

KEMAHIRAN MATEMATIKA

Fadjar Shadiq, M.App.Sc.

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL

**DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA**

YOGYAKARTA

2009



Daftar Isi

Kata Pengantar	i
Daftar Isi	ii
Kompetensi/Sub Kompetensi dan Peta Bahan Ajar	iii
Skenario Pembelajaran.....	iv
Bab I	
Pendahuluan.....	1
Latar Belakang	1
Tujuan Penulisan	1
Ruang Lingkup	1
Bab II	
Pentingnya Penalaran, Pemecahan Masalah, dan Komunikasi	2
A. Penalaran.....	2
B. Pemecahan Masalah	3
C. Komunikasi.....	5
Bab III	
Implikasinya pada Strategi pembelajaran Matematika di Kelas	9
A. Lebih ke Penalaran Induktif (Induksi)	9
B. Pentingnya pemecahan Masalah	11
C. Komunikasi dalam pembelajaran Matematika.....	12
Bab IV	
Penilaian Penalaran, Komunikasi, dan Pemecahan Masalah.....	13
A. Penilaian Menurut Kurikulum 2004	13
B. Indikator Kemampuan Bernalar dan Berkomunikasi.....	14
C. Indikator Pemecahan Masalah	14
D. Contoh Soal untuk Penalaran dan Pemecahan Masalah	15
Bab V	
Penutup	18
Daftar Pustaka	19

KOMPETENSI

Mampu mengembangkan instrumen penilaian matematika dan bahan-bahan yang bertujuan membina kemampuan siswa dalam penalaran, komunikasi, dan pemecahan masalah matematika.

SUB KOMPETENSI

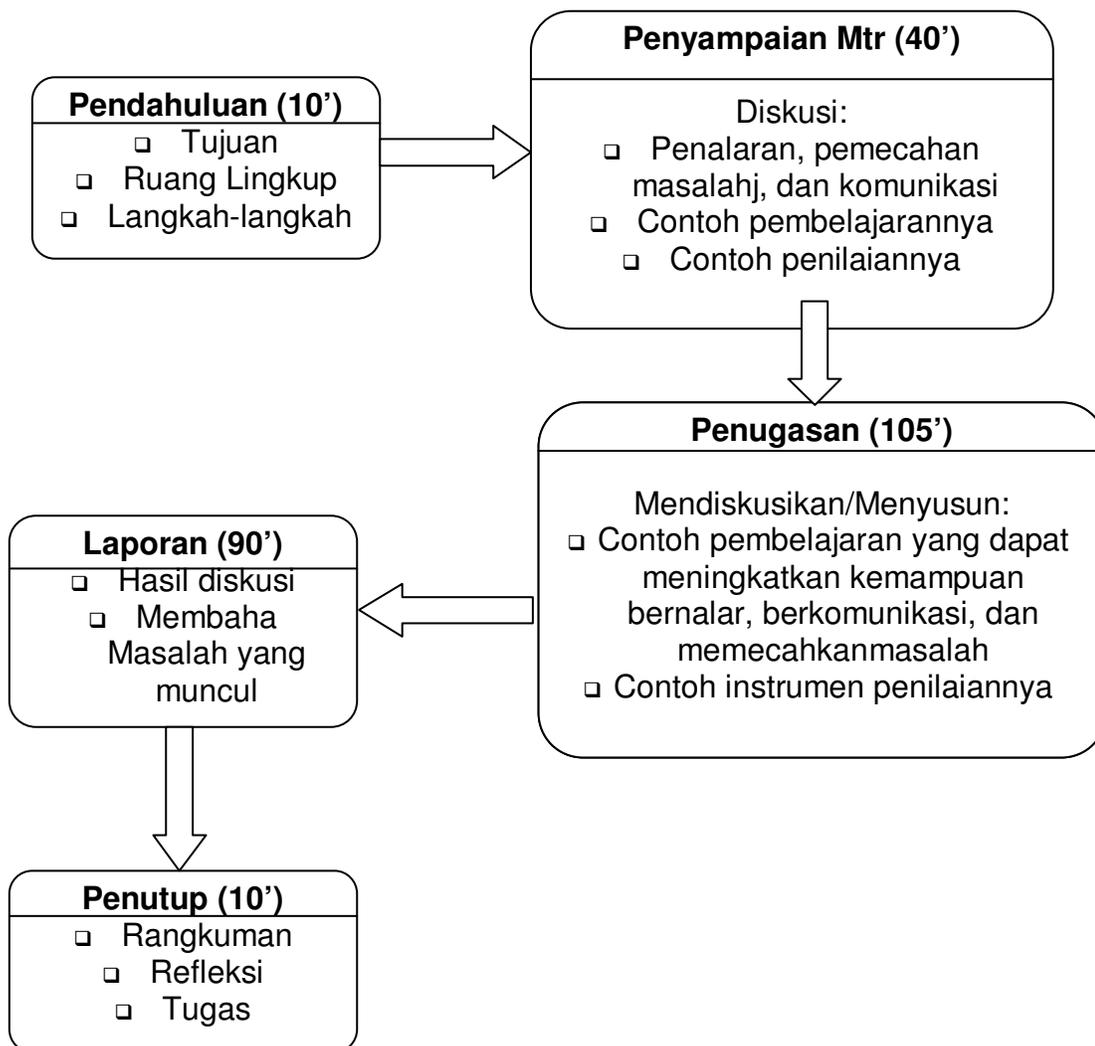
- Menjelaskan pengertian penalaran, komunikasi, dan pemecahan masalah.
- Mampu memilih strategi pembelajaran untuk membina kemampuan siswa dalam penalaran, komunikasi, dan pemecahan masalah.
- Mampu menyusun contoh-contoh soal matematika yang dapat digunakan untuk menilai kemampuan siswa dalam bernalar, berkomunikasi, dan memecahkan masalah.

PETA BAHAN AJAR

Sub kompetensi pertama merupakan materi ulangan pada diklat jenjang dasar yang merupakan pengetahuan prasyarat untuk mencapai dua subkompetensi berikutnya. Pada diklat jenjang lanjut ini, para peserta diharapkan mampu menyusun contoh atau model pembelajaran yang dapat meningkatkan kemampuan siswanya dalam penalaran, pemecahan masalah, dan komunikasi.

Berdasar pada pengetahuan yang berkait dengan penalaran, komunikasi, dan pemecahan masalah tersebut, dan didasarkan juga pada Peraturan Dirjen Dikdasmen No. 506/C/PP/2004 tanggal 11 November 2004 tentang Penilaian Perkembangan Anak Didik Sekolah Menengah Pertama (SMP) yang dapat dijadikan acuan oleh guru SMA, maka para peserta diharapkan dapat menyusun contoh-contoh soal yang dapat mengukur kemampuan bernalar, berkomunikasi, memecahkan masalah.

SKENARIO PEMBELAJARAN



Bab I

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Permendiknas No 22 (Depdiknas, 2006) tentang Standar Isi Mata Pelajaran Matematika menyatakan bahwa pelajaran matematika SMA bertujuan agar para siswa SMA: (1) memiliki pengetahuan matematika (konsep, keterkaitan antarkonsep, dan algoritma); (2) menggunakan penalaran; (3) memecahkan masalah; (4) mengomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah; dan (5) memiliki sikap menghargai kegunaan matematika.

Mengingat begitu pentingnya pencapaian tujuan pembelajaran Matematika ini, maka modul ini disusun untuk meningkatkan kompetensi para peserta Diklat jenjang lanjut matematika SMA dengan judul: ‘*Instrumen kemahiran Matematika.*’ Dengan bahan ini, diharapkan para guru matematika SMA yang mengikuti kegiatan diklat di PPPPTK Matematika akan terbantu dalam melaksanakan penilaian di kelasnya.

B. Tujuan Penulisan

Bahan ajar ini disusun dengan maksud untuk memberikan tambahan pengetahuan berupa wawasan bagi guru matematika yang sedang mengikuti pelatihan di PPPPTK Matematika agar memiliki kemampuan atau kompetensi untuk mengembangkan instrumen penilaian matematika yang bertujuan membina kemampuan siswa penalaran (*reasoning*), komunikasi (*communication*) matematika, dan pemecahan masalah (*problem-solving*).

C. Ruang Lingkup

Dengan bahan ajar ini diharapkan juga setelah mata diklat selesai, para peserta diklat tingkat lanjut dapat menunjukkan kriteria kinerja berikut:

1. Pengertian pemecahan masalah, penalaran, dan komunikasi matematika dijelaskan sesuai kaidahnya.
2. Strategi pembelajaran yang potensial untuk membina kemampuan siswa dalam penalaran, komunikasi matematika, dan pemecahan masalah dapat diidentifikasi sesuai dengan karakteristiknya.
3. Contoh-contoh soal/tugas untuk membina dan menilai kemampuan siswa dalam penalaran, komunikasi matematika, dan pemecahan masalah dapat dikembangkan sesuai dengan karakteristiknya.

Pembahasan pada bahan ajar ini menitik-beratkan pada pengembangan contoh-contoh yang memadukan pemecahan masalah, penalaran, dan komunikasi matematika secara terpadu sehingga dapat langsung digunakan di kelas. Para pemakai bahan ajar ini disarankan untuk membaca lebih dahulu konsepnya sebelum mengaplikasikan pelaksanaannya di kelas. Pada akhirnya, jika para pemakai bahan ajar ini mengalami kesulitan, membutuhkan klarifikasi, maupun memiliki saran atau kritik yang membangun, sudilah kiranya menghubungi penulis (fadjar_p3g@yahoo.com atau www.fadjarp3g.wordpress.com) atau melalui lembaga PPPPTK Matematika, yaitu melalui surat ke: PPPPTK Matematika, Kotak Pos 31 YKBS, Yogyakarta, melalui email: p3gmatyo@indosat.net.id, atau melalui faks ke: (0274)885752.

Bab II

Pentingnya Penalaran, Pemecahan Masalah, dan Komunikasi

Jika ada orang bertanya, untuk apa siswa belajar matematika? Maka menurut Standar Isi Mata Pelajaran Matematika (Depdiknas, 2006:1) jawabannya adalah sesuai dengan tujuan pembelajaran matematika SMA berikut:

1. Memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antarkonsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma, secara luwes, akurat, efisien, dan tepat, dalam pemecahan masalah
2. Menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika
3. Memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh
4. Mengomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah
5. Memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah.

Di samping itu, tujuan di atas dapat dicapai dengan memilih materi matematika melalui aspek bilangan, pengukuran dan geometri, peluang dan statistika, trigonometri, aljabar, dan kalkulus. Dengan demikian jelaslah bahwa standar matematika sekolah meliputi standar isi atau materi (*mathematical content*) dan standar proses (*mathematical processes*). Standar proses meliputi pemecahan masalah (*problem solving*), penalaran (*reasoning*), dan komunikasi (*communication*). NCTM menyatakan di situsnya bahwa baik standar materi maupun standar proses tersebut secara bersama-sama merupakan keterampilan dan pemahaman dasar yang sangat dibutuhkan para siswa pada abad ke-21 ini (*Together, the Standards describe the basic skills and understandings that students will need to function effectively in the twenty-first century*). Bab II ini disusun untuk membahas pengertian atau konsep ketiga istilah tersebut. Pertanyaan yang dapat diajukan sekarang adalah:

- Apakah proses pembelajaran yang dilakukan selama ini sudah mengacu kepada empat tujuan di atas?
- Apa yang harus dilakukan agar proses pembelajaran dan penilaian di kelas akan lebih mengacu pada empat tujuan di atas?

A. Penalaran

Dikenal dua macam penalaran, yaitu penalaran induktif (*induksi*) dan penalaran deduktif (*deduksi*). Sebagaimana dinyatakan Kurikulum 2004 (Depdiknas, 2003:1) berikut:

“Ciri utama matematika adalah penalaran deduktif, yaitu kebenaran suatu konsep atau pernyataan diperoleh sebagai akibat logis dari kebenaran sebelumnya. Sehingga kaitan antar konsep atau pernyataan dalam matematika bersifat konsisten. Namun demikian, dalam pembelajaran, pemahaman konsep sering diawali secara induktif melalui pengalaman peristiwa nyata atau intuisi.

Penalaran induktif terjadi ketika terjadi proses berpikir yang berusaha menghubungkan fakta-fakta atau evidensi-evidensi khusus yang sudah diketahui menuju kepada suatu kesimpulan yang bersifat umum (*general*). Contohnya, dari beberapa kasus khusus berupa barisan bilangan berikut:

$$\begin{aligned} &1, 3, 5, 7, 9, \dots \\ &3, 7, 11, 15, 19, \dots \\ &21, 16, 11, 6, 1, \dots \end{aligned}$$

Dari beberapa alternatif pertanyaan dan penjelasan guru seperti berikut:

- Pada barisan pertama, 1 disebut suku pertama atau U_1 sedangkan 7 disebut U_4 .
- Hal apa saja yang menarik dari barisan pertama? Kedua? Ketiga?
- Bagaimana cara mendapatkan suku berikutnya dari barisan pertama?

Siswa diharapkan dapat menyimpulkan bahwa:

- Pada setiap barisan, suku berikutnya didapat dari suku sebelumnya dengan menambah atau mengurangi dengan suatu bilangan tetap yang lalu dikenalkan guru dengan istilah beda (b).
- Pada contoh di atas, bedanya berturut-turut adalah $+2$, $+4$, dan -5
- Jika suku pertama atau U_1 dilambangkan a , akan didapat: $U_1 = a$, $U_2 = a + b$, $U_3 = a + 2b$, $U_4 = a + 3b$, ..., atau secara umum $U_n = a + (n - 1)b$.

Dengan demikian jelaslah, dari contoh di atas, bahwa induksi merupakan suatu kegiatan, suatu proses atau suatu aktivitas berpikir untuk menarik suatu kesimpulan atau membuat suatu pernyataan baru yang bersifat umum (*general*) berdasar pada beberapa pernyataan khusus yang diketahui benar. Di dalam ilmu pengetahuan, proses tersebut dikenal dengan metode eksperimental (*scientific method*), sedangkan di matematika disebut dengan penalaran induktif dan hasilnya masih disebut dugaan (*conjectures*).

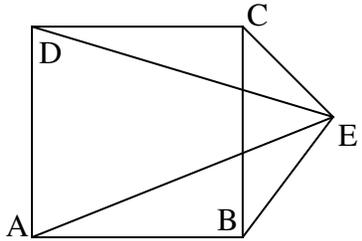
Untuk membuktikan kebenaran pernyataan tadi secara deduktif, dapat ditunjukkan dengan membuat definisi bahwa suatu barisan aritmetika terjadi jika dan hanya jika: $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3 = \dots = U_{10} - U_9 = U_{109} - U_{108} = U_n - U_{n-1} = b$. Dengan demikian jelaslah, dari contoh di atas, bahwa deduksi merupakan suatu kegiatan, suatu proses atau suatu aktivitas berpikir untuk menarik kesimpulan atau pernyataan baru dari pernyataan atau fakta-fakta yang dianggap benar dengan menggunakan logika. Secara umum dapat dinyatakan bahwa jika penalaran induktif merupakan proses berpikir dari khusus ke umum, maka penalaran deduktif merupakan proses berpikir dari bentuk yang umum (berupa aksioma atau postulat tadi) ke bentuk yang khusus.

B. Pemecahan Masalah

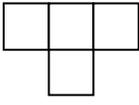
Masalah 1.

Diketahui gambar berikut. ABCD adalah persegi, dan E adalah titik sembarang di luar persegi ABCD.

Selidiki apakah berlaku hubungan:
 $AE^2 + CE^2 = BE^2 + DE^2$ *pada gambar di samping.*



Perhatikan soal di atas yang merupakan Soal OSN SMP Hari I Nomor 5 tahun 2005. Di bawah ini adalah soal seleksi propinsi SMA tahun 2002. Berhentilah membaca, cobalah untuk menyelesaikan dua masalah tersebut terlebih dahulu.

	<p>Bangun pada gambar di sebelah kiri ini disebut dengan tetromino-T. Misalkan setiap petak tetromino menutupi tepat satu petak papan catur pada papan catur.</p> <p>Kita ingin menutup papan catur dengan tetromino-tetromino sehingga setiap petak tetromino menutup satu petak catur tanpa tumpang tindih.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Tunjukkan bahwa kita dapat menutup papan catur biasa, yaitu papan catur dengan ukuran 8×8 petak, dengan menggunakan 16 tetromino T. 2. Tunjukkan bahwa kita tidak dapat menutup papan catur 10×10 petak dengan 25 tetromino T.
---	--

Manakah dari ketiga soal tersebut yang merupakan masalah? Jika ada siswa SMA yang sudah pernah mendapat soal tersebut dan sudah tahu langkah-langkah pengerjaannya, apakah soal tersebut masih terkategori sebagai masalah bagi mereka? Berdasar pada jawaban terhadap pertanyaan di atas, sebagian besar ahli Pendidikan Matematika menyatakan bahwa masalah merupakan pertanyaan yang harus dijawab atau direspon. Namun mereka menyatakan juga bahwa tidak semua pertanyaan otomatis akan menjadi masalah. Suatu pertanyaan akan menjadi masalah hanya jika pertanyaan itu menunjukkan adanya suatu tantangan (*challenge*) yang tidak dapat dipecahkan oleh suatu prosedur rutin (*routine procedure*) yang sudah diketahui si pelaku, seperti yang dinyatakan Cooney, Davis, dan Henderson (1975:242) berikut: “... *for a question to be a problem, it must present a challenge that cannot be resolved by some routine procedure known to the student.*” Itulah sebabnya, menentukan nilai 12345×45678912 tidak dapat dikategorikan sebagai suatu masalah bagi siswa SMA pada umumnya karena mereka telah tahu prosedur penyelesaiannya.

Istilah pembelajaran pemecahan masalah atau belajar memecahkan masalah dijelaskan Cooney et al (1975:242) sebagai berikut: “... *the action by which a teacher encourages students to accept a challenging question and guides them in their resolution.*” Hal ini menunjukkan bahwa pembelajaran pemecahan masalah adalah suatu tindakan (*action*) yang dilakukan guru agar para siswanya termotivasi untuk menerima tantangan yang ada pada pertanyaan (soal) dan mengarahkan para siswa dalam proses pemecahannya. Keterampilan serta kemampuan berpikir yang didapat ketika seseorang memecahkan masalah diyakini dapat ditransfer atau digunakan orang tersebut ketika menghadapi masalah di dalam kehidupan sehari-hari.

Ketika sedang memecahkan masalah, ada cara atau metode yang sering digunakan dan sering berhasil pada proses pemecahan masalah. Cara atau metode inilah yang disebut dengan strategi pemecahan masalah. Beberapa strategi yang sering digunakan menurut Polya (1973) dan Pasmep (1989) di antaranya adalah: mencoba-coba, membuat diagram, mencobakan pada soal yang lebih sederhana, membuat tabel, menemukan pola, memecah tujuan, memperhitungkan setiap kemungkinan, berpikir logis, bergerak dari belakang, membuat model matematikanya, serta mengabaikan hal yang tidak mungkin. Selanjutnya, ada empat langkah pada proses

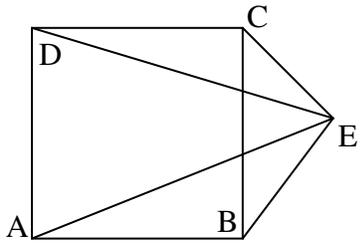
pemecahan masalah; yaitu: (1) memahami masalah, (2) merancang model matematika, (3) menyelesaikan model, dan (4) menafsirkan solusi yang diperoleh

C. Komunikasi

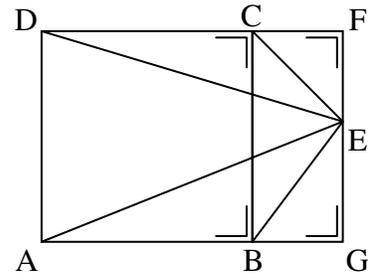
Perhatikan sekali lagi Masalah 1 ini, pecahkan atau selesaikan masalah tersebut, lalu laporkan hasilnya.

Masalah 1.

Diketahui gambar berikut. ABCD adalah persegi, dan E adalah titik sembarang di luar persegi ABCD. Selidiki apakah berlaku hubungan: $AE^2 + CE^2 = BE^2 + DE^2$ pada gambar di samping.



Salah satu strategi yang paling mungkin digunakan adalah dengan menggambar diagramnya. Memberi tanda atau lambang sesuai dengan yang diketahui. Contohnya lambang segitiga siku-siku. Hal ini dilakukan karena kemampuan otak seseorang sangatlah terbatas. Kita tidak dapat membayangkan segala sesuatunya di dalam benak kita. Langkah selanjutnya yang paling penting, meskipun tidak mesti dilakukan untuk soal lainnya, adalah dengan membuat ruas garis pertolongan GF yang sejajar BC.



Berdasarkan teorema Pythagoras dan dengan memperhatikan gambar di kanan atas dapatlah diturunkan beberapa kesamaan berikut.

$$DE^2 = DF^2 + FE^2 \text{ ---- (1)}$$

$$CE^2 = CF^2 + FE^2 \text{ ---- (2)}$$

$$AE^2 = AG^2 + GE^2 \text{ ---- (3)}$$

$$BE^2 = BG^2 + GE^2 \text{ ---- (4)}$$

Selanjutnya, dengan memperhatikan gambar di kanan atas dapatlah diturunkan beberapa kesamaan berikut.

$$AG^2 = DF^2 \text{ ---- (5)}$$

$$CF^2 = BG^2 \text{ ---- (6)}$$

Jika kesamaan (5) dan (6) dijumlahkan akan didapat:

$$AG^2 + CF^2 = BG^2 + DF^2 \text{ ---- (7)}$$

Dengan menambah kedua ruas persamaan (7) dengan GE^2 dan FE^2 ; akan didapat.

$$(AG^2 + GE^2) + (CF^2 + FE^2) = (BG^2 + GE^2) + (DF^2 + FE^2) \text{ ---- (8)}$$

$$AE^2 + CE^2 = BE^2 + DE^2$$

Dengan demikian terbukti bahwa $AE^2 + CE^2 = BE^2 + DE^2$ pada gambar di atas. Contoh di atas menunjukkan tentang pentingnya peningkatan kemampuan berkomunikasi selama proses pembelajaran matematika di kelas. Di bawah judul 'Why teach mathematics'; laporan Cockroft

(1986:1) menyatakan bahwa: “*We believe that all these perceptions of the usefulness of mathematics arise from the fact that mathematics provides a means of communication which is powerful, concise, and unambiguous.*” Pernyataan ini menunjukkan tentang perlunya para siswa belajar matematika dengan alasan bahwa matematika merupakan alat komunikasi yang sangat kuat, teliti, dan tidak membingungkan. Seorang siswa di samping mampu bernalar dan memecahkan masalah dengan baik sebagai suatu kegiatan atau aktivitas berpikir, maka ia harus mampu mengkomunikasikan kemampuan tersebut secara nyata dalam bentuk lisan dan tertulis. Berkaitan dengan komunikasi, *Office of Superintendent of Public Instruction (OSPI)* di dalam situsnya www.k12.wa.us menyatakan: “*Communication is defined as a process by which we assign and convey meaning in an attempt to create shared understanding.*” Artinya, komunikasi adalah proses untuk memberi dan menyampaikan arti dalam usaha untuk menciptakan pemahaman bersama.

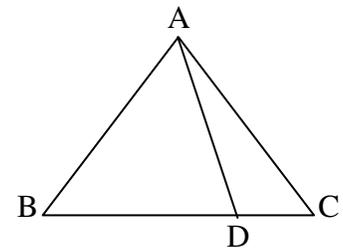
Demikian gambaran selintas mengenai pengertian dan contoh dari penalaran, pemecahan masalah, dan komunikasi matematika. Sebagai mana disampaikan di depan, tujuan pembelajaran matematika menurut Kurikulum 2004 (Depdiknas, 2003:1) adalah untuk: (1) Melatih cara berpikir dan bernalar dalam menarik kesimpulan, misalnya melalui kegiatan penyelidikan, eksplorasi, eksperimen, menunjukkan kesamaan, perbedaan, konsistensi, dan inkonsistensi. (2) Mengembangkan aktifitas kreatif yang melibatkan imajinasi, intuisi, dan penemuan dengan mengembangkan pemikiran divergen, orisinal, rasa ingin tahu, membuat prediksi dan dugaan, serta mencoba-coba. (3) Mengembangkan kemampuan memecahkan masalah. (4) Mengembangkan kemampuan menyampaikan informasi atau mengkomunikasikan gagasan, antara lain melalui pembicaraan lisan, grafik, peta, diagram, dalam menjelaskan gagasan. Karenanya, bab berikutnya, yaitu Bab III akan membahas dan mengidentifikasi strategi pembelajaran yang potensial untuk membina kemampuan siswa dalam penalaran, komunikasi matematika, dan pemecahan masalah.

Latihan Bab II.1

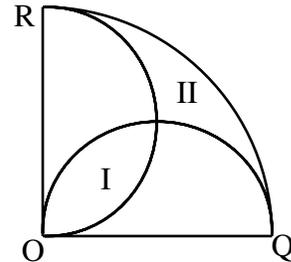
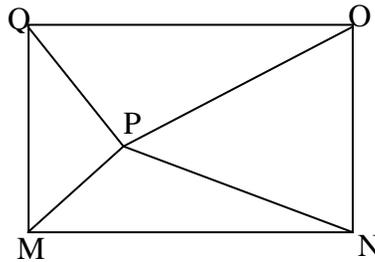
Gunakan kemampuan bernalar Anda lalu selesaikan dan komunikasikan cara Anda memecahkan masalah berikut.

1. Jika $AB = AC$; $AD = BD$; dan $\angle DAC = 39^\circ$; maka besar $\angle BAD$ adalah (Soal Isian Singkat OSN SMA Tingkat Provinsi nomor 8)
2. Sebuah segienam beraturan dan sebuah segitiga sama-sisi mempunyai keliling yang sama. Jika luas segitiga adalah $\sqrt{3}$, maka luas segienam beraturan adalah (Soal Isian Singkat OSN SMA Tingkat Provinsi nomor 10)
3. Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan $2xy - 5x + y = 55$ adalah (Soal Isian Singkat OSN SMA Tingkat Provinsi nomor 16)

4. Bentuk sederhana dari $\frac{(2^3 - 1)(3^3 - 1)(4^3 - 1)\dots(100^3 - 1)}{(2^3 + 1)(3^3 + 1)(4^3 + 1)\dots(5^3 + 1)}$ adalah (Soal Isian Singkat OSN SMA Tingkat Provinsi nomor 18)



5. Panjang ketiga sisi a, b, c dengan $a \leq b \leq c$, sebuah segitiga siku-siku adalah bilangan bulat. Tentukan semua barisan (a, b, c) agar nilai keliling dan nilai luas segitiga tersebut sama. (Soal Uraian OSN SMA Tingkat Provinsi nomor 4)
6. Tentukan suatu bilangan asli terkecil yang habis dibagi 225 dan angka-angkanya hanya terdiri atas angka '1' dan '0' saja.
7. Pada suatu kelas, terdapat lima baris kursi dan lima lajur (kolom) kursi yang disusun membentuk persegi. Setiap siswa pada kelas tersebut diharuskan gurunya untuk pindah ke kursi di depannya, di belakangnya, di kanannya, atau di kirinya. Dapatkah kegiatan ini dilaksanakan jika pada awal kegiatan ini seluruh siswa hadir
8. Amir membuat lingkaran. Dari titik A di luar lingkaran, dibuat garis singgung AB dan AC terhadap lingkaran tersebut. Amir lalu menentukan titik D pada ruas garis AC . Setelah itu, ia membuat garis DEF yang menyinggung lingkaran di E dan memotong AB di F . Jika diketahui $AB = 50$ cm, tentukan keliling $\triangle AFD$.
9. Pada segitiga sama sisi DEF dengan $DF = 20$ cm, dibuat $DP \perp EF$. Tentukan panjang EK jika K terletak pada tengah-tengah DP .
10. Gaji Budi Rp 1.000.000,00. Gaji tersebut diturunkan sebesar 20%. Dengan berapa persenkah gaji baru tersebut dinaikkan agar didapat gaji seperti sedia kala?
11. Carilah dua bilangan sedemikian sehingga perbandingan antara selisih, jumlah, dan hasil kali kedua bilangan itu berturut-turut adalah $1 : 11 : 60$.
12. Di dalam persegipanjang $MNOQ$ terdapat titik P . Tentukan panjang PN , jika $PM = 6$, $PQ = 8$, dan $PO = 10$.



13. Gambar di kanan atas menunjukkan adanya dua buah setengah lingkaran dengan diameter OQ dan OR , dengan $OQ = OR$ dan $OQ \perp OR$. Seperempat lingkaran juga nampak pada gambar dengan jari-jari OQ . Tentukan perbandingan luas daerah I dan luas daerah II.
14. Cari dua bilangan asli yang selisih kuadratnya adalah 105. Ada berapa pasangan yang memenuhi syarat di atas?
15. Pada $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 20$ cm, dan $BC = 12$ cm. Tentukan jari-jari lingkaran dalam $\triangle ABC$ tersebut.
16. Carilah suatu bilangan asli terkecil yang jika dikalikan 123 akan menghasilkan suatu bilangan yang berakhir dengan 2004.
17. Diketahui 5 buah kotak, masing-masing berisi kelereng hijau saja atau merah saja. Banyak kelereng pada setiap kotak berturut-turut adalah: 110, 105, 100, 115, dan 130. Jika satu kotak diambil, banyak kelereng hijau pada kotak yang tersisa adalah tiga kali banyaknya kelereng merah. Berapa banyak kelereng pada kotak yang terambil tadi?
18. Amir, siswa SMA di Solo sedang bermain-main dengan bilangan $7^6 - 1$. Ia berusaha untuk menentukan faktor-faktor bilangan tersebut.
 - Ada berapa faktor yang merupakan bilangan ganjil.
 - Ada berapa faktor yang merupakan bilangan genap.

- Tentukan banyaknya seluruh faktor dari bilangan tersebut.
19. Suatu bilangan terdiri atas enam angka (digit). Angka pertamanya adalah 1. Jika angka pertama tersebut dipindah menjadi angka terakhir, akan didapat bilangan baru yang nilainya
 20. Anto selalu membawa uang pecahan Rp 10.000,00 dan Rp 50.000,00 untuk berbelanja dan uang receh Rp 100,00 untuk diberikan kepada peminta-minta. Pada suatu hari Anto menyatakan: “Teman-teman, keadaan ini sangat menarik. Saya membawa uang sebanyak 500 buah yang nilainya Rp 5.000.000,00.” Dapatkah Anda menentukan banyaknya setiap pecahan uang yang dibawa Anto tersebut?
 21. Tentukan bilangan asli a dan b sedemikian sehingga $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$
 22. Diketahui lima bilangan positif. Jumlah bilangan pertama dan kelima adalah 13. Bilangan kedua adalah $\frac{1}{3}$ dari jumlah kelima bilangan tersebut. Bilangan ketiga adalah $\frac{1}{4}$ dari jumlah kelima bilangan tersebut. Terakhir, bilangan keempat adalah $\frac{1}{5}$ dari jumlah kelima bilangan tersebut. Tentukan bilangan terbesarnya.
 23. Tentukan banyaknya penyelesaian (x, y, z) yang memenuhi $5x + y + z = 21$; jika semesta pembicaraan untuk $x, y,$ dan z adalah himpunan bilangan asli.
 24. Seorang siswa menulis kata-kata yang tidak pantas di papan tulis. Berikut pernyataan lima siswa ketika ditanya gurunya.
 - Ali: “Tulisan seperti itu adalah tulisan Budi atau Chandra.”
 - Budi: “Bukan Edo dan juga bukan saya yang menulis kata-kata kotor itu.”
 - Chandra: “Baik Ali maupun Budi sama-sama berbohong.”
 - Deni: “Hanya satu dari A atau B yang berkata benar.”
 - Edo: “Deni telah berbohong.”
 Jika tiga orang dari siswa itu selalu berkata benar dan dua lainnya masih mungkin berbohong, siapakah yang menulis tulisan kotor tersebut?
 25. Carilah seluruh persegi-panjang yang memenuhi dua syarat berikut:
 - Panjang sisinya merupakan bilangan bulat
 - Luas persegi-panjang itu sama dengan kelilingnya.

Bab III

Implikasinya pada Strategi Pembelajaran Matematika di Kelas

Sudah dibahas pada Bab II bahwa penalaran adalah proses atau kegiatan berpikir yang berusaha menghubungkan-hubungkan fakta-fakta atau evidensi-evidensi yang diketahui (*premis*) menuju kepada suatu pernyataan baru atau kesimpulan (*konklusi*). Di samping itu, sudah dibahas juga tentang pengertian masalah, yaitu suatu pertanyaan yang menunjukkan adanya suatu tantangan (*challenge*) yang tidak dapat dipecahkan oleh suatu prosedur rutin (*routine procedure*) yang sudah diketahui si pelaku. Sedangkan komunikasi dapat diartikan sebagai proses untuk memberi dan menyampaikan arti dalam usaha untuk menciptakan pemahaman bersama. Berikut ini adalah pembahasan mengenai strategi pembelajaran yang potensial untuk membina kemampuan siswa dalam penalaran, komunikasi matematika, dan pemecahan masalah.

A. Lebih ke Penalaran Induktif (Induksi)

Ada dua macam penalaran, yaitu penalaran induktif dan deduktif. Berkait dengan penalaran induktif dan deduktif ini, pernyataan George Polya (1973: VII) berikut sudah seharusnya mendapatkan perhatian para pembaca, para guru matematika. Polya menyatakan bahwa: “*Yes, mathematics has two faces; it is the rigorous science of Euclid but it is also something else. Mathematics presented in the Euclidean way appears as a systematic, deductive science; but mathematics in the making appears as an experimental, inductive science.*” Pendapat Polya ini telah menunjukkan pengakuan beliau tentang pentingnya penalaran induktif (*induksi*) dalam pengembangan matematika.

Sejalan dengan Polya, Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika SMA & MA (Depdiknas, 2003:5-6) menyatakan juga bahwa: “Ciri utama matematika adalah penalaran deduktif, yaitu kebenaran suatu konsep atau pernyataan diperoleh sebagai akibat logis dari kebenaran sebelumnya. Namun demikian, dalam pembelajaran, pemahaman konsep sering diawali secara induktif melalui pengalaman peristiwa nyata atau intuisi. Proses induktif-deduktif dapat digunakan untuk mempelajari konsep matematika.”

Berkait dengan peningkatan kemampuan bernalar ini, NCTM, lebih mengoperasionalkannya dengan menyatakan pada salah satu tampilan di situsnya: www.standard.nctm.org bahwa program pembelajaran dari TK sampai kelas 12 hendaknya memungkinkan semua siswa di Amerika Serikat untuk:

1. mengenali penalaran dan pembuktian sebagai aspek yang sangat mendasar pada matematika (*recognize reasoning and proof as fundamental aspects of mathematics*);
2. melakukan dan menginvestigasi dugaan-dugaan matematika (*make and investigate mathematical conjectures*);
3. mengembangkan dan mengevaluasi argumen dan bukti matematika (*develop and evaluate mathematical arguments and proofs*);
4. memilih dan menggunakan berbagai tipe penalaran dan berbagai metode pembuktian (*select and use various types of reasoning and methods of proof*).

Berbeda dengan model ceramah yang dinilai tidak atau kurang meningkatkan kemampuan bernalar para siswa, maka contoh kegiatan yang dilakukan guru matematika di salah satu SMA untuk topik rata-rata hitung (*Mean*) ini tidak menggunakan ceramah, akan tetapi menggunakan pendekatan lain sebagai salah satu alternatif. Urut-urutan langkah yang dilakukan guru tersebut adalah sebagai berikut:

1. Kepada tiga siswa pada tiap kelompok diberikan baut sebanyak 10, 10, dan 7.
2. Minta kepada tiga siswa tadi untuk membagi rata baut yang didapat.
3. Diskusikan secara pleno cara membagi rata baut tersebut. Alternatifnya:
 - a. Seluruh baut dikumpulkan lalu dibagi tiga.
 - b. Siswa yang mendapat 10 buah baut memberikan salah satu bautnya kepada siswa yang memiliki 7 baut
4. Dari kegiatan 3 di atas, dibahas pengertian rata-rata hitung sebagai hasil bagi jumlah semua ukuran dengan banyaknya ukuran
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$
5. Meminta siswa menentukan rata-rata nilai matematika 10 orang siswa berikut: 8, 8, 7, 7, 5, 7, 6, 7, 7, 6 dengan berbagai cara. Diskusikan cara mereka mendapatkan rata-rata nilai tersebut.
6. Dari kegiatan 5 di atas, dibahas salah satu cara mendapatkan rata-rata hitung suatu data, yaitu
$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i}$$
7. Meminta siswa menentukan rata-rata nilai matematika 10 orang siswa berikut: 108, 108, 107, 107, 105, 107, 106, 107, 107, 106. Diskusikan cara mereka mendapatkan rata-rata nilai tersebut.
8. Berdasar pada hasil kegiatan 7 di atas, dibahas cara mendapatkan rata-rata hitung dengan rata-rata sementara (\bar{x}_s), yaitu:
$$\bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum f_i \cdot d_i}{\sum f_i}$$

Dengan strategi pembelajaran seperti diceritakan di atas, nampaklah bahwa strategi tersebut lebih mementingkan peningkatan kemampuan bernalar para siswa, dengan alasan bahwa proses pembelajaran di atas lebih mengaktifkan siswa untuk berpikir dan bernalar. Inti materi tidak diberikan dalam bentuk yang sudah jadi, namun ditemukan sendiri oleh para siswa dengan menggunakan penalaran induktif, meskipun dengan fasilitasi atau bantuan guru. Tidak hanya itu siswa dituntut untuk memikirkan dan menunjukkan benar tidaknya dugaan tersebut. Dengan cara tersebut siswa akan lebih mengenali penalaran dan pembuktian sebagai aspek yang sangat mendasar pada matematika. Selama proses pembelajaran, siswa telah belajar untuk melakukan dan menginvestigasi dugaan-dugaan (*conjectures*) yang berkaitan dengan konsep matematika yang harus ditemukan sendiri para siswa, belajar mengembangkan dan mengevaluasi argumen dan bukti matematika, dan belajar untuk memilih dan menggunakan berbagai tipe penalaran dan berbagai metode pembuktian.

Dengan strategi pembelajaran seperti itu pula, diharapkan adanya perubahan dari: mengingat (*memorizing*) atau menghafal (*rote learning*) ke arah berpikir (*thinking*) dan pemahaman (*understanding*); dari model ceramah ke pendekatan: *discovery learning*, *inductive learning*, atau *inquiry learning*; dari belajar individual ke kooperatif; dari bentuk *positivist (behaviorist)* ke *konstruktivisme*; dari paradigma suatu pengetahuan dipindahkan dari otak guru ke otak

siswa (*knowledge transmitted*) ke bentuk interaktif, investigatif, eksploratif, *open ended*, keterampilan proses, modeling, ataupun pemecahan masalah.

B. Pentingnya Pemecahan Masalah

Setiap orang, siapapun dia akan selalu dihadapkan dengan masalah. Karena itu, sangatlah penting bagi para siswa untuk belajar pemecahan masalah, terutama pemecahan soal nonrutin. W.W. Sawyer pernah menulis di dalam bukunya *Mathematician's Delight*, sebagaimana dikutip Jacobs (1982:12) pernyataan berikut: “*Everyone knows that it is easy to do a puzzle if someone has told you the answer. That is simply a test of memory. You can claim to be a mathematician only if you can solve puzzles that you have never studied before. That is the test of reasoning.*” Pernyataan W.W. Sawyer ini telah menunjukkan bahwa pengetahuan yang diberikan atau ditransformasikan langsung kepada para siswa akan kurang meningkatkan kemampuan bernalar (*reasoning*) mereka. WW Sawyer menyebutnya hanya meningkatkan kemampuan untuk mengingat saja.

Berkait dengan peningkatan kemampuan pemecahan masalah ini, NCTM, lebih mengoperasionalkannya dengan menyatakan pada salah satu tampilan di situsnya: www.standard.nctm.org bahwa program pembelajaran dari TK sampai kelas 12 hendaknya memungkinkan semua siswa di Amerika Serikat untuk:

1. Mengembangkan pengetahuan baru matematika melalui pemecahan masalah (*Build new mathematical knowledge through problem solving*);
2. Memecahkan masalah yang ada di matematika dan di konteks lain (*Solve problems that arise in mathematics and in other contexts*);
3. Menerapkan dan menyesuaikan diri dengan berbagai macam strategi pemecahan masalah (*Apply and adapt a variety of appropriate strategies to solve problems*);
4. Memonitor dan merenungkan tentang pemecahan masalah matematika (*Monitor and reflect on the process of mathematical problem solving*).

Sejalan dengan itu, rambu-rambu Kurikulum 2004 (Depdiknas, 2003:11) menyatakan:

- a. Mengkondisikan siswa untuk menemukan kembali rumus, konsep, atau prinsip dalam matematika melalui bimbingan guru agar siswa terbiasa melakukan penyelidikan dan menemukan sesuatu
- b. Pendekatan pemecahan masalah merupakan fokus dalam pembelajaran matematika, yang mencakup masalah tertutup, mempunyai solusi tunggal, terbuka atau masalah dengan berbagai cara penyelesaian.

Sesungguhnya, inti dari belajar memecahkan masalah adalah para siswa hendaknya terbiasa mengerjakan soal-soal yang tidak hanya memerlukan ingatan yang baik saja. Karenanya, disamping diberi masalah-masalah yang menantang, selama di kelas, seorang guru matematika dapat saja memulai proses pembelajarannya dengan mengajukan ‘masalah kontekstual’ yang cukup menantang dan menarik bagi para siswa. Siswa dan guru lalu bersama-sama memecahkan masalahnya tadi sambil membahas teori-teori, definisi maupun rumus-rumus matematikanya. Beberapa contohnya adalah sebagai berikut.

- Pak Amir memiliki satu kue. Kue tersebut dibagi kepada beberapa orang, setiap orang dapat $\frac{1}{4}$ kue. Ada berapa orang yang mendapat $\frac{1}{4}$ kue? (Ide matematikanya: $1 : \frac{1}{4} = 4$).

- Tanah di kampung Pak Andi pada Bulan Januari 2005 adalah Rp200.000,00 per meter persegi. Jika tanah tersebut naik 10% setiap bulan, tentukan harga tanah tersebut pada bulan Maret 2005. (Ide matematikanya: Bunga majemuk).
- Ibu Susi baru pulang dari Australia, ia membawa oleh-oleh permen coklat. Kepada anak pertama yang datang ke rumahnya, ia memberinya 1 coklat. Ia memberi 2 coklat kepada anak kedua yang datang ke rumahnya; lalu 3 coklat untuk anak ketiga, serta berturut-turut 4 dan 5 coklat diberikan kepada anak keempat dan kelima. Jika ada 10 anak yang datang berapa coklat yang harus disiapkan Ibu Susi? Bagaimana jika 100 anak yang datang?

Sejalan dengan pentingnya pemecahan masalah ini, rambu-rambu pada bagian pendahuluan Kurikulum 2004 nomer 5b dan 5e menyatakan bahwa:

- Pendekatan pemecahan masalah merupakan fokus dalam pembelajaran matematika, yang mencakup masalah tertutup, mempunyai solusi tunggal, terbuka atau masalah dengan berbagai cara penyelesaian.
- Dalam setiap kesempatan, pembelajaran matematika hendaknya dimulai dengan pengenalan masalah yang sesuai dengan situasi (*contextual problem*). Dengan mengajukan masalah-masalah yang kontekstual, siswa secara bertahap, dibimbing untuk menguasai konsep-konsep matematika.

C. Komunikasi

Sesuai dengan tujuan pembelajaran matematika nomer 4 untuk mengembangkan kemampuan para siswa dalam menyampaikan informasi atau mengkomunikasikan gagasan, antara lain melalui pembicaraan lisan, grafik, peta, diagram, dalam menjelaskan gagasan, maka selama proses pembelajaran di kelas para siswa difasilitasi dan dibimbing untuk menggunakan berbagai cara dan bentuk komunikasi seperti disebutkan di atas, antara lain dengan menggunakan lisan, grafik, peta, maupun diagram.

Berkait dengan peningkatan kemampuan komunikasi, NCTM (www.standard.nctm.org), menyatakan bahwa program pembelajaran dari TK sampai kelas 12 hendaknya memungkinkan semua siswa di Amerika Serikat untuk:

1. Mengorganisasi dan mengkonsolidasikan pikiran matematika mereka melalui komunikasi (*Organize and consolidate their mathematical thinking through communication*);
2. Mengkomunikasikan pikiran matematika mereka secara logis dan jelas kepada teman, guru, ataupun orang lain (*Communicate their mathematical thinking coherently and clearly to peers, teachers, and others*);
3. Menganalisis dan mengevaluasi pikiran matematika dan strategi yang digunakan orang lain (*Analyze and evaluate the mathematical thinking and strategies of others*);
4. Menggunakan bahasa matematika untuk menyatakan ide-ide matematika secara tepat (*Use the language of mathematics to express mathematical ideas precisely*).

Latihan Bab III.1

Buatlah contoh-contoh strategi pembelajaran yang potensial untuk membina kemampuan siswa dalam penalaran, komunikasi matematika, dan pemecahan masalah.

Bab IV

Penilaian Penalaran, Komunikasi, dan Pemecahan Masalah

A. Pengantar

Sudah dibahas di bagian depan bahwa tujuan pelajaran matematika di SMA adalah untuk membantu siswa memiliki kemampuan di bidang: (1) pengetahuan matematika; (2) penalaran; (3) pemecahan masalah; (4) komunikasi; dan (5) sikap menghargai matematika. Karenanya, beberapa kemampuan yang harus diperhatikan dalam penilaian adalah:

1. *Pemahaman konsep*. Siswa mampu mendefinisikan konsep, mengidentifikasi dan memberi contoh atau bukan contoh dari konsep.
2. *Prosedur*. Siswa mampu mengenali prosedur atau proses menghitung yang benar dan tidak benar.
3. *Komunikasi*. Siswa mampu menyatakan dan menafsirkan gagasan matematika secara lisan, tertulis, atau mendemonstrasikan.
4. *Penalaran*. Siswa mampu memberikan alasan induktif dan deduktif sederhana
5. *Pemecahan masalah*. Siswa mampu memahami masalah, memilih strategi penyelesaian, menyelesaikan masalah.

Menjabarkan hal di atas, Peraturan Dirjen Dikdasmen No. 506/C/PP/2004 tanggal 11 November 2004 tentang Penilaian Perkembangan Anak Didik Sekolah Menengah Pertama (SMP), Depdiknas (2004) menyatakan bahwa aspek penilaian matematika dalam rapor dikelompokkan menjadi tiga aspek, yaitu:

1. Pemahaman konsep
2. Penalaran dan komunikasi
3. Pemecahan masalah

Mencermati kedua hal di atas, nampaklah bahwa kelima aspek pada Kurikulum 2004 Matematika SMP (Depdiknas, 2003:12) telah digabung-gabung sehingga menjadi 3 aspek saja yang muncul di rapor, yaitu: (1) pemahaman konsep, yang meliputi pemahaman konsep dan prosedur, (2) penalaran dan komunikasi, serta (3) pemecahan masalah. Dijelaskan pada dokumen Peraturan Dirjen Dikdasmen No. 506/C/PP/2004 (Depdiknas, 2004), bahwa pemahaman konsep merupakan kompetensi yang ditunjukkan siswa dalam memahami konsep dan dalam melakukan prosedur (algoritma) secara luwes, akurat, efisien, dan tepat. Indikator yang menunjukkan pemahaman konsep antara lain adalah:

1. Menyatakan ulang sebuah konsep.
2. Mengklasifikasi objek-objek menurut sifat-sifat tertentu (sesuai dengan konsepnya).
3. Memberi contoh dan noncontoh dari konsep.
4. Menyajikan konsep dalam berbagai bentuk representasi matematis.
5. Mengembangkan syarat perlu atau syarat cukup suatu konsep.
6. Mengaplikasikan konsep atau algoritma pemecahan masalah.

Pada dasarnya, penilaian untuk pemahaman konsep sudah sering dilakukan guru, begitu juga dengan penilaian untuk penalaran dan komunikasi serta pemecahan masalah, meskipun mungkin kurang begitu disadari bahwa penilaian yang sudah dilakukan tersebut sudah dapat dikategorikan sebagai penilaian untuk penalaran dan komunikasi serta pemecahan masalah, Namun, pertanyaan yang mungkin muncul, karena merupakan hal baru, sehingga perlu dijawab adalah:

- Bagaimana cara menilai penalaran dan komunikasi serta pemecahan masalah tersebut?
- Adakah contoh-contoh soal yang dapat diujikan kepada siswa untuk mengetahui tingkat penguasaan dan kemampuan bernalar dan berkomunikasi?

B. Indikator Kemampuan Bernalar dan Berkomunikasi

Dijelaskan pada dokumen Peraturan Dirjen Dikdasmen No. 506/C/PP/2004 (Depdiknas, 2004), bahwa penalaran dan komunikasi merupakan kompetensi yang ditunjukkan siswa dalam melakukan penalaran dan mengkomunikasikan gagasan matematika. Menurut dokumen di atas, dan hal ini yang menjadi sangat penting berkait dengan penilaian penalaran ini, indikator yang menunjukkan penalaran dan komunikasi antara lain adalah:

1. Menyajikan pernyataan matematika secara lisan, tertulis, gambar, dan diagram
2. Mengajukan dugaan (*conjectures*)
3. Melakukan manipulasi matematika
4. Menarik kesimpulan, menyusun bukti, memberikan alasan atau bukti terhadap beberapa solusi
5. Menarik kesimpulan dari pernyataan
6. Memeriksa kesahihan suatu argumen
7. Menemukan pola atau sifat dari gejala matematis untuk membuat generalisasi.

Dokumen tersebut menyatakan juga: “Ketika akan memasukkan nilai ke dalam rapor, maka hasil penilaian terhadap indikator yang menunjukkan bahwa siswa telah kompeten dalam penalaran dan komunikasi dimasukkan ke dalam aspek penilaian penalaran dan komunikasi”

C. Indikator Pemecahan Masalah

Dijelaskan juga pada dokumen Peraturan Dirjen Dikdasmen No. 506/C/PP/2004 (Depdiknas, 2004), bahwa pemecahan masalah merupakan kompetensi strategik yang ditunjukkan siswa dalam memahami, memilih pendekatan dan strategi pemecahan masalah, dan menyelesaikan model untuk menyelesaikan masalah. Indikator yang menunjukkan pemecahan masalah antara lain adalah:

1. Menunjukkan pemahaman masalah
2. Mengorganisasi data dan memilih informasi yang relevan dalam pemecahan masalah
3. Menyajikan masalah secara matematika dalam berbagai bentuk.
4. Memilih pendekatan dan metode pemecahan masalah secara tepat.
5. Mengembangkan strategi pemecahan masalah

6. Membuat dan menafsirkan model matematika dari suatu masalah
7. Menyelesaikan masalah yang tidak rutin.

D. Contoh Soal Untuk Penalaran dan Pemecahan Masalah

Perhatikan tiga soal di bawah ini, yang berkaitan dengan topik barisan dan deret. Setelah itu, selesaikan tugas yang ada di bawah tiga soal tersebut.

Tentukan banyaknya bulatan pada gambar ke-10 pada pola berikut

Gambar di bawah ini menunjukkan tiga pola segitiga tingkat 1, tingkat 2, dan tingkat 3 yang terbuat dari batang korek api. Dibutuhkan tiga batang korek api untuk membuat segitiga tingkat 1, sembilan batang korek api untuk membuat segitiga tingkat 2, dan 18 batang korek api untuk membuat segitiga tingkat 3.

Tingkat 1 Tingkat 2 Tingkat 3

Jelaskan, bagaimana caranya menentukan banyaknya:

- a. Batang korek api untuk membuat segitiga tingkat 5.
- b. Batang korek api untuk membuat segitiga tingkat 10?
- c. Batang korek api untuk membuat segitiga tingkat n ?

*Tentukan seluruh himpunan bilangan asli berurutan yang jumlahnya 1000.
Jelaskan cara Anda mendapatkan hasilnya.*

Tugas:

1. Pilih salah satu dari tiga soal atau masalah di atas.
2. Kerjakanlah soal tersebut.

3. Komunikasikan proses dan hasilnya secara tertulis. Berusahalah agar indikator pada penalaran dan komunikasi serta pemecahan masalah dapat nampak pada pekerjaan yang kelompok Anda susun.
4. Jika sudah selesai, serahkan ke kelompok berikutnya untuk diberi nilai. Contohnya, Kelompok A diserahkan ke Kelompok B, Kelompok B diserahkan ke Kelompok D, Kelompok D diserahkan ke Kelompok E, ... dan kelompok terakhir diserahkan ke kelompok A.
5. Kelompok yang menerima hasil pekerjaan kelompok lain diminta untuk menggunakan *daftar nilai* di bawah ini untuk menentukan kemampuan penalaran dan komunikasi yang dapat muncul pada pengerjaan soal atau masalah di atas.

No	Idikator Penalaran dan Komunikasi	Tanda Cek *)	Nilai *)
1.	Menyajikan pernyataan matematika secara lisan, tertulis, gambar, dan diagram		
2.	Mengajukan dugaan (<i>conjectures</i>)		
3.	Melakukan manipulasi matematika		
4.	Menarik kesimpulan, menyusun bukti, memberikan alasan atau bukti terhadap beberapa solusi		
5.	Menarik kesimpulan dari pernyataan		
6.	Memeriksa kesahihan suatu argumen		
7.	Menemukan pola atau sifat dari gejala matematis untuk membuat generalisasi		

*) Beri tanda cek ‘√’ dan nilai pada baris yang menurut Anda sudah nampak pada pengerjaan kelompok yang Anda atau kelompok Anda sedang menilainya.

6. Gunakan *daftarnilai* di bawah ini untuk menentukan kemampuan pemecahan masalah yang dapat muncul pada pengerjaan soal atau masalah di atas.

No	Idikator Pemecahan Masalah	Tanda Cek *)	Nilai *)
1.	Menunjukkan pemahaman masalah		
2.	Mengorganisasi data dan memilih informasi yang relevan dalam pemecahan masalah		
3.	Menyajikan masalah secara matematika dalam berbagai bentuk.		
4.	Memilih pendekatan dan metode pemecahan masalah secara tepat.		
5.	Mengembangkan strategi pemecahan masalah		
6.	Membuat dan menafsirkan model matematika dari suatu masalah		
7.	Menyelesaikan masalah yang tidak rutin.		

7. Diskusikan hasilnya dengan kelompok yang mengerjakan soal tersebut.

8. Sempurnakan perintah pada soal di atas agar indikator di atas dapat muncul pada pengerjaan soal tersebut.

Berkait dengan penilaian terhadap kemampuan bernalar dan memecahkan masalah, ada beberapa pertanyaan yang perlu diperhatikan, di antaranya adalah:

1. Bagaimana jika soal di atas diujikan ke suatu kelas, namun ada sebagian siswa di kelas tersebut yang sudah pernah mengerjakannya dan ada juga yang baru pertama kali mengerjakannya?
2. Bagaimana jika ada siswa di kelas tersebut yang sudah hafal langkah-langkah penyelesaiannya?
3. Adilkah soal itu jika dipakai untuk menguji kemampuan bernalar dan memecahkan masalah siswa di kelas tersebut?
4. Bagaimana cara terbaik untuk menghindari hal tersebut?

Mudah-mudahan tiga pertanyaan di atas dapat meyakinkan para guru matematika tentang pentingnya memberi soal yang terkategori sebagai soal nonrutin bagi setiap siswa, sehingga dengan soal tersebut, kemampuan bernalar mereka dapat diuji. Seorang siswa yang sudah pernah mengerjakan soal tersebut dan sudah tahu atau hafal langkah-langkah penyelesaiannya, maka soal tersebut tidak dapat dipakai untuk menguji kemampuan bernalar siswa tersebut. Soal tersebut, bagi siswa yang sudah tahu langkah-langkah penyelesaiannya hanya dapat dipakai untuk menguji daya ingatnya saja, dan bukan untuk menguji kemampuan bernalarnya. Sebagai contoh, soal di atas tidak akan cocok untuk menguji kemampuan bernalar Anda jika Anda sudah membaca soal tersebut dan sudah tahu langkah-langkahnya. Untuk itu, para guru harus dapat meyakinkan dirinya sendiri bahwa soal yang akan diujikan benar-benar terkategori sebagai soal nonrutin bagi setiap siswanya. Dari soal atau masalah yang dikemukakan pada halaman 21, ada berapa indikator yang dapat diujikan kepada para siswa kita?

\Selama proses pembelajaran sedang berlangsung, seorang guru matematika dapat saja menilai kemampuan bernalar dan memecahkan siswanya. Untuk itu, selama proses pembelajaran sedang berlangsung di kelas, ketika para siswa sedang bekerja, para guru diharapkan dapat melihat pekerjaan siswanya, berdiskusi dengan mereka, dan memperbaiki kesalahan yang dilakukan siswanya. Dengan cara seperti itu, diharapkan setiap siswa dengan kemampuan yang berbeda-beda dapat terbantu dan tertantang untuk lebih giat belajar. Demikian sekilas gambaran tentang penilaian kemampuan bernalar dan berkomunikasi serta memecahkan masalah para siswa yang mengacu pada dua dokumen penting yang perlu dipelajari dengan sungguh-sungguh oleh para guru matematika, yaitu Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika SMA (Depdiknas, 2003) dan Peraturan Dirjen Dikdasmen No. 506/C/PP/2004 (Depdiknas, 2004).

Latihan Bab IV.1

1. Buatlah beberapa soal yang dapat mengukur kemampuan: (1) memahami konsep atau melakukan prosedur; (2) penalaran dan komunikasi; dan (3) pemecahan masalah para siswa SMA.
2. Buatlah pedoman pemarkaan untuk soal di atas.

Bab V

Penutup

Konsep pendidikan yang tertuang dalam Kurikulum 2004 dimaksudkan untuk mengantisipasi kebutuhan SDM Indonesia agar berhasil menghadapi tantangan persaingan global yang akan semakin keras dan tajam. SDM yang diidam-idamkan yang dapat dihasilkan pendidikan di Indonesia adalah SDM yang di samping memiliki pengetahuan matematika yang prima namun yang lebih penting lagi memiliki kemampuan memecahkan masalah (*problem-solving*), bernalar (*reasoning*), dan berkomunikasi (*communication*), serta memiliki kreativitas yang tinggi; sebagaimana dinyatakan dalam tujuan pembelajaran matematika. Dari keempat tujuan tersebut, penalaran merupakan hal yang sangat penting dan mendasar karena tiga tujuan lainnya akan sangat bergantung pada kemampuan bernalarnya.

Ada dua macam penalaran, yaitu penalaran induktif dan deduktif. Pada masa lalu, siswa belajar matematika secara deduktif aksiomatis, hal ini sesungguhnya telah mengingkari proses bertumbuh dan berkembangnya matematika. Artinya proses pembelajaran matematika di kelas sudah seharusnya dimulai secara induktif dan setelah itu baru dikembangkan secara deduktif, terutama di SMA, sebagaimana dinyatakan G Polya pada halaman 13 paket ini. Sejalan dengan itu, Lakatos, sebagaimana dikutip Burton (1992:2), telah membuat pernyataan yang lebih keras: *“Deductivist style hides the struggle, hides the adventure. The whole story vanishes, the successive tentative formulations of the theorem in the course of the proof-procedure are doomed to oblivion while the end result is exalted into sacred infallibility”* Artinya, cara deduktif telah menyembunyikan perjuangan dan petualangan. Semua ceritera sudah usai, urutan yang bersifat tentatif atau nisbi dari formulasi teorema-teorema, dalam pelajaran yang mengutamakan prosedur pembuktian telah dimatikan ke arah yang tidak berarti, sedangkan hasilnya telah dianggunkan sebagai suatu kebenaran yang tidak terbantahkan dan dikeramatkan.

Di samping itu, setiap siswa akan menghadapi masalah di kelak kemudian hari. Untuk itu, selama proses pembelajaran di kelas, tidak seperti pada waktu-waktu yang lalu, masalah kontekstual disarankan oleh Kurikulum 2004 untuk ditampilkan pada awal kegiatan. Seorang siswa yang telah pernah mendapat suatu soal dan sudah tahu cara-cara pemecahannya, maka soal tersebut sudah tidak terkategori sebagai masalah lagi bagi dirinya. Karenanya soal yang akan diujikan kepada siswa harus benar-benar terkategori sebagai soal nonrutin bagi seluruh siswa. Dengan soal nonrutin tersebut, kemampuan bernalar dan memecahkan siswa dapat dinilai dengan hasil yang dapat dipertanggung jawabkan (objektif). Artinya, peserta tes benar-benar diuji untuk menunjukkan kemampuan bernalarnya, dan bukan diuji kemampuan mengingatnya. Pada akhirnya, sekali lagi, jika para pembaca mengalami kesulitan, membutuhkan klarifikasi, maupun memiliki saran ataupun kritik yang membangun, sudilah kiranya menghubungi penulisnya. Terima kasih.

Daftar Pustaka

- Cooney, T.J., Davis, E.J., Henderson, K.B. (1975). *Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics*. Boston : Houghton Mifflin Company.
- Depdiknas (2004). *Peraturan Dirjen Dikdasmen No. 506/C/PP/2004 tanggal 11 November 2004 tentang Penilaian Perkembangan Anak Didik Sekolah Menengah Pertama (SMP)*. Jakarta: Ditjen Dikdasmen Depdiknas.
- Depdiknas (2006). *Permendiknas Nomor 22 Tahun 2006 Tentang Standar Isi Sekolah Menengah Atas*. Jakarta: Depdiknas.
- Pasmep (1989). *Solve It, Problem Solving in Mathematics III*. Perth: Curtin University of Technology
- Polya, G. (1973). *How To Solve It* (2nd Ed). Princeton: Princeton University Press.
- www.k12.wa.us, website *Office of Superintendent of Public Instruction (OSPI)*, organisasi para pengawas Amerika Serikat
- www.standard.nctm.org, website *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)*, Organisasi Guru Matematika Amerika Serikat.