PPPPTK Matematika

Kode Dok : F-PRO-002
Revisi : 0

BAHAN AJAR DIKLAT PENGEMBANG MATEMATIKA SMA JENJANG DASAR

KALKULUS

Oleh :

Drs. Setiawan, M.Pd.

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
2010

DAFTAR ISI

PETA KOMPETENSI

KALKULUS DASAR

1. **Kompetensi**

   Memiliki kemampuan untuk mengembangkan kompetensi siswa dalam menggunakan konsep-konsep limit fungsi, turunan dan integral, serta menggunakannya dalam pemecahan masalah.

2. **Sub Kompetensi**

   - Mampu mengembangkan keterampilan siswa dalam menentukan limit suatu fungsi dengan pendekatan intuitif dan menggunakannya dalam pemecahan masalah.
   - Mampu mengembangakan ketrampilan siswa dalam menentukan turunan suatu fungsi, maksimum dan minimum dan memecahkan persoalan maksimum dan minimum
   - Mampu mengembangakan ketrampilan siswa dalam menentukan integral tentu dan tak tentu dan menggunakannya dalam pemecahan masalah

3. **Lingkup Materi**

   - Limit fungsi baik secara intuitif maupun formal
   - Fungsi turunan, perilaku fungsi, maksimum dan minimum
   - Integral baik integral tentu maupun integral tak tentu

SKENARIO PEMBELAJARAN

Pendahuluan dan Apersepsi

- Tujuan
- Ruang Lingkup
- Pengetahuan prasyarat nilai-nilai tak tentu

Penyampaian Konsep Limit Fungsi

- Memahami limit fungsi secara intuitif
- Berdiskusi melacak limit fungsi yang dahasilkan dari pendekatan intuitif dengan pendekatan formal
- Merefleksi diri dengan Latihan 1

Melanjutkan limit fungsi trigonometri , eksponen dan logaritma, dan evaluasi diri mengenai limit

- Berdiskusi pemecahan masalah tentang limit fungsi-fungsi aljabar, trigonometri, eksponen dan logaritma
- Refleksi diri dengan Latihan 3

Informasi diskusi eksplorasi deferensial dan perilaku fungsi, nilai maksimum dan minimum dan evaluasi diri

- Setelah berhasil dengan refleksi Latihan 3
- Diskusi perilaku fungsi, seperti fungsi naik, turun, stasioner
- Refleksi diri dengan Latihan 4

Informasi, diskusi dan eksplorasi tentang Integral, diawali konsep dasarnya, integral tak tentu dan integral tentu dan refleksi diri

Penutup

- Kesimpulaan
- Penugasan

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang.

Mengacu pada Permendiknas no 22 tahun 2006 tentang Standar Isi, disebutkan bahwa mata pelajaran Matematika bertujuan agar peserta didik memiliki kemampuan sebagai berikut.

1. Memahami konsep Matematika, menjelaskan keterkaitan antar konsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma, secara luwes, akurat, efisien, dan tepat, dalam pemecahan masalah
2. Menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika
3. Memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh.
4. Mengkomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah
5. Menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah

Memperhatikan butir-butir tujuan di atas, maka kedudukan kalkulus dalam Standar Isi Mata Pelajaran Matematika, akan menjadi cukup sentral, sehingga materi ini harus mendapatkan perhatian yang cukup serius menyangkut masalah penguasaan materi, pemilihan metoda pembelajaran yang pas dan penentuan strategi serta teknik mengajar yang serasi.

Namun demikian melihat kenyataan di lapangan baik lewat monitoring dan evaluasi bagi para alumnus penataran di P4TK Matematika maupun diskusi-diskusi di MGMP, ternyata materi ini kadang-kadang masih dijumpai kendala di lapangan. Oleh karena itu pembahasan mengenai materi kalkulus ini perlu mendapatkan porsi yang memadai pada penataran-penataran guru matematika, terutama yang diselengggarakan oleh P4TK Matematika Yogyakarta.

Di samping itu kalkulus merupakan salah satu materi yang memiliki cakupan aplikasi yang sangat luas, baik dalam tubuh matematika itu sendiri, maupun dalam cabang-cabang lmu-ilmu yang lain, seperti dalam bidang sains, teknologi, ekonomi dan sebagainya. Oleh karena itu para siswa terlebih-lebih guru matematika SMA harus mendapat bekal materi kalkulus ini sebaik-baiknya.

B. Tujuan Penulisan

Tulisan ini disusun dengan maksud untuk memberikan tambahan pengetahuan berupa wawasan kepada guru matematika SMA dengan harapan :

1. lebih memahami materi kalkulus untuk SMA dan beberapa pengembangannya, terutama masalah limit fungsi, integral dengan substitusi dan integral parsial yang ternyata nasih banyak dijumpai kendala di lapangan.
2. dapat digunakan sebagai salah satu referensi masalah-masalah pengajaran matematika SMA pada pertemuan-pertemuan MGMP Matematika SMA di daerah.
3. memperluas wawasan keilmuan dalam matematika, dan khusunya masalah kalkulus SMA, sehingga guru dapat memilih strategi pembelajaran yang sesuai dengan kondisi di lapangan, sehingga mudah diterima oleh siswa.

C. Sasaran

Tulisan ini disusun untuk menjadikan bahan penambah wawasan :

a. para peserta penataran diklat guru-guru pengembang matematika SMA, oleh P4TK Matematika Yogyakarta.
b. para rekan guru matematika SMA pada umunya dan juga para pemerhati pengajaran matematika.

D. Ruang Lingkup Penulisan.

Ruang lingkup bahan penataran ini meliputi

a. limit fungsi dan kontinuitas.
b. kalkulus diferensial.
c. kalkulus integral

E. Pedoman Penggunaan.

Bahan penataran ini merupakan salah satu acuan dalam memahami materi tentang kalkulus, untuk memahami isi paket ini dengan baik hendaknya terlebih dulu dicermati uraian materi beserta contoh-contohnya dengan seksama, kemudian baru mencoba soal-soal latihan yang telah disediakan, sesuai dengan topik yang tengah dipelajarinya.

BAB II
LIMIT FUNGSI

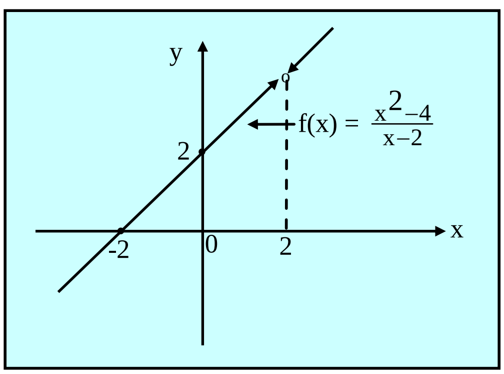
A. Latar Belakang

Kalkulus adalah salah satu cabang dari matematika yang sangat penting dan banyak diterapkan secara luas pada cabang-cabang ilmu pengetahuan yang lain, misalnya pada cabang sains dan teknologi, pertanian, kedokteran, perekonomian dan sebagainya. Pada makalah ini akan dibahas tiga pokok bahasan, pokok utama dari kalkulus yakni limit fungsi, diferensial fungsi dan integral fungsi. Sebenarnya ada dua cabang dalam kalkulus itu sendiri, yakni kalkulus diferensial dan kalkulus integral, dan jika diperhatikan inti dari pelajaran kalkulus adalah memakai dan menentukan limit suatu fungsi. Bahkan secara ekstrim kalkulus dapat didefinisikan sebagai pengkajian tentang limit. Oleh karena itu pemahaman tentang konsep dan macam-macam fungsi diberbagai cabang ilmu pengetahuan serta sifat-sifat dan operasi limit suatu fungsi merupakan syarat mutlak untuk memahami kalkulus diferensial dan kalkulus integral.

B. Limit Fungsi Aljabar

1. Limit Fungsi secara Intuitif.

Perhatikan contoh di bawah ini



Gb.1.1

Pandanglah fungsi

$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ dengan domain

$D_f = \{x \mid x \in R, x \neq 2\}$ untuk x = 2, jika dicari nilai fungsi

$f(2) = \dfrac{0}{0}$ = tidak tentu .

Kita cari nilai-nilai f(x) untuk x mendekati 2.

Kita dapat memperhatikan nilai fungsi f(x) di sekitar x = 2 seperti tampak pada tabel. berikut :

x	1,90	1,99	1,999	1,999	…	2	…	2,001	2,01	2,1
f(x)	3,90	3,99	3,999	3,999	…	?	…	4,001	4,01	4,1

Dari tabel di atas dapat disimpulkan bahwa untuk x mendekati 2 baik dari kiri maupun dari kanan, nilai fungsi tersebut makin mendekati 4, dan dari sini dikatakan bahwa limit f(x) untuk x mendekati 2 sama dengan 4, dan ditulis

$$\lim_{n \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$$

Dari pengertian inilah yang disebut pengertian limit secara intuitif, sehingga :

Definisi limit secara intuitif, bahwa $\lim\limits_{n \to c} f(x) = L$ artinya bahwa bilamana x dekat tetapi berlainan dari c, maka f(x) dekat ke L.

2. Limit Fungsi Secara Formal

Secara matematis dapat dimaklumi bahwa banyak yang berkeberatan dengan definisi limit secara intuitif di atas, yaitu penggunaan istilah "dekat". Apa sebenarnya makna dekat itu ?. Seberapa dekat itu dapat dikatakan "dekat" ?.

Untuk mengatasi masalah di atas Augustin-Louis Cauchy berhasil menyusun definisi tentang limit seperti di bawah ini yang masih kita gunakan sampai sekarang.

Pengertian limit secara intuitif di atas jika diberi definisi formal adalah sebagai berikut.

Definisi :

Dikatakan $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, adalah bahwa untuk setiap ε > 0 yang diberikan berapapun kecilya, terdapat δ > 0 yang berpadanan sedemikian hingga $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$ untuk setiap $0 < \lvert x - c \rvert < \delta$.

Dengan menggunakan definisi limit di atas dapat dibuktikan teorema-teorema pokok tentang limit suatu fungsi sebagai berikut :

1. $\lim\limits_{x \to c} k = k$, jika k suatu konstanta.
2. $\lim\limits_{x \to c} (ax + b) = ac + b$
3. $\lim\limits_{x \to c} k\, f(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to c} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \pm \lim\limits_{x \to c} g(x)$
5. $\lim\limits_{x \to c} f(x).g(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x). \lim\limits_{x \to c} g(x)$
6. Hukum substitusi :
   Jika $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$ dan $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(L)$, maka $\lim\limits_{x \to c} f(g(x)) = f(L)$
7. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{L}$ jika $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$ dan $L \neq 0$.
8. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$, jika $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$.
9. Teorema Apit :
   Misalkan f(x) ≤ g(x) ≤ h(x) pada setiap interval yang memuat c dan dipenuhi :
   $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} h(x) = L$ maka $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$.

Di bawah ini diberikan contoh dua bukti limit fungsi secara formal, sedang rumus-rumus limit yang lain upayakan untuk dapat membuktikan sendiri :

1. Buktikan $\lim\limits_{k \to c} k = k.$

   Bukti : Untuk setiap bilangan positip ε > 0 berapapun kecilnya akan didapat δ > 0 sedemikian untuk setiap x pada |x – c| < δ dipenuhi |k – k| < ε. Dari |k – k| = 0, maka berapapun nilai δ > 0 yang diambil yang menyebabkan |x – c| < δ akan berakibat |k – k| < ε.

2. Buktikan $\lim\limits_{x \to c} (ax + b) = ac + b.$

   Bukti :

   Untuk membuktikan teorema ini, berarti jika diberikan suatu ε > 0 betapapun kecilnya, akan ditemukan δ > 0 sedemikian hingga 0 < |x – c| < δ ⇒ |(ax + b) – (ac + b)| < ε.

   Sekarang dari |(ax + b) – (ac +b)| = |ax – ac| = |a(x – x)| ≤ |a|| x – c|.

   Kelihatan bahwa $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ akan memenuhi persyaratan di atas.

   Sehingga jika diberikan ε > 0 betapapun kecilnya dan dipilih $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ maka

   0 < |x – c| < δ menunjukkan :

   $|(ax + b) - (ac - b)| = |ax - ac| = |a(x - c)| < |a||x - c| < |a| \dfrac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$

   Dengan demikian terbuktilah teoremanya.

Untuk sifat-sifat yang lain, upayakan untuk membuktikan dengan definisi limit secara formal sendiri-sendiri!

Contoh 1.

Hitung $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 8)$

Jawab : Dengan menggunakan teorema substitusi

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x + 8) = 2^2 - 3.2 + 8 = 6$$

Contoh 2.

Tentukan $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 + x - 12}{x + 4}$

Jawab : Faktorkan dulu sebab jika disubstitusikan langsung diperoleh $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to -4} \frac{x^2+x-12}{x+4} = \lim_{x\to -4} \frac{(x+4)(x-3)}{(x+4)}$$ karena $x \neq -4$ maka pecahan dapat disederhana-kan.

$$= \lim_{x\to -4} x-3$$

$$= -4-3 = -7$$

Contoh 3.

Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{\sqrt{4}-2}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2}$$ karen $x \neq 2$

$$= \lim_{x\to 4} (\sqrt{x}+2)$$

$$= \sqrt{4}+2 = 4$$

Cara ii, misalkan $\sqrt{x} = y \to x = y^2$

untuk $x \to 4$ maka $y \to 2$, sehingga soal di atas menjadi

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{y\to 2} \frac{y^2-4}{y-2}$$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{(y+2)(y-2)}{(y-2)}$$

$$= 2+2 = 4$$

Contoh 4 :

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{x-2}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2x})}{(x-2)} . \frac{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x}}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(2+x)-(2x)}{(x-2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{(x-2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$$

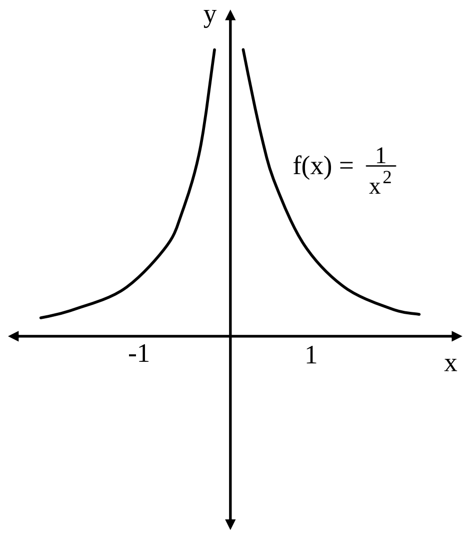
$$= \lim_{x\to 2} \frac{-1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2x}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} = -\frac{1}{4}$$

3. Pengertian Limit di Tak Hingga.

Perhatikan fungsi $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ yang domainnya semua bilangan real yang tidak nol. Jika kita cari nilai-nilai fungsi dekat dengan 0.

x	$\frac{1}{x^2}$
1	1
0,1	100
0,01	10.000
0,001	1000 10^6
0,0001	10.000 10^8
↓	↓
0	besar sekali disebut tak hingga
↑	↑
-0,0001	10.000 10^8
-0,001	1000 10^6
-0,01	100 10.000
-0,1	10 100
-1	1



Apabila x suatu bilangan baik positip maupun negatif yang sangat kecil maka nilai $\frac{1}{x^2}$ menjadi sangat besar, semakin dekat x dengan nol, maka nilai $\frac{1}{x^2}$ menjadi semakin besar sekali, sehingga dikatakan $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

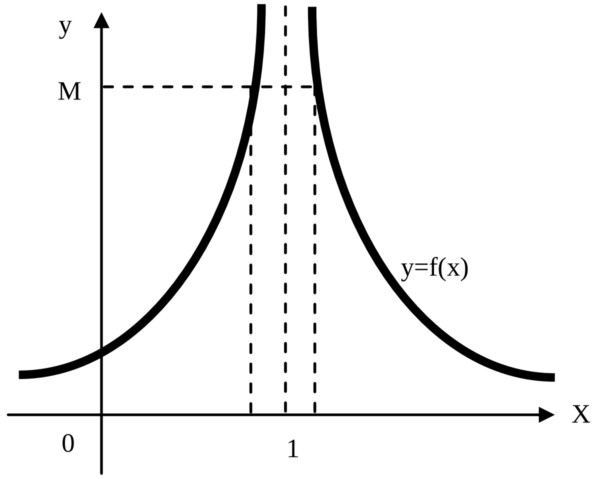
Catatan :

Simbol ∞ dibaca "tak hingga" digunakan untuk melambangkan bilangan yang sangat besar yang tak dapat ditentukan besarnya, tetapi simbol ini tidak menunjuk suatu bilangan real yang manapun.

Pengertian ketak hinggaan sebagaimana dipaparkan secara intuitif di atas secara formal didefinisikan sebagai berikut:

Definisi :

> Fungsi f(x) mendekati tak hingga untuk $x \to c$ apabila untuk setiap bilangan positip M betapapun besarnya, adalah mungkin menemukan bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap x selain c jika dipenuhi $|x - c| < \delta$ akan berakibat $|f(x)| > M$ dan ditulis $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$



Contoh 1 :
Buktikan bahwa $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\sim$
Bukti :
Untuk membuktikan itu berarti untuk setiap M > 0 yang diberikan betapapun besarnya adalah mungkin menemukan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap x yang memenuhi $|x - 1| < \delta$ akan diperoleh $\frac{1}{(1-x)^2} > M$.

Dari $\frac{1}{(1-x)^2} > M$. berarti $(1- x)^2 < \frac{1}{M}$.

Sehingga $|1 - x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Jika diambil $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, berarti untuk setiap x pada $|x - 1| < \frac{1}{\sqrt{M}}$ akan dipenuhi

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 < \frac{1}{M}$

$\Leftrightarrow (1 - x)^2 < \frac{1}{M}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2} > M$.

Dari pertidaksamaan terakhir ini menunjukkan bahwa $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

Contoh 2.
Tentukan $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}$

Jawab : Secara intuitif jika x dekat dengan 1 maka x – 1 akan mendekati 0, sehingga dapat difahami (secara intuitif) bila $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} = \infty$

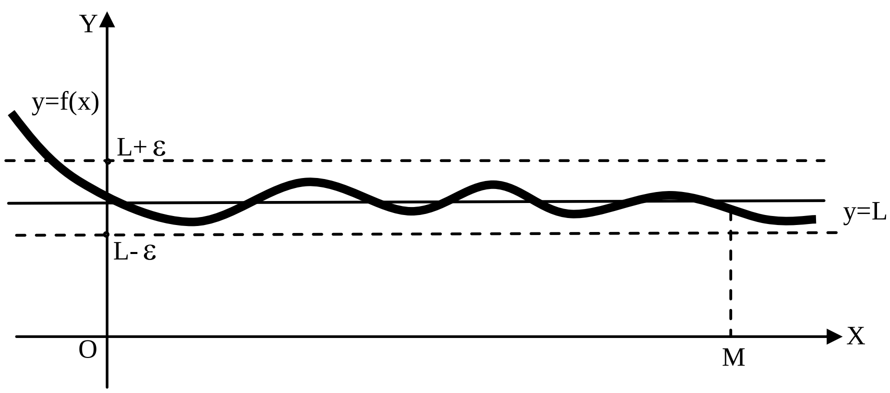
Dan jika ingin dibuktikan secara formal berarti untuk setiap bilangan M > 0 betapapun besarnya, adalah mungkin ditemukan $\delta > 0$, sedemikian hingga untuk setiap x pada $|x - 1| < \delta$ akan dipenuhi $\left|\dfrac{x}{x-1}\right| > M$.

Sedangkan limit fungsi untuk x yang bernilai besar dapat didefinisikan sebagai berikut :

Definisi :

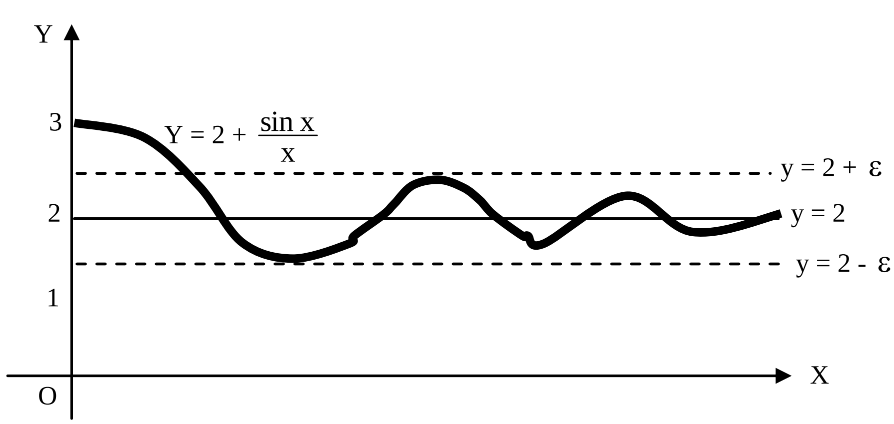
> Jika f(x) terdefinisi untuk x yang bernilai besar, kita katakan bahwa f(x) mendekati L sebagai limit untuk x mendekati tak hingga, dan ditulis :
> $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, bahwa apabila diberikan $\varepsilon > 0$ maka akan ditemukan suatu bilangan M sedemikian hingga dipenuhi $|f(x) - L| < \varepsilon$ apabila $x > M$.

Ilustrasi geometris dari pengertian di atas adalah sebagai berikut :



Contoh 1.

Pandanglah fungsi $f(x) = 2 + \dfrac{\sin x}{x}$



Grafiknya beroskilasi terhadap garis y = 2.

Amplitudo dari oskilasinya semakin kecil menuju nol.

Untuk x $\to \infty$, dan kurvanya terletak di antara y = 2 + ε dan y = 2 - ε jika x > M

Atau dengan kata lain :

Jika x besar, $\frac{\sin x}{x} \to 0$ dan f(x) $\to$ L = 2

Contoh 2

Tentukan $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+3x})$

Jawab :

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+3x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+3x})(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+3x})}{(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+3x})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+2x)-(x^2+3x)}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+3x}}$$

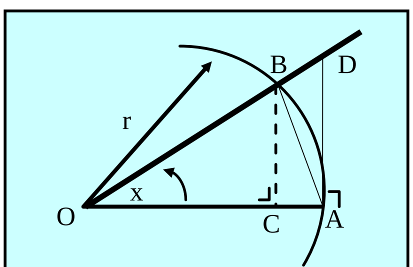
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+3x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1+\frac{3}{x}}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

C. Limit Fungsi Trigonometri



Gb.1.3

Misalkan x dalam radian, dan $0 < x < \frac{\pi}{2}$, maka

BC = r sin x dan AD = r tan x.

Untuk mencari luas sektor ⊙ AOB

$$\frac{\text{Luas sektor ⊙ AOB}}{\text{Luas seluruh lingkaran}} = \frac{x}{2\pi}$$

$$\frac{\text{Luas sektor ⊙ AOB}}{\pi r^2} = \frac{x}{2\pi}$$

Sehingga luas sektor ⊙ AOB = $\frac{x}{2\pi}.\pi r^2 = \frac{1}{2} r^2 x$

Dari bangun di atas diperoleh :

Luas Δ AOB < luas juring AOB < luas Δ AOD

½ . OA . BC < ½ r^2x < ½ . OA . AD
½ . r . r sin x < ½ r^2x < ½ . r . r tan x
½ r^2 sin x < ½ r^2x < ½ r^2 tan x
sin x < x < tan x ………………….. (i)

Dari (i) diperoleh :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} 1 \le \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \le \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$1 \le \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{1} = 1$$

Jadi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

Dari sini dapat dikembangkan :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Dan untuk $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x.\cos x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}. \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1.1 = 1$$

Demikian juga dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

Kesimpulan :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

Contoh

Hitunglah :

a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}$ b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{5x}$ c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

Penyelesaian :

a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

$$= \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right).\dfrac{3}{5}$

$= 1.\dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5}$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan 3x}{3x}\right)\left(\dfrac{5x}{\sin 5x}\right).\dfrac{3}{5}$

$= 1.1.\dfrac{3}{5}$

$= \dfrac{3}{5}$.

D. Limit Fungsi Eksponensial

a. Bilangan e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{1}.\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}.\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-1)}{3!}.\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)+\ \ldots\ +\frac{1}{n^n}\right)$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ \ldots$$

Jika diambil sampai sepuluh tempat desimal diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182884$$

Nilai limit ini disebut bilangan e atau bilangan Euler (diambil nama sang penemu yaitu Leonard Euler matematikawan Austria 1707 – 1783).

Sehingga :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Limit ini dapat dikembangkan untuk setiap x $\in$ R dipenuhi

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Jika disubstitusikan u = $\frac{1}{x}$ maka diperoleh rumus

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

Contoh tentukan $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+3}$

Jawab : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} . \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}.2}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{2} . \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3}$$

$$= e^2 . (1 + 0)^3$$

$$= e^2.$$

Logaritma yang mengambil e sebagai bilangan pokok disebut logaritma naturalis atau logaritma Napier, dan ditulis dengan notasi “ln”, sehingga ln x = ${}^{e}\log x$.

Dari $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, maka ${}^{a}\log\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = {}^{a}\log e$

$$\lim_{x\to 0}\ {}^{a}\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = {}^{a}\log e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{{}^{a}\log(1+x)}{x} = \frac{\ln e}{\ln a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{{}^{a}\log(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \qquad \text{………..(i)}$$

Misalkan ${}^{a}\log(1 + x) = y$

$1 + x = a^y \rightarrow x = a^y - 1$

Untuk $x \rightarrow 0$, maka $a^y \rightarrow 1$ yang berarti $y \rightarrow 0$, sehingga persamaan (i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{a^y - 1} = \frac{1}{\ln a}$$

Sehingga : $\lim\limits_{y\to 0}\frac{a^y - 1}{y} = \ln a$

Atau secara umum : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a}$

Jika disubstitusikan a dengan e

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \ln e$ atau $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1}$

Contoh : Tentukan $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

Jawab : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-1-e^{bx}+1}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{ax}-1}{x} - \frac{e^{bx}-1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}.a - \frac{e^{bx}-1}{bx}.b\right)$$

$= 1 \,.\, a - 1 \,.\, b$

$= a - b$

Latihan 1

Tentukan nilai limitnya

1. $\lim\limits_{x\to -2} (x^2-7x+4)$
2. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2}{x}+x\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{9+x^2}}{x-3}$
4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$
5. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^5-1}{x^2+x+1}$
6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$
7. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3}$
8. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-3x+10}{x+2}$
9. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$
10. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{\sqrt{x}-5}$
11. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{x-2}$
14. $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ (misal : $\sqrt[3]{x} = y^2$)
15. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$
16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{x}$
17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\sqrt{5}-\sqrt{5-x}}$
18. $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})$
19. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
20. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$
21. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(1+2+3+...+n)}{n^2}$
22. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(1+3+5+7+...+(2n-1)}{n^2+2}$
23. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+...+\dfrac{1}{2^n}\right)$
24. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{7}{n^2}+...+\dfrac{3n-2}{n^2}\right)$

12. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x-2}-\sqrt{3x-5}}{x-3}$

13. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-1}}{2x-3-\sqrt{x}}$

25. Hitung $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}$

Petunjuk : kuadratkan kedua Ruas !

26. Tentukan limit U_n dari barisan

0,3 ; 0,33 ; 0,333 ; 0,3333

27. Tentukan limit U_n dari barisan
0,2 , 0,23 , 0,233 , 02333 , …

28. Tentukan limit suku U_n dari barisan

$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}},\ ...$

29. Tentukan limit suku U_n dari barisan

$\sqrt{6},\ \sqrt{6\sqrt{6}},\ \sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6}}},\ \sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6}}}},\ ...$

30. Tentukan limit U_n dari barisan berikut

$\dfrac{2}{1},\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{6}{5},\ ...,\ \dfrac{2n}{2n-1},\ ...$

31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x}$

32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$

33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2}$

34. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

35. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x$

36. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$

37. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x}$

38. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\cos x - \sin x}{\cos x - 1 + \sin x}$

39. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\tan \pi x}{x+2}$

40. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1-\tan x}$

41. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}$

47. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4^x-2^x}{3x}$

48. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{x}$

49. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{2x}-b^{3x}}{x}$

50. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$

42. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}\right)^{x}$

43. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x}$

44. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x}$

45. $\lim\limits_{x\to 0}\ (1+2x)^{\frac{1}{x}}$

46. $\lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{5^x-4^x}{x}$

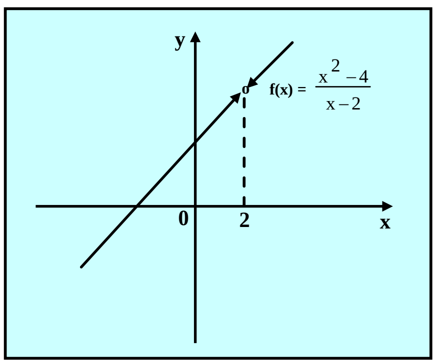
47. $\lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{4^x-2^x}{3x}$

48. $\lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{x}$

49. $\lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{a^{2x}-b^{3x}}{x}$

50. $\lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$

E. Kontinuitas



Gb.1.4

Perhatikan fungsi pada bilangan real f(x) = $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ seperti pada grafik di samping.

Untuk x = 2 diperoleh f(2) = $\dfrac{0}{0}$ (tak tentu) sehingga grafiknya terputus di x = 2 dalam hal ini dikatakan f(x) diskontinu di x = 2.

Sedangkan untuk interval $\{x|x < 2, x \in R\}$ dan interval $\{x \mid x > 2, x \in R\}$ grafiknya berkesinambungan, dalam hal ini dikatakan f(x) kontinu di $x \neq 2$.

Secara formal suatu fungsi dikatakan kontinu di x = c, jika dipenuhi :

a. $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ ada

b. f(c) ada

c. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

Jika pada suatu fungsi f(x) diskontinu di x = c, maka dapat dibuat sedemikian hingga $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$, maka dikatakan diskontuinitas di x = c ini dapat dihapuskan.

Contoh :

Tentukan diskontuinitas fungsi pada bilangan real f(x) = $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

Jawab : fungsi rasional di atas akan diskontinu jika penyebutnya nol atau

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ atau $x = 2$

Sehingga f(x) diskontinu di x = -2 atau x = 2.

Selanjutnya untuk $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}$

$$= \frac{12}{4} = 3$$

Diskontinu di x = 2 dapat dihapuskan dengan menetapkan definisi f(2) = 3.
Selanjutnya untuk x = -2 diperoleh

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x+4}{x+2}$$

$= \dfrac{\to 4}{\to 0} = \infty$, sedangkan f(-2) = $\dfrac{(-2)^3-8}{(-2)^2-4} = \dfrac{-16}{0}$ tidak terdefinisi.

Sehingga diskontinu di x = -2 tidak dapat dihapuskan.

Latihan 2

Selidiki kontinuitas fungsi-fungsi berikut

1. $f(x) = x^2 + x$ di $x = -1$
2. $f(x) = 4x^2 - 2x + 12$ di $x = 2$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ di $x = -1$
4. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2}$ di $x = 2$
5. $f(x) = \dfrac{6t-9}{t-3}$ di $t = 3$
6. $f(x) = \begin{cases} -3x+4 & \text{untuk } x \le 2 \\ -2 & \text{untuk } x > 2 \end{cases}$ di x = 2
7. Di titik mana saja $f(x) = \dfrac{5x+4}{x^2-3x-10}$ diskontinu dan selidiki macam diskontinuitasnya.
8. Di titik mana saja $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ diskontinu dan selidiki macam diskontinuitasnya.
9. Dengan grafik di titik mana saja (jika ada) fungsi ini diskontinu

   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{untuk } x < 0 \\ x^2 & \text{untuk } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{untuk } x > 1 \end{cases}$$

10. Tentukan a dan b agar fungsi :

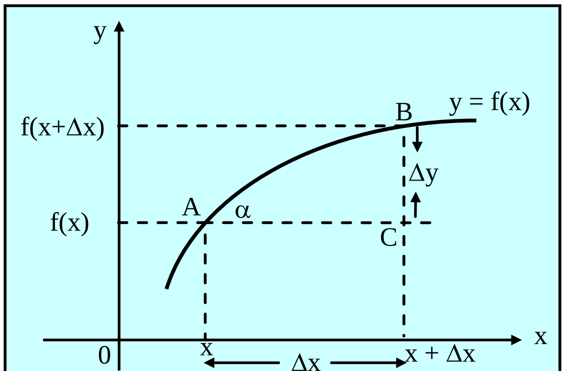
    $f(x) = \begin{cases} x^2-x+3 & \text{untuk } x < -2 \\ a & \text{untuk } x = 2 \\ bx+1 & \text{untuk } x > -2 \end{cases}$ kontinu di x = 2

BAB III
TURUNAN SUATU FUNGSI

A. Turunan Fungsi Aljabar

Sesuatu yang bersifat tetap di dunia ini adalah perubahan itu sendiri, banyak kejadian-kejadian yang melibatkan perubahan. Misalnya gerak suatu obyek (kendaraan berjalan, roket bergerak, laju pengisian air suatu tangki), pertumbuhan bibit suatu tanaman, pertumbuhan ekonomi, inflasi mata uang, berkembangbiaknya bakteri, peluruhan muatan radioaktif dan sebagainya.

Studi tentang garis singgung dan penentuan kecepatan benda bergerak yang dirintis oleh Archimedes (287 – 212 SM), Kepler (1571 – 1630), Galileo (1564 – 1642), Newton (1642 – 1727) dan Leibniz (1646 – 1716) dapat dipandang sebagai peletak dasar dari kalkulus diferensial ini. Namun para ahli berpendapat bahwa Newton dan Leibniz-lah dua orang yang paling banyak andilnya pada pertumbuhan kalkulus. Konsep dasar dari turunan suatu fungsi adalah laju perubahan nilai fungsi.



Gb.2.1

Perhatikan fungsi y = f(x) pada domain (x, x + Δx) nilai fungsi berubah dari f(x) pada x sampai dengan f(x + Δx) pada x + Δx.

$$\begin{array}{rl} y + \Delta y &= f(x + \Delta x) \\ y &= f(x) \\ \hline \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \end{array} \; -$$

Δy : disebut diferensi antara f(x + Δx) dengan f(x)

Δx : disebut diferensi x

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ disebut hasil bagi diferensi.

Jika B bergerak sepanjang kurva y = f(x) mendekati A, maka diperoleh limit :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Nilai limit ini disebut derivatif f (turunan, laju perubahan nilai fungsi, hasil bagi diferensial) dari y = f(x), dan biasa ditulis dengan notasi $\dfrac{dy}{dx}$ atau y′. (Notasi $\dfrac{dy}{dx}$ dan dibaca “dy dx” inilah yang kita kenal dengan istilah notasi Leibniz)

Jadi : $\dfrac{dy}{dx} = y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Secara geometris, kita lihat bahwa perbandingan diferensi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ adalah gradien tali busur AB = tan α. Jika $\Delta x \to 0$ maka tali busur AB akan menjadi garis singgung di A sehingga :

$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ adalah gradien garis singgung pada kurva y = f(x) di (x, f(x)).

Contoh 1

Diketahui kurva dengan persamaan $y = x^2 + 2x$.

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dan persamaan garis singgung kurva di x = 1.

Jawab :

$$y = x^2 + 2x$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x)$$

$$= x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x$$

$$\Delta y = (2x + 2)\,\Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x+2)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{(2x+2) + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x+2)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} ((2x+2) + \Delta x)$$

$$= 2x + 2$$

Untuk x = 1 $\to$ gradien garis singgung m = $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 2.1 + 2 = 4$

x = 1 $\to$ y = $1^2 + 2.1 = 3$ $\to$ titik singgung (1, 3).

Sehingga persamaan garis singgungnya :

$$y - 3 = 4(x - 1)$$

$$y = 4x - 1$$

Contoh 2

Tentukan fungsi turunan dari f(x) = $\frac{3}{x^2}$

Jawab :

$$y = \frac{3}{x^2}$$

$$y + \Delta y = \frac{3}{(x+\Delta x)^2}$$

$$\Delta y = \frac{3}{(x+\Delta x)^2} - \frac{3}{x^2} = \frac{3.x^2 - 3(x+\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2.x^2}$$

$$= \frac{-6x.\Delta x - 3\Delta x^2}{(x+\Delta x)^2.x^2} = \frac{\Delta x(-6x - 3\Delta x)}{(x+\Delta x)^2\,x^2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6x - 3\Delta x}{(x+\Delta x)^2 . x^2}$$

Sehingga $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-6x - 3\Delta x}{(x+\Delta x)^2 . x^2}$

$$= \frac{-6x}{x^2 x^2} = \frac{-6}{x^3}$$

Rumus-rumus turunan (derivatif) fungsi y = f(x).

1) Fungsi konstanta y = f(x) = c

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

$$\boxed{f(x) = c \ \rightarrow \ f'(x) = 0}$$

2) Derivatif f(x) = x^n

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}.\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n) - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} .\Delta x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} .\Delta x^2 + \ldots + (\Delta x)^{n-1} \right)$$

= nx^{n-1}.

$$\boxed{f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}}$$

3) Jika c suatu konstanta dan y = c f(x), maka

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= c.f'(x) = c.\frac{dy}{dx}$$

Contoh 2 : y = $4x^5 \Rightarrow y' = 4.\frac{dy}{dx}(x^5) = y.5x^4 = 20x^4$.

4) Jika u = f(x) dan v = g(x), maka turunan fungsi y = f(x) ± g(x) dapat dicari sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - (f(x) + g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right)$$

$= f'(x) + g'(x)$.

Dengan jalan yang sama dapat ditunjukkan bahwa

$y = f(x) - g(x) \rightarrow y' = f'(x) - g'(x)$

Jadi :

$$\boxed{y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)}$$

5) Jika $u = f(x)$ dan $v = g(x)$ dan $y = u.v$ maka

$y = u.v = f(x) . g(x)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x+\Delta x) + f(x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\left(\frac{f(x+\Delta x - f(x)}{\Delta x}\right).g(x+\Delta x) + f(x)(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right)$$

$= f'(x).g(x) + f(x) . g'(x)$

$= u'v + uv'$

Jadi $\quad y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$

6) Jika $u = f(x)$ dan $v = g(x)$, sedemikian hingga $g(x) \neq 0$ pada intervalnya dan $y = \frac{u}{v} = \frac{f(x)}{g(x)}$, maka

$$y' = \lim_{\Delta x \to x} \frac{(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)})}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to x} \frac{f(x+\Delta x).g(x) - f(x).g(x+\Delta x)}{\Delta x.g(x+\Delta x).g(x)}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to x} \frac{f(x+\Delta x).g(x) - f(x).g(x) - f(x).g(x+\Delta x) + f(x).g(x)}{\Delta x.g(x+\Delta x).g(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to x} \frac{(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}).g(x) - f(x)(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x).g(x)}$$

$$= \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x)^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Jadi $\quad y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Contoh 3

Tentukan f′(x) untuk f(x) = $\dfrac{2x+3}{x^2}$

Jawab : f(x) = $\dfrac{2x+3}{x^2}$ maka mengingat $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ diperoleh

$$f(x) = \frac{2.x^2-(2x+3).2x}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{2x^2-4x^2-6x}{x^4}$$

$$= \frac{-2x^2-6x}{x^4}$$

B. Turunan Fungsi Trigonometri

a. y = sin x ⇒ y′ = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\dfrac{x+\Delta x - x}{2}\cos\dfrac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\right).\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

= 1. cos(x + 0) = cos x

Analog y = cos x ⇒ y′ = –sin x.

b. y = tan x ⇒ y = $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ dengan mengingat $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$\Rightarrow y' = \frac{\cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Analog y = tan x ⇒ y′ = $\sec^2 x$

c. y = sec x ⇒ y = $\dfrac{1}{\cos x}$

$$y' = \frac{0.\cos x - 1.(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

= tan x . sec x

Analog y = cosec x ⇒ y′ = –cot x cosec x.

Jadi :

$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$	$y = \cot x \Rightarrow y' = -\text{cosec}^2 x$
$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$	$y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \tan x$
$y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x$	$y = \text{cosec}\, x \Rightarrow y' = -\text{cosec}\, x \cot x.$

C. Turunan Fungsi Tersusun (Fungsi Komposit)

Misalkan $y = f(x)$ dimana $u = g(x)$, menentukan fungsi tersusun $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ dan apabila g mempunyai turunan di x, dan f mempunyai turunan di $u = g(x)$ maka turunan fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$ ditentukan dengan rumus :

$$\mathbf{(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)}$$

atau dengan notasi Leibniz :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Rumus ini dikenal dengan nama **aturan rantai** .
Cara yang mudah untuk mengingat aturan rantai adalah :

Variabel kiri | Variabel antara | Variabel kanan

$$y = f(u) \quad \text{dan} \quad u = g(x)$$

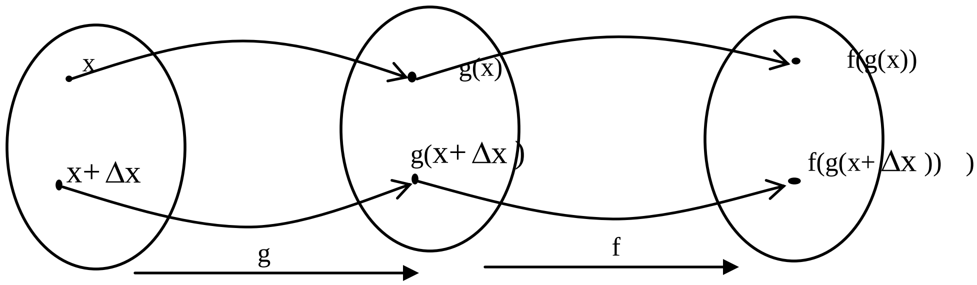
$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Turunan variabel kiri terhadap variabel kanan	=	Turunan variabel kiri terhadap variabel antara	•	Turunan variabel antara terhadap variabel kanan

Aturan rantai tersebut dapat dibuktikan sebagai berikut :

Bukti :

Misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$; g mempunyai turunan di x dan f mempunyai turunan di $u = g(x)$. Apabila variabel x bertambah dengan Δx yang berubah menjadi $(x + \Delta x)$, maka $u = g(x)$ bertambah menjadi $g(x + \Delta x)$ dan $y = f(g(x))$ bertambah menjadi $f(g(x + \Delta x))$, sebagaimana diagram di bawah ini :



Pertambahan untuk u = g(x) adalah $g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta g(x)$, dan dari hubungan ini akan diperoleh $\Delta g(x) \to 0$ apabila $\Delta x \to 0$

$$\Rightarrow \Delta f(g(x)) = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))$$

Berdasar definisi umum turunan fungsi, maka turunan dari fungsi komposisi :

$$(fog)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f \circ g)(x + \Delta x) - (f \circ g)(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x + \Delta x) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x) - \Delta g(x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x) + \Delta g(x)) - f(g(x))}{\Delta g(x)} \bullet \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta g(x) \to 0} \frac{f(g(x) - \Delta g(x))}{\Delta g(x)} \bullet \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(g(x)).g'(x) \qquad \text{(terbukti)}$$

Dan apabila aturan rantai di atas kita tulis dengan notasi Leibniz akan diperoleh :

Jika y = f(x) dan u = g(x) maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Contoh 3

Tentukan turunan fungsi $f(x) = (2x^3 - 4)^7$

Jawab :

Misal, $u = 2x^3 - 4 \Rightarrow u' = 6x^2$

$f(x) = u^7 \Rightarrow f'(x) = 7u^6 \, . \, u'$

Jadi $f(x) = (2x^3 - 4)^7 \Rightarrow f'(x) = 7(2x^3 - 4)^6 \, . \, 6x^2$.

$= 42x^2(2x^2 - 4)^6$.

Dalil Rantai di atas dapat dikembangkan lebih lanjut.

Jika y = f(u), u = g(v) dan v = h(x), maka

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{d}{dv}.\frac{dv}{dx}}$$

Begitu dan seterusnya.

Contoh 4

Jika $f(x) = \sin^3(2x - 5)$, maka tentukan $f'(x)$.

Jawab :

Misal $u = \sin(2x - 5)$ dan $v = 2x - 5$, sehingga

$$v = 2x - 5 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 2$$

$$u = \sin v \rightarrow \frac{du}{dv} = \cos v$$

$$y = u^3 \rightarrow \frac{dy}{du} = 3u^2$$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df(x)}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx}$$

$$= 3 \cdot u^2 \cdot \cos v \cdot 2$$

$$= 6 \sin^2(2x - 5) \cdot \cos(2x - 5)$$

D. Turunan Fungsi Logaritma

a. Pandanglah fungsi $f(x) = \ln x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\ln(x + \Delta x)}{\Delta x}}{x.\dfrac{\Delta x}{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.1 = \frac{1}{x}$$

Jadi $\boxed{f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}}$

b. Jka $f(x) = {}^a\log x$, maka

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Jadi $\boxed{f(x) = {}^a\log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}}$

E. Turunan Fungsi Eksponensial

a. Jika $f(x) = e^{g(x)}$, maka

$\ln f(x) = \ln e^{g(x)} = g(x) \cdot \ln e$

$\ln f(x) = g(x)$ jika kedua ruas diturunkan

$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = g'(x)$, sehingga $f'(x) = f(x) \cdot g'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

Jadi $\boxed{f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)}$

Contoh 5

Jika $y = e^x$, maka $y' = e^x \cdot 1 = e^x$

Sehingga $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

b. Untuk fungsi eksponensial $y = a^{g(x)}$, maka

$\ln y = \ln a^{g(x)}$

$\ln y = g(x) \cdot \ln a$ jika kedua ruas diturunkan, maka

$\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \cdot \ln a \Rightarrow y' = y \cdot g'(x) \cdot \ln a$

$= a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a$

Jadi $y = a^{g(x)} \Rightarrow y' = a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a$

Contoh 6

Jika $y = 2^{2x^3-3}$, maka $y' = 2^{2x^3-3} . 6x . \ln 2$

$= 6x \cdot 2^{2x^3-3} . \ln 2$

F. Turunan Fungsi Implisit

Jika $y = f(x)$, maka turunan fungsi implisit $F(x,y) = c$ adalah dengan memandang y fungsi dari x.

Contoh 7

Tentukan y' jika $x^2 + 3xy + y^2 = 4$

Jawab :

$\frac{d}{dx}(x^2 + 3xy + y^2) = \frac{d}{dx}(4)$

$2x + 3y + 3xy' + 2y \cdot y' = 0$

$(3x + 2y)y' = -2x - 3y$

$y' = -\frac{3x + 3y}{3x + 2y}.$

G. Turunan Jenis Lebih Tinggi

Andaikan fungsi turunan pertama $f'(x)$ atau $\dfrac{df(x)}{dx}$ dari suatu fungsi adalah suatu fungsi yang dapat didiferensialkan pada x, maka turunan dari turunan pertama ini, disebut turunan kedua, dan ditulis dengan notasi $f''(x) = \dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$.

Demikian juga andaikan turunan kedua ini fungsi yang dapat didiferensialkan, maka turunan dari turunan kedua ini disebut turunan ketiga dan ditulis dengan notasi $f'''(x) = \dfrac{d^3f(x)}{dx^3}$.

Begitu dan seterusnya turunan dari turunan ke n-1 disebut turunan ke-n dan ditulis dengan notasi $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$.

Contoh 8

Tentukan $\dfrac{d^3f(x)}{dx^3}$ jika $f(x) = x^5 - 5x^2$

Jawab :

$$f(x) = x^5 - 5x^2 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 10x$$
$$f''(x) = 20x^3 - 10$$
$$f'''(x) = 60x^2$$

Contoh 9

Tentukan $\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$ jika $f(x) = \sin x$

Jawab :

$$f(x) = \sin x \to \frac{df(x)}{dx} = \cos x = \sin(x + 1 . \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\sin x = \sin(x + 2 . \frac{\pi}{2})$$
$$\frac{d^3f(x)}{dx^3} = -\cos x = \sin(x + 3 . \frac{\pi}{2})$$
$$\frac{d^\sigma f(x)}{dx^\sigma} = \sin x = \sin(x + \sigma . \frac{\pi}{2})$$
$$\ldots\ldots\ldots..$$
$$\frac{d^nf(x)}{dx^n} = \sin(x + n . \frac{\pi}{2}).$$

Latihan 3

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 10, tentukan f′(x) dari

1. $f(x) = 6 - 4x^3 + x^5$ 8. $f(x) = (x^2 + \frac{2}{x^2})^2$
2. $f(x) = (3x - 2)^2$ 9. $f(x) = (2x + \frac{1}{x})(2x - \frac{1}{x})$
3. $f(x) = (x^3 - 2x)^2$ 10. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x}}$
4. $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 11. $f(x) = \sqrt[5]{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
5. $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{6x^3}$ 12. $f(x) = \sqrt{x}\,(3x + \frac{1}{3x})(3x - \frac{1}{3x})$
6. $f(x) = (3x^2 + 6)(2x - \frac{1}{4})$ 13. $f(x) = (5x^2 - 1)(x^2 + 4x - 2)$.
7. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{3x}$ 14. $f(x) = \frac{4x^2 + 3}{x^3 + 2x^2}$

16. Diketahui $f(x) = x^2 - 6x - 16$. Tentukan gradien garis singgung kurva di x = 1, dan persamaan garis singgungnya.
17. Diketahui fungsi $f : x \to (2x + 3)^2$
    a) Tentukan rumus untuk turunan fungsi f′(x)
    b) Tentukan laju perubahan fungsi pada x = -1 dan pada x = -2.
18. Jarak s meter yang ditempuh oleh bola golf yang menggelinding pada waktu t detik dinyatakan dengan $s = 15t - t^2$.
    a) Hitung kecepatan bola golf pada t = s
    b) Kapan bola golf tersebut berhenti.
19. Tentukan persamaan garis singgung kurva dengan persamaan $y = (x - 2)^2$ di titik yang absisnya x = 2.
20. Tentukan f′(x) dari fungsi-fungsi di bawah ini
    a. f(x) 6 sin x + 3 cos x h. $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$
    b. f(x) = 3 sin x cos x i. $F(x) = \sin^3(x - 5)$
    c. fx) = $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ j. $f(x) = \sin x^0$
    d. f(x) = $\frac{\text{tg}\, x}{\sin x - \cos x}$ (x^0 = … radian dengan menggunakan kesamaan
    e. $f(x) = x^2 \sec x$ $180^o = \pi$ radian), $\to x^o$ = … radian
    f. f(x) = $\frac{x^2}{\cos x}$ k. f(x) = tan(3 – sin x).
21. Jika y = f(x), maka tunjukkan bahwa $\Delta y = f'(x).\Delta x + \varepsilon.\Delta x$, di mana jika $\Delta x \to 0$ maka $\varepsilon \to 0$

    Catatan :

    Sifat ini dapat digunakan untuk membuktikan aturan rantai :

    Jika y = f(u) dan u = g(x) maka $\Delta y = f'(x).\Delta x + \varepsilon.\Delta x$, di mana $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon . \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon . \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

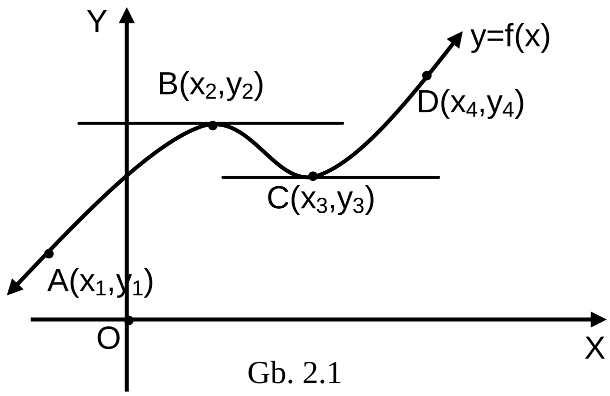
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

22. Tentukan $f'(x)$ jika $f(x) = x^7 \sin(2x - 5))$
23. Tentukan $g'(x)$ jika $g(x) = \sqrt{2x + 5x^2}$
22. Jika $y = \sin x$ maka $\frac{d^2y}{dx^2} + y = ...$
23. Jika $y = x^5 \sin 3x$, maka tentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$
24. Tentukan $\frac{d^n y}{dx^n}$ jika $y = e^{kx}$
25. Tentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$ jika $x^2 – y = 0$
26. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika diketahui $x^3 + y^3 = x^3y^3$.
27. Jika $xy + \sin y = x^2$, maka tentukanlah y'.
28. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika diketahui :
    a. $x^2y + 3xy^3 - x = 3$
    b. $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$
    c. $xy = 8$
    d. $3x^2 - 2xy + y^2 = 0$
    e. $3x^2 - 6y^2 = 4$
29. Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut :
    a. $y = 3e^{-4x}$
    b. $y = (x – 2)e^{5x}$
    c. $y = x \ln 3x$
    d. $y = \log (2x + 3)$
    e. $y = 3^{\sin x + 3x^2}$

\

BAB IV
PERILAKU FUNGSI

A. Kemonotonan Suatu Fungsi



Gb. 2.1

Gambar di samping memperlihatkan bahwa jika suatu titik bergerak sepanjang kurva dari A ke B, maka nilai fungsi bertambah apabila absis bertambah; dan juga jika titik bergerak sepanjang kurva dari B ke C maka nilai fungsi berkurang apabila absis bertambah.

.

Dalam hal ini kita katakana bahwa f *naik* pada selang tertutup $[x_1,x_2]$ dan f *turun* pada selang tertutup $[x_2,x_3]$.

Definisi :

Fungsi f yang terdefinisi pada suatu selang dikatakan *naik* pada $x = x_0$, apabila untuk h positif dan cukup kecil berlaku $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$.

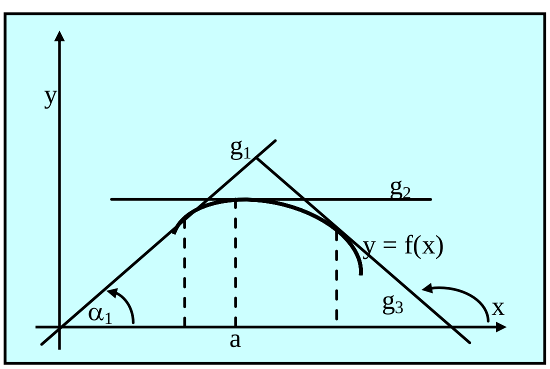
Dari gambar di atas kelihatan bahwa fungsi f naik pada selang $[x_1,x_2]$ dan $[x_3,x_4]$.

Definisi :

Fungsi f yang terdefinisi pada suatu selang dikatakan *turun* pada $x = x_0$, apabila untuk h positif dan cukup kecil berlaku $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$

Dari gambar di atas fungsi f turun pada selang $[x_2,x_3]$

Bila fungsi f naik atau turun pada suatu selkang maka f dikatakan **monoton** pada selang tersebut.



Misalkan kurva di samping menyajikan grafik fungsi y = f(x), sehingga terlihat bahwa untuk x < a, gradien garis singgung g_1 positif, yang berarti $f'(x) > 0$, dan f naik pada interval itu. Untuk x > 0, gradien garis singgung-garis singgung selalu negatif sehingga $f'(x) < 0$, dan f turun pada interval tersebut.

Sedang untuk x = a, gradien garis singgung dititik tersebut = 0, garis singgungnya sejajar sumbu x, sehingga $f'(x) = 0$, dalam hal ini f tidak naik dan tidak turun dan dikatakan f stasioner di x = a.

Bukti :
Pertama kita buktikan jika $f'(x_0) > 0$ maka fungsi naik pada $x = x_0$.

Dari $f'(x_0) > 0$ maka $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$, kita peroleh :

$\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ untuk Δx cukup kecil.

Jika $\Delta x < 0$ maka $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$, untuk $\Delta x = -h$ maka $f(x_0 - h) < f(x_0)$ ….(1)
Jika $\Delta x > 0$ maka $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$, untuk $\Delta x = h$ maka $f(x_0 + h) > f(x_0)$ ……(2)
Dari (1) dan (2) kita peroleh $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$ yang ini berarti f naik pada $x = x_0$
Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa jika $f'(x_0) < 0$ maka fungsi turun pada $x = x_0$
Suatu fungsi non konstan dikatakan naik (turun) pada suatu selang, apabila fungsi tersebut naik (turun) atau stasioner pada setiap titik pada interval tersebut.

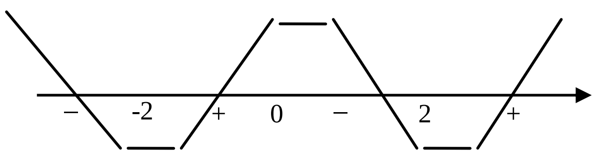
> Sehingga kurva y = f(x) akan:
> (i) naik jika $f'(x) > 0$
> (ii) turun jika $f'(x) < 0$
> (iii) stasioner jika $f'(x) = 0$.

Contoh

Tentukan internal dimana fungsi $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 7$ naik atau turun.

Jawab :

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 7 \rightarrow f'(x) = x^3 - 4x = x\,(x + 2)(x - 2)$



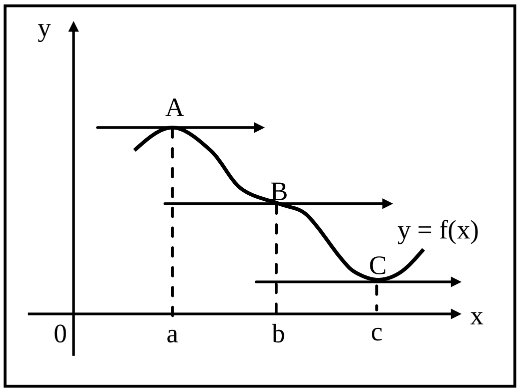
$x(x + 2)(x - 2)$

Melihat nilai positip dan negatifnya masing-masing interval, dapat disimpulkan bahwa pada fungsi $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 7$ kurvanya
naik pada interval $-2 < x < 0$ atau $x > 2$
turun pada interval $x < -2$ atau $0 < x < 2$.

B. Nilai Maksimum atau Minimum Relatif Suatu Fungsi

Suatu fungsi y = f(x) dikatakan mempunyai maksimum relatif (minimum relatif) pada suatu interval pada $x = x_o$, apabila $f(x_o)$ adalah nilai terbesar (terkecil) dari nilai pendahulu (penyerta) dari fungsi tersebut.
Pada Gambar 2.2 di bawah, titik A(a,f(a)) adalah titik maksimum relatif dari kurva sebab $f(a) > f(x)$ pada setiap sekitar (neighbourhood) sekecil apapun $0 < |x - a| < \delta$. Dan dikatakan bahwa y = f(x) mempunyai maksimum relatif (=f(a)) jika x = a. Dan dengan

jalan yang sama titik C(c,f(c)) adalah titik minimum relatif dari kurva, dan dikatakan y = f(x) mempunyai nilai minimum relatif (=f(c)) jika x = c.



Pada ketiga titik A, B dan C diperoleh f′(a) = f′(b) = f′(c) = 0 ketiga garis singgungnya sejajar sumbu x, dan f stasioner pada ketiga titik tersebut. Untuk titik A, f′(x) berubah tanda dari positip – nol – negatif, dikatakan f mempunyai nilai balik maksimum f(a) pada x = 0.

Untuk titik B, f′(x) berubah tanda dari negatif – nol – negatif, dikatakan f mempunyai nilai belok hozontal f(b) pada x = b.
Untuk titik C, f′(x) berubah tanda dari negatif – nol – positif, dikatakan f mempunyai nilai balik minimum f(c) pada x = c.
<u>Kesimpulan</u> :

> Jika f′(c) = 0, maka f(c) disebut nilai stasioner (kritis) dari f pada x = c, dan nilai stasioner mungkin berupa nilai balik maksimum, nilai balik minimum atau nilai belok horizontal.

Bukti
Pertama akan kita buktikan apabila $f(x_0)$ merupakan maksimum relatif pada $x = x_0$, maka $f'(x_0) = 0$.
Dari $f(x_0)$ merupakan maksimum relatif pada $x = x_0$, maka untuk setiap Δx dengan $|\Delta x|$ cukup kecil, diperoleh $f(x_0+\Delta x) < f(x_0)$, sehingga $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) < 0$.

Sekarang apabila $\Delta x < 0$ maka $\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ sehingga :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \ldots\ldots\ldots..(1)$$

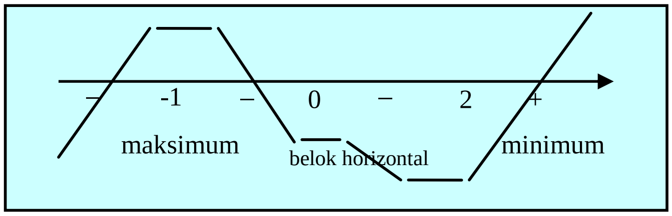
Demikian juga jika $\Delta x > 0$, maka $\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$ sehingga :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 \ldots\ldots\ldots.(2)$$

Dari (1) dan (2), maka diperoleh $0 \leq f'(x_0) \leq 0$, sehingga $f'(x_0) = 0$.
Dengan jalan yang sama dapat ditunjukkan untuk minimum relatif dan belok horizontal.

Contoh
Tentukan nilai stasioner fungsi $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ dan tentukan pula macamnya.
Jawab :

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x + 1)(x - 1)$.



Gb. 2.6

Stasioner dicapai untuk $f'(x) = 0 \Rightarrow 15x^2(x + 1)(x - 1) = 0$

$x = 0$ atau $x = -1$ atau $x = 1$.

Untuk $x = 0 \Rightarrow f(0) = 3.0^5 - 5.0^3 = 0$ maka $f(0) = 0$ adalah nilai belok horizontal.

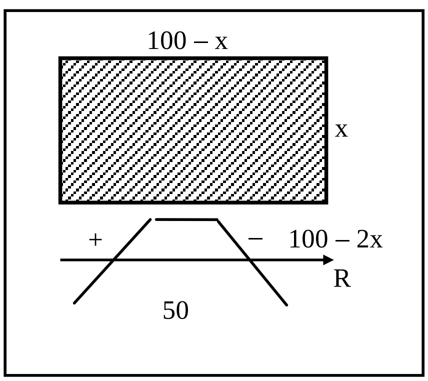
Untuk $x = 1 \Rightarrow f(1) = 3.1^5 - 5.1^3 = -2$ maka $f(1) = -2$ adalah nilai balik minimum.

Untuk $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 3.(-1)^5 - 5.(-1)^3 = 2$ maka $f(-1) = 2$ adalah nilai balik maksimum.

Contoh

Dengan menggunakan kawat sepanjang 200 meter akan dibangun suatu kandang ayam yang berbentuk persegipanjang. Tentukan ukuran kandang agar luas kandang ayam tersebut maksimum.

Jawab :



Gb. 2.2

Misalkan sisi panjang adalah x dan 100 – x maka luas kandangnya.

$L(x) = x(100 - x) = 100x - x^2$

$L'(x) = 100 - 2x$.

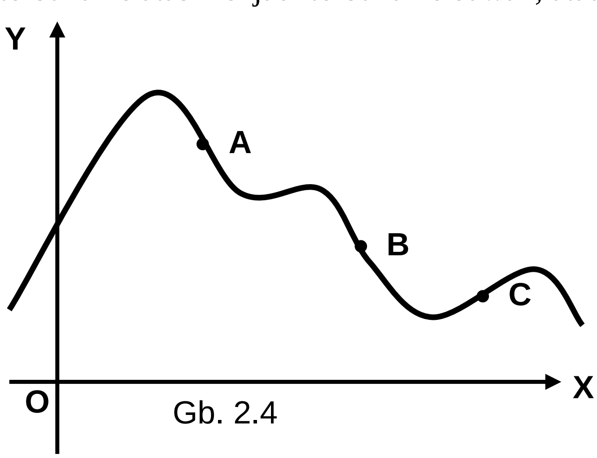
Nilai stasioner dicapai jika $L'(x) = 0$

$\Rightarrow 100 - 2x = 0 \Rightarrow x = 50$.

Jadi agar luas kandang maksimum, ukurannya panjang satu sisi 50 m sedang sisi satunya (100 – 50) meter = 50 meter. Sehingga bentuk kandangnya persegi.

C. Titik Belok

Suatu titik dikatakan suatu titik belok, jika kurva jika kurva di titik tercsebut berubah dari terbuka ke atas menjadi terbuka ke bawah, atau sebaliknya.



Gb. 2.4

Dari gambar di samping titik-titik beloknya adalah di titik-titik A, B dan C

Kurva y = f(x) mempunyai titik belok di $x = x_0$, apabila :

1. $f''(x_0) = 0$, atau tidak didefinisikan, dan
2. $f''(x_0)$ berubah tanda ketika melewati $x = x_0$, atau syarat 2 ini dapat dinyatakan dengan : $f'''(x_0) \neq 0$ apabila $f'''(x_0)$ ada.

Contoh :

Tentukan : arah kecembungan dan titik-titik belok kurva fungsi jika diketahui

$$Y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 - 12x - 7$$

Jawab : $Y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 - 12x - 7$

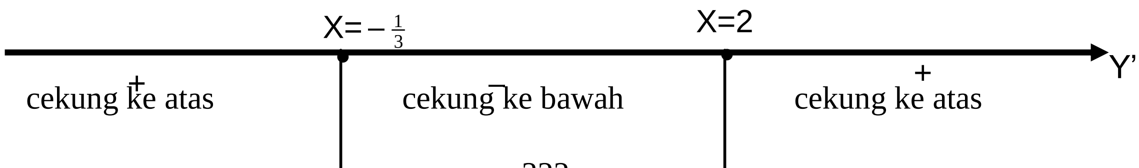
$\longrightarrow$ $Y' = 12x^3 - 30x^2 - 24x - 12$

$Y'' = 12(3x+1)(x-2)$

Titik belok dicapai y''=0

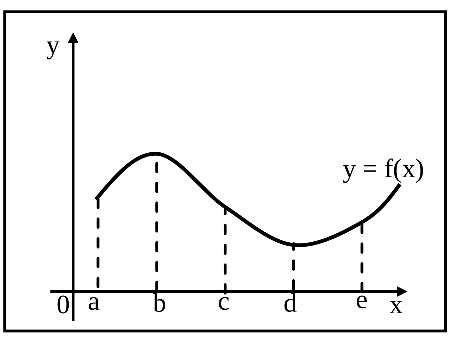
$12(3x + 1)(x - 2) = 0$

$x = -\frac{1}{3}$ atau $x = 2$



Jadi titik-titik beloknya adalah $(-\frac{1}{3}, -\frac{322}{27})$ dan (2,–63)

E. Penentuan Maksimum dan Minimum dengan Menggunakan Turunan Kedua



Gb. 2.3

Misalkan kurva y = f(x) seperti pada gambar di samping, dikatakan kurva y = f(x) terbuka ke bawah untuk a < x < c dan kurva y = f(x) terbuka ke atas untuk c < x < e.

Suatu busur dari kurva y = f(x) dikatakan terbuka (cekung) ke atas apabila untuk setiap titiknya busur kurvanya terletak di atas tangen (garis singgung) dari titik tersebut.

Untuk kurva yang terbuka ke atas, pada setiap titiknya nilai $f'(x)$ atau gradien garis singgungnya bertanda sama dan naik atau berubah tanda dari negatif ke positif. Hal ini menunjukkan bahwa fungsi turunan pertama $f'(x)$ adalah fungsi yang naik, yang berarti $f''(x) > 0$.

Dan suatu busur dari kurva y = f(x) dikatakan terbuka (cekung) ke bawah apabila untuk setiap titiknya busur kurvanya terletak di bawah tangen dari titik tersebut. Untuk kurva yang terbuka ke bawah, pada setiap titiknya nilai $f'(x)$ atau gradien garis singgungnya bertanda sama dan turun atau berubah tanda dari positif ke negatif. Hal ini menunjukkan bahwa fungsi turunan pertama $f'(x)$ adalah fungsi yang turun, yang berarti $f''(x) < 0$.

Dari kecembungan atau kecekungan kurva di atas dapat ditarik kesimpulan.

> Jika f(a) adalah nilai stasioner maka
> (i) f(a) adalah nilai balik maksimum bila $f'(a) = 0$ dan $f''(a) < 0$
> (ii) f(a) adalah nilai balik minimum bila $f'(a) = 0$ dan $f''(a) > 0$.

Contoh

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = x(12 – 2x)^2$ dengan metoda derivatif kedua.

Jawab :

$f(x) = x(12 – 2x)^2 = 4x^3 – 48x^2 + 144x$

$f'(x) = 12x^2 – 96x + 144 = 12(x – 2)(x – 6)$

$f''(x) = 24x – 96 = 24(x – 4)$.

Stasioner jika $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 12(x – 2)(x – 6) = 0$

$\Rightarrow x = 2$ atau $x = 6$

Untuk x = 2 maka $f(2) = 2(12 – 22)^2 = 128$ dan $f''(2) = 24(2 – 4) = -48$ (negatif)

Untuk x = 6 maka $f(6) = 6(12 – 2.6)^2 = 0$

$f''(6) = 24(6 – 4) = 48$ (positif).

Jadi f(2) = 128 adalah nilai balik maksimum untuk x = 2 dan

f(6) = 0 adalah nilai balik minimum untuk x = 6.

D. Beberapa Contoh Aplikasi Maksimum dan Minimum

Contoh 1

Bilangan 120 dibagi menjadi dua bagian sedemikian hingga hasil kali bagian yang satu dengan kuadrat bilangan yang lain maksimum.

Tentukan besarnya bagian bilangan masing-masing

Jawab :

Misalkan bilangan yang pertama x, berarti yang yang lainnya 120 – x , sehingga :

$P(x) = x^2 (120 – x) = 120x^2 - x^3$

$$\frac{dP}{dx} = 240x - 3x^2 = 3x(80 - x)$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = 240 - 6x$$

Harga kritis dicapai jika $\frac{dP}{dx} = 0$ atau x = 0 atau x = 80

Untuk x = 0 maka $\frac{d^2P}{dx^2} = 240$ (positif), sehingga berupa balik minimum.

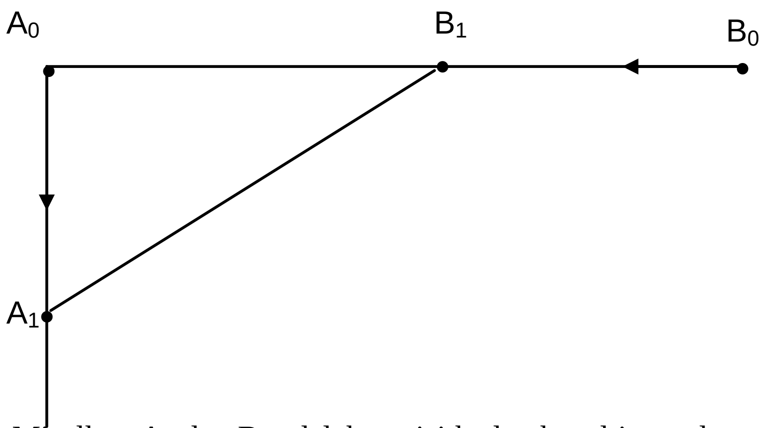
Untuk x = 80 maka $\frac{d^2P}{dx^2} = 240 -$ 6 (80) = – 240 (negatif), sehingga berupa balik maksimum.

Jadi agar hasil kalinya maksimum, maka bilangan pertama 80 sedangkan bilangan satunya 40.

Contoh 2

Pada pukul 9 AM, kapal B berada pada 104 km arah timur dari kapal lain A. Kapal B berlayar ke arah barat dengan kecepatan 16 km/jam, dan kapal A berlayar ke arah selatan dengan kecepatan 24 km/jam. Apabila kedua kapal tersebut tetap berjalan dengan arah itu, maka kapan kedua kapal mencapai jarak terdekat dan berapa jaraknya?

Jawab :



Misalkan A_0 dan B_0 adalah posisi kedua kapal itu pada saat pukul 9 AM, dan A_1 serta B_1 adalah posisi kedua kapal setelah berlayar t jam kemudian, maka kita peroleh :

$B_0B_1 = 16t$ dan $A_0A_1 = 24t$

Sehingga $A_0B_1 = 104 - 16t$

A_1B_1 = jarak kedua kapal setelah t = J

$$J^2 = A_0A_1^{\;2} + A_0B_1^{\;2}$$

$$J^2 = (24t)^2 + (104 - 16t)^2$$

$$2J\frac{dJ}{dt} = 2(24t).24 + 2(104 - 16t)(-16t) = 1152t - 3328 + 512t$$

Sehingga $\dfrac{dJ}{dt} = \dfrac{832t - 1664}{J}$

Untuk $\dfrac{dJ}{dt} = 0 \Rightarrow 832t - 1664 \Rightarrow t = 2$ yang merupakan minimum (mengapa?)

Untuk t = 2 maka $J^2 = (24.2)^2 + (104 - 16.2)^2$, sehingga J = $24\sqrt{13}$.

Jadi kedua kapal berada pada posisi terdekat, setelah keduanya berlayar 2 jam dengan jarak keduanya $24\sqrt{13}$ km.

Latihan 1.

1. Tentukan interval dimana fungsi-fungsi di bawah ini naik ataukah turun.
   a. $f(x) = x^2 - 4x + 6$
   b. $f(x) = x^3$
   c. $f(x) = 12x - x^3$
   d. $f(x) = x(x + 2)^2$

e. f(x0 = 1 + 2x – 2x^2 – 2x^3

2. Tentukan nilai stasioner dan jenisnya dari fungsi-fungsi di bawah ini
   a. $f(x) = 9 - x^2$
   b. $f(x) = x(x + 2)^2$
   c. $f(x) = x + \dfrac{9}{x^2}$
   d. $f(x) = -x^4 + 2x^2$
   e. $f(x) = \cos x + 7$

3. Jumlah dua buah bilangan adalah 30. Tentukan masing-masing bilangan tersebut agar hasil kalinya maksimum.

4. Dengan mengambil tembok sebagai salah satu sisi, akan dibuat kandang ayam berbentuk persegipanjang dari pagar kawat sepanjang 30 m. tentukan ukuran kandang agar luas kandang maksimal.

5. Suatu bak penampung air yang direncanakan dibuat dari pelat aluminium yang cukup tebal yang harus menampung 64 dm^3. Tentukan ukuran tabung agar luas seluruh permukaannya minimum, jika
   a. tabung itu tanpa tutup
   b. tabung itu dengan tutup.

6. Diketahui parabol $y = 5 - \frac{1}{2}x^2$, $y \geq 0$. Suatu titik P(x, y) terletak pada parabol tersebut. Tentukan jarak OP terpendek jika O pangkal koordinat.

7. Suatu kotak tanpa tutup yang alasnya berbentuk persegi, jumlah luas kelima sisinya 432 dm^2.
   Tentukan ukuran kotak tersebut agar volumnya maksimum.

8. Diketahui kurva dengan persamaan $y = \sqrt{x}$. Tentukan jarak terpendek titik A(3, 0) ke kurva tersebut.

9. Suatu persegipanjang mempunyai luas 900 cm^2. Tentukan ukuran persegipanjang agar kelilingnya minimum.

10. Suatu proyek direncanakan selesai dalam x hari yang akan menelan biaya $(3x + \frac{1200}{x} - 60)$ ribu rupiah. Berapa harikah proyek tersebut harus selesai, agar biaya minimum?

E. Menggambar Grafik Fungsi

Kemampuan menggambar grafik fungsi sangat penting, baik untuk lebih memahami Kalkulus itu sendiri maupun dalam cabang-cabang ilmu yang lain. Secara umum langkah-langkah di bawah ini sangat membantu untuk menggambar grafik suatu fungsi, terutama fungsi aljabar sebagai berikut:

a. Langkah pertama adalah menentukan titik-titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat.
b. Langkah kedua adalah menentukan titik-titik stasioner beserta jenisnya.
c. Langkah ketiga adalah menentukan nilai y untuk x yang besar positif dan untuk x yang besar negatif.

Contoh :

Gambarlah grafik dari fungsi $y = 3x - x^3$

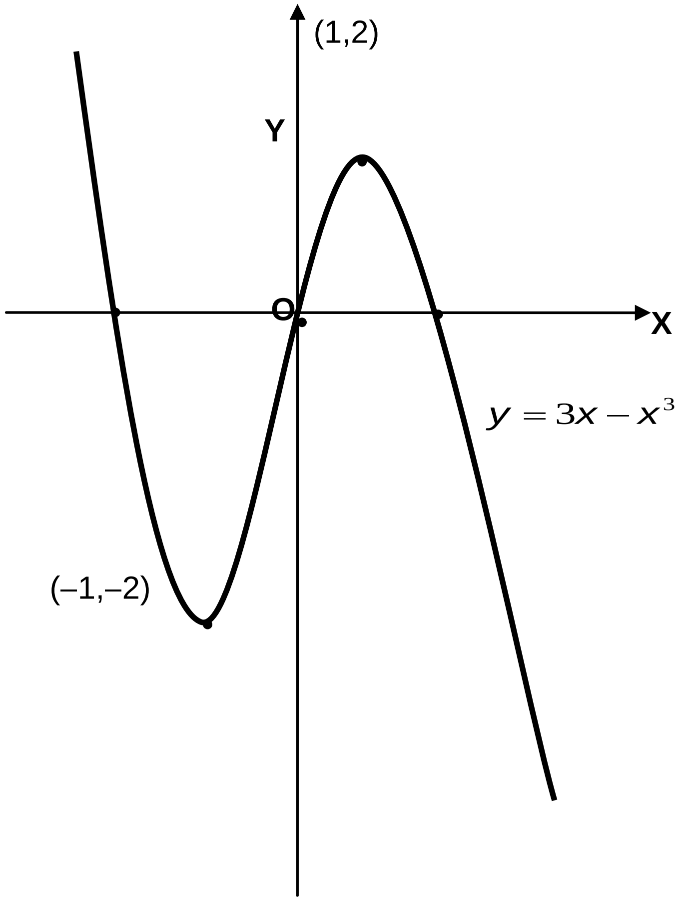
Jawab :

1. Titik-titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat :
   Untuk x = 0 maka $y = 3.0 - 0^3 = 0$, titik potong dengan sumbu y adalah (0,0)
   Untuk y = 0 maka $3x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(3 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x(\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x) = 0$
   $\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = -\sqrt{3} \text{ atau } x = \sqrt{3}$
   Terdapat tiga titik potong dengan sumbu x: (0,0) , ($\sqrt{3}$,0) dan (0, $-\sqrt{3}$)

2. Titik-titik stasioner beserta jenisnya :
   $Y = 3x - x^3 \Rightarrow y' = 3 - 3x^2 = 3(1+x)(1-x)$
   $\Rightarrow y'' = -6x$
   Stasioner diperoleh jika : y' = 0 $\Leftrightarrow 3(1+x)(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ atau } x = 1$
   Untuk x = – 1 $\Rightarrow y = 3(-1) - (-1)^3 = -2$
   Y''=–6(–1) = 6 (positif), sehingga berupa nilai minimum
   Untuk x = 1 $\Rightarrow y = 3(1) - (1)^3 = 2$
   Y''= –6(1) = – 6 (negatif), sehingga berupa nilai maksimum
   Sehingga titik (–1,–2) adalah titik balik minimum dan titik (1,2) berupa titik balik maksimum.

3. Untuk nilai x yang besar maka nilai y $\approx -x^3$, sehingga :
   Untuk x besar positif maka akan diperoleh y besar negatif, dan sebaliknya untuk x yang besar negatif akan diperoleh y besar positif.

Dari 1, 2 dan 3 diperoleh grafik sebagai berikut :



Latihan 2
Gambarlah grafik fungsi-fungsi berikut :

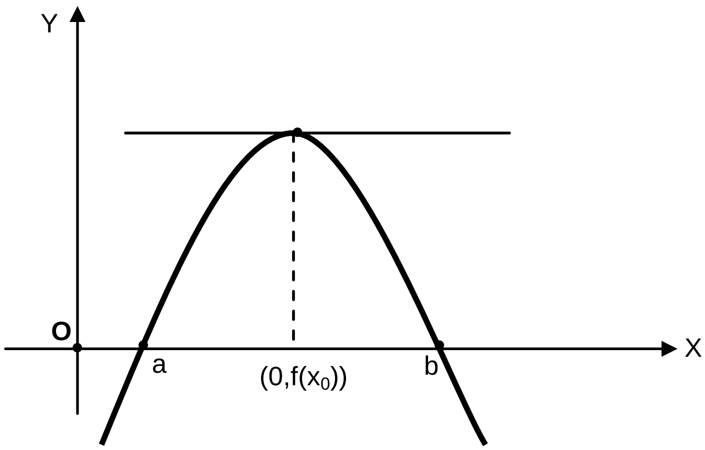
1. y = $x^2 - 1$
2. y = $6x - x^2$
3. y = $3 + 2x - x^2$
4. y = $(2 - x)^2$
5. y = $x^3 - 6x$
6. y = $1 - x^3$
7. y = $x(x-3)^2$
8. y = $\frac{2}{3}x^3 - x^2$
9. y = $2x^2 - x^4$
10. y = $5x^3 - 3x^5$

F. Penerapan Turunan dalam Penyelesaian Limit Fungsi

1. Teorema-teorema Mean

a. Teorema Rolle

Apabila f(x) kontinu pada interval [a,b], dan f(a) = f(b) = 0 dan jika f'(x) ada di setiap titik pada interval tersebut, maka paling tidak terdapat satu $x = x_0$, pada interval tersebut sedemikian $f'(x_0) = 0$.

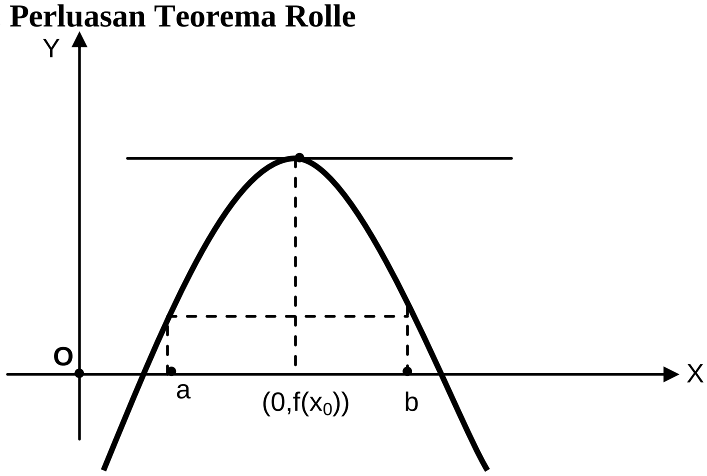


Secara geometris, teorema di atas dapat diartikan bahwa suatu kurva yang kontinu memotong sumbu x di x = a dan x = b, serta mempunyai tangen disetiap titik antara a dan b, maka terdapat paling sedikit satu titik x = x_0 di antara a dan b dimana tangennya sejajar dengan sumbu x

Bukti :

a. Jika f(x) = 0 di seluruh interval, ini juga berakibat f'(x) = 0 untuk setiap x, dengan sendirinya teorema terbukti
b. Untuk hal yang lain jika f(x) positif (negatif) pada beberapa titik pada interval tersebut, maka berarti paling sedikit terdapat x = x_0 pada [a,b] sehingga f(x) mempunyai maksimum (minimum) relatif. Dan karena mempunyai maksimum (minimum) relatif, berarti dipenuhi f'(x_0) = 0.

b. Perluasan Teorema Rolle



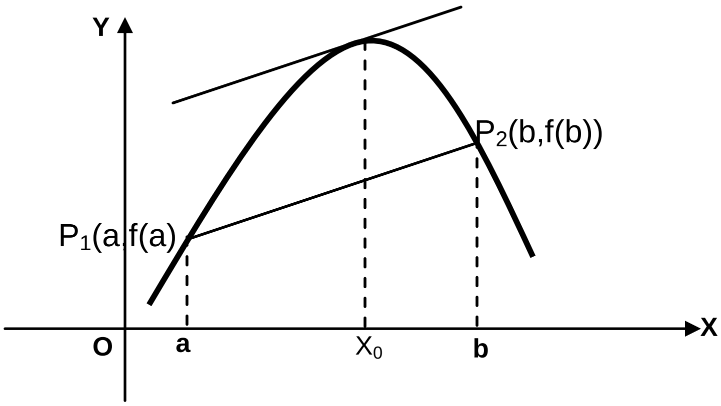
Apabila f(x) memenuhi syarat – syarat teorema Rolle, hanya f(a) = f(b) $\neq 0$, maka f'(x_0) = 0 untuk paling tidak satu x = x_0, pada interval [a,b].

Untuk membuktikan *corollary* teorema Rolle ini cukup diambil F(x) = f(x) − f(a) dengan demikian kecuali dipenuhi syarat-syarat teorema Rolle, juga dipenuhi F(a) = F(b) = 0, sehingga berdasar teorema Rolle di atas, maka paling tidak satu x = x_0, dipenuhi F'(x_0) = 0.

c. Teorema Mean

Apabila f(x) kontinu pada interval [a,b] dan apabila f'(x) ada di setiap titik pada intervaltersebut maka paling sedikit satu x = x_0 , $x_0 \in$ [a,b] sedemikian hingga :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$



Secara geometri teorema di atas dapat dipresentasikan sebagai berikut :
Jika P_1 dan P_2 adalah dua titik dari suatu kurva kontinu yang mempunyai tangen (garis singgung) pada setiap titiknya, maka paling sedikit terdapat suatu titik pada kurva sedemikian hingga gradien tangen tersebut sama dengan gradien garis P_1P_2.

Bukti :

Persamaan P_1P_2 : y = K(x – b) + f(b) dengan K = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Jarak vertical dari P_1P_2 ke kurva adalah sebesar :

F(x) = f(x) – (K(x – b) + f(b))

Sekarang F(x) memenuhi teorema Rolle sehingga paling sedikit terdapat sebuah x = x_0 sehingga F'(x_0) = 0. atau

$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d(f(x)-(K(x-b)+f(b))}{dx}=0$, sehingga

F'(x) = f'(x) – K = 0 untuk suatu x = x_0 pada interval [a,b].

Dari f'(x_0) – K = 0 maka f'(x_0) = K sehingga f'(x_0) = $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (terbukti)

d. Generalisasi Teorema Mean

Jika f(x) dan g(x) kontinu pada interval $a \le x \le b$, dan jika f'(x) dan g'(x) ada, dan g'(x) tidak nol pada setiap titik pada interval tersebut, maka paling sedikit terdapat satu x = x_0, pada interval tersebut sedemikian hingga :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Catatan :
Jika g(x) = x, maka terjadilah teorema mean lagi.
Bukti :
Misalkan g(b) = g(a); maka dengan perluasan teorema Rolle, diperoleh g'(x_0) = 0, untuk paling tidak satu x = x_0 pada interval [a,b], namun hal ini bertentangan dengan hipotesis (mengapa ?), jadi haruslah g(b) $\neq$ g(a).

Ambil $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=K$, suatu konstanta dan dari fungsi :

F(x) = f(x) – (f(b) + K(g(x) – g(b))), fungsi ini memenuhin syarat teorema Rolle, sehingga F'(x) = f'(x) – Kg'(x) = 0 pada paling sedikit satu titik x = x_0, di dalam interval [a,b] sehingga :

$$K = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \text{ (terbukti)}$$

Bentuk-bentuk yang Tak Tentu

Sebagai contoh pandanglah fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, fungsi ini tertentu untuk setiap $x \neq 1$. Tetapi untuk x = 1 fungsi di atas menjadi berbentuk $\frac{0}{0}$ yang tak tentu. Maka bentuk $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ dikatakan bentuk yang tak tentu untuk x = 1. Tetapi kita dapat menghitung bahwa $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Dari sini dikatakan bahwa bentuk yang tak tentu ini mempunyai nilai 2 untuk x = 1, dan yang dimaksudkan ialah harga limitnya.

Kecuali bentuk $\frac{0}{0}$, kita kenal bentuk-bentuk tak tentu lainnya , misalnya :

1. f(x) = $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ untuk x = 0 diperoleh bentuk : $\infty - \infty$
2. f(x) = $\frac{\ln x}{x}$ untuk $x = \infty$ diperoleh benrtuk : $\frac{\infty}{\infty}$
3. f(x) = $(\frac{1}{x})^{\tan x}$ untuk x = 0, diperoleh bentuk : ∞^0
4. f(x) = $(2 - \frac{x}{a})^{\tan \frac{\pi x}{2a}}$ untuk x = a, diperoleh bentuk : 1^∞

Kecuali bentuk-bentuk tak tentu di atas dikenal beberapa bentuk-bentuk tak tentu lainnya, misalnya bentuk : 0^0 dan $\infty.0$.

G. Nilai-nilai Tak Tentu Fungsi

1. Teorema de l'Hospital untuk bentuk $\frac{0}{0}$

Jika f(x) dan g(x) mempunyai suatu derivatif dalam suatu interval terbuka, dengan a sebagai salah satu titik ujungnya, dan jika $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, f(a) = g(a) = 0 dan $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (L terhingga), maka berlaku :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Bukti :

Dari bentuk $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, maka terdapatlah suatu selang terbuka dengan a sebagai salah satu titik ujungnya, sehingga untuk tiap-tiap titik x dari interval tersebut, berlaku g'(x) $\neq 0$. Dari sini syarat-syarat generalisasi teorema mean dipenuhi, sehingga untuk suatu titik x dalam interval tersebut berlaku :

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},(a<x_0<x)$$

atau : $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Jika x $\to$ a, maka $x_0 \to$ a, jadi :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=L$$

Karena bukti tersebut berlaku untuk limit kiri maupun limit kanan, maka teorema tersebut berarti terbukti untuk tiap-tiap interval sekitar a.

Perlu mendapat perhatian bahwa teorema de l'Hospital, hanya dapat digunakan jika limit : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ ada.

Contoh 1

Hitung : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3-2x^2+2x-1}$

Jawab :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^3-2x^2+2x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{3x^2-4x+2}$$

$$=\frac{3}{3-4+2}=3$$

Contoh 2

Hitung : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x\ln(1-x)}$

Jawab :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x\ln(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x lin(1-x)+e^x\dfrac{(-1)}{(1-x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)}{(1-x)\ln(1-x)+(-1)}=\frac{1}{(1)\ln(1)-1}=-1$$

Jika syarat-syarat untuk teorema de l'Hospital dipenuhi dan berlaku : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\pm\infty$, maka $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$

Contoh 3

Hitung : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2}$

Jawab : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{2x}$

$= \pm\infty$

2. Bentuk tak Tentu untuk x $\to \infty$

Jika $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ dan $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, dengan menggunakan sibstitusi $y = \dfrac{1}{x}$, sehingga y $\to 0$ jika x $\to \infty$, sehingga maslah di atas menjadi sama dengan bentuk $\dfrac{0}{0}$ yang telah dibahas di depan.

Karena f(x) = f($\dfrac{1}{y}$) = F(y) dan g(x) = g($\dfrac{1}{y}$) = G(y) maka :

F'(y) = $-\dfrac{1}{y^2} f'(\dfrac{1}{y}) = -x^2 f'(x)$, dan

G'(x) = $-\dfrac{1}{y^2} g'(\dfrac{1}{y}) = -x^2 g'(x)$, sehingga :

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{-x^2 f'(x)}{-x^2 g'(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Jadi jika $\lim\limits_{x\to\infty-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ atau $\pm\infty$ maka :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0-} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ atau } \pm\infty$$

Dari sini teorema de l'Hospital di atas berlaku pula, jika x $\to$ a, di atas kita ganti dengan x $\to \infty$, demikian juga jika diganti dengan x $\to -\infty$.

3. Teorema de l'Hospital untuk Bentuk Tak Tentu $\dfrac{\infty}{\infty}$

Jika $\lim\limits_{x\to a} |\, f(x)| = \infty$ dan $\lim\limits_{x\to a} |\, g(x)| = \infty$, maka bentuk $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ menjadi bentuk tak tentu $\dfrac{\infty}{\infty}$, jika x $\to$ a.

Untuk bentuk ini akan kita buktikan teorema de l'Hospital :

Jika f(x) dan g(x) dua buah fungsi yang mempunyai fungsi turunan dalam suatu interval terbuka dengan a sebagai ujung di sebelah kiri. Dan jika $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, serta $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (L terhingga), maka berlakulah :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Bukti :

Berhubung $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$, maka terdapatlah suatu interval dengan a sebagai ujung, sehingga untuk tiap-tiap x dari interval tersebut berlaku g'(x) $\neq 0$. Dalam interval tersebut kita dapat memilih dua buah titik x dan x_1 dengan $a<x<x_1$. Dengan menggunakan generalisasi teorema mean :

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x)},\ \text{dengan } x < x_0 < x_1$$

Hubungan di atas dapat ditulis dengan :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1-\dfrac{g(x_1)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_1)}{f(x)}}\cdot\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Jika $x_0 \to a$, maka $x \to a$.

Karena $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, maka selalu kita dapat memilih suatu x_1 sehingga : $\dfrac{g(x_1)}{g(x)}\to 0$ dan $\dfrac{f(x_1)}{f(x)}\to 0$

Sehubungan dengan $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L.$$

Teorema tersebut dapat pula dibuktikan untuk suatu interval terbuka, yang mempunyai titik ujung di sebelah kanan, dengan limit L juga. Yang ini berarti bahwa teorema de l'Hospital ini berlaku untuk setiap interval terbuka di sekitar a.

Sebagaimana halnya pada bentuk $\dfrac{0}{0}$, dapat dibuktikan pula, bahwa teorema ini berlaku juga pada kondisi : $L=\pm\infty$ dan juga $x\to\pm\infty$.

Contoh 1

Hitung: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\tan x}{\ln\tan 2x}$

Jawab : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\tan x}{\ln\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\tan x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{1}{\tan 2x}\cdot\dfrac{2}{\cos^2 2x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}\cdot\dfrac{2}{\cos^2 2x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cos 2x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\cos 2x=1$$

Contoh 2

Hitung $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^m}$ (a > 1, m > 0 dan m $\in$ R)

Jawab : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^m} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x \ln a}{mX^{m-1}}$ (ini masih berbentuk $\frac{\infty}{\infty}$, sehingga dipergunakan de l'Hospital sekali lagi)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \ln^2 a}{m\ (m-1)x^{m-2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a^x \ln^3 a}{m(m-1)(m-2)x^{m-3}}$$

= ….dst

$$= \frac{a^x \ln^m a}{m!}$$

$$= \infty$$

4. Bentuk-bentuk Tak Tentu Lainnya

Jika $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ maka bentuk f(x).g(x) menjadi $0.\infty$ yang tak tentu. Bentuk tersebut dapat kita ubah menjadi berbentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$ dengan jalan menulis bentuk f(x).g(x) sebagai bentuk $\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ atau $\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ (ialah bentuk- bentuk $\frac{0}{0}$ dan $\frac{\infty}{\infty}$, masing-masing)

Contoh 1

Hitung : $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\ln(1-x)$

Jawab : $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\ln(1-x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(1-x)}{\frac{1}{1-x}}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{1}{(1-x)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 1} -(1-x) = 0$$

Jika $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ maka untuk x = a, bentuk f(x) − g(x) menjadi berbentuk $\infty - \infty$ yang tak tentu. Bentuk tersebut dapat kita tulis dengan bentuk $\dfrac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x).g(x)}}$, ialah bentuk $\dfrac{0}{0}$

Contoh : 2

Hitung : $\lim_{x \to 1} (\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x})$

Jawab : $\lim_{x \to 1} (\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}) = \lim_{x \to 1} \dfrac{x \ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x}$

$= \lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x + \dfrac{x}{x} - 1}{\ln x + \dfrac{x-1}{x}} = \lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{\ln x + 1 - \dfrac{1}{x}}$ (masih berbentuk $\dfrac{0}{0}$, sehingga digunakan de l'Hospital sekali lagi)

$= \lim_{x \to 1} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$

$= \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

Jika $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, maka bentuk $\{f(x)\}^{g(x)}$, untuk x $\to$a, menjadi berbentuk 0^0 yang tak tentu. Demikian juga jika $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ maka bentuk $\{f(x)\}^{g(x)}$ akan menjadi berbentuk 1^∞ yang tak tentu. Atau jika $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ maka $\{f(x)\}^{g(x)}$ akan berbentuk ∞^0 yang tak tentu pula.

Untuk mencari nilai-nilai tak tentu bentuk-bentuk di atas biasa dilakukan dengan mengubahnya ke bentuk $0.\infty$ dengan jalan mengambil logaritmanya, karena bentuk g(x).ln f(x) akan berbentuk 0. ∞

Contoh 3

Tentukan $\lim_{x \to 0} x^x$

Jawab : $\lim_{x \to 0} x^x = \lim_{x \to 0} e^{\ln x^x} = \lim_{x \to 0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \to 0} x \ln x}$

Untuk $\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ (berbentuk $\frac{\infty}{\infty}$ yang tak tentu)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

Jadi $\lim_{x\to 0} x^x = e^0 = 1$

Latihan 3

Tentukanlah nilai-nilai tak tentu dari bentuk-bentuk di bawah ini:

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n - 1}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$
5. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$
6. $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^n}$
7. $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$
8. $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x})^{\tan x}$
9. $\lim_{x\to 0} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$
10. $\lim_{x\to 1} (\tan \frac{\pi x}{4})^{\tan \frac{\pi x}{2}}$

BAB V
KALKULUS INTEGRAL

Kegunaan integral sebagai ilmu bantu dalam geometri, teknologi, biologi dan ekonomi tak dapat disangkal lagi. Orang yang tercatat dalam sejarah pertama kali mengemukakan ide tentang integral adalah Archimedes seorang ilmuwan bangsa Yunani yang berasal dari Syracusa (287 – 212 SM). Archimedes menggunakan ide integral tersebut untuk mencari luas daerah suatu lingkaran, daerah yang dibatasi oleh parabola dan tali busur dan sebagainya. Sejarah mencatat orang yang paling berjasa dalam hal pengembangan kalkulus integral adalah Georg Friederich Benhard Riemann (1826 – 1866).

A. Integral Taktentu

1. Integral sebagai operasi invers dari turunan.

Misalkan fungsi f adalah turunan dari fungsi F, yang berarti

$F(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

Pandanglah pendiferensialan fungsi-fungsi di bawah ini

$F(x) = x^3 \Rightarrow F'(x) = f(x) = 3x^2$

$F(x) = x^3 + 5 \Rightarrow F'(x) = f(x) = 3x^2$

$F(x) = x^2 - \sqrt{17} \Rightarrow F'(x) = f(x) = 3x^2$

$F(x) = x^3 + c$ (c = konstanta) $\Rightarrow F'(x) = f(x) = 3x^2$

Sekarang timbul pertanyaan apakah dari hubungan $F'(x) = f(x)$ ini jika f(x) dikethui maka f(x) pasti dapat ditentukan ?

Suatu operasi mencari F(x) jika f(x) diketahui yang merupakan invers dari operasi pendiferensialan disebut operasi anti derivatif, anti diferensial, anti turunan yang biasa disebut Operasi integral.

Dari contoh di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa anti turunan dari $f(x) = 3x^2$ adalah $F(x) = x^3 + c$, c = konstanta.

Dari pengertian bahwa integral adalah invers dari Operasi pendiferensialan, maka apabila terdapat fungsi F(x) yang diferensial pada interval [a, b] sedemikian hingga $\frac{df(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$ maka anti turunan dari f(x) adalah F(x) + c, dan biasa kita tulis dengan notasi.

$\int f(x)dx == F(x) + c$ Notasi $\int$ adalah notasi integral tak tentu.

Catatan :

Orang yang pertama kali memperkenalkan lambang $\int$ sebagai lambang integral adalah Leibniz, yang disepakati sebagai slah seorang penemu dari Kalkulus.

Dari contoh di atas diperoleh hasil $\int 3x^2\, dx = x^3 + c$

Dengan memperhatikan diferensial-diferensial di bawah ini:

$F(x) = x + c \Rightarrow F'(x) = 1$

$F(x) = ax + c \Rightarrow F'(x) = a$

$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{n+1}{(n+1)}^{x^n} = x^n 1$

$F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c \Rightarrow F'(x) = \frac{a}{n+1}{(n+1)}^{x^n} = ax^n$

maka diperoleh integral fungsi-fungsi aljabar :

(1) $\int dx = x + c$

(2) $\int a dx = ax + c$

(3) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, n \neq -1$

(4) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, n \neq -1$

Dari integral adalah invers diferensial maka

(5) $\int \left(f(x) \pm f(x)\right)^{dx} = \int f(x) \pm \int g(x)dx$

(6) $\int a\ f(x)dx = {}^{a}\int f(x)dx$

Contoh 1. Tentukan $\int \left(x^3 2x\right)dx$

Jawab: $\int \left(x^3 - 2x\right)dx = \frac{1}{4} x^4 - 2.\frac{1}{2} x^2 + c$

$= \frac{1}{4} x^4 - x^2 + c$

Contoh 2. Integralkanlah $\left(3x^3 - 4\right)^2$

Jawab: $\int \left(3x^3 - 4\right)^2 dx = \int \left(gx^6 - 24x^3 + 16\right)dx$

$= 9.\frac{1}{7} x^7 - 24.\frac{1}{4} x^4 + 16x + c$

$= \frac{9}{7} x^7 - 6x^4 + 16x + c$

Mengingat pendiferensialan fungsi-fungsi yang lain; yaitu:

Jika f(x) sin x maka f′(x) = cos x

Jika f(x) cos x maka f′(x) = -sin x

Jika f(x) tg x maka f′(x) = $\sec^2$ x

Jika f(x) cotg x maka f′(x) = -cosec^2 x

Jika f(x) sec x maka f′(x) = sec x tgx

Jika f(x) cosec x maka f′(x) = -cosec x cotg x

Jika f(x) e^x maka f′(x) = e^x

Jika f(x) ln x maka f′(x) = $\frac{1}{x}$

Dengan mengingat integral adalah operasi invers dari pendiferensialan, maka akan diperoleh rumus-rumus pengintegralan.

(7)	$\int \cos x\, dx = \sin x + c$
(8)	$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
(9)	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$
(10)	$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$
(11)	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$
(12)	$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$
(13)	$\int e^x\, dx = e + c$
(14)	$\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert + c$

Contoh 3. Gradien pada titik (x,y) dari suatu kurva y = f(x) diketahui memenuhi hubungan $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$ dan melalui (3, 5).

Tentukan persamaan kurvanya.

Jawab:

Gradien kurva y = f(x) adalah $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$

Sehingga y = $\int (2x - 3) dx$

$y = 2.\frac{1}{2}x^2 - 3x + c$

$\Leftrightarrow y = x^2 - 3x + c$

Melalui (3, 5) $\rightarrow 5 = 3^2 - 3.3 + c$

$5 = c$

Jadi persamaannya : $y = x^2 - 3x + 5$

Jika suatu soal integral tak dapat diselesaikan dengan integral langsung, mungkin dengan mensubstitusi variabel baru soal tersebut dapat dipecahkan.

2. Pengintegralan Dengan Substitusi

Menentukan integral fungsi yang dapat disederhanakan menjadi bentuk

$\int (f(x))^n\, d(f(x))$.

Mengacu pada rumus pengintegralan bentuk $\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c,\ n \neq -1$,

maka pengintegralan $\int u^n\, dx = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c,\ n \neq -1$

Contoh 1.

Tentukan $\int \sqrt{x^3 + 2}\ \ x^2\, dx$

Jawab : Misalkan u = x^3 + 2 maka du = $3x^2 \rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}du$.

$$\text{Sehingga } \int \sqrt{x^3+2}\ x^2dx = \int \sqrt{u}\ .\frac{1}{3}du$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{9}(x^3+2)^{\frac{9}{2}} + c.$$

Contoh 2. : $\int \frac{(x+3)dx}{(x^2+6x)^{\frac{1}{9}}}$

Jawab : Misalkan u = x^2 + 6x $\rightarrow$ du = (2x + 6)dx

$$\rightarrow (x + 3)dx = \frac{1}{2}du.$$

$$\text{Sehingga : } \int \frac{(x+3)dx}{(x^2+6x)^{\frac{1}{9}}} = \int \frac{\frac{1}{2}du}{u^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{9}}du$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\frac{1}{2}}{3}u^{\frac{2}{9}} + c$$

$$= \frac{3}{4}(x^2+6x)^{\frac{2}{9}} + c.$$

Contoh 3.

Integralkanlah $\int \sin^5 3x\ dx$

Jawab : $\int \sin^5 3x\ dx = \int (\sin^2 3x)^2 \sin 3x\ dx$

Misalkan u = cos 3x $\rightarrow$ du = -3 sin 3x dx

$$\sin 3x\ dx = -\frac{1}{3}du$$

$$\text{Sehingga } \int (\sin^2 3x)^2 \sin 3x\ dx = \int (1 - \cos^2 3x)^2 \sin 3x\ dx$$

$$= \int (1-u^2)^2(-\frac{1}{3}du)$$

$$= -\frac{1}{3}\int (1-2u^2+u^4)du$$

$$= -\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{2}{9}\cos^3 3x - \frac{1}{15}\cos^5 3x + c.$$

Contoh 4.

$\int \sin^5 5x \cos^3 5x\ dx$

Jawab : Misalkan u = sin 5x $\rightarrow$ du = 5 cos 5x dx

$$\frac{1}{5}du - \cos 5x\ dx$$

$$\int \sin^6 5x \cos^3 5x\ dx = \int \sin^6 5x\ .(1-\sin^2 6x).\cos 5x\ dx$$

$$= \int \sin^6 5x\ .(1\text{-}\sin^2 6x)\ .\cos 5x\ dx$$

$$= \int u^6 (1-u^2)\ .\frac{1}{5}du$$

$$= \frac{1}{5}\int (u^6 - u^3)du$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{9}u^9) + c$$

$$= \frac{1}{35}\sin^7 5x - \frac{1}{45}\sin^9 5x + c$$

Latihan 5.

Tentukanlah :

1. $\int (x^3+2)^2 3x^2 dx$
2. $\int (x^3+2)^{\frac{1}{2}} x^2 dx$
3. $\int \frac{8x^2 dx}{(x^3+2)^3}$
4. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+2}}$
9. $\int \frac{\sin x\ dx}{\cos^3 x}$
10. $\int \frac{\cos x\ dx}{\sin^2 x}$
11. $\int \frac{\mathrm{tg}\ x\ dx}{\cos^3 x}$
12. $\int \frac{\cot g\ x\ dx}{\sin^2 x}$

5. $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx$

6. $\int x\sqrt[3]{1-2x^2}\,dx$

7. $\int x^3\sqrt{3-2x^4}\,dx$

8. $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$

13. $\int \dfrac{tg(3x+2)dx}{\cos(3x+2)}$

14. $\int \dfrac{\sin 2x\,dx}{(1-\cos 2x)^2}$

15. $\int \dfrac{\cos 3x\,dx}{(3+2\sin 3x)}$

16. $\int \dfrac{\sqrt{\tan x-1}}{\cos^2 x}dx$

Tentukan pula antiderivatif dari soal-soal di bawah ini !

17. $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+3}}dx$

18. $\int \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,dx$

19. $\int \dfrac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

20. $\int \dfrac{dx}{(a+bx)^{\frac{1}{3}}}\,dx$

21. $\int \dfrac{xdx}{(a+bx)^{\frac{2}{3}}}$

22. $\int \cos^5 x\,dx$

23. $\int \sin^2 x\cos^3 x dx$

24. $\int \cos^4 2x\sin^3 2xdx$

25. $\int \sin^3 3x\cos^5 3x\,dx$

26. $\int \cos^3 \dfrac{x}{3}\,dx$

27. $\int \sin^4 x\,dx$

28. $\int \sin^4 3x\cos^2 3x\,dx$

29. $\int (1+\cos 3x)^{\frac{3}{2}}\sin 3x\,dx$

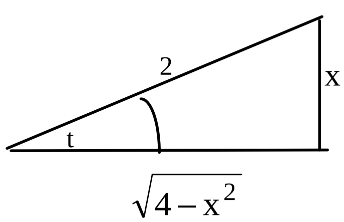
30. $\int (\tan^3 3x\sec^4 3x)dx$

3. Menentukan Hasil dari $\int\sqrt{a^2-x^2}$ dx dengan Substitusi x = sin t atau y=cost

Bentuk-bentuk integral di atas dapat digunakan substitusi dengan menggunakan bantuan sketsa geometri.

Contoh 1

Tentukan $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$



Misalkan $\sin t = \dfrac{x}{2} \longrightarrow x = 2\sin t$

$dx = 2\cos t$

$\cos t = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2} \longrightarrow \sqrt{4-x^2} = 2\cos t$

Sehingga $\int \sqrt{4-x^2}\ dx = \int 2\cos t . 2\cos t dt$

$$= 2\int 2\cos^2 t dt$$

$$= 2\int (1+\cos 2t)dt$$

$$= 2(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + c$$

Untuk mengembalikan hasil dalam t ini kembali ke variabel x digunakan fungsi invers dari fungsi trigonometri, yang biasa kita kenal sebagai fungsi siklometri.

Bahwa jika f(x) = sin x maka $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ = arc sin x

f(x) = cos x maka $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ = arc cos x

f(x) = tan x maka f^{-1} (x) = $\tan^{-1} x$ = arc tan x

Dengan hubungan jika y = sin x maka x = arc sin y

Dari persoalan di atas, dari

$$\int \sqrt{4-x^2}\ dx = 2t + \sin 2t + c$$

$$= 2t + 2\sin t.\cos t + c$$

sin t = $\frac{x}{2}$ $\longrightarrow$ t = arc sin $\frac{x}{2}$ yang berarti :

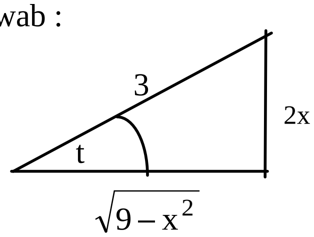
$$\int \sqrt{4-x^2}\ dx = 2 \text{ arc sin } \frac{x}{2} + 2.\frac{x}{2}.\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$

$$= 2 \text{ arc sin} \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + c$$

Contoh 2 .

Tentukan $\int \sqrt{9-4x^2}\ dx$

Jawab :



Misalkan sin t = $\frac{2x}{3}$ $\longrightarrow$ x = $\frac{3}{2}$ sin t

dx = $\frac{3}{2}$ cos t dt

dan t = arc $\frac{2x}{3}$

cos t = $\frac{\sqrt{9-4x^2}}{3}$ $\longrightarrow$ $\sqrt{9-4x^2}$ = 3 cos t

Sehingga : $\int \sqrt{9-4x^2}\ dx = \int 3\cos t.\frac{3}{2}\cos t dt$

$$= \frac{9}{4}\int \cos^2 t\,dt$$

$$= \frac{9}{4}\int \;(1 + \cos 2t)\,dt$$

$$= \frac{9}{4}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + c$$

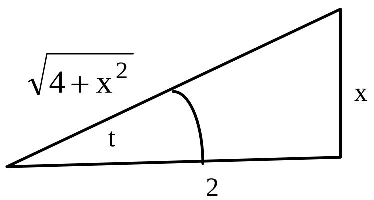
$$= \frac{9}{4}(t + \sin t.\cos t) + c$$

$$= \frac{9}{4}(\arc\sin\frac{2x}{3} + \frac{2x}{3}.\frac{\sqrt{9-4x^2}}{3}) + c$$

$$= \frac{9}{4}\ \arc\sin\frac{2x}{3} + \frac{3x}{2}\sqrt{9-4x^2} + c$$

Contoh 3.

Tentukanlah $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$



Misalkan $\tan t = \frac{x}{2} \longrightarrow x = 2\tan t$

$dx = 2\sec^2 t\,dt$

$\sec t = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} \longrightarrow \sqrt{4+x^2} = 2\sec t$

Sehingga $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2 t\,dt}{(2\tan t)^2\sec t}$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sec t\,dt}{\tan^2 t}$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^{-2} t\cos t\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^{-2} d(\sin t)$$

$$= -\frac{1}{4}\ \sin^{-1} t + c$$

$$= \frac{-1}{4\sin t} + c$$

$$= \frac{-1}{4\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}} + c$$

$$= \frac{-\sqrt{4+x^2}}{4x} + c$$

Latihan 6

Tentukanlah integral dari soal-soal di bawah ini !

1. $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$
2. $\int \sqrt{25-x^2}\ dx$
3. $\int \sqrt{3-x^2}\ dx$
4. $\int \sqrt{5-x^2}\ dx$
5. $\int \sqrt{9-4x^2}\ dx$
6. $\int \sqrt{3-4x^2}\ dx$
7. $\int \sqrt{5-3x^2}\ dx$
8. $\int \frac{(16-9x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}\ dx$
9. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}}$
10. $\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{\frac{3}{2}}}$
11. $\int \frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$
12. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$
13. $\int \frac{x^2 dx}{(4\ \ -x^2)^{\frac{5}{2}}}$
14. $\int \frac{x^2 dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$
15. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$
16. $\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\ dx$
17. $\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{\frac{1}{2}}}$
18. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\ dx$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$

4. Integral Parsial

Misalkan u dan v masing-masing fungsi yang diferensiabel dalam x, maka diferensial dari y = u.v adalah :

$$d(u.v) = u.dv + v.du$$

dan jika kedua ruas diintegralkan, akan diperoleh :

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

$$uv\ = \int udv + \int vdu$$

atau :

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Rumus integral ini disebut rumus **integral parsial** dimana rumus ini biasa digunakan apabila $\int vdu$ mudah dicari dalam upaya mencari penyelesaian dari $\int udv$ yang secara langsung sulit.

Contoh 1.

Tentukan integral-integral :

a. $\int x\sqrt{3+x}\ dx$

b. $\int x\sin 3x\ dx$

Jawab :

a. Misalkan u = x maka du = dx

dan dv = $\sqrt{3+x}$ maka v = $\int \sqrt{3+x}\ dx = \int (3+x)^{\frac{1}{2}} d(3+x) = \dfrac{2}{3}(3+x)^{\frac{3}{2}} + c$

Sehingga $\int x\sqrt{3+x}\ dx = x.\ \dfrac{2}{3}(3+x)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(3+x)^{\frac{3}{2}}\ dx$

$$= \tfrac{2}{3}x(3+x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3}\int (3+x)^{\frac{3}{2}} d(3+x)$$

$$= \tfrac{2}{3}x(3+x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3}.\tfrac{2}{5}(3+x)^{\frac{5}{2}} + c$$

$$= \tfrac{2}{3}x(3+x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{4}{15}(3+x)^{\frac{5}{2}} + c$$

b. Misal u = x $\longrightarrow$ du = dx

dv = sin 3x dx $\longrightarrow$ v = $\int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + c$

Sehingga $\int x\sin 3x\ dx = x(-\tfrac{1}{3}\cos 3x) - \int (-\tfrac{1}{3}\cos 3x)dx$

$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + c$$

Untuk soal-soal tertentu kadang-kadang diperlukan lebih dari sekali memparsialkan.

Contoh 2.

Tentukanlah $\int x^2\cos(2x+3)dx$

Jawab : Misalkan u = x^2 maka du = 2x dx dan dv = cos(2x + 3) dx

Maka v = $\int \cos(2x+3)dx = \dfrac{1}{2}\sin(2x+3) + c$

Sehingga :

$$\int x^2\cos(2x+3)dx = x^2(\frac{1}{2}\sin(2x+3) - \int \frac{1}{2}\sin(2x+3).2xdx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\sin(2x+3) - \int x\sin(2x+3)dx \quad \text{…. (i)}$$

Integral $\int x\sin(2x+3)dx$ dapat dicari dengan memparsialkan sekali lagi

$$\int x\sin(2x+3)dx = \int x(-\tfrac{1}{2}d(\cos(2x+3)) = -\tfrac{1}{2}\int x d(\cos(2x+3))$$

$$= -\tfrac{1}{2}(x\cos(2x+3) - \int \cos(2x+3)dx)$$

$$= -\tfrac{1}{2}x\cos(2x+3) + \tfrac{1}{4}\sin(2x+3) + c \quad \text{……..(ii)}$$

Dari (i) dan (ii) diperoleh :

$$\int x^2\cos(2x+3)dx = \tfrac{1}{2}x^2\sin(2x+3) -(-\tfrac{1}{2}x\cos(2x+3) + \tfrac{1}{4}\sin(2x+3)) + c$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2\sin(2x+3) + \tfrac{1}{2}x\cos(2x+3) - \tfrac{1}{4}\sin(2x+3)) + c$$

Pengembangan :

Khusus untuk pengintegralan parsial berulang bentuk $\int udv$ yang turunan ke-k dari u adalah 0 (nol), dan integral ke-k dari v ada, maka integral berulang di atas dapat ditempuh cara praktis sebagaimana contoh di bawah ini.

Contoh 2

Tentukanlah $\int x^2\cos(2x+3)dx$

Jawab :

diturunkan		diintegralkan
x^2	$+$	$\cos(2x+3)$
$2x$	$-$	$\frac{1}{2}\sin(2x+3)$
2	$+$	$-\frac{1}{4}\cos(2x+3)$
0		$-\frac{1}{8}\sin(2x+3)$

Sehingga :

$$\int x^2\cos(2x+3)dx = \tfrac{1}{2}x^2\sin(2x+3) + \tfrac{1}{2}x\cos(2x+3) - \tfrac{1}{2}\sin(2x+3) + c$$

Contoh 3

Integralkanlah : $\int x^4\sin(2x+3)dx$

Jawab :

diturunkan		diintegralkan
x^4	$+$	$\sin(2x+3)$
$4x^3$	$-$	$-\frac{1}{2}\cos(2x+3)$
$12x^2$	$+$	$-\frac{1}{4}\sin(2x+3)$
$24x$	$-$	$\frac{1}{8}\cos(2x+3)$
24	$+$	$\frac{1}{16}\sin(2x+3)$

$0 \qquad -\frac{1}{32}\cos(2x+3)$

Sehingga :

$$\int x^4 \sin(2x+3)dx = -\frac{1}{2}x^4\cos(2x+3) + x^3\sin(2x+3) + \frac{3}{2}x^2\cos(2x+3) - $$
$$-\frac{3}{2}x\sin(2x+3) - \frac{3}{4}\cos(2x+3) + c$$

Latihan 7

Dengan menggunakan integral parsial, carilah integral berikut ini :

1. $\int x(2x-3)^5 dx$
2. $\int x(3x+4)^6 dx$
3. $\int \frac{3x}{2}(x-2)^{\frac{3}{2}} dx$
4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-3}}$
5. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{3x-1}}$
6. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2-4}}$
7. $\int 3x\cos 3x dx$
8. $\int x\sin(\frac{1}{5}x)dx$
9. $\int (3x+4)\cos(4x-3)dx$
10. $\int x^2 \cos x dx$
11. $\int x^2 \sin(3x-3)dx$
12. $\int x^2 \sin(3x+2)dx$
13. $\int x^2\sqrt{9-x}dx$
14. $\int x^3\cos(2x-3)dx$
15. $\int \sin^3 x dx$ (petunjuk ubah kebentuk $\int \sin^2 x \sin x dx$)
16. $\int \cos^4 x dx$
17. $\int \frac{xdx}{x-1}$
18. $\int x\sqrt{2-x}dx$
19. $\int x\cos x dx$
20. $\int x\cos(2x-\frac{5}{3})dx$

Pengayaan :

Pengintegralan fungsi-fungsi trigonometri, kecuali dengan substitusi dapat juga digunakan rumus – rumus reduksi di bawah ini :

1. $\int \sin^n u du = \frac{-\sin^{n-1} u \cos u}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} u du$

2. $\int \cos^n u du = \frac{\cos^{n-1} u \sin u}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u du$

3. $\int \sin^n u \cos^m du = \frac{\sin^{n+1} u \cos^{m+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^n u \cos^{m-2} u du, n \neq -m$

$$= \frac{-\sin^{n-1} u \cos^{m+1} u}{m+n} + \frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2} u \cos^{n} u du, n \neq -m$$

Bukti :

1. $\int \sin^{n} u du = \int \sin^{n-1} u \sin u du$

$$= -\int \sin^{n-1} u d(\cos u)$$

$$= -\sin^{n-1} u \cos u + \int \cos u d(\sin^{n-1} u)$$

$$= -\sin^{n-1} u \cos u + (n\text{-}1)\int \cos u \sin^{n-2} u \cos u du$$

$$= -\sin^{n-1} u \cos u + (n\text{-}1)\int \cos^{2} u \sin^{n-2} u du$$

$$= -\sin^{n-1} u \cos u + (n\text{-}1)\int (1-\sin u)\sin^{n-2} u du$$

$$= -\sin^{n-1} u \cos u + (n\text{-}1)\int \sin^{n-2} u du - (n-1)\int \sin^{n} u du$$

$$n\int \sin^{n} u du = -\sin^{n-1} u \cos u + (n\text{-}1)\int \sin^{n-2} u du$$

Jadi $\int \sin^{n} u du = \dfrac{-\sin^{n-1} u \cos u}{u} + \dfrac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} u du$

Contoh 1

Tentukanlah $\int \sin^{3}(5x-2)dx$

Jawab : $\int \sin^{3}(5x-2)dx = \frac{1}{5}\int \sin^{3}(5x-2)d(5x-2)$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{\sin^{2}(5x-2)\cos(5x-2)}{3} + \frac{2}{3}\int \sin(5x-2)d(5x-2)\right.$$

$$= -\frac{1}{15}\sin(5x-2)\cos(5x-2) - \frac{2}{15}\cos(5x-2)$$

Contoh 2

Tentukanlah $\int \cos^{4}(2x+3)dx$

Jawab : $\int \cos^{4}(2x+3)dx = \frac{1}{2}\int \cos^{4}(2x+3)d(2x+3)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^{3}(2x+3)\sin(2x+3)}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^{2}(2x+3)d(2x+3)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cos^{3}(2x+3)\sin(2x+3) + \frac{3}{8}\left(\frac{\cos(2x+3)\sin(2x+3)}{2} + \frac{1}{2}\int d(2x+3)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cos^{3}(2x+3)\sin(2x+3) + \frac{3}{16}\cos(2x+3)\sin(2x+3) + \frac{3}{16}(2x+3) + c$$

Latihan 8

Dengan menggunakan rumus reduksi selesaikan pengintegralan di bawah ini

1. $\int \sin^4 x dx$
2. $\int \cos^4 x dx$
3. $\int \cos^5 x dx$
4. $\int \sin^5 x dx$
5. $\int \cos^5 3x dx$
6. $\int \cos^3 (2x+3) dx$
7. $\int \cos^5 (3x+5) dx$
8. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$
9. $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$
10. $\int \sin 3x \cos^4 3x dx$
11. $\int \sin^3 (2x+3) \cos^2 (2x+3) dx$
12. $\int x^2 \sin(3x-2) dx$
13. $\int x^3 \cos(2x+3) dx$
14. $\int (2x+3)^3 \sin(4x+6) dx$
15. $\int (2x-3).^2 \cos(4x-6) dx$
16. $\int x^4 \sin(2x+3) dx$

5. Pengintegralan $\int \frac{du}{u}$

Dari f(x) = ln x $\rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ maka $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

Yang berarti $\boxed{\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c.}$

Contoh 1.

Tentukanlah $\int (1-e^{2x})^2 e^{2x} dx$

Jawab : Misalkan u = 1 – e^{2x} maka

du = -2e^{2x} dx $\rightarrow$ e^{2x} dx = $-\frac{1}{2}du$

Sehingga $\int (1-2^{2x})e^{2x}dx = \int u^2(-\frac{1}{2}du) = -\frac{1}{2}\int u^2 du$

$= -\frac{1}{2}.\frac{1}{3}u^3 + c$

$= -\frac{1}{6}(1-e^{2x}) + c$

Contoh 2.

Tentukanlah $\int \sin x\, e^{3-\cos x} dx$

Jawab misalkan u = 3 – cos x

du = sin x dx

sehingga $\int \sin x\, e^{3-\cos x} dx = \int e^u du$

$= e^u + c$

$$= e^{3-\cos x} + c$$

Contoh 3.

Integralkanlah $\int \frac{dx}{x(5+\ln x)}$

Jawab : Misalkan u = 5 + ln x

$$du = \frac{dx}{x}$$

Sehingga $\int \frac{dx}{x(3+\ln x)} = \int \frac{du}{u}$

$$= \ln |u| + c$$

$$= \ln(5 + \ln |x|) + c$$

Contoh 4.

Integralkanlah $\int \log (2x+3)\, dx$

Jawab : Misalkan u = log (2x + 3) = $\frac{\ln (2x+3)}{\ln 10}$

$$\rightarrow du = \frac{2\,.\,dx}{(2x+3)\ln 10}$$

$$du = dx = \frac{1}{2} d\ \ (2x+3) \rightarrow u = \frac{1}{2}(2x+3) + c$$

Sehingga :

$$\int \log (2x+2) dx = \frac{1}{2}(2x+3)\log(2x+3) - \int \frac{1}{2}(2x+3)\,.\,\frac{2\,dx}{(2x+3)\ln 10}$$

$$= \frac{1}{2}(2x+3)\log (2x+3) - \frac{1}{\ln 10}\int dx$$

$$= \frac{1}{2}(2x+3)\log (2x+3) - \frac{x}{\ln 10} + c.$$

Contoh 5.

Integralkanlah $\int e^x \sin x\, dx$

Jawab : $\int e^x \sin x\, dx = -\int ex^x d(\cos x)$

$$= -\left(e^x \cos x - \int \cos x\, d\,(e^x)\right).$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x\, d(\sin x)$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x\, d(e^x)$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$= 2\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + c$$

Jadi $\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c.$

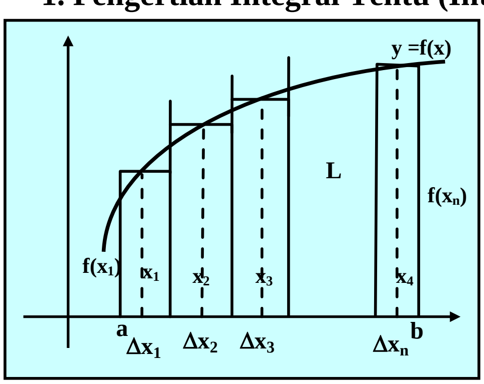
Latihan 9.

Tentukanlah integral dari :

1. $\int \frac{x\,dx}{x^2 - 1}$
2. $\int \frac{x + 2\,dx}{x + 1}$
3. $\int e^{-x} dx$
4. $\int e^{3-4x} dx$
5. $\int \frac{dx}{u^x + 1}$
6. $\int \frac{x^2 dx}{1 - 2x^3}$
7. $\int tg(3x - 4)\, dx$
8. $\int x^2 ctg(x^2 + 4)\, dx$
9. $\int \sec x \, dx \begin{pmatrix} \text{Petunjuk mis.} \\ u = \sec x + tg\, x \end{pmatrix}$
10. $\int \cos 3x \, dx$
11. $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x} - 3}$
12. $\int \frac{(e^x - 1)dx}{e^x - 1}$
13. $\int \frac{(e^{2x} - 1)dx}{e^{2x} - 3}$
14. $\int \frac{\sec^2 5x \, dx}{tg\, 5x}$
15. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$
16. $\int \frac{e^{2x} dx}{1 + e^{2x}}$
17. $\int \sqrt{x^2 - 16}\, dx$
18. $\int \sqrt{x^2 - 36}\, dx$
19. $\int \sqrt{3x^2 + 5}\, dx$
20. $\int \sqrt{3x^2 - 4x + 5}\, dx$

B. Integral Tentu

1. Pengertian Integral Tentu (Integral Riemann)



Gambar disamping memperlihatkan daerah L yang dibatasi oleh y = f(x), sumbu x dari x = a sampai dengan x = b.

Untuk mencari luas daerah L ditempuh langkah-langkah sebagai berikut.

Gb.3.1

Langkah pertama, interval [a,b] dibagi menjadi n interval dengan panjang masing-masing interval bagian Δx_1, Δx_2, Δx_3, …, Δx_n. Sedang pada masing-masing interval ditentukan titik-titik x_1, x_2, x_3, …, x_n. Selanjutnya dibuat persegipanjang-persegipanjang dengan panjang masing-masing $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, …, $f(x_n)$ dan lebar masing-masing Δx_1, Δx_2, Δx_3, …, Δx_n sehingga :

Luas persegipanjang pertama	$= f(x_1).\Delta x_1$
Luas persegipanjang kedua	$= f(x_2).\Delta x_2$
Luas persegipanjang ketiga	$= f(x_3).\Delta x_3$
…	$= \ldots$
Luas persegipanjang ke-n	$= f(x_n).\Delta x_n$ +
Jumlah luas seluruh persegipanjang	$= f(x_1).\Delta x_1+f(x_2).\Delta x_2+f(x_3).\Delta x_3+\ldots+f(x_n).\Delta x_n$
	$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x_i.$

Dan untuk menekankan bahwa pengambilan jumlah tersebut meliputi daerah pada interval [a,b], notasi sigma di atas sering kita tulis dengan notasi.

Jumlah semua luas persegipanjang = $\sum_{x=a}^{b} f(x).\Delta x.$

Jika n dibuat cukup besar maka jumlah luas diatas mendekati luas daerah L. Sehingga luas daeah L adalah nilai limit jumlah di atas.

$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{b} f(x).\Delta x.$$

Notasi tersebut di atas biasa ditulis dengan notasi integral tertentu atau integral Riemann :

$$\boxed{\mathbf{L = \int_a^b f(x)dx.}}$$

$\int_a^b$: notasi integral tertentu

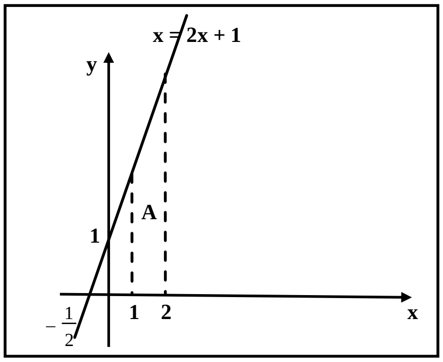
a : batas bawah integral

b : batas atas integral

Contoh 8

Tunjukkan dengan jalan mengarsir daerah yang ditunjukkan oleh $\int_1^3 (2x+1)dx.$

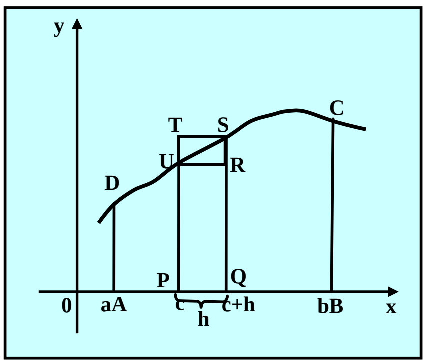
Jawab : Persamaan kurva y = 2x + 1



Integral di atas menyajikan daerah yang dibatasi oleh kurva y = 2x + 1, sumbu x, dengan garis-garis x = -1 dan x = 2, seperti daerah yang diarsir disamping.

2. Menentukan nilai $\int_a^b f(x)dx$

Untuk menentukan nilai $\int_a^b f(x)dx$ dicari sebagai berikut :



Gb.3.4

Andaikan akan dicari luas daerah yang dibatasi oleh y = f(x), sumbu x dari x = a sampai dengan x = b.

Misalkan luas daerah yang dicari adalah L(b), maka

$L(b) = \int_a^b f(x)dx$, dan

$L(c) = \int_a^c f(x)dx$

$L(c + h) = \int_a^{c+h} f(x)dx$

$L(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$

Luas PQRU < luas PQSU < luas PQST

f(c).h < L (c + h) – L(c) < f(c + h).h

$f(c) < \dfrac{L(c+h)-L(c)}{h} < f(c+h), h \neq 0$

Jika $h \to 0$ maka

$$\lim_{h\to 0} f(c) \le \lim_{h\to 0} \frac{L(c+h) - L(c)}{h} \le \lim_{h\to 0} f(c+h)$$

$f(c) \le L'(c) \le f(c) \Rightarrow L'(c) = f(c)$.

Oleh karena hasil tersebut berlaku untuk setiap c pada interval [a,b] maka setiap $x \in [a,b]$ berlaku :

$L'(x) = f(x)$ sehingga

$L(x) = \int f(x)dx$.

Jika F(x) adalah anti turunan dari f(x) maka

$$L(x) = F(x) + c \text{ ………. } (1)$$

Dari L(a) = 0, berarti F(a) + c = 0, sehingga c = -F(a)

$(1) \to L(b) = F(b) + c = F(b) - F(a)$.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Contoh 9

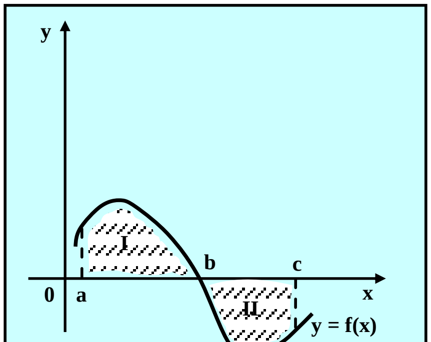
Tentukan nilai integral dari $\int_1^3 (2x+3)dx$.

Jawab : $\int_1^3 (2x+3)dx = [x^2 + 3x]_1^3$

$= (3^2 + 3.3) - (1^2 + 3.1) = 18 - 4$

$= 14$.

Untuk menentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = f(x), sumbu x dan garis x = a dan garis x = b.



Gb.3.5

Untuk daerah di atas sumbu x atau pada interval $a \le x < b$, $f(x) > 0$ untuk setiap x, sehingga $\sum_{x=a}^{b} f(x).\Delta x > 0$ yang berarti $\int_a^b f(x)dx$ adalah positip.

Sedang daerah yang terletak di bawah sumbu x atau $b < x \le c$, maka $f(x) < 0$ untuk setiap x.

Sehingga $\sum_{x=b}^{c} f(x).\Delta x < 0$ yang berarti $\int_b^c f(x)dx$ adalah negatif. Sehingga nilai integral $\int_b^c f(x)dx$ untuk daerah di bawah sumbu x bernilai **negatif**.

Contoh 10

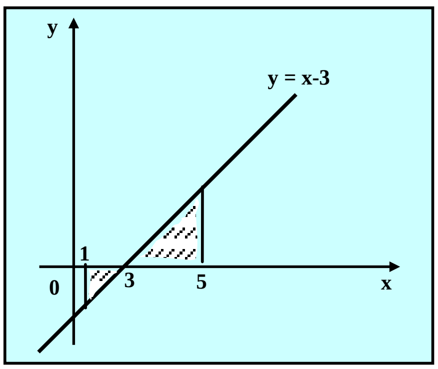
a. Hitung $\int_1^5 (x-3)dx$

b. Hitung luas daerah yang disajikan oleh integral di atas.

Penyelesaian : $\int_1^5 (x-3)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_1^5$

$$= \left(\frac{1}{2}.5^2 - 3.5\right) - \left(\frac{1}{2}.1^2 - 3.1\right) = \left(12\frac{1}{2} - 15\right) - \left(\frac{1}{2} - 3\right)$$

$$= -2\frac{1}{2} - \left(-2\frac{1}{2}\right) = 0\,.$$



Gb.3.6

Karena ada daerah yang terletak di bawah sumbu x, maka nilai integral tertentunya negatif, sehingga luas daerah yang diarsir

L = –I + II, atau

$$L = -\int_1^3 (x-3)dx + \int_3^5 (x-3)dx$$

$$= -\left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_1^3 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_3^5$$

$$= -\left[\left(\frac{1}{2}.3^2 - 3.3\right) - \left(\frac{1}{2}.1^2 - 3.1\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{2}.5^2 - 3.5\right) - \left(\frac{1}{2}.3^2 - 3.3\right)\right]$$

$$= -\left[\left(4\frac{1}{2} - 9\right) - \left(\frac{1}{2} - 3\right)\right] + \left[\left(12\frac{1}{2} - 15\right) - \left(4\frac{1}{2} - 9\right)\right]$$

$$= -\left(-4\frac{1}{2} - \left(-2\frac{1}{2}\right)\right) + \left(\left(-2\frac{1}{2}\right) - \left(-4\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= -(-\tfrac{1}{2}^{-2}) + 2$$

$$= 2 + 2 = 4$$

Jadi luas daerahnya = 4 satuan luas.

Latihan 10.

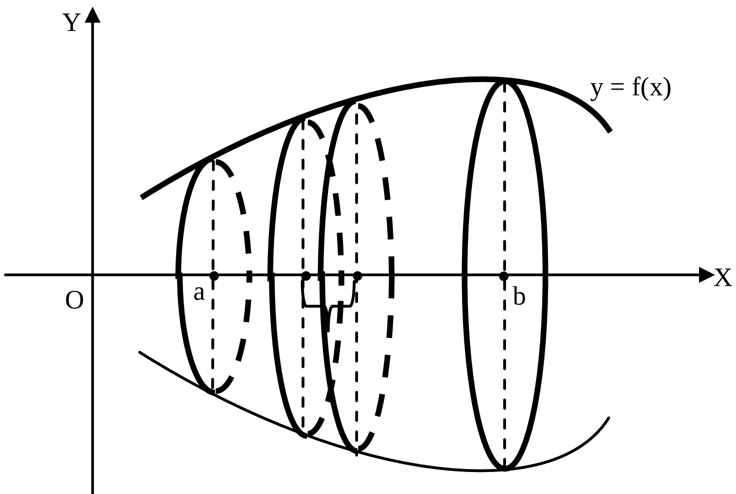
Tentukan nilai integral tertentu dari soal-soal di bawah ini

1. $\int_{-2}^{1} (x-1)dx$
2. $\int_{-2}^{2} x^2 dx$
3. $\int_{0}^{9} x\sqrt{x}\, dx$
4. $\int_{-1}^{3} (3x-2)dx$
5. $\int_{1}^{2} (x-1)(3x-1)dx$
6. Tentukan p sedemikian hingga $\int_{0}^{p} x(2-x)dx = 0$
7. $\int_{0}^{p} (x^{\frac{1}{2}}+1)^3 dp$
8. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$
9. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x + \cos 2x)dx$
10. $\int_{0}^{\frac{1}{4}\pi} \cos^3 x \sin x\, dx$
11. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh f(x) = 6 - 2x, sumbu x dari x = 1 samapai dengan x = 3.
12. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh f(x) = x^2+2, sumbu X dari x = 1 sampai dengan x = 4
13. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh f(x) = 16 – x^2 dari x = 0 sampai dengan x = 4
14. Tunjukkan bahwa luas daerah lingkaran dengan jari-jari r adalah πr^2
15. Tunjukkan bahwa luas daerah ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ adalah πab.

16. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva berikut :
   a. $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$
   b. $y = x^2 + 4$ dan $x + y = 6$
   c. y = sin x dan y = cos x dari $x = \frac{\pi}{4}$ sampai dengan $x = 1\frac{1}{4}\pi$

3 Menentukan Volum Benda Putar

Perhatikan gambar di bawah ini :



Untuk menentukan volum benda putar yang dibentuk oleh y = f(x) yang diputar mengelilingi sumbu-X pada interval [a,b] kita bagi-bagi benda tersebut menjadi keratan-keratan, di mana setiap keratan mempunyai volum :

$$v_i = \pi f(x_i)^2 . \Delta x_i$$

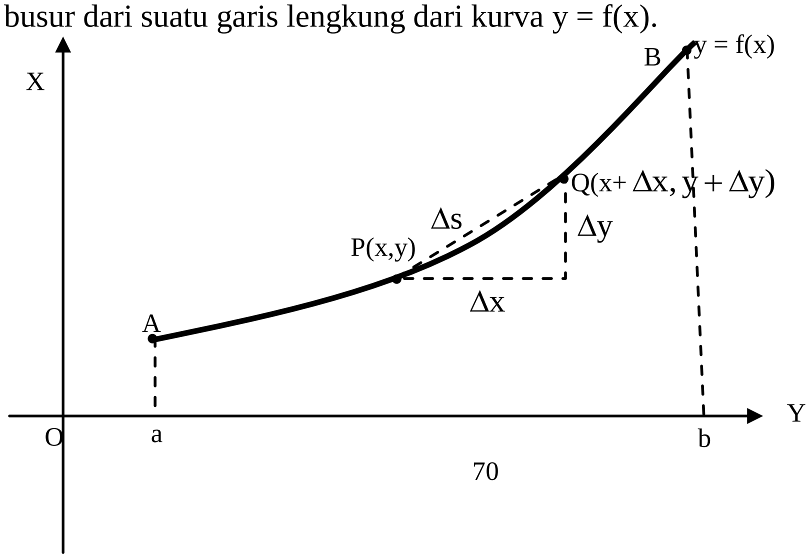
Sehingga volum keseluruhan :

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i = a}^{b} \pi f(x_i)^2 . \Delta x_i = \pi \sum_{a}^{b} f(x_i)^2 . \Delta x_i \quad \text{atau :}$$

$$\boxed{v = \pi \int_a^b f(x)^2 dx \quad \text{atau} \quad v = \pi \int_a^b y^2 dx}$$

4. **Panjang Busur (Materi Pengayaan)**

   Aplikasi lebih klanjut dari integral tertentu adalah untuk menghitung panjang busur dari suatu garis lengkung dari kurva y = f(x).



Misalkan gambar di atas memperlihatkan kurva y = f(x), dan titik-titik A dan B pada kurva y = f(x). Jika kurva y = f(x) dan turunan-turunan kontinu dalam interval [a,b], maka panjang busur AB dapat ditentukan sebagai berikut :
Misalkan titik-titik P(x,y) dan titik $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ terletak pada kurva y = f(x). Panjang PQ dapat ditentukan dengan menggunakan teorema Pythagoras :

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

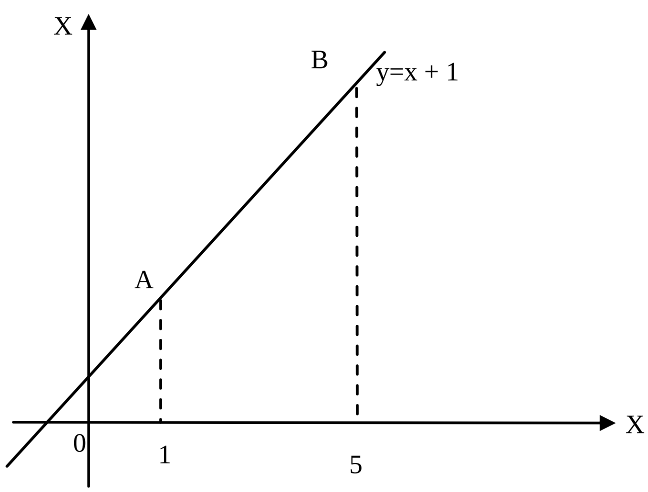
Panjang busur AB dapat dinyatakan sebagai limit jumlah segmen-segmen Δs yaitu :

$$\begin{aligned} s &= \lim_{\Delta s \to 0} \sum \Delta s \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,.\Delta x \end{aligned}$$

Hubungan di atas jika disjikan dalam notasi Riemann, akan menjadi :

$$\boxed{s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dy}$$

Contoh 1.
Tentukan panjang garis dengan persamaan y = x + 1 dari x = 1 sampai dengan x = 5 !
Jawab:



Dari y = x + 1 maka $\frac{dy}{dx} = 1$

Panjang busur AB :

$$\begin{aligned} s &= \int_1^5 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ &= \int_1^5 \sqrt{1 + 1^2}\, dx \\ &= \int_1^5 \sqrt{2}\, dx \\ &= \left[x\sqrt{2}\right]_1^5 = 5\sqrt{2} - 1\sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Jadi panjang ruas AB = $4\sqrt{2}$ satuan panjang.

Catatan : Kebenaran jawab ini dapat anda cek dengan menggunakan rumus jarak dua titik A(1,2) dan B(5,6).

Untuk kurva-kurva yang disajikan dalam bentuk parameter x = x(t) dan y = y(t) maka panjang busur AB dapat ditentukan dengan rumus :

$$\boxed{s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}$$

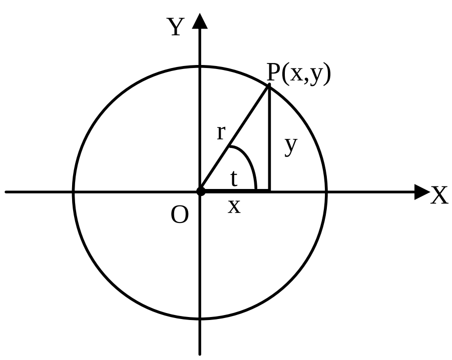
Rumus ini diturunkan dari rumus $s = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ dengan menggunakan substitusi :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Contoh 2.

Tunjukkan bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah $2\pi r$.

Bukti :



Persamaan lingkaran di samping ini, jika disajikan dalam persamaan parameter :

x = r cos t

y = r sin t

Dari x = r cos t $\rightarrow \frac{dy}{dt} = -r\sin t$

y = r sin t $\rightarrow \frac{dx}{dt} = r\cos t$

Sehingga keliling lingkarannya, digunakan rumus

$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\,dt$, untuk lingkaran di atas :

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}\,dt$$

$$= r\int_0^{2\pi} dt = r\left[t\right]_0^{2\pi} = r(2\pi - 0) = 2\pi r$$

Dengan demikian terbukti bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah $2\pi r$ satuan panjang.

Latihan 11.

1. Tentukan volum benda yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva di bawah ini diputar sekeliling sumbu X.
   a. $y = 9 - x^2$
   b. $y = x^2$ dan $y = 4x$
   c. $y = x^2$ dan $y = x^3$
2. Hitung panjang busur dari kurva $y = 2x + 3$ dari $x = 1$ sampai dengan $x = 5$
3. Hitung panang busur kurva $y = x^{\frac{3}{2}}$ dari $x = 1$ hingga $x = 5$
4. Hitung panjang busur kurva $y = 2x^{\frac{3}{2}}$ dari $x = 0$ hingga $x = 5$
5. Tentukan panjang busur kurva $24xy = x^4 + 48$ dari $x = 2$ sampai dengan $x = 4$
6. Tentukan panjang busur sikloida $x = \theta - \sin\theta$; $y = 1 - \cos\theta$ dari $\theta = 0$ dan $\theta = 2\pi$
7. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $6xy = x^4 + 3$ dari $x = 1$ sampai dengan $x = 2$
8. Fungsi biaya marginal suatu produk adalah : $P' = \frac{1}{30}Q^2 - 2Q - 450$. Jika diketahui biaya tetapnya adalah Rp 1.000.000,00.
   Carilah fungsi biayanya dan biaya total untuk produksi 40 unit.
9. Diketahui fungsi permintaan : $P = 50 - 4Q^2$
   a. Carilah surplus konsumsen jika Q = 3
   b. Gambarlah fakta itu.
10. Fungsi permintaan penawaran suatu barang adalah : $P = 12 - \frac{x}{50}$ dan $P = \frac{x}{20} + 5$
    Tentukan besarnya surplus konsumen dan surplus produsen dan gambarkan pada suatu diagram.

DAFTAR PUSTAKA

Ayres, Frank Jr. (1972), *Theory and Problem of Differensial and Integral Calculus.* Mc Graw Hill : New York.

Fatah Asyarie, dkk. (1992), *Kalkulus untuk SMA.* Pakar Raya : Bandung.

Herry Sukarman. (1998), *Kalkulus*, Makalah Penataran Guru Matematika MGMP SMU. PPPG matematika : Yogyakarta.

Johannes, H dan Budiono Sri Handoko. (1988), *Pengantar Matematika untuk Ekonomi.* LP3ES : Jakarta.

Piskunov, N. (1974), *Differensial and Integral Calculus.* Mir Publishers : Moscow.

Purcell, Edwin Jaud Dale Varberg. *Kalkulus dan Geometri Analitik.* PT. Penerbit Erlangga : Jakarta.

Sri Kurnianingsih, dkk. (1995), *Matematika SMU,* Yudhistira : Jakarta.

Sumadi, dkk. (1997), *Matematika SMU,* PT. Tiga Serangkai : Surakarta.

Thomas, George B. Jr. (1977), *Calculus and Analytic Geometry,* Addison-Werley Publishers Company.