Konseling, dicatat hobi dari beberapa siswa diantaranya: Ali gemar bermain badminton, Budi gemar bermain sepakbola, Citra gemar bermain basket dan pingpong, Desy gemar bermain basket dan pingpong, sedang Elly tak satupun cabang olahraga yang digemarinya.

Kalau dipandang hubungan antar elemen-elemen dari semesta ini pada hakikatnya hubungan ini dalam matematika dikenal dengan nama **relasi.**

Unsur-unsur yang menjadikan hubungan antar elemen ini dikatakan relasi adalah:

a. adanya dua himpunan yang tidak kosong yakni :
   A = {Ali, Budi, Citra, Desy, Elly}
   B = {badminton, sepakbola, basket, pingpong}
b. adanya aturan pengawanan antar elemen-elemen, yakni suatu kalimat terbuka "a gemar bermain b".

Sebenarnya kita kenal dua relasi berkenaan dengan himpunan, yaitu :

a. Relasi antarhimpunan, misalnya suatu himpunan dimuat oleh himpunan yang lain (misalnya $A \subset B$), dua himpunan berimpit, dan dua himpunan saling asing.
b. Relasi antarelemen-elemen dari satu atau lebih himpunan.

Yang dibahas di sini adalah relasi-relasi di dalam suatu himpunan maupun dengan anggota dari himpunan lain. Relasi yang menyangkut dua anggota sebuah himpunan disebut **relasi binar (diadic),** relasi yang menyangkut tiga elemen disebut relasi **terner (triadic),** sedang yang menyangkut empat elemen disebut **relasi kuarterner (tetradic),** dan yang menyangkut lebih dari empat elemen disebut **relasi polyadic.**

Di bawah ini diberikan beberapa contoh tentang relasi-relasi tersebut :

(1) Contoh relasi binar (diadic):
   (a) "x lebih dari atau sama dengan y"

(b) “Abdor adalah ayah dari Andini”

(2) Contoh relasi terner (triadic):

(a) “garis a sejajar b karena b sejajar c”

(b) “Ali benci pada Budi yang kerenanya Elly tak mempedulikannya lagi”

(3) Contoh relasi kuarterner (tetradic) :

(a) “p, q, r, dan s adalah sisi-sisi empat persegi panjang PQRS”

(b) “Anik, Budi, Citra dan Desy duduk mengitari meja makan”

(4) Contoh relasi polyadic :

(a) “Ketujuh penjahat itu saling berkelahi karena merasa dicurangi dalam pembagian hasil kejahatannya”

(b) “Para guru matematika SLTP se Kabupaten Bantul saling berdiskusi dengan dipandu Guru Inti MGMP-nya”.

Untuk dapat mendefinisikan relasi (relasi binar) diperlukan :

a) suatu himpunan A yang tidak kosong,

b) suatu himpunan B yang tidak kosong,

c) suatu kalimat terbuka, yang kita singkat sebagai P(x,y), di mana P(a,b) dapat bernilai benar atau salah untuk tiap pasangan berurut (a,b).

Jika P(a,b) benar pada suatu relasi R maka kita tulis aRb atau R(a,b), dan sebaliknya jika salah kita tulis $a\not R b$ atau $\not R(a,b)$.

<u>Contoh 1</u>

A = {2, 3, 4, 5, 6}

B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}

Dan ambilah kalimat terbuka P(x,y) yang merumuskan relasi dari A ke B dengan: “x adalah faktor dari y”, maka:

2R2, 2R4, 2R6, 3R3, 3R6, 4R4, 5R5, 6R6 sedangkan $2\not R5$, $3\not R5$, $5\not R6$… .

<u>Contoh 2</u>

P = {Ali, Budi, Citra, Desy, Elly}

Q = {badminton, sepakbola, bolabasket, pingpong}

Ambilah dari contoh pengertian relasi di muka, suatu kalimat terbuka yang mendefinisikan relasinya : “x gemar bermain y”. sehingga :

Ali R badminton, Budi R sepakbola, Citra R pingpong , dan sebagainya, tetapi :

Ali $\not R$ basket, Desy $\not R$ sepakbola serta Elly $\not R$ sepakbola.

2. Relasi Determinatif

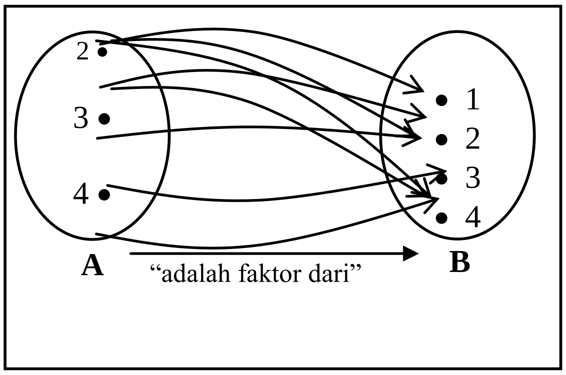
Suatu relasi R dikatakan determinatif antar anggota-anggota S, apabila **aRb** merupakan kalimat deklaratif (pernyataan) untuk setiap a dan b dalam S.

Sebagai contoh relasi yang ditentukan oleh kalimat terbuka "x habis dibagi y" merupakan relasi determinatif untuk semesta bilangan asli A, tetapi tidak determinatif untuk semesta manusia. Andaikan a dan b bilangan asli N, maka "a R b" merupakan kalimat deklaratif, sebagai contoh "12 R 3" yang berarti "12 habis dibagi oleh 3" adalah suatu kalimat deklaratif, tetapi untuk p dan q pada semesta manusia, misalnya Siti dan Pardi, maka "Siti habis dibagi oleh Pardi" merupakan kalimat yang bukan deklaratif. Sehingga relasinya bukan relasi determinatif untuk semesta manusia.

3. Cara Menyajikan Suatu Relasi.

Suatu relasi R dari himpunan A ke himpunan B, dapat disajikan dengan :

a. Diagram panah



Gb. 2.1

Diagram di samping ini menyajikan diagram relasi dari himpunan :

A = { 2, 3, 4, 5, 6} ke himpunan

B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } yang ditentukan oleh kalimat terbuka "x adalah faktor dari y".

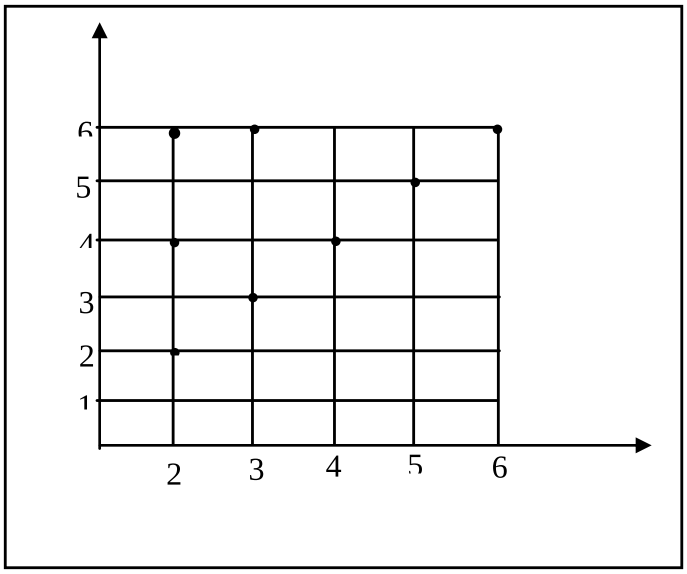
b. Himpunan Pasangan Terurut

Jika relasi di atas, yaitu relasi dari himpunan A = { 2, 3, 4, 5, 6} ke himpunan B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6} yang didefinisikan dengan kalimat terbuka "x adalah faktor dari y", jika disajikan dalam himpunan pasangan terurut akan menjadi :

R = {(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (6,6)}

c. Dengan Diagram Cartesius

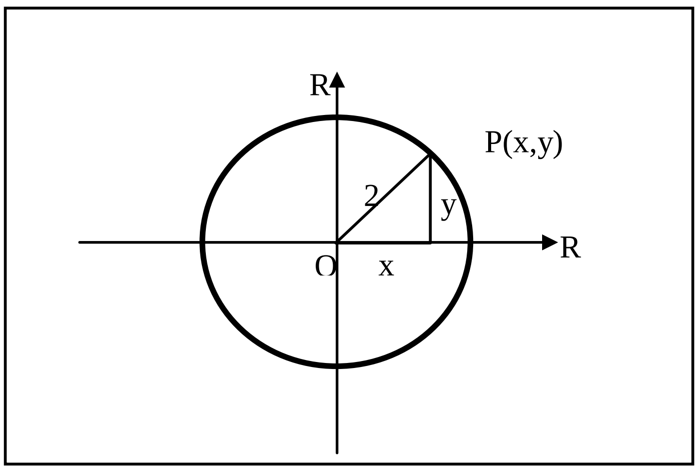
Jika relasi R = {(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (6,6)} dari contoh di atas disajikan dalam diagram Cartesius maka grafiknya akan tampak sebagai berikut :



Gb. 2.2

<u>Contoh</u>

Suatu relasi pada **R =** {x| x = bilangan real} yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "$x^2 + y^2 = 4$", jika disajikan dalam diagram Cartesius, akan menjadi seperti diagram di bawah ini :



Gb. 2.4

Grafik dari relasi di samping berupa lingkaran, yang akan membagi daerah **R × R,** menjadi tiga bagian yakni lingkaran sendiri yaitu :

R = $\{(x,y)|\ x^2 + y^2 = 4\}$, daerah di dalam lingkaran, yaitu :

R = $\{(x,y)|\, x^2 + y^2 < 4\}$, dan daerah di luar lingkaran, yaitu :

R = $\{(x,y)|\, x^2 + y^2 > 4\}$.

4. Relasi Invers

Setiap relasi R dari himpunan A ke himpunan B memiliki invers R^{-1} dari B ke A yang dapat didefinisika sebagai berikut :

$R^{-1} = \{(b,a) | (a,b) \in R\}$

Jadi dapat juga dikatakan bahwa R^{-1} adalah himpunan semua pasangan berurut yang bersifat bahwa jika urutan elemen dalam pasangan itu ditukar, maka pasangan berurut baru tersebut adalah anggota R

Contoh 1

Jika A = { 2, 3, 4, 5} dan B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}, sedangkan relasi :

R = {(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (6,6)}, maka :

R^{-1} = {(2,2), (3,3), (4,2), (4,4), (5,5), (6,2), (6,3), (6,6)}

Dan kalimat terbuka yang menentukan relasi R^{-1} adalah “x mempunyai faktor y”

Contoh 2

Himpunan A = { a, b, c} dan B = { 0, 1}, maka :

$A \times B$ = {(a,0), (b,0), (c,0), (a,1), (b,1), (c,1)}, dan jika

R = {(a,0), (b,0), (b,1), (c,1)} maka

R^{-1} = {(0,a), (0,b), (1,b), (1,c)} dan dari

$B \times A$ = {(0,a), (1,a), (0,b), (1,b), (0,c), (1,c)}, maka $R^{-1} \subset B \times A$

Dalam hal ini : domain dari R adalah range dari R^{-1}, dan

range dari R^{-1} adalah domain dari R

Catatan :

Suatu relasi yang domain dan rangenya sama (A = B), maka relasi dari A ke B adalah sama dengan relasi dari A ke A dan relasi tersebut cukup dikatakan sebagai **relasi pada A.**

Catatan :

Suatu relasi pada A dikatakan sebagai **relasi identitas** dan dinyatakan dengan Δ_A, apabila $\Delta_A = \{(a,a) | a \in A\}$

Contoh :

Jika A = { 1, 2, 3, 4, 5} maka Δ_A = {1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)}

Relasi identitas ini sering juga disebut sebagai **diagonal.**

5. Komposisi Relasi

Misalkan R_1 suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan R_2 adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C, maka relasi R dari himpunan A ke C, yang terdiri atas

$(a,c) \in R$ sedemikian hingga $(a,b) \in R_1$ dan $(b,c) \in R_2$, dinamakan relasi komposisi dari A ke C dan ditulis dengan notasi $R = R_2 \circ R_1$

Jadi: $R_2 \circ R_1 = \{(x,y) \mid x \in A, y \in C$ sedemikian hingga $(x,p) \in R_1$ dan $(p,y) \in R_2\}$

Contoh 1

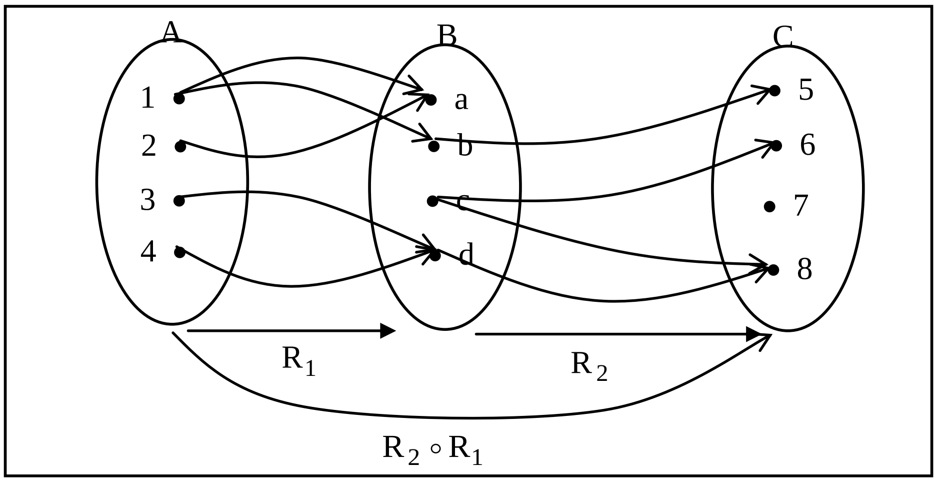
Jika A = { 1,2,3,4}, B = { a, b, c, d} dan C = {5, 6,7,8 } dan relasi

R_1 = {(1,a),(1,b),(2,a),(3,d),(4,d)} dan

R_2 = {(b,5),(c,6),(c,8),(d,8)}, maka

Tentukan : $R_2 \circ R_1$

Jawab : Jika relasi-relasi di atas kita sajikan dalam suatu diagram panah :



Jadi $R_2 \circ R_1$ = {(1,5), (3,8),(4,8)}

Contoh 2

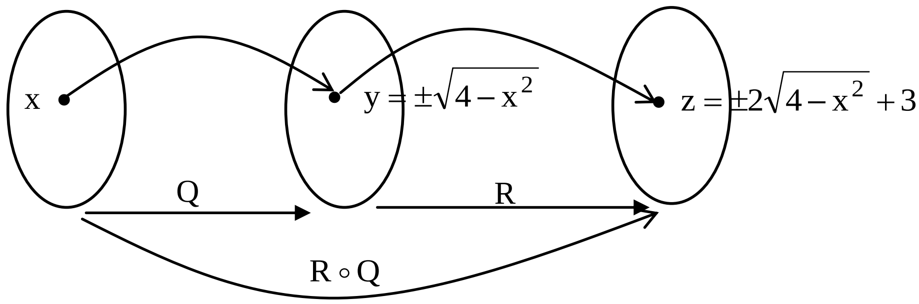
Diketahui relasi - relasi Q dan R adalah relasi-relasi pada bilangan real, yang didefinisikan sebagai berikut :

Q = {(x,y)}| $x^2 + y^2 = 4$} dan R = {(y,z)|z = 2y + 3}

Tentukan : $R \circ Q$

Jawab :

Relasi $R \circ Q$ merupakan komposisi relasi dari relasi Q yang dilanjutkan dengan relasi R, dengan kalimat terbuka yang menyatakan aturan perkawanannya diperoleh dengan mengeliminir y dari persamaan rumus relasi keduanya.



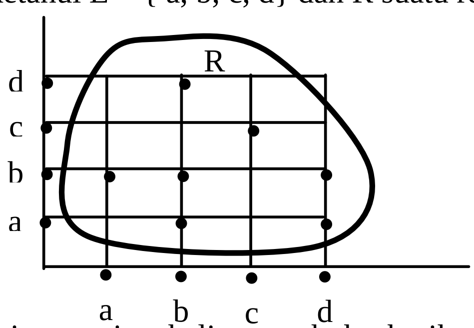
Gb. 2.7

Jadi relasi RoQ = $\{(x,z) \mid z = \pm 2\sqrt{4 - x^2} + 3\}$.

Latihan 7

Kerjakan soal-soal berikut tanpa melihat kunci jawaban terlebih dahulu!

1. Jika R adalah relasi dari himpunan A = { 1, 2, 3, 4} ke himpunan B = { 1, 3, 5} yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "x lebih kecil dari y", maka :
   a. nyatakan R dalam himpunan pasangan berurut.
   b. sajikan R pada diagram Cartesius $A \times B$.
2. Jika R adalah relasi dari himpunan C = { 2, 3, 4, 5} ke D = { 3, 6, 7, 10} yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "y habis dibagi oleh x", maka :
   a. nyatakan R dalam himpunan pasangan berurut.
   b. sajikan R pada diagram Cartesius $C \times D$.
3. Diketahui E = { a, b, c, d} dan R suatu relasi pada E, yang diagramnya sebagai berikut :



   a. Tentukan nilai dari pernyataan :
      (i) c R b, (ii) d $\not R$ a (iii) a $\not R$ c (iv) b $\not R$ b
   b. Carilah $\{ x \mid (x,b) \in R\}$ yaitu semua elemen yang berkawan dengan b.
   c. Carilah $\{ x \mid (d, x) \in R\}$
4. Masing-masing kalimat terbuka berikut mendefinisikan suatu relasi pada bilangan real. Buatlah seketsa masing-masing relasi pada diagram Cartesius **R×R** untuk :

a. $x \geq 4$	d. $y = x^2$	g. $y \leq 3 - x$
b. $y \leq 3$	e. $y \geq x^2$	h. $y \geq 3 - x$
c. $y > 2x$	f. $y \leq x^2$	i. $y \geq x^3$

5. Pandang relasi R = {(1,5),(4,5),(1,4),(4,6),(3,7),(7,6)}, maka :

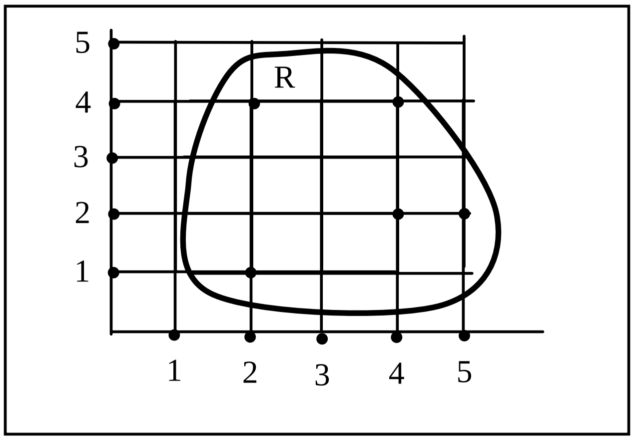
   Tentukanlah :

   a. domain dari relasi R

   b. range dari relasi R

   c. relasi invers dari R (R^{-1})

6. Relasi R pada F = { 1, 2, 3, 4, 5 }, yang disajikan dengan diagram berikut :



Gb. 2.9

Carilah :

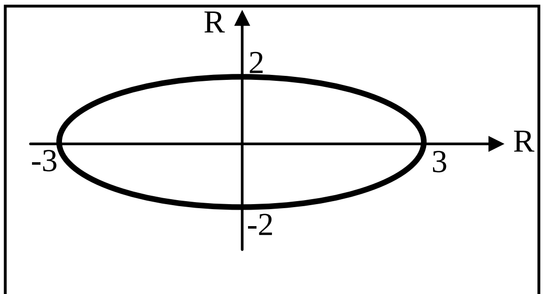
a. domain dari R

b. range dari R

c. invers dari relasi R

d. sketsa R^{-1} pada $F \times F$

7. Diketahui relasi R pada himpunan bilangan real yang didefinisikan oleh $R = \{(x,y) | 4x^2 + 9y^2 = 36\}$ maka tentukanlah :



Gb. 2.10

a. domain dari R

b. range dari R

c. relasi invers dari R (R^{-1})

8. Misalakan relasi R pada bilangan asli A = { 1, 2, 3, …} yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "x + 2y = 10", maka tentukanlah :

   a. domain dari R

   b. range dari R

   c. relasi invers dari R (relasi R^{-1})

9. Misalkan R_1 dan R_2 adalah relasi-relasi pada bilangan real yang disajikan dalam bentuk himpunan pasangan berurut :

$R_1 = \{(x,y) | y \geq x^2\}$

$R_2 = \{(x, y) | y \leq x + 2$

a. Buatlah sketsa $R_1 \cap R_2$ pada diagram Cartesius.

b. Carilah domain dari $R_1 \cap R_2$!

c. Caliah jangkauan (range) dari $R_1 \cap R_2$!

Cocokkan jawaban Anda dengan kunci yang terdapat pada bagian akhir modul ini. Hitunglah banyak jawaban Anda yang benar. Untuk mengetahui pencapaian Anda gunakan rumus di bawah ini:

$$\textit{Pencapaian Anda} = \tfrac{1}{9} \times \text{(banyak jawaban Anda yang benar)} \times 100\%$$

Jika tingkat capaian Anda 90% atau lebih, bagus!, Anda dapat melanjutkan pada kegiatan, berikutnya, tetapi jika kurang dari 90% harap diulangi lagi terutama bagian-bagian yang belum Anda fahami!

B. Fungsi

1. Pengertian Fungsi

Konsep fungsi terdapat hampir dalam setiap cabang matematika, sehingga fungsi merupakan suatu materi esensial yang sangat penting artinya dan banyak sekali aplikasinya baik dalam matematika itu sendiri maupun dalam ilmu-ilmu yang lain. Ada sedikit perbedaan pengertian fungsi dalam kehidupan sehari-hari dengan pengertian fungsi dalam matematika. Dalam kehidupan sehari-hari fungsi adalah sinonim dari guna atau manfaat, sedang pengertian fungsi dalam matematika adalah mengacu adanya relasi yang khas antara dua himpunan.

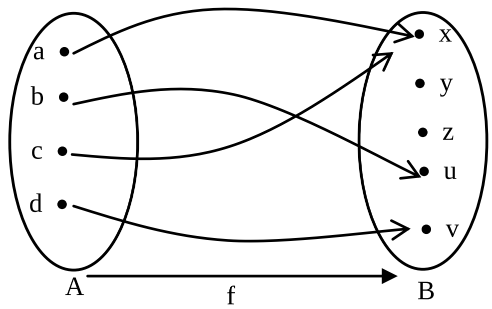
Gootfried W. Leibniz (1646 – 1716)

Pengertian fungsi ini pertama kali diperkenalkan oleh Gottfried W. Leibniz (1646-1716) yang gambarnya disajikan di samping ini pada tahun 1694. Oleh Leibniz fungsi dapat dikatakan sebagai suatu relasi biner antar dua himpunan yang khusus.

Senada dengan relasi maka pada fungsi terdapat tiga unsur yang harus dipenuhi, yakni :

1) suatu himpunan tidak kosong, katakanlah A
2) suatu himpunan tidak kosong lain, katakanlah B
3) suatu kalimat terbuka, yang juga disebut **aturan pengawanan** yang mengakibatkan setiap elemen di A, menentukan dengan tepat elemen tunggal di B

Relasi khusus ini sering disebut dengan **relasi fungsional,** yang sering disingkat dengan **fungsi** saja, sering disebut juga dengan istilah **pemetaan (mapping).**



Gb. 3.1

Fungsi di atas secara formal biasa didefinisikan sebagai berikut :

Definisi :

Suatu fungsi f dari himpunan A ke dalam himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap elemen dari A dengan tepat satu elemen di B

Fungsi f dari himpunan A ke dalam B ini biasa ditulis dengan notasi :

f : A$\to$B dibaca "fungsi f memetakan A ke dalam B"

Unsur tunggal di dalam B yang dihubungkan dengan $a \in A$ oleh f dinyatakan dengan f(a) dan disebut **peta** atau **bayangan a** oleh f, atau disebut juga **nilai f pada a**. Dan dalam hal ini a adalah **prapeta (praeimage)** dari f(a).

Notasi yang digunakan untuk menyatakan suatu fungsi f yang memetakan setiap anggota x dari himpunan A ke anggota y dari himpunan B, adalah :

f : x $\to$y dibaca "f memetakan x ke y"

Catatan :

Untuk menuliskan fungsi yang mendeskripsikan hubungan antarelemennya agar dari setiap x diperoleh f(x), Abrahamson (1971), menganjurkan menuliskannya dengan **f : x $\mapsto$f(x).** (Lambang "$\mapsto$" digunakan untuk membedakan "$\to$" pada f : A$\to$B)

Pandanglah pemetaan f : A $\to$ B, sebagaimana di atas, dalam hal ini :

(1) Himpunan A disebut **daerah asal (domain)** dari f

(2) Himpunan B disebut **daerah kawan (codomain)** dari f

(3) Himpunan semua peta unsur A dalam B disebut **daerah hasil (range)** dari f, dan ditulis dengan notasi **f(A).**

Sehingga f(A) = {f(a) | a$\in$ A }

Karena fungsi pada hakikatnya adalah relasi khusus, maka representasi fungsi dapat dilakukan dengan diagram panah, himpunan pasangan terurut maupun dengan diagram Cartesius.

Contoh 1

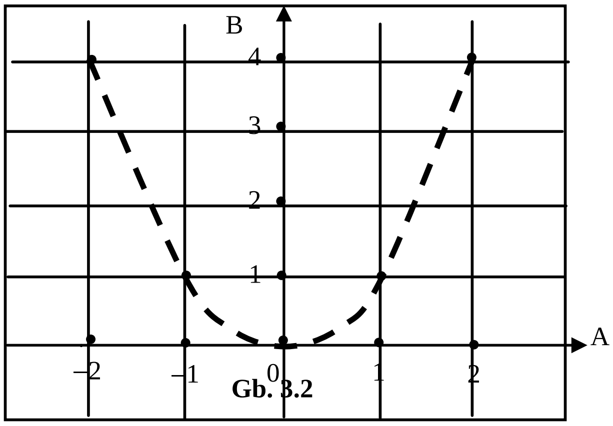
Misalkan A = { –2, –1, 0, 1, 2} dan B = { 0, 1, 2, 3, 4}, suatu pemetaan f dari A ke dalam B, sedemikian hingga f(x) = x^2, maka

Tentukan :

a. himpunan pasangan terurut yang menyajikan fungsi tersebut
b. daerah hasil dari f
c. diagram Cartesiusnya

Jawab :

a. Himpunan pasangan terurutnya adalah {(–2,4),(–1,1),(0,0),(1,1),(2,4)}
b. Daerah hasil dari f adalah f(A) = { 0, 1, 4}
c. Diagram Cartesiusnya adalah :



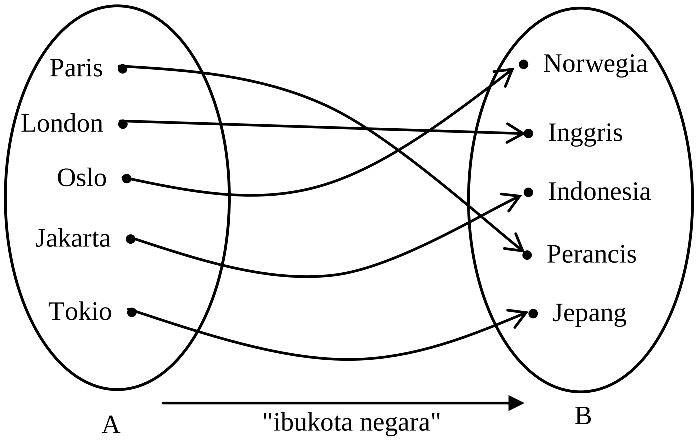
Gb. 3.2

Catatan :

Diagram Cartesiusnya berupa noktah-noktah yang dilewati oleh kurva putus-putus, dan apabila daerah asalnya himpunan semua bilangan real pada interval tersebut maka diagram Cartesiusnya akan menjadi kurva mulus yang ditentukan oleh kurva putus-putus tersebut.

Contoh 2

Jika A = {Paris, London, Oslo, Jakarta, Tokio}dan B = {Norwegia, Inggris, Indonesia, Perancis, Jepang}, maka relasi yang menetapkan negara-negara dengan ibukotanya, dari A ke B, adalah suatu **fungsi** yang diagram panahnya dengan jelas sebagai berikut:



Gb. 3.3

Contoh 3

Diketahui suatu fungsi f : A $\to$ **R** di mana A = { x | $-3 \le x \le 2$, $x \in$ **R** } yang ditentukan oleh rumus f(x) = $x^2 + 1$, maka tentukan :

a. f(–1), f(0), dan prapeta dari 5

b. dengan menyajikannya dalam diagram Cartesius tentukan daerah hasil dari f

Jawab :

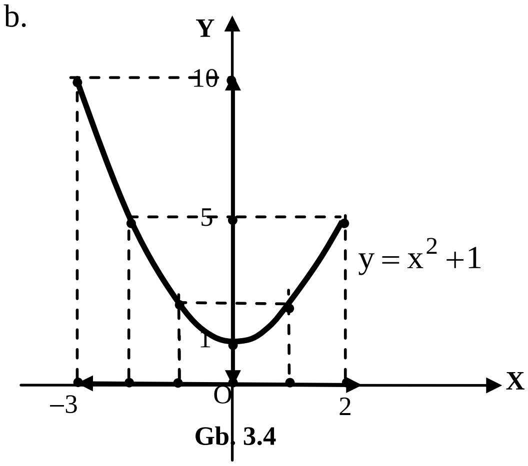
a. f(–1) = $(-1)^2 + 1 = 2$

f(0) = $0^2 + 1 = 1$

Prapeta dari 5, dicari dengan jalan menyelesaikan persamaan f(x) = 5 $\Rightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Sehingga prapeta dari 5 adalah 2 atau –2.

b.



Gb. 3.4

Dibuat grafik $y = x^2 + 1$

f(–3) = $(-3)^2 + 1 = 10$

f(2) = $2^2 + 1 = 5$

Jadi daerah hasil dari f adalah

f(A) = { y | $1 \le y \le 10$, $y \in$ **R**}

Catatan :

Jika domain dan kodomain dari suatu fungsi kedua-duanya adalah himpunan yang sama, katakanlah fungsi f : A $\to$ A, maka f seringkali disebut **operator** atau **transformator** pada A.

2. Fungsi Surjektif, Injektif dan Bijektif.

a. Fungsi Surjektif

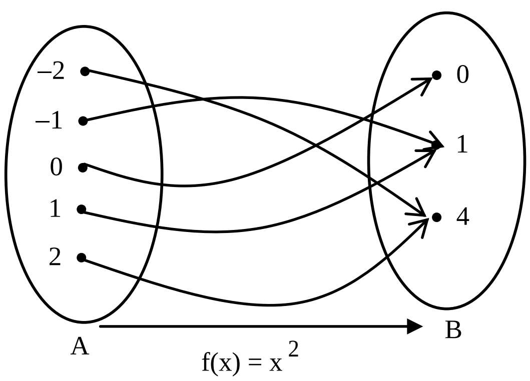
Misalkan f suatu fungsi dari A ke dalam B, maka daerah hasil f(A) dari fungsi f adalah himpunan bagian dari kodomain B atau f(A) $\subset$ B, fungsi ini kita kenal dengan nama **fungsi into (ke dalam)** atau **fungsi** saja**.** Tetapi jika f(A) = B artinya setiap anggota B muncul sebagai peta dari sekurang-kurangnya satu elemen A, maka kita katakan **"f adalah suatu fungsi A pada B".** Fungsi **pada (onto function)** biasa juga kita kenal dengan nama fungsi **surjektif.**

Jadi:

Suatu fungsi f: A $\rightarrow$B disebut fungsi surjektif, jika untuk setiap b$\in$B sekurang-kurangnya satu a$\in$A sedemikian hingga b = f(a)

<u>Contoh 1</u>

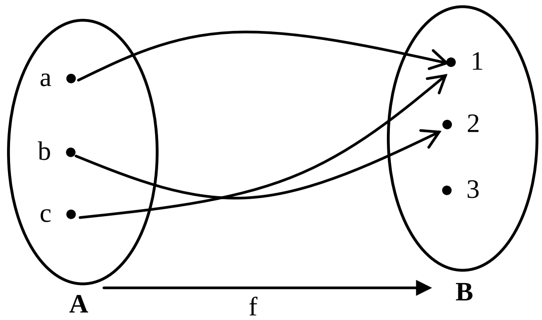
Fungsi f dari himpunan A = {-2, -1, 0, 1, 2} ke dalam himpunan B = { 0, 1, 4} yang didefinisikan oleh rumus fungsi f(x) = x^2 adalah suatu fungsi yang surjektif, karena setiap elemen di B merupakan menjadi peta dari sekurang-kurangnya satu elemen di A.



Gb. 3.5

Contoh 2

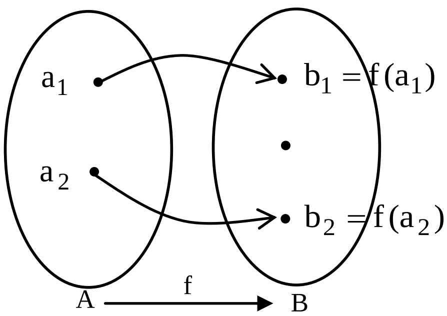
Misalkan fungsi f didefinisikan sebagaimana diagram panah di bawah ini



Fungsi f di samping ini bukan fungsi surjektif, karena : f(A) = { 1, 2} $\neq$ B

Gb. 3.6

b. Fungsi Injektif.



Gb. 3.7

Suatu fungsi f : A $\to$B sedemikian hingga untuk setiap anggota A yang berbeda mempunyai peta yang berbeda pula di B, dikatakan f sebagai fungsi yang **injektif** atau **fungsi satu-satu.**

Jadi :

Fungsi f : A $\to$ B disebut fungsi injektif (satu-satu), jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$ akan berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Dari ketentuan bahwa suatu fungsi f : A $\to$ B merupakan fungsi injektif, jika untuk setiap pasang anggota $a_1, a_2 \in A$ berlaku :

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

Rumus ini bernilai logika sama dengan pernyataan :

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

Pernyataan terakhir inilah yang biasa digunakan untuk menunjukkan apakah suatu fungsi itu injektif atau bukan.

Contoh 1

Selidikilah injektif tidaknya fungsi di dalam bilangan real **R** (f : **R** $\to$ **R**), yang didefinisikan dengan rumus f(x) = 2x - 3.

Jawab : untuk setiap $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ yang memenuhi $f(x_1) = f(x_2)$, maka

$$(2x_1 - 3) = (2x_2 - 3) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Sehingga dari $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, yang berarti f adalah fungsi injektif di dalam **R**

Contoh 2

Relasi dari himpunan negara N ke himpunan bendera nasional B, yang didefinisikan dengan kalimat terbuka "negara x bendera nasionalnya adalah y", adalah suatu fungsi sebab setiap negara pasti mempunyai bendera nasional, dan bendera nasionalnya hanya satu, tetapi bukan suatu fungsi injektif sebab ada dua negara yang berbeda (misalnya Indonesia dan Monaco) tetapi mempunyai bendera nasional yang sama yaitu sama-sama merah putihnya.

Contoh 3

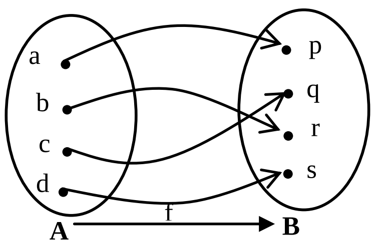
Fungsi f : **R** $\rightarrow$**R** dimana **R =** {bilangan real}, yang didefinisikan sebagai f(x) = x^2 bukan suatu fungsi injektif, sebab untuk $x_1, x_2 \in$ **R** sedemikian hingga :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow {x_1}^2 = {x_2}^2 \Leftrightarrow {x_1}^2 - {x_2}^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ atau } x_1 = -x_2$$

Hal ini menunjukkan adanya dua elemen yang berlainan, yang mempunyi peta yang sama.

c. Fungsi Bijektif.



Gb. 3.9

Jika suatu fungsi f : A $\rightarrow$ B sedemikian hingga f suatu fungsi yang surjektif dan injektif sekaligus, sebagaimana ilustrasi di samping, maka dikatakan f adalah suatu fungsi **bijektif** atau **korespondensi satu-satu.**

Definisi

Fungsi f : A $\rightarrow$B disebut suatu fungsi bijektif jika f sekaligus fungsi surjektif dan fungsi injektif.

Contoh 1

Fungsi f : **R** $\rightarrow$**R** yang didefinisikan dengan f(x) = 2x - 3 adalah fungsi bijektif sebab untuk setiap y peta dari x pasti akan dipenuhi :

$2x - 3 = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(y+3)$ yang ini menunjukkan prapeta dari y di B. Dengan demikian f adalah fungsi yang surjektif.

Sedang untuk setiap pasang $x_1, x_2 \in$ **R,** yang dipenuhi $f(x_1) = f(x_2)$, akibatnya :

$$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Hal ini menunjukkan f suatu fungsi yang injektif, dan dari f injektif dan surjektif sekaligus ini, dapat disimpulkan bahwa f adalah fungsi bijektif.

<u>Contoh 2</u>

Suatu fungsi f di dalam bilangan real **R,** yang didefinisikan oleh f(x) = x^2 bukan fungsi bijektif sebab untuk f(x) = 4 misalnya, akan diperoleh :

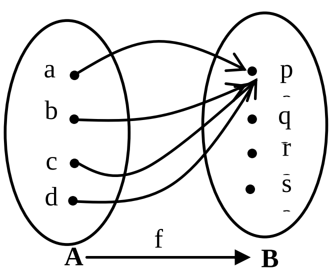
$$f(x) = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ atau } x = 2$$

ini menunjukkan f bukan fungsi injektif yang berarti f juga bukan fungsi yang bijektif.

3. Fungsi-fungsi Khusus.

Di dalam matematika, banyak sekali dijumpai beberapa macam fungsi, yang beberapa di antaranya memiliki ciri-ciri yang khas, fungsi-fungsi khusus tersebut di antaranya adalah :

a. Fungsi Konstanta.



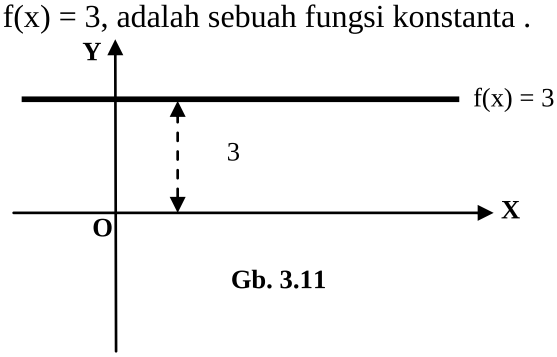
Gb. 3.10

Suatu fungsi f : A $\rightarrow$ B yang untuk semua elemen di A berkaitan hanya dengan sebuah unsur di B disebut **fungsi konstanta.**

Sebagaimana ilustrasi di samping yang memasangkan setiap elemen di dalam himpunan A dengan hanya satu elemen saja di B.

<u>Contoh</u>

Suatu fungsi f di dalam himpunan real **R,** atau f : **R** $\rightarrow$ **R,** yang didefinisikan oleh rumus f(x) = 3, adalah sebuah fungsi konstanta .



Gb. 3.11

Dari kurva di samping terlihat jelas:

f(–3) = 3

f(0) = 3

f(1) = 3

f(5) = 3

b. Fungsi Identitas

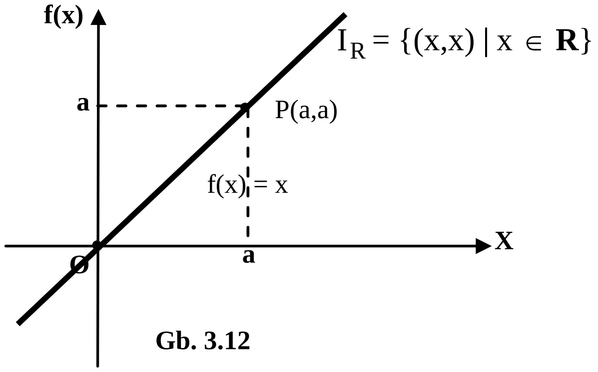
Suatu fungsi f : A $\rightarrow$ A yang didefinisikan oleh rumus f(x) = x, yaitu fungsi yang menetapkan setiap elemen dalam A dengan elemen yang bersangkutan itu sendiri, maka f disebut **fungsi satuan** (*identity function*), atau **transformasi satuan** pada A. Dan kita nyatakan dengan **I** atau I_A

Contoh 1

Fungsi identitas I_A pada A = { a, b, c} adalah I_A = {(a,a),(b,b),(c,c)}.

Contoh 2

Fungsi identitas pada himpunan bilangan real **R,** adalah :



Gb. 3.12

c. Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Fungsi f : A $\rightarrow$ B disebut **fungsi genap** jika f(–x) = f(x), dan fungsi f : A $\rightarrow$ B disebut **fungsi ganjil** jika f(–x) = –f(x), sedang fungsi yang tidak memenuhi salah satu dari pernyataan di atas dikatakan fungsi yang tidak genap maupun tidak ganjil.

<u>Contoh</u>

1. Fungsi f : $x \rightarrow x^2$ adalah fungsi genap, sebab f(–x) = $(-x)^2 = x^2 = f(x)$
2. Fungsi f : $x \rightarrow x^3 - 2x$ adalah fungsi ganjil, sebab f(-x) = $(-x)^3 - (-x)$ = $-x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$
3. Fungsi f : $x \rightarrow x^2 - x$ adalah bukan fungsi genap maupun ganjil, sebab f(–x) = $(-x)^2 - (-x) = x^2 + x$ di mana bentuk terakhir ini tidak sama dengan f(x) maupun –f(x).

d. Fungsi Modulus

Berdasarkan definisi dari modulus atau nilai mutlak, bahwa nilai mutlak suatu bilangan real x didefinisikan sebagai :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ jika } x \geq 0 \\ -x \text{ jika } x < 0 \end{cases}$$

<u>Contoh :</u>

$|3| = 3$

$|-3| = 3$

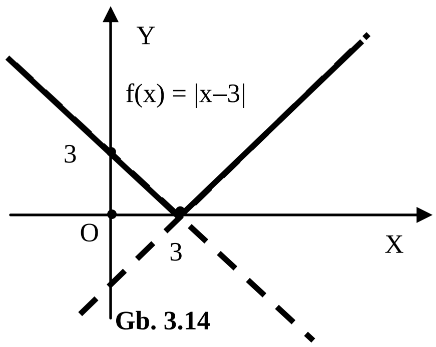
Fungsi M : $x \to M(x)$ disebut fungsi modulus jika M(x) = |f(x)|

<u>Contoh</u>

Fungsi f di dalam bilangan real **R** yang didefinisikan oleh f(x) = |x – 3|

Tentukan kurva grafiknya.

Jawab : f(x) = |x – 3|



Gb. 3.14

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x - 3 \text{ jika } x - 3 \geq 0 \\ -(x-3) \text{ jika } x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x - 3 \text{ jika } x \geq 3 \\ -x + 3 \text{ jika } x < 3 \end{cases}$$

e. Fungsi Tangga atau Fungsi Nilai Bulat Terbesar

Berdasarkan ketentuan bahwa yang dimaksud dengan pembulatan kenilai bulat terbesar, adalah :

$[[x]] = \{b \mid b \leq x < b + 1, \text{ b bilangan bulat}, x \in \mathbf{R}\}$

Contoh :

Jika $-2 \leq x < -1$ maka $[[x]] = -2$

$-1 \leq x < 0$ maka $[[x]] = -1$

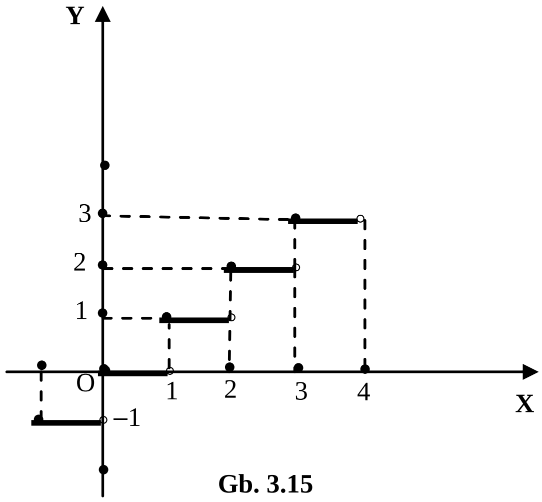
$0 \leq x < 1$ maka $[[x]] = 0$

…

$7 \leq x < 8$ maka $[[x]] = 7$

Fungsi f : $x \to [[x]]$ disebut fungsi nilai bulat terbesar.

Grafik fungsi f(x) = [[x]], untuk x $\in$ **R** , diperlihatkan sebagaimana kurva di bawah :



Gb. 3.15

Oleh karena grafiknya menyerupai tangga, maka f(x) = [[x]], sering disebut fungsi tangga.

f. Fungsi Eksponen

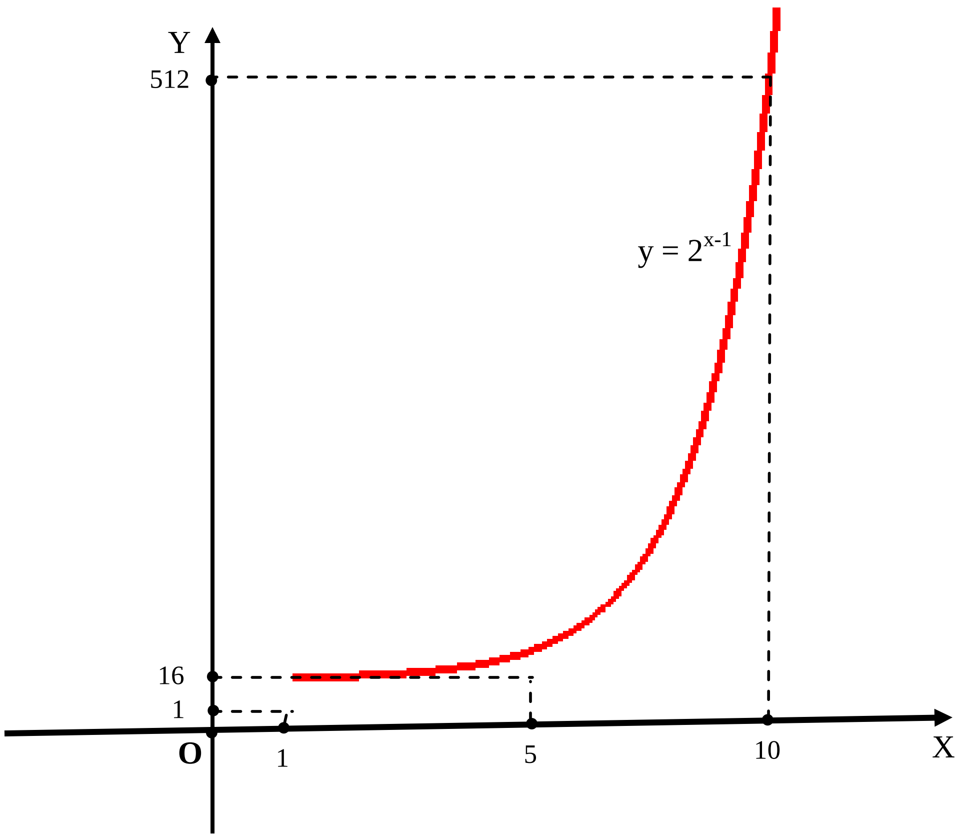
Fungsi eksponen mempunyai banyak kegunaan praktis yang meliputi contoh pertumbuhan dan peluruhan di alam sekitar kita. Banyak peristiwa dalam kehidupan sehari-hari yang merupakan konteks dalam fungsi eksponen. Sebagai misal angka petumbuhan berkait dengan investasi dengan perhitungan bunga majemuk, pertumbuhan virus insfluensa, pertumbuhan amuba, perkembangan penduduk, demikian juga peluruhan zat radioaktif, dapat dijadikan konteks dalam penyusunan fungsi eksponen.

Dalam mengkonstruksi grafik fungsi eksponen dapat dimanfaatkan konteks papan catur sebagai konteks adalah persoalan Sassi ben Dhahir penemu permainan catur yang terkenal itu, sebagai hadiah karena penemuan yang luar biasa itu Raja Sirham meminta kepada Sassi ben Dhahir akan hadiah yang diinginkannya, maka dijawabnya bahwa ia menginginkan hadiah gandum saja, yang diletakkan pada papan caturnnya. Pada kotak pertama ia minta hadiah sebutir gandum saja, pada kotak papan yang kedua ia inginkan dua butir, sedangkan pada kotak ketiga ia inginkan empat butir, pada kotak keempat delapan butir, begitu dan seterusnya kotak yang sebelahnya mendapat butir gandum yang banyaknya duakali kotak sebelumnya.

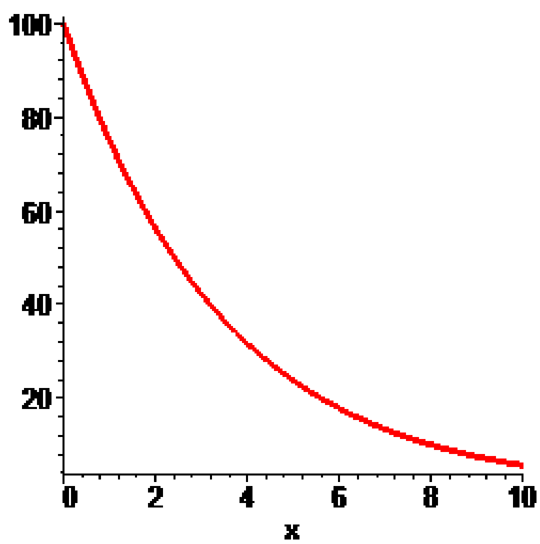
Dan jika kita buat grafik dengan terlebih dulu membuat tabel korespondensinya:

Kotak ke	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Cacah gandum	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	...

Relasi dari kotak ke cacah gandumnya berupa fungsi pada bilangan real dengan rumus $f : x \rightarrow 2^{x-1}$ dengan grafik sebagai berikut:

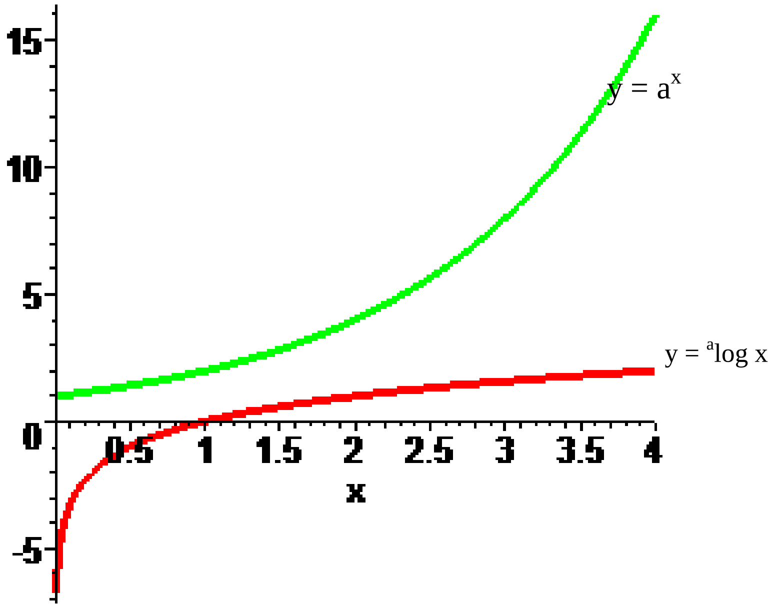


Contoh lain misalnya menyangkut penyusutan harga mobil yang awalnya dibeli dengan harga Rp 100 juta jika setiap tahun harganya menyusut 7%, maka grafiknya dapat ditunjukkan dengan diagram di bawah ini!

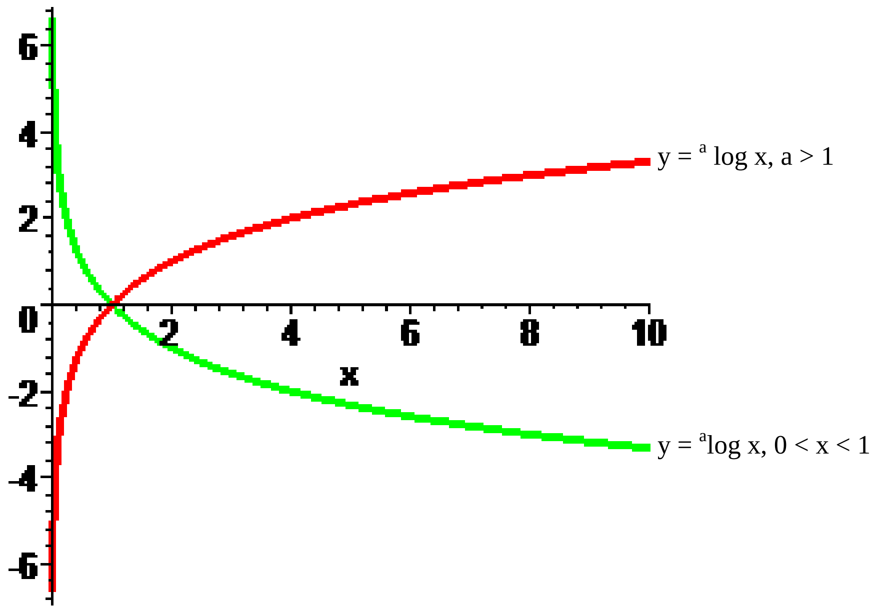


g. Fungsi logaritma

Sebagaimana telah kita ketahui bersama bahwa fungsi eksponen adalah invers dari fungsi logaritma, bahwa grafik fungsi f(x) = $a^{g(x)}$ dan f(x) = ${}^{a}\log g(x)$ akan saling dicerminkan terhadap garis bagi kuadran satu-tiga y = x

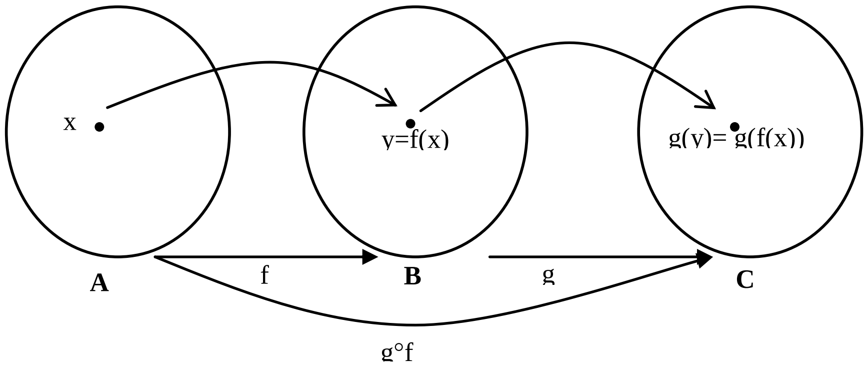


Grafik fungsi logaritma untuk a > 1 dan 0 < a < 1 dapat dilihat sebagaimana grafik di bawah ini:



4. Fungsi Komposit

Misalkan fungsi f memetakan himpunan A ke dalam B, dan fungsi g memetakan himumpunan B kedalam C sebagaimana ilustrasi di bawah ini :



Gb. 3.28

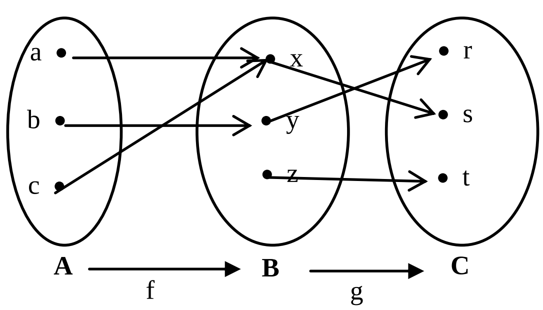
Untuk a $\in$ A maka petanya f(a) berada di B yang juga merupakan domain dari fungsi g, oleh sebab itu pasti diperoleh peta dari f(a) di bawah pemetaan g yaitu g(f(a)). Dengan demikian kita mempunyai suatu aturan yang menentukan setiap elemen a$\in$A dengan tepat satu elemen g(f(a))$\in$C. Fungsi baru inilah yang disebut **fungsi komposit** dari f dan g, yang dinyatakan dengan notai g°f (dibaca "g bundaran f").

Secara singkat jika f: A$\to$B, dan g: B $\to$ C maka kita definisikan suatu fungsi komposisi g°f: A $\to$ C sedemikian hingga (g°f)(a) = g(f(a)).

Catatan : Perhatikan bahwa fungsi komposit g°f adalah penggandaan fungsi yang mengerjakan f dahulu, baru kemudian mengerjakan g.

<u>Contoh 1</u>

Misalkan f : A $\to$ B dan g : B $\to$C yang didefinisikan sebagaimana diagram panah di bawah ini



Gb. 3.29

(gof) : A $\to$ B ditentukan oleh :

(g°f)(a) = g(f(a)) = g(x) = s

(g°f)(b) = g(f(b)) = g(y) = r

$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(x) = s$

Contoh 2

Fungsi $f : R \to R$ dan $g : R \to R$ didefinisikan oleh rumus $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = 3x^2$

Tentukan : a) $(g \circ f)(1)$ dan $(f \circ g)(1)$

b) rumus untuk $(g \circ f)$ dan $(f \circ g)$

Jawab :

a. $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(1 + 2) = g(3) = 3(3^2) = 27$

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3.1^2) = f(3) = 3 + 2 = 5$

b. $(g \circ f) : x \to (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = 3(x + 2)^2 = 3x^2 + 12x + 12$

Sehingga $(g \circ f) : x \to 3x^2 + 12x + 12$

$(f \circ g) : x \to (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x^2) = 3x^2 + 2$

Sehingga $(f \circ g) : x \to 3x^2 + 2$

Catatan : Dari jawab b**.** didapat fungsi $g \circ f$ dan $f \circ g$ tidak sama, sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa komposisi fungsi tidak bersifat komutatif.

5. Fungsi Invers

a. Invers Suatu Fungsi

Misalkan f suatu fungsi dari A ke dalam B dan misalkan untuk suatu $a \in A$ petanya adalah $f(a) = b \in B$, maka invers dari b (dinyatakan dengan $f^{-1}(b)$) adalah elemen-elemen dalam A yang memiliki $b \in B$ sebagai petanya.

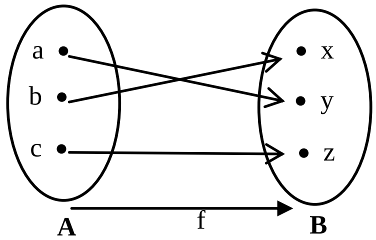
Secara singkat, jika $f : A \to B$ sedemikian hingga $f : x \to f(x)$ maka yang dimaksud dengan invers fungsi b :

$$f^{-1}(b) = \{x \mid x \in A, f(x) = b\}$$

(notasi f^{-1} dibaca "f invers")

Contoh

Misalkan fungsi $f : A \to B$ didefinisikan sebagaimana diagram panah berikut :



maka :

$f^{-1}(x) = b$

$f^{-1}(y) = a$

$f^{-1}(z) = c$

Gb. 3.30

6. Fungsi Invers

Misalkan f adalah suatu fungsi dari A ke dalam B. Pada umumnya $f^{-1}(b)$ untuk suatu $b \in B$ dapat terdiri lebih dari satu elemen atau mungkin tidak ada. Jika $f\colon A \rightarrow B$ adalah suatu fungsi yang bijektif, maka untuk setiap $b \in B$, invers $f^{-1}(b)$ akan terdiri dari sebuah elemen tunggal dalam A. Dengan demikian kita mendapatkan suatu aturan yang menetapkan untuk setiap $b \in B$ dengan suatu elemen tunggal $f^{-1}(b)$ dalam A. Oleh sebab itu f^{-1} adalah suatu fungsi dari B ke dalam A, dan kita tulis fungsi $f^{-1} : B \rightarrow A$.

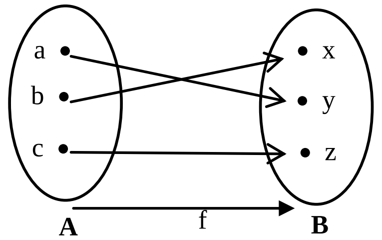
Di sini fungsi f^{-1} kita sebut "fungsi invers dari f"

Catatan : Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ akan diperoleh fungsi invers $f^{-1}\colon B \rightarrow A$ hanya apabila f suatu fungsi yang bijektif (injektif dan surjektif sekaligus)

Mengacu definisi di atas, maka $f \circ f^{-1} : x \rightarrow x$ demikian juga $f^{-1} \circ f\colon x \rightarrow x$, yang ini berarti: $\boxed{f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I}$

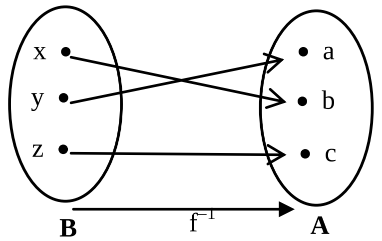
Contoh 1

Jika fungsi $f : A \rightarrow B$ didefinisikan dengan diagram



Gb. 3.31

maka fungsi invers $f^{-1} : B \rightarrow A$ didefinisikan oleh diagram panah :



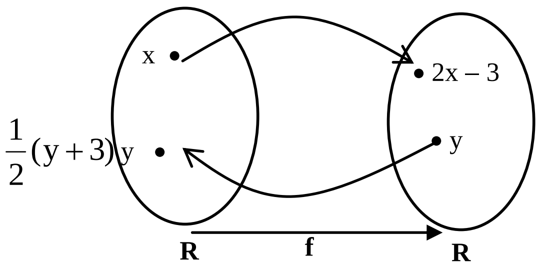
Gb. 3.32

Dari diagram panah di atas, terlihat bahwa:

- $f^{-1}\circ(f(x)) = f^{-1}(b) = x = I(x)$, dan
- $f\circ(f^{-1}(y)) = f(a) = y = I(y)$, yang ini mempertegas sifat $f^{o-1}\circ f = f\circ f^{-1} = I$

<u>Contoh 2</u>

Misalkan fungsi $f : A \to B$ yang didefinisikan dengan $f(x) = 2x - 3$. Karena fungsi f adalah fungsi yang bijektif, maka akan diperoleh fungsi inversnya. Untuk menentukan rumus fungsi invers f^{-1} ditempuh langkah-langkah sebagai berikut :



Gb. 3.32

Misalkan $2x - 3 = y$

maka $2x = y + 3$

sehingga $x = \frac{1}{2}(y+3)$

Oleh karena itu fungsi invers $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y+3)$

Jadi fungsi invers $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ditentukan oleh $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x+3)$

7. Menentukan Domain dan Kodomain Suatu Fungsi Agar Memiliki Fungsi Invers

Dengan memperhatikan syarat bahwa suatu fungsi f mempunyai invers f^{-1}, haruslah f suatu fungsi bijektif. Dari ketentuan ini maka kita dapat menentukan domain dan kodomain suatu fungsi agar fungsi tersebut mempunyai invers.

<u>Contoh:</u>

Suatu fungsi f pada bilangan real ditentukan oleh rumus fungsi $f(x) = \dfrac{x-4}{2x+3}$

Tentukan domain dan kodomain f agar diperoleh fungsi invers f^{-1}

Jawab:

Dengan memperhatikan rumus fungsi f yang berupa fungsi pecah, maka domaindari fungsi f adalah:

$$D_f = \{x \mid 2x + 3 \neq 0,\ x \in R\}$$
$$= \{x \mid x \neq -\frac{3}{2},\ x \in R\}$$

Untuk menentukan kodomainnya terlebih dulu dicari rumus inversnya,

Misalkan $f(x) = y$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-4}{2x+3} = y$

$\Leftrightarrow$ x − 4 = y(2x + 3)

$\Leftrightarrow$ (1 − 2y)x = 3y + 4

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3y+4}{1-2y}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{3y+4}{1-2y}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{3x+4}{1-2x}$

Dengan memperhatikan bahwa syarat suatu fungsi memiliki fungsi invers bila fungsi tersebut adalah bijektif. Sehingga kodomain dari fungsi f adalah domain dari f^{-1}, sehingga kodomain dari f = $D_f^{-1} = \{x \mid 1 - 2x \neq 0,\ x \in R\} = \{x \mid x \neq \frac{1}{2},\ x \in R\}$.

8. Fungsi Invers dari Fungsi Komposisi

Misalkan fungsi h merupakan fungsi komposisi dari fungsi f dan g ($h = g\circ f$), maka invers dari fungsi h adalah fungsi invers dari fungsi komposisi h dan biasa ditulis dengan notasi $h^{-1} = (g\circ f)^{-1}$

Contoh:

Misalkan f dan g masing-masing fungsi pada bilangan real yang didefinisikan sebagai f(x) = x + 3 dan g(x) = 2x − 1, tentukan $(g\circ f)^{-1}$ dan $(f\circ g)^{-1}$

Jawab:

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 3) = 2(x+3) - 1 = 2x + 5$

Misalkan $y = (g\circ f)(x)$

$y = 2x + 5 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y-5)$

$(g\circ f)^{-1}(x) = y^{-1} = \frac{1}{2}(x-5)$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1) + 3 = 2x + 2$

Misalkan $y = 2x + 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y-2)$

Jadi $(f\circ g)^{-1} = y^{-1} = \frac{1}{2}(x-2)$

Kecuali cara di atas secara umum kita dapat menurunkan rumus invers fungsi komposit sebagai berikut:

$(f\circ g)^{-1}\circ(f\circ g) = I$

$\Leftrightarrow (f\circ g)^{-1}\circ(f\circ g)\circ g^{-1} = I\circ g^{-1}$ (dikomposisikan dengan g^{-1})

$\Leftrightarrow (f\circ g)^{-1}\circ f\circ(g\circ g^{-1}) = g^{-1}$ (sifat asosiatif)

$\Leftrightarrow (f\circ g)^{-1}\circ f\circ I = g^{-1}$ (sifat invers)

$\Leftrightarrow (f\circ g)^{-1}\circ f = g^{-1}$ (sifat identitas)

$\Leftrightarrow (f\circ g)^{-1}\circ f\circ f^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}$ (dikomposisikan dengan f^{-1})

$\Leftrightarrow (f\circ g)^{-1}\circ I = g^{-1}\circ f^{-1}$ (sifat invers)

$\Leftrightarrow (f\circ g)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}$ (sifat identitas)

Dengan demikian kita dapatkan rumus:

$$\boxed{(f\circ g)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}}$$

<u>Contoh: 1</u>

Diketahui fungsi-fungsi f dan g pada R, ditentukan oleh $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x) = x^3$

Tentukan: f^{-1}, g^{-1}, $(f\circ g)^{-1}$ dan $(g\circ f)^{-1}$

Jawab:

Misalkan $f(x) = 2x - 3 = y$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(y+3)$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x+3)$

Misalkan $g(x) = x^3 = y$

$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$

$\Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

Untuk menentukan $(f\circ g)^{-1}(x) = (g^{-1}\circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}(\frac{1}{2}(x+3)) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(x+3)}$

$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{4(x+3)}$

Dan $(g\circ f)^{-1}(x) = (f^{-1}\circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x}+3)$

9. Beberapa Penerapan

Berdasarkan sifat-sifat fungsi invers, dapat dicari fungsi f jika fungsi g dan $g\circ f$ atau $f\circ g$ diketahui

Contoh 1:

Fungsi f dan g terdefinisi pada R, dan diketahui pula $g(x) = x + 3$

Tentukan f(x) jika diketahui berikut ini!

a. $(g\circ f)(x) = 3x - 5$
b. $(f\circ g)(x) = x^2 + 6x$

Jawab:

a. Langkah pertama dicari g^{-1}

Misalkan $g(x) = x + 3 = y \Rightarrow x = y - 3$, sehingga $g^{-1}(x) = x - 3$

$f(x) = (g^{-1}\circ(g\circ f))(x) = g^{-1}(3x - 5) = (3x - 5) - 3 = 3x - 8$

b. $f(x) = ((f\circ g)\circ g^{-1})(x) = (f\circ g)(x - 3) = (x - 3)^2 + 6(x - 3) = x^2 - 9$

Contoh 2:

Tentukan fungsi f pada R sedemikian hingga:

$$f(1-\frac{1}{x}) = \frac{x-1}{2x+3}, x \neq -\tfrac{3}{2}$$

Jawab:

Misalkan:

$$1-\frac{1}{x} = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1-y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{1-y}$$

Dengan demikian f(y) = $\dfrac{\dfrac{1}{1-y}-1}{2\dfrac{1}{1-y}+3} = \dfrac{1-(1-y)}{2+3(1-y)} = \dfrac{y}{5-3y}$

Jadi f(x) = $\dfrac{x}{5-3x}, x \neq \tfrac{5}{3}$

Latihan:

Kerjakan soal-soal di bawah ini tanpa terlebih dahulu melihat kunci jawab yang penulis sertakan di bagian akhir dari modul ini!

1. Diketahui A = {a, b, c} dan B = {p, q, r}. Apakah relasi-relasi berikut ini merupakan fungsi dari A ke dalam B ?
   a. R_1 = {(a,q), (c,p)}
   b. R_2 = {(a,q), (b,r), (c,p)}
   c. R_3 = {(a,p), (b,r), (c,p)}
2. Gunakan sebuah rumus untuk mendefinisikan fungsi-fungsi
   a. Untuk tiap-tiap bilangan real f_1 menetapkan dengan pangkat tiganya!
   b. Untuk tiap-tiap bilangan real f_2 menetapkan dengan bilangan 3
   c. Untuk tiap-tiap bilangan real positif, f_3 menetapkan kuadratnya, sedangkan bilangan real yang lain f_3 menetapkannya dengan bilangan 5.
3. Misalkan $f(x) = x^2$ dengan domain $\{ x \mid -2 \leq x \leq 8, x \in R\}$ tentukanlah :
   a. f(4)
   b. f(–3)
   c. f(t – 3), dan tentukan nilai t agar masih tetap pada domainnya.
4. Diketahui fungsi f : **R** $\rightarrow$ **R** yang didefinisikan dengan rumus :

   $$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ jika } x \text{ rasional} \\ 0 \text{ jika } x \text{ irasional} \end{cases}$$

   a. Tulis kalimat terbuka yang menentukan f
   b. Tentukan $f(1\frac{1}{2})$, f(3,141414…}, f(√3), f(π)
5. Diketahui fungsi f : **R** $\rightarrow$ **R** yang ditentukan oleh rumus :

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 \text{ untuk } x > 3 \\ x^2 - 2 \text{ untuk } -2 \le x \le 3 \\ 2x + 3 \text{ untuk } x < -2 \end{cases}$$

maka tentukanlah :

a. f(2) b. f(4) c. f(–1) d. f(–3)

6. Misalkan A = {a, b, c} dan B = {x,y}
   Berapa banyak fungsi berlaiaanan yang dapat didefinisikan dari A ke dalam B?
7. Misalkan A = { a, b, c, d} dan suatu fungsi f dari A ke dalam A, didefinisikan oleh f(a)=a, f(b) = c, f(c) = a dan f(d) = a
   Tentukanlah daerah hasil dari fungsi tersebut.
8. Jika B = { –2, –1, 0, 1, 2} dan suatu fungsi f : B $\rightarrow$ **R** didefinisikan oleh rumus $g(x) = x^2 + 1$
   Carilah daerah hasil dari g !
9. Tiap-tiap rumus di bawah ini mendefinisikan sebuah fungsi dari **R** ke dalam **R.** Tentukan range dari masing-masing fungsi di bawah ini !
   a. $f(x) = 2x + 3$
   b. $f(x) = x^3$
   c. $f(x) = x^2$
   d. $f(x) = x^2 + 1$
   e. $f(x) = \sin x$
10. Misalkan A = { a, b, c, d, e } dan B himpunan huruf-huruf dalam alfabet. Misalkan f, g, h dari A ke dalam B didefinisikan oleh :
    a. f(a) = r; f(b) = c; f(c) = s; f(d) = t; f(e) = e
    b. g(a) = a; g(b) = c; g(c) = e; g(d) = r; g(e) = e
    c. h(a) = z; h(b) = y; h(c) = x; h(d) = y; h(e) = z
    Nyatakanlah apakah tiap-tiap fungsi di atas injektif atau bukan?
11. Nyatakanlah apakah tiap-tiap fungsi berikut ini satu –satu atau bukan !
    a. Untuk tiap-tiap penduduk bumi, di tetapkan dengan bilangan yang berkaitan dengan usianya.
    b. untuk tiap-tiap negara di dunia ini, ditetapkan dengan bilangan yang menyatakan jumlah penduduknya.
    c. Untuk tiap-tiap buku yang ditulis oleh seorang pengarang tunggal, ditatapkan dengan nama pengarangnya.
    d. Untuk tiap –tiap negara di bumi ini yang mempunyai perdana menteri, ditetapkan dengan nama perdana menterinya.
12. Jika K = [–1, 1] = { x | $-1 \le x \le 1$, $x \in$ **R** }; L = [1, 3] dan M = [– 3, – 1], dan misalkan fungsi f_1 : K $\rightarrow$ **R** , f_2 : L $\rightarrow$ **R,** dan f_3 = M $\rightarrow$ **R** sedemikian hingga masing – masing fungsi didefinisikan oleh aturan untuk tiap – tiap bilangan menetapkan kuadratnya.
    Yang mana dari dari fungsi – fungsi in satu – satu ?
13. Dapatkah suatu fungsi konstan itu injektif ?
14. Yang manakah fungsi-fungsi dari himpunan A = { a, b, c } ke himpunan B = { x, y } ini satu – satu ?
15. Misalkan fungsi f : A $\rightarrow$ B. Carilah f(A) yaitu daerah hasil dari f, jika f suatu fungsi yang surjektif ?
16. Andaikan A = [–1, 1] dan misalkan fungsi – fungsi f, g dan h dari A ke dalam A di definisikan oleh :
    (a) $f(x) = x^2$ (b) $g(x) = x^3$ (c) $h(x) = \sin x$
    Manakah dari fungsi – fungsi ini yang surjektif ?
17. Mungkinkah suatu fungsi konstanta itu menjadi fungsi yang surjektif ?
18. Manakah fungsi dari himpunan A = { a, b, c } ke dalam himpunan B = { x, y} yang surjektif.
19. Jika A = [–1, 1] maka tentukan yang manakah fungsi – fungsi f : A $\rightarrow$ **R** di bawah ini yang bijektif, jika f didefinisikan dengan :
    a. $f(x) = x - 3$
    b. $f(x) = 2x + 1$
    c. $f(x) = x^2$
    d. $f(x) = x^3$
    e. $f(x) = x^4$
20. Jelaskan fungsi – fungsi di bawah ini apakah injektif, surjektif dan bahkan bijektif
    a. Masing – masing orang di bumi dikaitkan dengan bilangan yang menyatakan umurnya.
    b. Masing – masing negara di bumi dikaitkan dengan populasi warganya.
    c. Buku – buku dengan pengarang tunggal dikaitkan dengan pengarangnya.
    d. Masing – masing negara di dunia dikaitkan dengan kepala negaranya.
    e. Masing - masing negara di dunia dikaitkan dengan kepala pemerintahannya.

22. Diketahui himpunan A = { a, b, c }; B = { x, y, z } dan C = { r, s, t } fungsi f : A→ B dan g : B → C yang didefinisikan dengan f = {(a,y),(b,x),(c,y)} dan g = {(x,s),(y,t),(z,r)} tentukanlah :
   a. fungsi komposisi (gof) : A → C
   b. range dari (gof)
23. Suatu fungsi f dan g di dalam himpunan A = { 1, 2, 3, 4, 5 } yang masing-masing di definisikan sebagai berikut
   f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 3, f(4) = 1 dan f(5) = 2
   g(1) = 4, g(2) = 1, g(3) = 1, g(4) = 2 dan g(5) = 3
   Tentukanlah fungsi komposisi fog dan gof

24. Fungsi – fungsi f dan g di dalam himpunan bilangan real yang didefinisikan sebagai berikut : f(x) = 2x + 1, g(x) = x^2– 2. Tentukan rumus-rumus fungsi (fog) dan (gof)
25. Fungsi – fungsi f dan g di dalam himpunan bilangan real yang didefinisikan sebagai f(x) = x^2 + 2x – 3dan g(x) = 3x – 4 maka tentukanlah :
   a. (gof)(2) dan (fog)(2)
   b. (gof)(x) dan (fog)(x)
26. Diketahui A = { 1, 2, 3, 4, 5 } dan f sebuah fungsi dalam A yang didefinisikan sebagai berikut: f = {(1,4),(2,1),(3,4),(4,2)(5,4)}.
   Tentukanlah :
   a. $f^{-1}(2)$ b. $f^{-1}(3)$ c. $f^{-1}(4)$ d. $f^{-1}(\{1,2\})$ e. $f^{-1}(\{2,3,4\})$
27. Diketahui A = { 1,2, 3, 4, 5} dan fungsi f, g dan h di dalam A yang masing-masing didefinisikan sebagai berikut :
   a. f = {(1,2),(2,3),(3,2),(4,5),(5,1)}
   b. g = {(1,3),(2,2),(3,1),(4,4),(5,4)}
   c. h = {(1,2),(2,4),(3,3),(4,5),(5,1)}

   Jika mungkin tentukan fungsi – fungsi inversnya.
28. Diketahui fungsi – fungsi di dalam A = [–1, 1] masing – masing didefinisikan sebagaimana di bawah ini. Manakah fungsi-fungsi berikut yang memiliki fungsi invers ?
   a. $f_1(x) = x^2$
   b. $f_2(x) = x^3$
   c. $f_3(x) = x^4$
   d. $f_4 = \sin x$
   e. $f_5 = \sin(\frac{\pi x}{2})$
29. Ambillah A = **R** – {2} dan B = **R** – {1}, dan misalkan f : A → B didefinisikan oleh $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$.
   Maka apakah f adalah fungsi bijektif ?. Tentukan rumus yang mendefinisikan f^{-1} ?
30. Fungsi f dan g pada bilangan real didefinisikan dengan $f(x) = \frac{1}{1-x}$ dan $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$
   Tentukan: a. f^{-1} dan g^{-1}
   b. $(g\circ f)^{-1}$ dan $(f\circ g)^{-1}$
   c. Tentukan daerah asal dan hasil dari f, g, f∘g dan g∘f

BAB IV
KESIMPULAN

Dengan mengucap syukur Alhamdulillah bahwa paket Pembelajaran Fungsi Persamaan dan Pertidaksamaan Aljabar telah dapat dituntaskan. Meskipun masih banyak kekuarangan disana sini namun dapat dijadikan acuan dalam diskusi-diskusi di Sanggar MGMP Matematika SMA. Terkait dengan wacana yang penulis kembangkan dalam modul ini, dapat ditarik kesimpulan hal-hal sebagai berikut.

1. Persamaan adalah kalimat terbuka yang menggunakan relasi "sama dengan"
   a. Untuk menyelesaiakan persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, adalah dengan jalan:
      a. memfaktorkan
      b. melengkapkan kuadrat sempurna
      c. menggunakan rumus (abc)
   b. Untuk menyelesaikan persamaan irasional pada prinsipnya adalah dengan jalan mengkuadratkan kedua ruas. Tetapi dengan mengkuadratkan kedua ruas ada kemungkinan kita menyelundupkan akar lain yang bukan akar dari persamaan tersebut. Maka hasil penyelesaian harus diperiksa.
   c. Untuk menyelesaikan persamaan eksponen, ditempuh langkah-langkah:
      1) Pesamaan Bentuk: $a^{f(x)} = 1$, $a \neq 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
      2) Persamaan Bentuk: $a^{f(x)} = a^p \Leftrightarrow f(x) = p$
      3) Persamaan Bentuk: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
      4) $f(x)^{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x) = 1 \\ f(x) = -1 \end{cases}$, untuk $g(x) = 0$ tetapi $f(x) \neq 0$; $f(x) = -1$ dengan pangkat genap.
      5) $h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)} \Leftrightarrow$ (1) pangkat sama, (2) bilangan pokok =1, bilangan pokok = 0 tetapi pangkat tidak nol, bilangan pokok -1 untuk pangkat sama-sama genap atau ganjil
      6) $f(x)^{g(x)} = h(x)^{g(x)} \Leftrightarrow$ (1) pangkat = 0, (2) bilangan pokok sama.
   d. Untuk menyelesaikan persamaan eksponen:
      1) ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log p \Leftrightarrow f(x) = p$
      2) ${}^{a}\log f(x) = {}^{b}\log f(x) \Leftrightarrow f(x) = 1$
      3) ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
      4) ${}^{f(x)}\log g(x) = {}^{f(x)}\log h(x) \Leftrightarrow g(x) = h(x)$,
      5) Prinsip penyelesaian bentuk $a\,{}^{g}\log^2 f(x) + b\,{}^{g}\log f(x) + c = 0$ adalah dengan memisalkan ${}^{g}\log f(x) = y$, sehingga diperoleh persamaan kuadrat $ay^2 + by + c = 0$ yang syarat agar dapat diselesaiakan adalah $b^2 - 4ac \geq 0$

2. Pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang berkaitan dengan relasi: $>$, $<$, $\leq$, $\geq$, atau $\neq$
   a. Untuk menyelesaikan pertidak samaan pecahan, prinsipnya pembuat nol hanya dimiliki oleh pembilang dan tidak oleh penyebut.

b. Untuk menyelesaikan pertidaksamaan irasional, harus ditentukan terlebih dulu syarat tambahan mengingat bialngan real di bawah akar adalah bilangan non negatif

c. Untuk menyelesaikan pertidaksamaan eksponen:

(1) Untuk a > 1:

(a) $a^x > a^y \Rightarrow x > y$

(b) $a^x < a^y \Rightarrow x < y$

(2) Untuk 0 < a < 1:

(a) $a^x > a^y \Rightarrow x < y$

(b) $a^x < a^y \Rightarrow x > y$

d. Untuk menyelesaikan pertidaksamaan logaritma:

(1) Untuk a > 1 $\Rightarrow \begin{cases} {}^a\log f(x) > {}^a\log g(x) \Rightarrow f(x) > g(x) \\ {}^a\log f(x) < {}^a\log g(x) \Rightarrow f(x) < g(x) \end{cases}$

(2) Untuk 0 < a < 1 $\Rightarrow \begin{cases} {}^a\log f(x) > {}^a\log g(x) \Rightarrow f(x) < g(x) \\ {}^a\log f(x) < {}^a\log g(x) \Rightarrow f(x) > g(x) \end{cases}$

Dengan syarat tambahan: (1) f(x) > 0 dan (2) g(x) > 0

3. Relasi binar (R) dari himpunan A ke himpunan B, adalah diperlukan;
   a. himpunan A yang tidak kosong
   b. himpunan B yang tidak kosong
   c. suatu kalimat terbuka, yang kita singkat P(x,y), di mana P(a,b) dapat bernilai benar atau salah untuk setiap pasangan terurut (a,b), $a \in A$ dan $b \in B$.
4. Fungsi f dari himpunan A ke dalam (*into*) B adalah suatu relasi binar yang memasangkan setiap elemen dari A dengan tepat satu elemen B.
   a. Fungsi – fungsi istimewa:
      1) fungsi surjektif (onto) f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu fungsi yang setiap $b \in B$ menjadi peta dari sekurang-kurangnya satu $a \in A$.
      2) fungsi injektif (satu-satu) f dari himpuan A ke himpunan B adalah suatu fungsi yang untuk $a_1, a_2 \in A$ dengan $a_1 \neq a_2$ diperoleh $f(a_1) \neq f(a_2)$
      3) fungsi bijektif (korespondensi satu-satu) dari himpunan A ke himpunan B, sedemikian hingga f surjektif dan injektif sekaligus.
   b. Fungsi komposit $g \circ f$ dari fungsi f: $A \rightarrow B$ dan g: $B \rightarrow C$ adalah suatu fungsi $h: A \rightarrow C$, sedemikian hingga $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$
   c. Fungsi invers f^{-1} dari fungsi f : $A \rightarrow B$ adalah suatu fungsi dari B ke dalam A sedemikian hinga $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}: x \rightarrow x$. Atau dengan kata lain $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$

DAFTAR PUSTAKA

Keedy, Merrin L. et.al. (1986). *Algebra and Trigonometry*. Menlo Park, California: Addison-Wesley Publising Company

Krismanto, Al. (2003). *Aljabar (Modul Penataran Guru Matematika SMP)*. Yogyakarta: PPPG Matematika

Nedi Sunaedi et.al. (1992). *Alajabar untuk Sekolah Menengah Umum Tingkat Pertama (SMP)*. Bandung : Penerbit Pakar Raya

Spiegel, Murray R. (1956). *Theory and Problems of College Algebra* (Edisi Terjemahan oleh Kasir Iskandar, 1999), Jakarta: Penerbit Erlangga

Sri Widodo. (….). *Diktat Ilmu Aljabar dan Ilmu Ukur Analit.* Surakarta: Stc S.W

Vance, Elbridge P. (1962). *Modern Algebra and Trigonometry*. Massachusetts: Addison Wesley Publishing Company Co.

Zuckerman, Martin M. (1985). *Algebra and Trigonometry*. New York: John Wiley

KUNCI JAWAB

Latihan 1

1. –
2. a. {–7, 4}, b. $\{\frac{8}{5}, 5\}$, c. { }, d. {–3}, e. $\{\frac{3}{2}p, -\frac{2}{3}p\}$
3. –4 dan –17
4. Ukuran 10 kaki × 25 kaki
5. Penjang kaki-kakinya: 16 inci dan 30 inci

Latihan 2

1. a. $x \geq 0$, b. $x \geq 0$
2. a $\{0, \frac{8}{5}\}$, b. {6,2}, c. {4}
3. {2}
4. $\{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{422}$
5. $\{\frac{-4 \pm 2\sqrt{86}}{41}\}$
6. {10}
7. {3}
8. {2}
9. {3}
10. $\{x | x \geq 5, x \in R\}$

Latihan 3

1. –
2. $a \geq b \Rightarrow a - b \geq 0$ ......(1)

   $b \geq a \Rightarrow b - a \geq 0$ ....(2)

   Dari (1) dan (2) ini benar apabila a – b = b – a = 0, atau dengan kata lain a = b
3. $$\left.\begin{array}{l} a > b \Rightarrow a - b > 0 \\ \left.\begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \end{array}\right\} a + b > 0 \end{array}\right\} (a + b)(a - b) > 0 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$$

4. Bukti: Dari $x > y \Rightarrow x + x > x + y \Rightarrow 2x > x + y$ ....(1)

$x > y \Rightarrow x + y > y + y \Rightarrow x + y > 2y$ ....(2)

Dari (1) dan (2) diperoleh $2x > x + y > 2y$, sehingga $x > \frac{1}{2}(x + y) > y$

5. Bukti: $\left.\begin{array}{l} x \in R, \\ y \in R \end{array}\right\}$ $(x - y) \in R \Rightarrow (x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$

6. a. $x < 3$, b. $x \geq 2$, c. $0 < x < 2$

7. a. $2 \leq x < 9$ b. $1 < x \leq 3$

8. a. $-4 \leq x < 14$ b. $5 \leq x \leq 10$, c. $x \geq 2$

Latihan 4

1. $x \leq -3$ atau $x > 2$
2. $-2 < x \leq 1$ atau $2 < x \leq 5$
3. $x < -2$ atau $1\frac{1}{2} \leq x < 3$
4. $x < -3$ atau $\frac{13}{16} < x < 1\frac{1}{3}$
5. $x < -\frac{1}{4}$ atau $x > 0$
6. $-\frac{3}{11} < x < -\frac{2}{9}$
7. $-1 < x \leq 0$
8. $-1 < x < 0$
9. $x < -6$ atau $\frac{-3-\sqrt{37}}{2} < x \leq 1\frac{1}{3}$
10. $x < -3$ atau $-1 < x < 1$ atau $x \geq 0$

Latihan 5

1. $-3 \leq x < -1$
2. $x < -10\frac{1}{2}$
3. $4-\sqrt{6} < x < 4+\sqrt{6}$
4. $x > 7\frac{1}{3}$ atau $x \leq -8$
5. $x \leq -4$ atau $3 \leq x \leq 12$

6. $x < -\frac{3}{4}$

7. $-8 \le x < \frac{-11-\sqrt{105}}{4}$ atau $\frac{-11+\sqrt{105}}{4} < x \le 0$

8. $-\frac{1}{6} < x \le 0$ atau $x \ge 4$

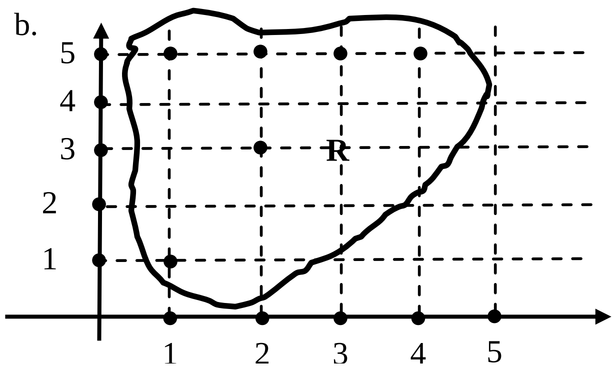
9. $-2\frac{1}{8} \le x < 1$ dan $x \ne 0$

10. $x \ge 35$ atau $x = 3$

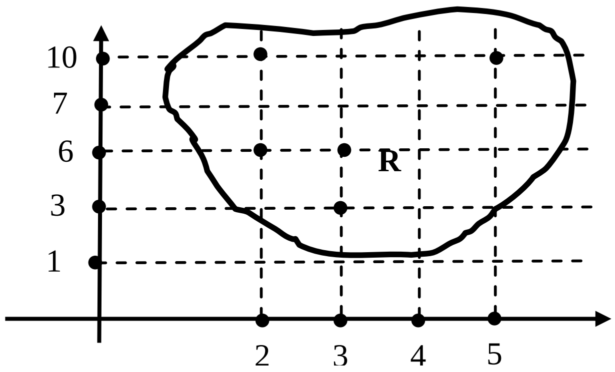
Latihan 6

1. a. R = {(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,5), (4,5)}

b.



2. a. R = {(2,6), (2,10), (3,3), (3,6), (5,10)}



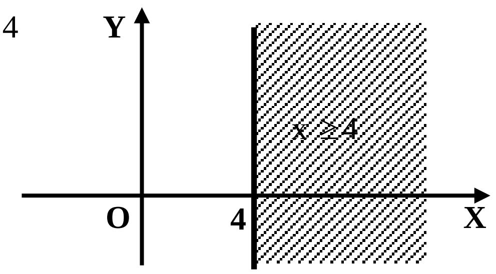
3. a. R = {(a,b), (b,a), (b,b), (b,d), (c,c), (d,a), (d,b)}

(i) salah, (ii) benar, (iii) salah, (iv) benar

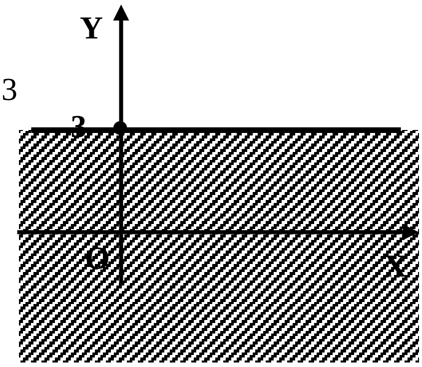
b. {x| (x,b) ∈ R} = { a, b, d}

c. {x| (d,x) ∈ R} = {a, b}

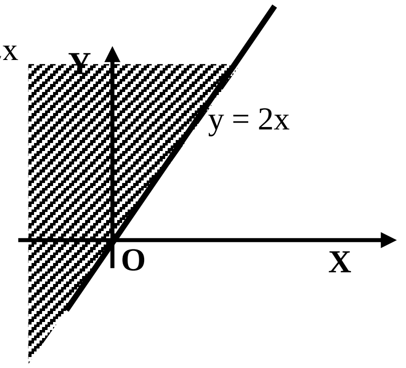
4. a. $x \ge 4$



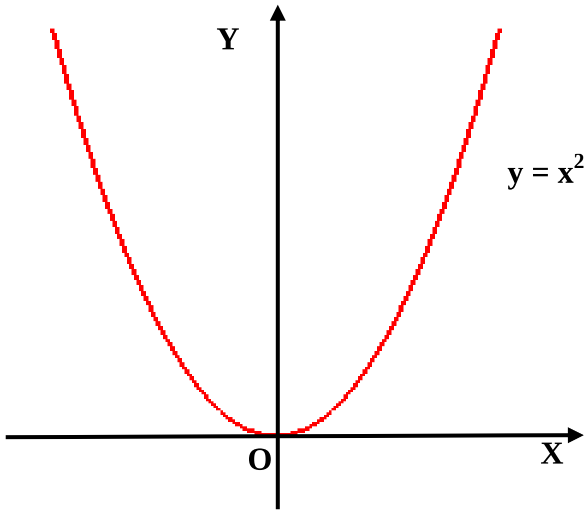
b. $y \leq 3$



c. $y \geq 2x$

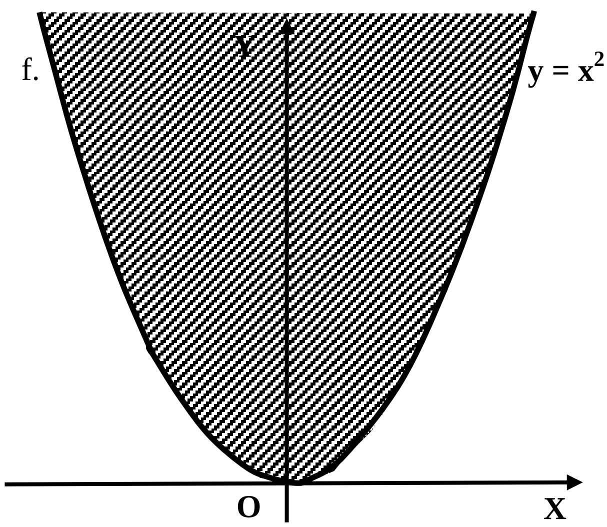


d. $y = x^2$

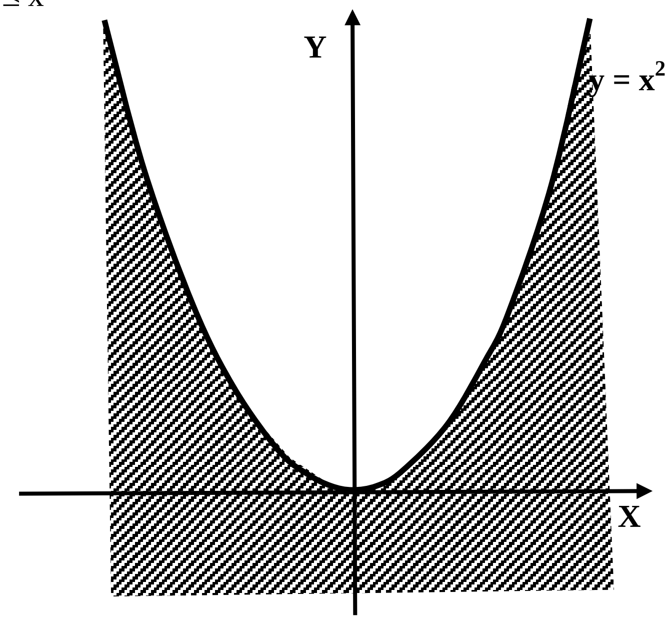


e. $y \geq x^2$

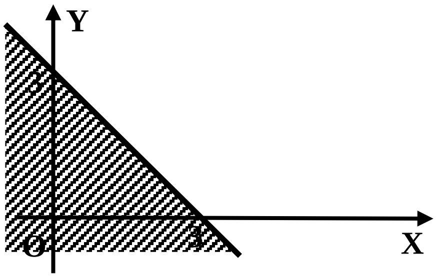
f.



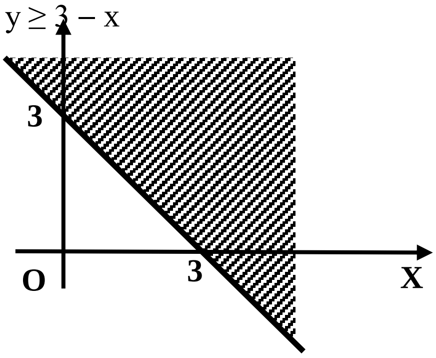
f. $y \leq x^2$



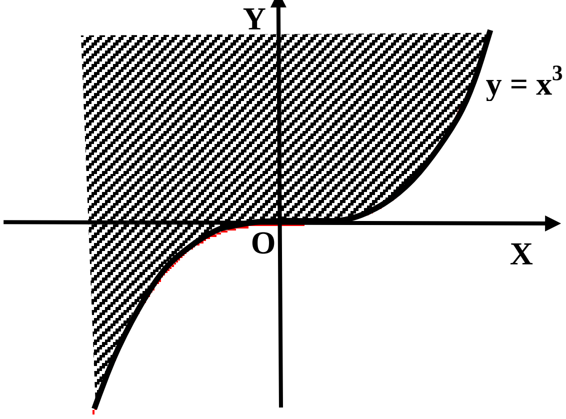
g. $y \leq 3 - x$



h. $y \geq 3 - x$



i. $y \geq x^3$



5. R = {(1,4), (1,5), (3,7), (4,5), (4,6), (7,6)}

a. Domain dari relasi R = {1, 3, 4, 7}

b. Range dari relasi R = { 4, 5, 6, 7}

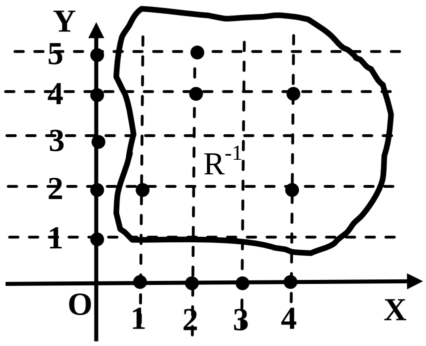
c. Relasi invers R^{-1} = {(4,1), (5,1), (5,4), (6,4), (6,7)}

6. a. Domain relasi R = {2, 4, 5}

b. Range relasi R = {1, 2, 4]

c. Relasi invers R^{-1} = {(1,2), (2,4), (2,5), (4,2), (4,4)}

d.



7. a. Domain dari R = {x| $-3 \le x \le 3$, x∈R}

b. Range dari R = {y| $-2 \le y \le 2$, y∈R}

c. Relasi inversnya R^{-1} = {(x,y)| $9x^2 + 4y^2 = 36$}

8. R = {(2,4), (4,3), (6,2), (8,1)}

a. Domain dari R = {2, 4, 6, 8}

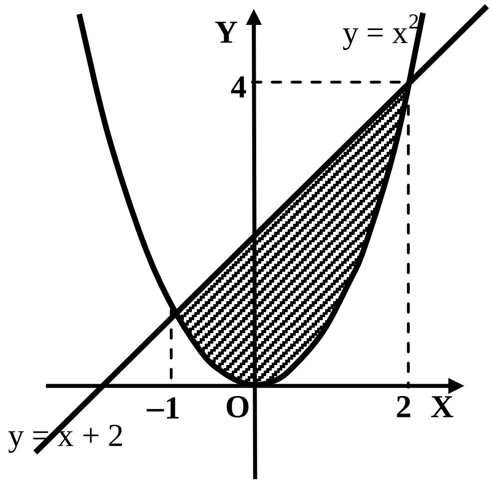
b. Range dari R = {1, 2, 3, 4}

c. Relasi inversya R^{-1} = {(1,8), (2,6), (3,4), (4,2)} atau dengan kalimat terbuka "2x + y = 10"

9. R_1 = {(x,y)| $y \ge x^2$}

R_2 = {(x,y)| $y \le x + 2$}

Sketsa dari $R_1 \cap R_2$



Domain dari $R_1 \cap R_2$ = {x| $-1 \le x \le 2$, x∈R}

Range dari $R_1 \cap R_2$ = {y| $0 \le y \le 4$, y∈R}

Tugas Akhir

1. a. R_1 bukan fungsi,   b. R_2 fungsi,   c. R_3 fungsi
2. a. $f(x) \rightarrow x^3$

   b. $f(x) = 3$

   c. $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ jika } x > 0,\ x \in R \\ 5 \text{ jika } x \leq 0,\ x \in R \end{cases}$
3. a. $F_1(4) = 16$

   b. $f_2(-3)$ tidak ada

   c. $f_3(t-3) = (t-3)^2$ untuk $1 \leq t \leq 11$, $t \in R$
4. a. Fungsi f mengawankan setiap bilangan rasional dengan 1 dan bilangan irasional dengan 0

   b. $f(1\frac{1}{2}) = 1$, $f(3{,}1414...) = 1$, $f(\sqrt{3}) = 0$, $f(\pi) = 0$
5. a. $f(2) = 2$,   b. $f(4) = 11$,   c. $f(-1) = -11$,   d. $f(-3)` = -3$
6. Ada enam fungsi dari A ke B
7. Daerah hasil R = {a, c}
8. Daerah hasil $R_g = \{1, 2, 5\}$
9. a. $\{y|\ -\infty < y < \infty,\ y \in R\}$

   b. $\{y|\ -\infty < y < \infty, y \in R\}$

   c. $\{y|\ 0 < y < \infty,\ y \in R\}$

   d. $\{y|\ 1 < y < \infty,\ y \in R\}$

   e. $\{y|\ -1 < y < 1,\ y \in R\}$
10. a. f fungsi injektif (mengapa?)

    b. g bukan fungsi injektif (mengapa?)

    c. h bukan fungsi injektif (mengapa?)
11. a. Bukan fungsi satu-satu

    b. pada prinsipnya bukan fugsi satu-satu, tetapi kenyatan di lapangan fungsi satu-satu.

    c. bukan fungsi satu-satu

    d. fungsi satu-satu
12. f_2 dan f_3 fungsi satu-satu
13. Suatu fungsi konstanta $f: x \rightarrow c$ dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu fungsi satu-satu apabila A suatu *singleton*
14. Tak satupun fungsi $A \rightarrow B$ yang satu-satu
15. $f(A) = B$

16. b dan c
17. Jika f(A) = {c}
18. Fungsi f: A $\rightarrow$ B yang surjektif adalah: {(a,x), (b,x), (c,y)}, {(a,x), (b,y), (c,y)}, {(a,y), (bx), (c,y)}, atau {(a,x), (b,y), (c,x)}
19. a, b dan d
20. a. fungsi into biasa

    b. fungsi surjektif

    c. fungsi surjektif

    d. fungsi surjektif

    e. fungsi bijektif
22. a. g°f = {(a,t), (b,s), (c,t)}

    b. range dari g°f = {t, s}
23. f°g = {(1,1), (2,3), (3,3), (4,5), (5,3)}

    g°f = {(1,1), (2,3),(3,1), (4,4), (5,5)}
24. f°g: x $\rightarrow 2x^2 - 3$

    g°f : x $\rightarrow 4x^2 + 4x - 1$
25. a. (g°f)(2) = 11

    (f°g)(2) = 5

    b. (g°f)(x) = $3x^2 + 6x - 9$

    (f°g)(x) = $9x^2 - 18x + 5$
26. f^{-1} = {(1,2), (2,4), (4,1), (4,3), (4,5)}

    a. $f^{-1}(2) = 4$

    b. $f^{-1}(3) = 1$ (tidak ada)

    c. $f^{-1}(4) = 1$, $f^{-1}(4) = 3$, $f^{-1}(4) = 5$, invers fungsi f^{-1} bukan berupa fungsi invers.

    d. $F^{-1}(\{1,2)\}) = \{2,4\}$
27. a. f tidak punya fungsi invers

    b. g tidak punya fungsi invers

    c. h^{-1} = {(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,4)}
28. a. f_1 tidak memiliki fungsi invers

    b. $f_2^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

    c. f_3 tidak memiliki fungsi invers

    d. f_4 tidak memiliki fungsi invers

    e. f_5 memiliki invers yakni $f_5^{-1}(x) = \dfrac{2}{\pi} \arcsin x$

29. Fungsi f(x) = $\dfrac{x-2}{x-3}$ dari A ke B, merupakan fungsi injektif , sedangkan invers fungsinya yakni $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$, dari B ke A juga merupakan fungsi yang injektif, mengingat definisi fungsi dan kenyataan bahwa baik f maupun f^{-1} fungsi injektif, berarti f fungsi bijektif, yang ini berarti f memilki fungsi invers $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.

30. a. $f^{-1}(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ dan $g^{-1}(x) = \dfrac{1}{1-x}$

b. $(g\circ f)^{-1}(x) = x = I(x)$ dan $(f\circ g)^{-1}(x) = x = I(x)$

c. Daerah asal dari:

1) $D_f = \{x|\ x \neq 1,\ x \in R\}$

2) $D_g = \{x|\ x \neq 0,\ x \in R\}$

3) $D_{f\circ g} = \{x|\ x \neq 0,\ x \in R\}$

4) $D_{g\circ f} = \{x|\ x \neq 1,\ x \in R\}$

HUKUM-HUKUM DASAR DALAM ALJABAR

Pada aljabar elementer ini, semua hukum atau aturan dasar berkaitan dengan operasi hitung aljabar adalah berlakunya 11 sifat yang disebut *aksioma lapangan (field)*. Dalam himpunan bilangan real R didefinisikan dua operasi hitung yaitu *penjumlahan* (yang dilambangkan dengan "+") dan *perkalian* (yang dilambangkan dengan "×" , atau dilambangkan dengan "•" , dan dalam alajabar kadang-kadang tidak ditulis). Himpunan bilangan real R bersama operasi binar *penjumlahan* (+) dan *perkalian* (×) ini membentuk suatu *sistem aljabar.*

1. Aksioma Lapangan (Field)

Ada 11 sifat dalam sistem aljabar bilangan real :

a. Sifat Tertutup (Closure)

Untuk setiap a,b $\in$ R , berlaku a + b $\in$ R dan a • b $\in$ R. Di sini berlaku sifat hasil penjumlahan setiap dua bilangan real merupakan bilangan real, demikian juga hasil perkalian setaiap dua bilangan real juga berupa bilangan real pula.

b. Sifat Pengelompokan (Asosiatif)

Untuk setiap a, b, c $\in$ R, berlaku :

(i) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(ii) $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

c. Sifat Komutatif

Untuk setiap a, b $\in$ R, berlaku :

(i) $a + b = b + a$

(ii) $a \times b = b \times a$

d. Adanya elemen netral

(i) elemen netral penjumlahan (elemen nol) adalah 0 dengan sifat untuk setiap a $\in$ R $a + 0 = 0 + a = a$

(ii) elemen netral perkalian (elemen satuan) adalah 1 dengan sifat untuk setiap a $\in$ R berlaku : $a \times 1 = 1 \times a = a$

(iii) Elemen Invers

(iv) Untuk setiap a $\in$ R mempunyai invers aditif (negatifnya) – a (dibaca negatif a), sedemikian hingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$

(v) Untuk setiap a $\in$ R dan a $\neq 0$, mempunyai invers perkalian (kebalikan) : $\frac{1}{a}$ sedemikian hingga $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$

e. Sifat Distributif

Berlakunya sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan baik kiri maupun kanan, untuk setiap a, b, c $\in$ R :

(i) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

(ii) $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

2. Beberapa Sifat yang Diturunkan dari Aksioma Lapangan.

Teorema I : **Untuk setiap a $\in$ R, a $\bullet$ 0 = 0**

Bukti : Untuk setiap a $\in$ R berlaku :

$a + 0 = a$	(0 elemen netral aditif)
$a \times (a + 0) = a \times a$	(kedua ruas diaklikan dengan a)
$a \times a + a \bullet 0 = a \times a$	(distributif)
$-(a \times a) + (a \times a) + a \bullet 0 = -(a \times a) + (a \times a)$	(kedua ruas ditambah $-(a\times a)$)
$0 + a \bullet 0 = 0$	(sifat elemen invers)
$a \bullet 0 = 0$ (qed)	(sifat netral aditif)

a. Teorema II (Sifat dasar penyelesaian persamaan)

Untuk setiap a, b $\in$ R, jika a $\bullet$ b = 0 maka a = 0 atau b = 0

Bukti : (i) Jika a = 0 maka $a \times b = 0 \times b = 0$ (sifat I)

(ii) Demikian juga jika b = 0 maka $a \times b = 0$, kenyataan ini menunjukkan baik jika a = 0 dan b $\neq 0$ atau sebaliknya b = 0 dan a $\neq 0$ maka hasil kali $a \times b = 0$.

(iii) Jika a $\neq 0$ maka $\frac{1}{a}$ ada, sehingga dari $a \bullet b = 0$, akan dipenuhi

$\frac{1}{a} \times (a \times b) = \frac{1}{a} \times 0$	(kedua ruas dikalikan $\frac{1}{a}$)
$(\frac{1}{a} \times a) \times b = \frac{1}{a} \times 0$	(asosiatif perkalian)
$1 \times b = 0$	(invers kali dan sifat I)
$b = 0$	(sifat elemen satuan)

(iv) Dengan jalan yang sama dapat ditunjukkan, bahwa jika b $\neq 0$ dan $a \bullet b = 0$ maka dapat dipastikan $a = 0$, sehingga dari (i), (ii), (iii) dan (iv) terbuktilah sifat di depan.

b. Teorema III **Untuk setiap a, b $\in$ R , berlaku :**

i. $\mathbf{(-a) \bullet b = -(a \bullet b)}$

ii. $\mathbf{a \bullet (-b) = -(a \bullet b)}$

iii. $(-a) \bullet (-b) = a \bullet b$

Bukti :

(i) $(-a) + a = 0$, untuk setiap $a \in R$ (sifat invers aditif)

$((-a) + a) \times b = 0 \times b$ (kedua ruas diaklikan b)

$(-a) \times b + a \times b = 0$ (distributif dan sifat I)

$(-a) \times b + (a \times b) + (-(a \times b)) = 0 + (-(a \times b))$ (kedua ruas ditambah $-(a\times b)$)

$(-a) \times b + 0 = -(a \times b)$ (sifat invers dan netral aditif 0)

$(-a) \times b = -(a \times b)$ (sifat netral aditif 0)

(ii) Dengan menukar a dengan b pada bukti (i) maka berakibat (ii) terbukti

(iii) $(-b) + b = 0$ (sifat invers aditif)

$(-a)\bullet((-b) + b) = (-a) \bullet 0$ (kedua ruas dikalikan $-a$)

$(-a) \bullet (-b) + (-a)\bullet b = 0$ (distributif dan sifat I)

$(-a)\bullet(-b) + (-a)\bullet b + a\bullet b = 0 + a\bullet b$ (kedua ruas ditambah $a\bullet b$)

$(-a)\bullet(-b) + ((-a)+a)\bullet b = a \bullet b$ (distributive dan netral aditif 0)

$(-a)\bullet(-b) + 0\bullet b = a \bullet b$ (invers jumlah)

$(-a)\bullet(-b) + 0 = a \bullet b$ (sifat I)

$(-a)\bullet(-b) = a\bullet b$ (qed) (identitas aditif 0)

3. Bentuk Aljabar

Beberapa istilah dan pengertian yang perlu dimengerti kaitannya dengan beberapa penyataan dalam aljabar adalah :

a. **Ekspresi Aljabar** adalah sebuah gabungan bilangan biasa dan huruf-huruf yang dipasangkan dengan bilangan-bilangan tersebut, demikian juga penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian dua ekspresi, pemangkatan dan penarikan akar dari dari sebuah, dua atau lebih ekspresi aljabar, adalah merupakan ekspresi pula.

Contoh ekspresi :

$3x^2 - 5xy + 2y^4$, $2a^3b^5$, $\frac{5xy + 3z}{2a^3 - c^2}$, dan sebagainya

Dua buah bentuk ekspresi aljabar (disebut juga pernyataan aljabar) E_1 dan E_2 yang memuat huruf dikatakan ekuivalen (dilambangkan dengan "$\Leftrightarrow$") jika dengan substitusi pada keduanya menghasilkan nilai yang sama.

Contoh $(2x + y)^2$ adalah ekuivalen dengan $4x^2 + 4xy + y^2$ karena untuk setiap $x, y \in D$ (D=domain) kedua hasil substitusinya sama.

Mengacu pada sifat-sifat relasi, maka relasi ekuivalensi adalah merupakan relasi yang ekuivalen, yaitu relasi yang mempunyai sifat :

(i) *refleksif*, yaitu setiap ekspresi ekuivalen dengan dirinya sendiri ($E_1 \Leftrightarrow E_1$)

(ii) *simetris*, jika $E_1 \Leftrightarrow E_2$ akan berakibat $E_2 \Leftrightarrow E_1$

(iii) *transitif*, jika $E_1 \Leftrightarrow E_2$ dan $E_2 \Leftrightarrow E_3$ maka akan berakibat $E_1 \Leftrightarrow E_3$

Sebagaimana telah kita ketahui setiap relasi yang dipenuhi sifat-sifat *refleksif*, *simetris* dan *transitif* dikatakan relasi yang ekuivalen.

b. **Pernyataan (kalimat deklaratif, statement)** adalah kalimat (berita) yang bernilai benar saja atau salah saja (tidak sekaligus benar dan salah). Dan kebenaran yang diacunya adalah kecocokan dengan pernyataan itu dengan keadaan yang sebenarnya.

Contoh :

a. $4 + 7 = 11$ (pernyataan bernilai benar)

b. $4^2 < 11$ (pernyataan bernilai salah)

c. $25 : 5 = 4$ (pernyataan bernilai salah)

c. **Konstanta** adalah lambang yang mewakili (menunjuk) anggota tertentu dari semesta pembicaraan

d. **Variabel (peubah)** adalah lambang yang mewakili (menunjuk) anggota sembarang dari semesta pembicaraan.

   Contoh ekspresi aljabar dalam semesta bilangan Real : $2x^2 - 3x + 7 = 0$, berarti x adalah peubah (variable) sedangkan 2, 3, 7, dan 0 adalah konstanta

e. **Persamaan** adalah kalimat terbuka yang menggunakan relasi "sama dengan" (dilambangkan dengan "="), dapat juga persamaan dipandang sebagai dua ekspresi aljabar (bentuk aljabar) yang dihubungkan dengan tanda "=", sehingga bentuk umum persamaan adalah $E_1 = E_2$ dengan paling sedikit satu di antara E_1 atau E_2 memuat variabel. Dan jika $E_1 = E_2$ tetapi kedua E_1 ataupun E_2 tidak memuat variabel disebut suatu **kesamaan.** Sedangkan persamaan yang bernilai benar untuk setiap anggota semesta disebut **identitas**

   Contoh :

   a. $2x^3 - 16 = 0$ merupakan suatu persamaan

   b. $4 + 15 = 19$ merupakan suatu kesamaan

   c. $x^2 + 9 \geq 6x$ merupakan suatu identitas (sebab untuk setiap bilangan real x, pernyataan disamping akan bernilai benar)

f. **Pertidak samaan** adalah suatu kalimat terbuka yang menggunakan relasi : >, <, $\geq$, $\leq$ atau $\neq$

g. **Penyelesaian** adalah konstanta (konstanta-konstanta), dari anggota semestanya yang jika disubstitusikan ke dalam variable dari kalimat terbukanya, akan tebentuk pernyataan yang bernilai benar. Penyelesaian dari suatu persamaan biasa disebut **akar-akar persamaan.** Sedangkan himpunan dari semua penyelesaian dari suatu kalimat terbuka disebut **himpunan penyelesaian**

   Contoh :

   -1 dan 3 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 2x - 3 = 0$, sebab, baik $(-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$ maupun $3^2 - 2.3 - 3 = 0$ keduanya pernyataan bernilai benar

Lampiran 2

RELASI EKUIVALENSI

A. Refleksifitas Relasi

1. Relasi Refleksif :

Misalkan relasi R adalah pada A, relasi R disebut suatu relasi refleksif, jika untuk setiap $a \in A$ dipenuhi (a,a) $\in R$, jadi ini berarti bahwa untuk tiap elemen $x \in R$ harus berlaku x R x.

Contoh 1

Jika A = { 1, 2, 3, 4, 5} dan R = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)}, maka R adalah suatu relasi yang refleksif.

Contoh 2

Jika A = { garis-garis pada bidang V}, dan suatu relasi R pada A yang ditentukan oleh kalimat terbuka "x sejajar y", maka relasi R adalah suatu relasi yang refleksif sebab untuk setiap $g \in A$ bakan berlaku g//g.

Contoh 3

Jika A = {manusia}, dan suatu relasi R pada A yang ditentukan oleh kalimat terbuka "x sebaya y", adalah relasi refleksif sebab setiap manusia akan sebaya dengan dirinya sendiri.

B. Simetrisitas Relasi

1. Relasi Simetri

Relasi R pada himpunan A dikatakan relasi yang simetris, jika untuk setiap $a,b \in A$ jika $(a,b) \in R$ maka $(b,a) \in R$

Contoh 1.

Jika A = {1, 2, 3, 4} suatu relasi R pada A disajikan dengan himpunan pasangan berurut R = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2)}, maka relasi R adalah relasi yang simetris.

Contoh 2

Jika A = { garis-garis pada bidang V}, dan relasi R pada A didefinisikan oleh kalimat terbuka "garis a sejajar garis b", relasi R ini adalah relasi yang simetris sebab untuk setiap pasang garis $a,b \in A$, akan berlaku : a//b $\Rightarrow$ b//a.

Contoh 3

Jika A = { manusia}, dan relasi R pada A yang ditentukan dengan kalimat terbuka "x bersaudara kandung y", adalah relasi simetris, sebab setiap pasangan manusia jika a bersaudara kandung b, maka b pasti akan bersaudara kandung dengan a.

2. Relasi Anti Simetris.

Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan sebagai **relasi yang anti simetris** jika dipenuhi $(a,b) \in R$ dan $(b,a) \in R$ maka berarti a = b

Contoh 1

Misalkan N = { bilangan asli }, dan relasi R pada N yang didefinisikan oleh "x habis dibagi y”, maka relasi R adalah relasi yang anti simetris sebab jika a habis dibagi b dan b habis dibagi a berarti a = b.

Contoh 2

Relasi R = {1,3), (4,2), (4,4), (2,4)} pada A = { 1, 2, 3, 4} bukan suatu relasi yang anti simetris sebab $(4,2) \in R$ dan $(2,4) \in R$.

Contoh 3

Misalkan A adalah suatu keluarga himpunan, dan relasi R pada A yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "x adalah himpunan bagian dari y", maka R adalah relasi anti semetris sebab untuk tiap dua himpunan jika

$A \subset B$ dan $B \subset A$ maka A = B

C. Transitifitas Relasi

1. Relasi Transitif

Relasi R pada himpunan A dikatakan suatu relasi yang **transitif** jika untuk setiap tripel $a, b, c \in A$ dipenuhi :

$$(a, b) \in R \text{ dan } (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

Contoh 1

Relasi R = { (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (1,3),(3,1),(3,3),(2,3),(3,2),(3,3)} pada A = {1,2,3} adalah suatu relasi yang transitif..

Contoh 2

Jika A = { garis-garis pada bidang V}, dan suatu relasi R pada A yang didefinisikan oleh kalimat terbuka " garis x sejajar y" adalah relasi yang transitif , sebab untuk setiap tripel garis $a, b, c \in A$ akan dipenuhi :

a//b dan b//c $\Rightarrow$ a//c

Contoh 3

Jika A = {manusia} dan relasi R pada A yang didefinisikan oleh "x adalah adik kandung y", maka relasi R adalah transitif sebab untuk setiap tiga orang anak manusia jika A adik kandung B, sedangkan B adalah adik kandung C maka tentulah A itu adik kandung C.

D. Ekuivalensi.

Relasi R pada himpunan A dikatakan sebagai **relasi equivalen ,** jika R memenuhi sifat- sifat sebagai berikut :

a.R adalah refleksif, yaitu untuk setiap $a \in A, (a, a) \in R$

b.R adalah simetris, yaitu untuk setiap $a, b \in A, (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

c.R adalah transitif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in A, (a, b) \in R \,\&\, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

Contoh 1

Jika **R =** { bilangan real} dan relasi R pada **R** yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "x = y", maka relasinya adalah relasi ekuivalen sebab untuk setiap bilangan real akan dipenuhi :

(1) a = a (relasi refleksif)

(2) Jika a = b maka b = a (relasi simetris)

(3) Jika a = b dan b = c maka a = c (relasi transitif)

Contoh 2

Jika A = { segitiga-segitiga pada bidang Euclid}, dan relasi R pada A didefinisikan oleh kalimat terbuka "x kongruen dengan y", adalah relasi yang ekuivalen sebab untuk setiap segitiga yang terletak pada suatu bidang,

(1) $\Delta ABC \cong \Delta ABC$

(2) Jika $\Delta ABC \cong \Delta KLM$ maka $\Delta KLM \cong \Delta ABC$

(3) Jika $\Delta ABC \cong \Delta KLM \,\&\, \Delta KLM \cong \Delta PQR$ maka $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

Contoh 3

Jika A = { manusia} dan relasi R pada A yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "x sebaya dengan y" adalah relasi ekuivalen sebab, untuk setiap manusia P, Q dan R:

(1) P sebaya dengan dirinya sendiri.

(2) Jika P sebaya dengan Q maka pastilah Q sebaya dengan P.

(3) Jika P sebayagan Q dan Q sebaya dengan R pastilah antara P sebayaR.