DIKLAT GURU PENGEMBANG MATEMATIKA SMK
JENJANG DASAR TAHUN 2009

Trigonometri

Oleh: **Drs. Markaban, M.Si.**

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK
DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
2009

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas karunia-Nya, bahan ajar ini dapat diselesaikan dengan baik. Bahan ajar ini digunakan pada Diklat Guru Pengembang Matematika SMK Jenjang Dasar Tahun 2009, pola 120 jam yang diselenggarakan oleh PPPPTK Matematika Yogyakarta.

Bahan ajar ini diharapkan dapat menjadi salah satu rujukan dalam usaha peningkatan mutu pengelolaan pembelajaran matematika di sekolah serta dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat di dalam maupun di luar kegiatan diklat.

Diharapkan dengan mempelajari bahan ajar ini, peserta diklat dapat menambah wawasan dan pengetahuan sehingga dapat mengadakan refleksi sejauh mana pemahaman terhadap mata diklat yang sedang/telah diikuti.

Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah berpartisipasi dalam proses penyusunan bahan ajar ini. Kepada para pemerhati dan pelaku pendidikan, kami berharap bahan ajar ini dapat dimanfaatkan dengan baik guna peningkatan mutu pembelajaran matematika di negeri ini.

Demi perbaikan bahan ajar ini, kami mengharapkan adanya saran untuk penyempurnaan bahan ajar ini di masa yang akan datang.
Saran dapat disampaikan kepada kami di PPPPTK Matematika dengan alamat: Jl. Kaliurang KM. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, DIY, Kotak Pos 31 YK-BS Yogyakarta 55281. Telepon (0274) 881717, 885725, Fax. (0274) 885752. email: p4tkmatematika@yahoo.com

Sleman, 11 Mei 2009
Kepala,

Kasman Sulyono
NIP. 130352806

Daftar Isi

Halaman

PETA KOMPETENSI DAN BAHAN AJAR

No	Kompetensi / Sub kompetensi	Indikator	Materi Pembelajaran
1.	***Kompetensi :*** Mampu memfasilitasi siswa dalam memecahkan masalah berkaitan dengan penerapan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri ***Subkompetensi:*** Mengembangkan keterampilan siswa dalam: • menentukan nilai perbandingan trigonometri suatu sudut. • mengkonversi koordinat kartesius dan koordinat kutub • menerapkan aturan sinus dan kosinus • menentukan luas suatu segitiga • menerapkan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut • menyelesaikan persamaan trigonometri	• Menentukan nilai dan memberikan contoh mengenai perbandingan trigonometri suatu sudut • Mengkonversikan koordinat kartesius ke koordinat kutub dan sebaliknya • Menerapkan dari kehidupan nyata sehari-hari dan memberikan contoh aturan sinus dan cosinus • Menentukan dan memberikan contoh luas segitiga • Menerapkan dan memberikan contoh Rumus fungsi trigonometri untuk jumlah dan selisih dua sudut • Menyelesaikan dan memberikan contoh Persamaan trigonometri	• Perbandingan Trigonometri • Koordinat kartesius dan kutub • Aturan Sinus dan Cosinus • Luas segitiga • Jumlah dan selisih dua sudut • Persamaan Trigonometri

SKENARIO PEMBELAJARAN

1. Pada awal pertemuan di lakukan kegiatan identifikasi permasalahan pembelajaran pada materi Trigonometri yang dihadapi oleh guru selama di kelas.

2. Dari identifikasi permasalahan pembelajaran tersebut dijelaskan dengan ceramah, tanya jawab dan curah pendapat sehingga permasalahan Trigonometri dapat dipecahkan

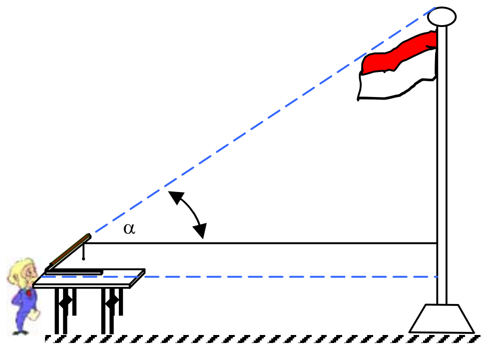
3. Peserta bekerja dalam kelompok program keahlian yang terdiri dari 5-6 orang dan mendiskusikan dan menganalisis materi dan latihan pada modul serta memberikan contoh penerapan sesuai program keahliannya.

Bab I

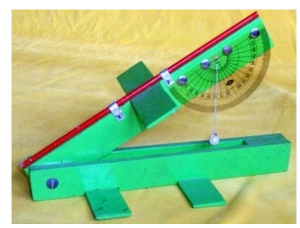
Pendahuluan

A. Latar Belakang

Seseorang yang ingin mengukur tinggi sebuah pohon, menara, gedung bertingkat ataupun sesuatu yang memiliki ketinggian tertentu maka tidaklah mungkin secara fisik akan mengukur dari bawah ke atas (puncak) obyeknya dengan menggunakan meteran. Salah satu cabang matematika yang dapat dipakai dalam membantu pengukuran ini adalah trigonometri.



Gb. 1.1. mengukur ketinggian



Gb. 1.2. Klinometer

Gambar 1.1 adalah gambar seorang pengamat yang ingin mengukur tinggi tiang bendera dengan menggunakan klinometer (Gb. 1.2)
Dalam pengamatan akan didapat sudut dan jarak pengamat dengan tiang, kemudian dengan bantuan pengetahuan trigonometri maka akan dapat dihitung tinggi tiang tersebut.

Kenyataan dalam kehidupan sehari–hari di berbagai bidang kehidupan banyak membutuhkan pengetahuan tentang trigonometri, antara lain bidang keteknikan, bidang IPA, bidang penerbangan, bidang pelayaran dan sebagainya. Oleh karena itu topik tentang trigonometri perlu diajarkan kepada siswa oleh guru matematika.

B. Tujuan

Bahan ajar tentang pembelajaran trigonometri ini disusun agar para tenaga kependidikan/guru:

1. Lebih menguasai materi pembelajaran trigonometri untuk siswa SMK
2. Lebih memiliki kemampuan mengembangkan teknik, model dan strategi pembelajaran trigonometri

C. Ruang Lingkup

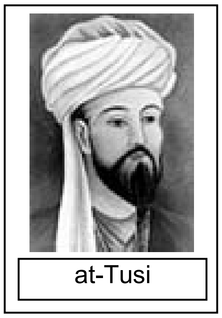
Bahan ajar ini membahas topik–topik sebagai berikut:

1. Pengertian perbandingan trigonometri
2. Rumus perbandingan trigonometri sudut yang berelasi
3. Menyelesaikan Persamaan Trigonometri
4. Rumus–rumus trigonometri

Bab II

Trigonometri

Studi tentang trigonometri sebagai cabang matematika, lepas dari astronomi pertama kali diberikan oleh Nashiruddin al-Tusi (1201-1274), lewat bukunya *Treatise on the quadrilateral*. Bahkan dalam buku ini ia untuk pertama kali memperlihatkan keenam perbandingan trigonometri lewat sebuah segitiga siku-siku (hanya masih dalam trigonometri sferis). Menurut O`Conners dan Robertson, mungkin ia pula yang pertama memperkenalkan Aturan Sinus (di bidang datar).

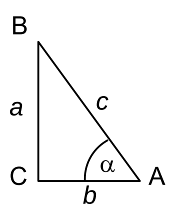


Gb. 2.1. matematikawan

Di Arab dan kebanyakan daerah muslim, trigonometri berkembang dengan pesat tidak saja karena alasan astronomi tetapi juga untuk kebutuhan ibadah. Seperti diketahui, orang muslim jika melakukan ibadah *sholat*, harus menghadap ke arah *Qiblat*, suatu bangunan di kota Mekkah. Para matematikawan muslim lalu membuat tabel trigonometri untuk kebutuhan tersebut.

Konsep trigonometri pada pembahasan ini diawali dengan perbandingan trigonometri suatu sudut pada segitiga siku−siku.

A. Perbandingan Trigonometri Suatu Sudut pada Segitiga Siku-siku



Gb. 2.2. perbandingan trigonometri

Gambar di samping adalah segitiga siku-siku dengan titik sudut sikunya di C. Panjang sisi di hadapan sudut A adalah a, panjang sisi di hadapan sudut B adalah b, dan panjang sisi di hadapan sudut C adalah c.

Terhadap sudut α:

Sisi a disebut sisi siku-siku di depan sudut α

Sisi b disebut sisi siku-siku di dekat (berimpit) sudut α

Sisi c (sisi miring) disebut hipotenusa

Berdasarkan keterangan di atas, didefinisikan 6 (enam) perbandingan trigonometri terhadap sudut α sebagai berikut:

1. $\sin\alpha = \dfrac{\text{panjang sisi siku - siku di depan sudut A}}{\text{panjang hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$

2. $\cos\alpha = \dfrac{\text{panjang sisi siku - siku di dekat (berimpit) sudut A}}{\text{panjang hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$

3. $\tan\alpha = \dfrac{\text{panjang sisi siku - siku di depan sudut A}}{\text{panjang sisi siku - siku di dekat sudut A}} = \dfrac{a}{b}$

4. $\csc\alpha = \dfrac{\text{panjang hipotenusa}}{\text{panjang sisi siku - siku di depan sudut A}} = \dfrac{c}{a}$

5. $\sec\alpha = \dfrac{\text{panjang hipotenusa}}{\text{panjang sisi siku - siku di dekat sudut A}} = \dfrac{c}{b}$

6. $\cot\alpha = \dfrac{\text{panjang sisi siku - siku di dekat sudut A}}{\text{panjang sisi siku - siku di depan sudut A}} = \dfrac{c}{a}$

Dari perbandingan tersebut dapat pula ditulis rumus:

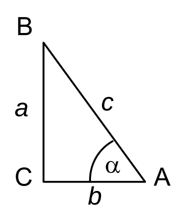
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{dan} \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{dan} \quad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

<u>Contoh:</u>

Pada gambar di samping segitiga siku–siku ABC dengan panjang $a = 24$ dan $c = 25$.

Tentukan keenam perbandingan trigonometri untuk α.



Gb. 2.3. perbandingan trigonometri

<u>Penyelesaian:</u>

Nilai b dihitung dengan teorema Pythagoras

$$b = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{625 - 576} = \sqrt{49} = 7$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{24}{25} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{7}{25} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{24}{7}$$

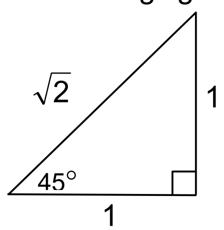
$$\csc\alpha = \frac{c}{a} = \frac{25}{24} \qquad \sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{25}{7} \qquad \cot\alpha = \frac{c}{a} = \frac{7}{24}$$

B. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut-Sudut Istimewa

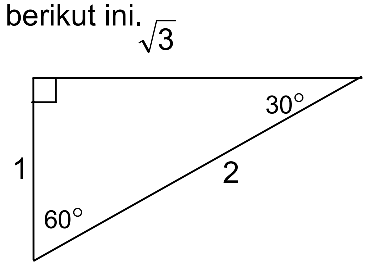
Sudut istimewa adalah sudut yang perbandingan trigonometrinya dapat dicari tanpa memakai tabel matematika atau kalkulator, yaitu: 0°, 30°, 45°,60°, dan 90°.

Sudut-sudut istimewa yang akan dipelajari adalah $30°$, $45°$,dan $60°$.

Untuk mencari nilai perbandingan trigonometri sudut istimewa digunakan segitiga siku-siku seperti gambar berikut ini.



Gb. 2.4.a. sudut istimewa



Gb. 2.4.b. sudut istimewa

Dari gambar 2.4.a dapat ditentukan :

$\sin 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ $\qquad$ $\csc 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

$\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sec 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

$\tan 45° = \dfrac{1}{1} = 1$ $\qquad$ $\cot 45° = \dfrac{1}{1} = 1$

Dari gambar 2.4.b dapat ditentukan

$\sin 30° = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$ $\qquad$ $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$

$\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}$ $\qquad$ $\tan 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$\csc 30° = \dfrac{2}{1} = 2$ $\qquad$ $\csc 60° = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

$\sec 30° = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ $\qquad$ $\sec 60° = \dfrac{2}{1} = 2$

$\cot 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\cot 60° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}$

Tabel nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa.

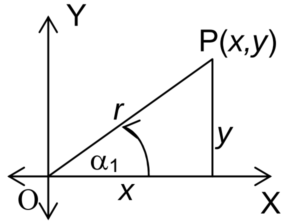
α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tak terdefinisi
$\cot\alpha$	tak terdefinisi	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

contoh:

1. $\sin 30^\circ + \cos 45^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

2. $\sin 45^\circ \tan 60^\circ + \cos 45^\circ \cot 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$= \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{1}{6}\sqrt{6} = \frac{4}{6}\sqrt{6} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

C. Perbandingan Trigonometri suatu Sudut di Berbagai Kuadran



Gb. 2.5

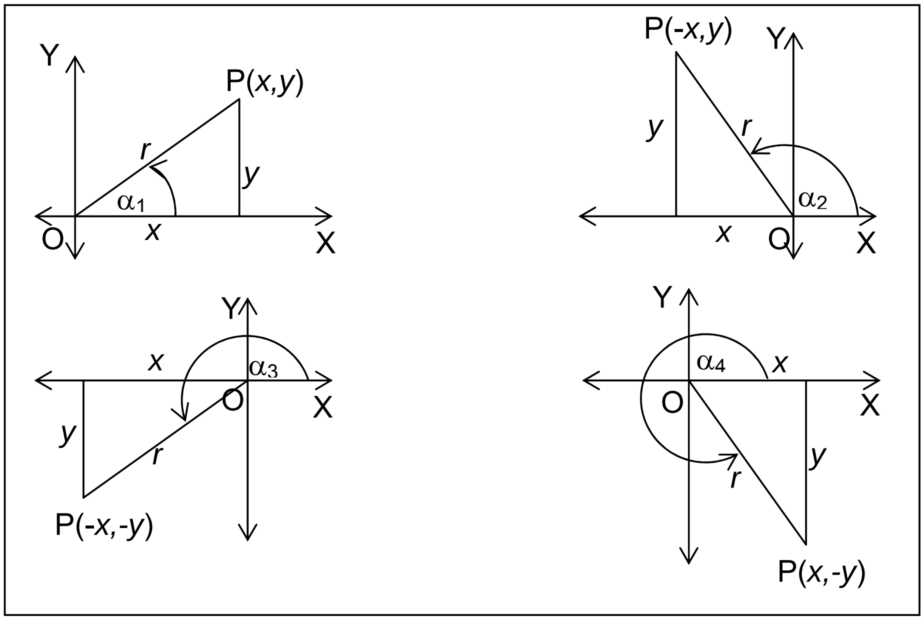
P adalah sembarang titik di kuadran I dengan koordinat (x,y). OP adalah garis yang dapat berputar terhadap titik asal O dalam koordinat kartesius, sehingga $\angle$XOP dapat bernilai 0° sampai dengan 90°. Perlu diketahui bahwa

$$\text{OP} = \sqrt{x^2 + y^2} = r \text{ dan } r > 0$$

Berdasarkan gambar di atas keenam perbandingan trigonometri baku dapat didefinisikan dalam absis (x), ordinat (y), dan panjang OP (r) sebagai berikut:

1. $\sin\alpha = \frac{\text{ordinat P}}{\text{panjang OP}} = \frac{y}{r}$
2. $\cos\alpha = \frac{\text{absis P}}{\text{panjang OP}} = \frac{x}{r}$
3. $\tan\alpha = \frac{\text{ordinat P}}{\text{absis P}} = \frac{y}{x}$
4. $\csc\alpha = \frac{\text{panjang OP}}{\text{ordinat P}} = \frac{r}{y}$
5. $\sec\alpha = \frac{\text{panjang OP}}{\text{absis P}} = \frac{r}{x}$
6. $\cot\alpha = \frac{\text{absis P}}{\text{ordinat P}} = \frac{x}{y}$

Dengan memutar garis OP maka $\angle$ XOP = α dapat terletak di kuadran I, kuadran II, kuadran III atau kuadran IV, seperti pada gambar di bawah ini.



Gb. 2.6. titik di berbagai kuadran

Tabel tanda nilai keenam perbandingan trigonometri di tiap kuadran:

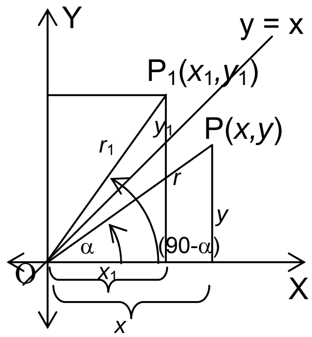
Perbandingan Trigonometri	Kuadran			
	I	II	III	IV
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
csc	+	+	-	-
sec	+	-	-	+
cot	+	-	+	-

D. Rumus Perbandingan Trigonometri Sudut yang Berelasi

Sudut-sudut yang berelasi dengan sudut α adalah sudut $(90° \pm \alpha)$, $(180° \pm \alpha)$, $(360° \pm \alpha)$, dan $-\alpha°$. Dua buah sudut yang berelasi ada yang diberi nama khusus, misalnya **penyiku** (komplemen) yaitu untuk sudut $\alpha°$ dengan $(90° - \alpha)$ dan **pelurus** (suplemen) untuk sudut $\alpha°$

dengan (180° - α). Contoh: penyiku sudut 50° adalah 40°, pelurus sudut 110° adalah 70°

1. Perbandingan trigonometri untuk sudut α dengan (90° - α)



Gb. 2.7. sudut yang berelasi

Dari gambar 2.7 diketahui

Titik $P_1(x_1,y_1)$ bayangan dari $P(x,y)$ akibat pencerminan garis $y = x$, sehingga diperoleh:

a. $\angle XOP = \alpha$ dan $\angle XOP_1 = 90° - \alpha$

b. $x_1 = x$, $y_1 = y$ dan $r_1 = r$

Dengan menggunakan hubungan di atas dapat diperoleh:

a. $\sin(90° - \alpha) = \dfrac{y_1}{r_1} = \dfrac{x}{r} = \cos\alpha$

b. $\cos(90° - \alpha) = \dfrac{x_1}{r_1} = \dfrac{y}{r} = \sin\alpha$

c. $\tan(90° - \alpha) = \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{x}{y} = \cot\alpha$

Dari perhitungan tersebut maka rumus perbandingan trigonometri sudut α dengan (90° - α) dapat dituliskan sebagai berikut:

a. $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$	d. $\csc(90° - \alpha) = \sec\alpha$
b. $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$	e. $\sec(90° - \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha$
c. $\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$	f. $\cot(90° - \alpha) = \tan\alpha$

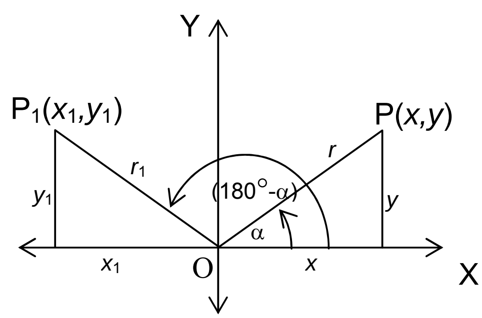
2. Perbandingan trigonometri untuk sudut α° dengan (180° - α)

Titik $P_1(x_1,y_1)$ adalah bayangan dari titik $P(x,y)$ akibat pencerminan terhadap sumbu y, sehingga

a. $\angle XOP = \alpha$ dan $\angle XOP_1 = 180° - \alpha$

b. $x_1 = -x$, $y_1 = y$ dan $r_1 = r$

maka diperoleh hubungan:



Gb. 2.8. sudut yang berelasi

a. $\sin(180^\circ - \alpha) = \dfrac{y_1}{r_1} = \dfrac{y}{r} = \sin\alpha$

b. $\cos(180^\circ - \alpha) = \dfrac{x_1}{r_1} = \dfrac{-x}{r} = -\cos\alpha$

c. $\tan(180^\circ - \alpha) = \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y}{-x} = -\tan\alpha$

Dari hubungan di atas diperoleh rumus:

a. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	d. $\csc(180^\circ - \alpha) = \csc\alpha$
b. $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$	e. $\sec(180^\circ - \alpha) = -\sec\alpha$
c. $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$	f. $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$

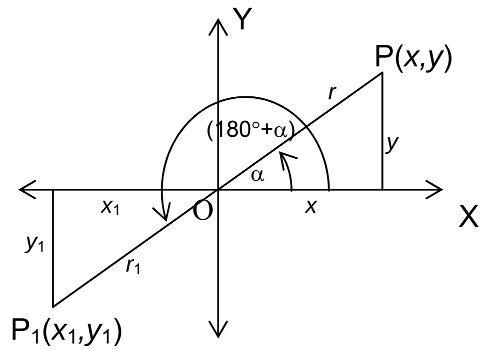
3. Perbandingan trigonometri untuk sudut α° dengan $(180^\circ + \alpha)$

Dari gambar 2.9 titik $P_1(x_1,y_1)$ adalah bayangan dari titik $P(x,y)$ akibat pencerminan terhadap garis $y = -x$, sehingga

a. $\angle XOP = \alpha$ dan $\angle XOP_1 = 180^\circ + \alpha$

b. $x_1 = -x$, $y_1 = -y$ dan $r_1 = r$

maka diperoleh hubungan:



Gb. 2.9. sudut yang berelasi

a. $\sin(180^\circ + \alpha) = \dfrac{y_1}{r_1} = \dfrac{-y}{r} = -\sin\alpha$

b. $\cos(180^\circ + \alpha) = \dfrac{x_1}{r_1} = \dfrac{-x}{r} = -\cos\alpha$

c. $\tan(180^\circ + \alpha) = \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{-y}{-x} = \dfrac{y}{x} = \tan\alpha$

Dari hubungan di atas diperoleh rumus:

a. $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$	d. $\csc(180^\circ + \alpha) = -\csc\alpha$
b. $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$	e. $\sec(180^\circ + \alpha) = -\sec\alpha$
c. $\tan(180^\circ + \alpha) = \tan\alpha$	f. $\cot(180^\circ + \alpha) = \cot\alpha$

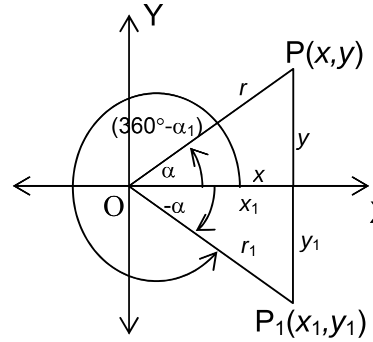
4. Perbandingan trigonometri untuk sudut α dengan (- α)

Dari gambar 2.10 diketahui titik $P_1(x_1,y_1)$ bayangan dari $P(x,y)$ akibat pencerminan terhadap sumbu x, sehingga

a. $\angle XOP = \alpha$ dan $\angle XOP_1 = -\alpha$

b. $x_1 = x$, $y_1 = -y$ dan $r_1 = r$

maka diperoleh hubungan



Gb. 2.10. sudut yang berelasi

a. $\sin(-\alpha) = \dfrac{y_1}{r_1} = \dfrac{-y}{r} = -\sin\alpha$

b. $\cos(-\alpha) = \dfrac{x_1}{r_1} = \dfrac{x}{r} = \cos\alpha$

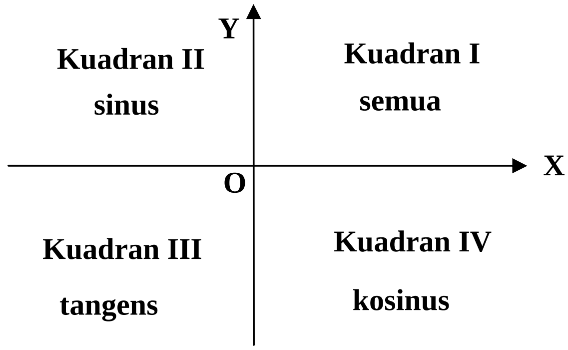
c. $\tan(-\alpha) = \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{-y}{x} = -\tan\alpha$

Dari hubungan di atas diperoleh rumus:

a. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	d. $\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$
b. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	e. $\sec(-\alpha) = \sec\alpha$
c. $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	f. $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

Untuk relasi α dengan (- α) tersebut identik dengan relasi α dengan $360° - \alpha$, misalnya $\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$.

Dengan memperhatikan nilai perbandingan sudut yang berelasi, dapat disimpulkan bahwa nilai perbandingan sudut, nilai positif atau negatifnya terletak pada kuadran di mana sudut itu berada .



Untuk menghafalkan dapat dibuat jembatan keledai, misalnya "**sem**anis **Sin**ta **tan**pa **kos**metika", yang artinya nilai perbandingan trigonometri positf untuk sudut di:

Kuadran I : **sem**ua (sinus, kosinus, tangen, kotangen, sekan dan kosekan)

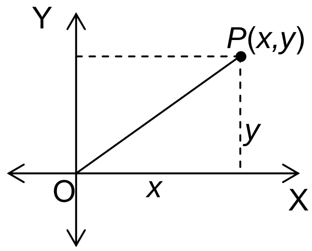
Kuadran II : **sin**us (bersama kosekan)

Kuadran III : **tan**gen (bersama kotangen)

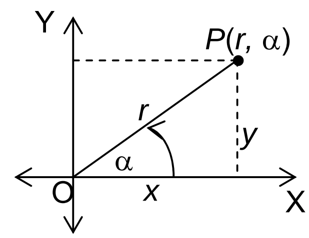
Kuadran IV : **kos**inus (bersama sekan)

E. Menentukan Koordinat kartesius dan Koordinat Kutub

Cara lain dalam menyajikan letak sebuah titik pada bidang *xy* selain koordinat kartesius adalah dengan koordinat kutub.



Gb. 2.11. koordinat kartesius



Gb. 2.12. koordinat kutub

Pada gambar 2.11 titik $P(x,y)$ pada koordinat kartesius dapat disajikan dalam koordinat kutub dengan $P(r, \alpha)$ seperti pada gambar 2.12.

Jika koordinat kutub titik $P(r, \alpha)$ diketahui, koordinat kartesius dapat dicari dengan hubungan:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\sin\alpha$$

jika koordinat kartesius titik $P(x,y)$ diketahui, koordinat kutub titik $P(r, \alpha)$ dapat dicari dengan hubungan:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \rightarrow \alpha = \text{arc tan } \frac{y}{x}$$, arc tan adalah invers dari tan

<u>Contoh:</u>

1. Ubahlah menjadi koordinat kutub

   a. $B(5,5)$ b. $C(-4,4\sqrt{3})$

2. Ubahlah P (12,60°) menjadi koordinat kartesius

Penyelesaian:

1. a. B (5,5)

$x = 5$, $y = 5$ (kuadran I)

$r = \sqrt{5^2 + 5^2}$

$= \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$

$\tan\alpha = \frac{5}{5} = 1 \rightarrow \alpha = 45°$

jadi B $(5\sqrt{2}, 45°)$

b. $C(-4, 4\sqrt{3})$

$x = -4$, $y = 4\sqrt{3}$ (kuadran II)

$r = \sqrt{(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8$

$\tan\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{-4} = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = 120°$

jadi C (8, 120°)

2. P (12,60°) diubah ke koordinat kartesius

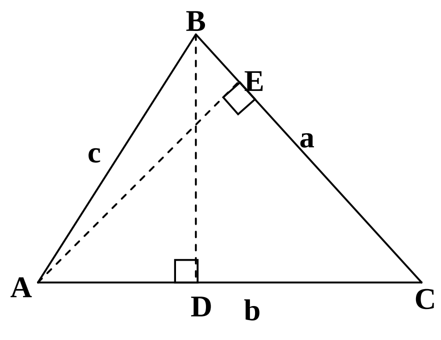
$x = r\cos\alpha = 12\cos 60° = 12.\ \frac{1}{2} = 6$

$y = r\sin\alpha = 12\sin 60° = 12\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 6\sqrt{3}$

Jadi koordinat kartesiusnya $P(6, 6\sqrt{3})$

F. Aturan Sinus dan Kosinus

Dalam setiap Δ ABC dengan panjang sisi-sisi BC.CA, dan AB berturut-turut a, b, dan c satuan dan besar sudut A, B, dan C seperti pada gambar maka dapat ditunjukkan aturan sinus sebagai berikut:



Dalam ΔABD, $\sin A = \frac{BD}{c}$

$\rightarrow BD = c\sin A$ .... (i)

Dalam ΔCBD, $\sin C = \frac{BD}{a}$

$\rightarrow BD = a\sin C$ ...... (ii)

Dari (i) dan (ii) maka : $\frac{a}{\sin.A} = \frac{c}{\sin C}$ (iii)

Dalam ΔCAE, $\sin C = \frac{AE}{b} \rightarrow AE = .b\sin C.....(iv)$

Dalam ΔBAE, sin B = $\frac{\text{AE}}{\text{c}} \rightarrow AE = .\text{c}\sin\text{B}......\ (\text{v})$

Dari (iv) dan (v) maka $\rightarrow \frac{\text{b}}{\sin\ \text{B}} = \frac{\text{c}}{\sin\text{C}}\ (\text{vi})$

Jadi dari (iii) dan (vi) kita dapatkan hubungan : $\frac{\text{a}}{\sin\text{A}} = \frac{\text{b}}{\sin\text{B}} = \frac{c}{\sin C}$

Hubungan di atas kita kenal dengan nama Aturan Sinus.

Sekarang buktikan Aturan (rumus) kosinus berikut:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2bc\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

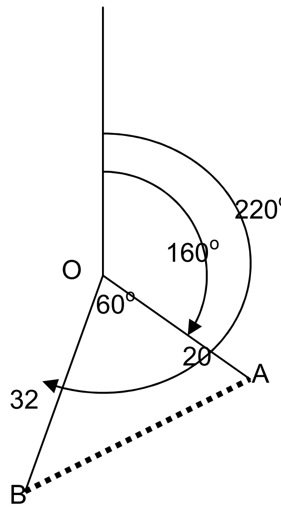
atau:

$$\begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

Dengan pemahaman tentang aturan sinus, aturan kosinus maka dapat dikonstruksikan tentang rumus luas segitiga. Pada setiap ΔABC berlaku: Luas ΔABC = $\frac{1}{2}$bc sin A = $\frac{1}{2}$ac sin B = $\frac{1}{2}$ab sin C

Contoh :

Dari sebuah pelabuhan kapal *A* bertolak dengan kecepatan 10 knot (mil/jam) ke arah 160^o dan kapal *B* ke arah 220^o dengan kecepatan 16 knot. Berapa jarak kedua kapal 2 jam kemudian?



Jawab:

Perhatikan gambar, maka

$AB^2 = 20^2 + 32^2 – 2 . 20 . 32 . \cos 60^\circ$

$= 400 + 1024 – 640$

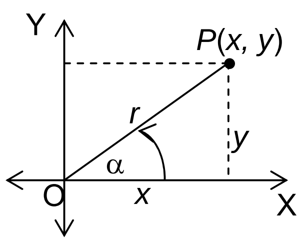
$= 784$

AB = 28

Jarak antara kedua kapal 28 mil

G. Identitas Trigonometri

Identitas adalah kalimat terbuka yang bernilai benar untuk setiap penggantian nilai variabelnya dengan konstanta anggota domain.



Gb. 2.13. rumus identitas

Dari gambar di samping diperoleh

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\sin\alpha = \frac{y}{r}$ dan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Sehingga:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Dengan demikian $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ adalah sebuah identitas karena persamaan tersebut bernilai benar untuk setiap nilai peubah α.

H. Menyelesaikan Persamaan Trigonometri Sederhana

Persamaan trigonometri adalah persamaan yang memuat perbandingan trigonometri suatu sudut, di mana sudutnya dalam ukuran derajat atau radian.

Menyelesaikan persamaan trigonometri adalah menentukan nilai *x* yang memenuhi persamaan tersebut sehingga jika dimasukkan nilainya akan menjadi benar.

1. Menyelesaikan persamaan $\sin x = \sin \alpha$

   Dengan mengingat rumus

   $\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha$ dan $\sin (\alpha + k.\ 360°) = \sin \alpha$, maka diperoleh:

Jika $\sin x = \sin \alpha$ maka
$x = \alpha + k.\ 360°$ atau $x = (180° - \alpha) + k.\ 360°$, $k \in B$

2. Menyelesaikan persamaan $\cos x = \cos \alpha$

   Dengan mengingat rumus

   $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ dan $\cos (\alpha + k.\ 360°) = \cos \alpha$, diperoleh

Jika $\cos x = \cos \alpha$ maka
$x = \alpha + k.\ 360°$ atau $x = -\alpha + k.\ 360°$, $k \in B$

3. Menyelesaikan persamaan $\tan x = \tan \alpha$

   Dengan mengingat rumus

   $\tan (180° + \alpha) = \tan \alpha$ dan $\tan (\alpha + k.\ 360°) = \tan \alpha$, maka

Jika $\tan x = \tan \alpha$ maka
$x = \alpha + k.\ 180°$, $k \in B$

   <u>contoh:</u>

   Tentukan penyelesaian persamaan berikut ini untuk $0° \leq x \leq 360°$.

   a) $\sin x = \frac{1}{2}$ c) $\tan x = -\sqrt{3}$

   b) $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   <u>Penyelesaian:</u>

   a) $\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin 30°$

   $x = \alpha + k.\ 360°$ untuk $k = 0 \rightarrow x = 30°$

   $x = (180° - \alpha) + k.360°$ untuk $k = 0 \rightarrow x = 180° - 30° = 150°$

   b) $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3} \rightarrow \cos x = \cos 30°$

$x = \alpha + k.\ 360^\circ$ untuk $k = 0 \rightarrow x = 30^\circ$

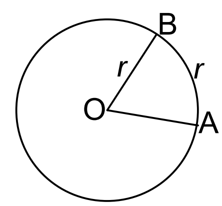
$x = -\alpha + k.\ 360^\circ$ untuk $k = 1 \rightarrow x = -30^\circ + 360^\circ = 330^\circ$

c) $\tan x = -\sqrt{3} \rightarrow \tan x = \tan 120^\circ$

$x = \alpha + k.\ 180^\circ$ untuk $k = 0 \rightarrow x = 120^\circ$

untuk $k = 1 \rightarrow x = 120^\circ + 180^\circ = 300^\circ$

Catatan: satuan sudut selain derajat adalah radian, di mana satu radian adalah besarnya sudut yang menghadap busur lingkaran yang panjangnya sama dengan jari-jari.



$\angle$ AOB = 1 rad

Hubungan radian dengan derajat

$360^\circ = \dfrac{2\pi r}{r}$ rad $= 2\pi$ rad

$180^\circ = \pi$ rad, pendekatan 1 rad = $57{,}3^\circ$.

Dengan mengingat pengertian radian tersebut, maka bentuk penyelesaian persamaan trigonometri dapat pula menggunakan satuan radian, sebagai contoh untuk persamaan sin x = sin A maka penyelesaiannya adalah:

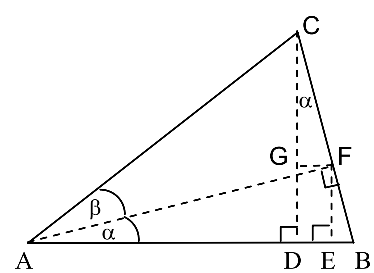
$x = A + k.\ 2\pi$ atau $x = (\pi - A) + k.\ 2\pi$, $k \in B$

di mana x dan A masing-masing satuannya radian.

I. Rumus-rumus Trigonometri untuk Jumlah dan Selisih Dua Sudut

1. Rumus cos $(\alpha + \beta)$ dan cos $(\alpha - \beta)$

   Pada gambar di samping diketahui garis CD dan AF keduanya adalah garis tinggi dari segitiga ABC. Akan dicari rumus cos $(\alpha + \beta)$.



Gb. 2.14

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AD}{AC} \quad \rightarrow AD = AC \cos(\alpha + \beta)$$

Pada segitiga siku–siku CGF

$$\sin\ \alpha = \frac{GF}{CF} \rightarrow GF = CF \sin\alpha \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

Pada segitiga siku–siku AFC,

$$\sin\ \beta = \frac{CF}{AC} \rightarrow CF = AC \sin\beta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

$$\cos\ \beta = \frac{AF}{AC} \rightarrow AF = AC \cos\beta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots.(3)$$

Pada segitiga siku–siku AEF,

$$\cos\ \alpha = \frac{AE}{AF} \rightarrow AE = AF \cos\ \alpha \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots.(4)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$GF = AC \sin\alpha \sin\beta$$

Karena $DE = GF$ maka $DE = AC \sin\alpha \sin\beta$

Dari (3) dan (4) diperoleh

$$AE = AC \cos\alpha \cos\beta$$

Sehingga $AD = AE - DE$

$$AC \cos(\alpha + \beta) = AC \cos\alpha \cos\beta - AC \sin\alpha \sin\beta$$

Jadi $\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$

Untuk menentukan $\cos(\alpha - \beta)$ gantilah β dengan $-\beta$ lalu disubstitusikan ke rumus $\cos(\alpha + \beta)$.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta))\\ &= \cos\alpha \cos(-\beta) - \sin\alpha \sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha(-\sin\beta)\\ &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta\end{aligned}$$

Jadi $\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta}$

2. Rumus $\sin(\alpha + \beta)$ dan $\sin(\alpha - \beta)$

Untuk menentukan rumus sin (α + β) dan sin ($\alpha - \beta$) perlu diingat rumus sebelumnya, yaitu: sin (90° − α) = cos α dan

cos (90° − α) = sin α

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos(90^\circ-(\alpha+\beta))\\ &= \cos((90^\circ-\alpha)-\beta)\\ &= \cos(90^\circ-\alpha)\cos\beta+\sin(90^\circ-\alpha)\sin\beta\\ &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Jadi $\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

Untuk menentukan sin ($\alpha - \beta$), seperti rumus kosinus selisih dua sudut gantilah β dengan $-\beta$ lalu disubstitusikan ke sin (α + β).

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha+(-\beta))\\ &= \sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\ &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)\\ &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Jadi $\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$

3. Rumus tan (α + β) dan tan ($\alpha - \beta$)

Dengan mengingat $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, maka

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Jadi $\boxed{\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$

Untuk menentukan tan ($\alpha - \beta$), gantilah β dengan $-\beta$ lalu disubstitusikan ke tan ($\alpha + \beta$).

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan(\alpha + (-\beta))$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan(\beta)}{1 - \tan\alpha(-\tan\beta)}$$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Jadi $$\boxed{\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}}$$

J. Rumus Trigonometri Sudut Rangkap

Dari rumus–rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut, dapat dikembangkan menjadi rumus trigonometri untuk sudut rangkap.

1. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

   Jadi $\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$

2. $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

   Jadi $\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

   Rumus–rumus variasi bentuk lain yang memuat cos 2α dapat diturunkan dengan mengingat rumus dasar $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

   $$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
   $$= \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$$
   $$= 2\cos^2\alpha - 1$$

   $$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
   $$= (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha$$
   $$= 1 - 2\sin^2\alpha$$

   Sehingga

   1) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
   2) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
   3) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

3. $$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Jadi $\boxed{\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$

K. Mengubah Rumus Perkalian ke rumus Penjumlahan/Pengurangan

1. Dari rumus cosinus untuk jumlah dan selisih 2 sudut diperoleh:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\underline{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \; +$$
$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

Jadi $\boxed{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta}$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\underline{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \; -$$
$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$

Jadi $\boxed{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta}$

2. Dari rumus sinus untuk jumlah dan selisih 2 sudut diperoleh:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\underline{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} \; +$$
$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

Jadi $\boxed{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta}$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\underline{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} \; -$$
$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

Jadi $\boxed{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta}$

L. Penerapan Rumus dan Persamaan Trigonometri

Contoh soal aplikasi dalam keteknikan:

1. Dua buah tegangan pada arus bolak-balik mempunyai harga:

   $V_1 = 200 \sin 120^\circ$ dan $V_2 = 200 \sin 210^\circ$

   Berapa V_{total} dari V_1 dan V_2 ?

Penyelesaian:

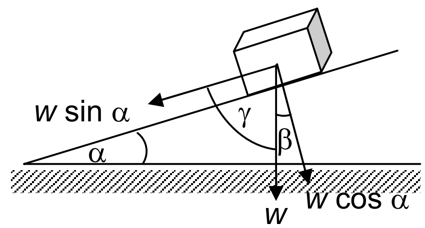
$V_{total} = V_1 + V_2$

$= 200 \sin 120° + 200 \sin 210°$

$= 200.\frac{1}{2}\sqrt{3} + 200.\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= 100\sqrt{3} - 100$

2. Sebuah balok terletak pada tangga dengan kemiringan α = 37° (sudut antara tangga dengan lantai). Gaya beratnya diuraikan dalam gaya $w \sin \alpha$ dan $w \cos \alpha$.

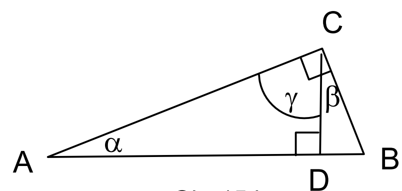


Gb. 15.a

Tentukan besar sudut β dan γ!

Penyelesaian:

Gambar 15.a dapat direpresentasikan dalam segitiga seperti pada gambar 15.b. Dengan mengingat kembali sifat-sifat dari 2 segitiga yang sebangun (segitiga ADC dan segitiga CDB) akan diperoleh:



Gb. 15.b

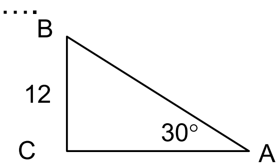
sudut β = sudut α = 37°., Sehingga $\gamma = 90° - \beta = 90° - 37° = 53°$

Latihan

1. Carilah nilai dari

a. sin 120°	c. tan 150°	e. cot 330°
b. cos 300°	d. sec 210°	f. csc 120°

2. Nilai dari sin 45° cos 135° + tan 210° sec 60° = …..
3. Jika $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ dan $0° < \alpha < 90°$ maka nilai $\tan \alpha$ adalah ……
4. Koordinat kutub dari titik (-10,10) adalah…..
5. Koordinat kartesius dari titik (9, 120°) adalah …….
6. Hitunglah panjang AB gambar 2.15 disamping



Gb. 2.15

7. Jika nilai tan $\alpha = \frac{1}{x}$ maka nilai dari

   $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ = ………..

8. Himpunan penyelesaian dari sin $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ untuk $0° \leq x \leq 360°$ adalah …..

9. Himpunan penyelesaian dari sin $2x$ = sin 30° untuk $0° \leq x \leq 360°$ adalah ……..

10. Tulislah rumus cos $(2x + 3y)$!

11. Jika α dan β sudut-sudut lancip dengan $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ dan $\sin\beta = \frac{5}{13}$, hitunglah $\sin(\alpha + \beta)$

12. Sederhanakan bentuk:

    $\cos 100° \cos 10° + \sin 100° \sin 10°$

13. Persamaan sin x = cos x dipenuhi untuk x = ……

14. Buktikan $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

15. Sederhanakan

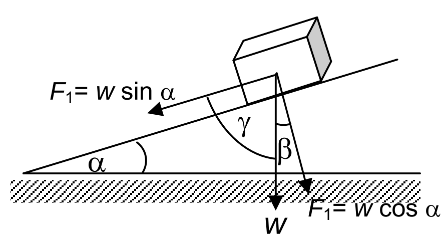
    b. $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$

    c. $\tan^2\alpha - \sec^2\alpha$

16. Hitunglah kuat arus dengan persamaan $I = 20 \sin \omega t$, jika diketahui $\omega = \frac{\pi}{6}$ rad/detik dan t = 2 detik.

17. Sebuah balok terletak pada tangga dengan kemiringan $\alpha = 30°$. Gaya beratnya diuraikan dalam gaya $w \sin\alpha$ dan $w \cos\alpha$.

    Tentukan besar gaya F_1 dan F_2 jika diketahui massa balok (m) = 14 kg dan gaya grafitasi (g) = 10 m/s^2



Bab III
Penutup

A. Rangkuman

1. Tabel nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tak terdefinisi
$\cot\alpha$	tak terdefinisi	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

2. Rumus Perbandingan Trigonometri Sudut yang Berelasi

   a. Perbandingan trigonometri sudut α dengan $(90° - \alpha)$

1) $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$	4) $\csc(90° - \alpha) = \sec\alpha$
2) $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$	5) $\sec(90° - \alpha) = \csc\alpha$
3) $\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$	6) $\cot(90° - \alpha) = \tan\alpha$

   b. Perbandingan trigonometri untuk sudut $\alpha°$ dengan $(180° - \alpha)$

1) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$	4) $\csc(180° - \alpha) = \csc\alpha$
2) $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$	5) $\sec(180° - \alpha) = -\sec\alpha$
3) $\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$	6) $\cot(180° - \alpha) = -\cot\alpha$

   c. Perbandingan trigonometri untuk sudut $\alpha°$ dengan $(180° + \alpha)$

1) $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$	4) $\csc(180° + \alpha) = -\csc\alpha$
2) $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$	5) $\sec(180° + \alpha) = -\sec\alpha$
3) $\tan(180° + \alpha) = \tan\alpha$	6) $\cot(180° + \alpha) = \cot\alpha$

d. Perbandingan trigonometri untuk sudut α dengan (- α)

1) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	4) $\text{cosec}(-\alpha) = -\text{cosec}\,\alpha$
2) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	5) $\sec(-\alpha) = \sec\alpha$
3) $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	6) $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

3. Dalam setiap Δ ABC dengan panjang sisi-sisi BC.CA, dan AB berturut-turut a, b, dan c satuan dan besar sudut A, B, dan C berturut-turut, α, β, dan γ satuan berlaku:

   a. Aturan (rumus) sinus: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

   b. Aturan (rumus) kosinus:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2bc\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{cases}$$

4. Menyelesaikan persamaan trigonometri

   a. Jika $\sin x = \sin\alpha$ maka

      $x = \alpha + k.\,360°$ atau $x = (180° - \alpha) + k.\,360°$, $k \in$ B

   b. Jika $\cos x = \cos\alpha$ maka

      $x = \alpha + k.\,360°$ atau $x = -\alpha + k.\,360°$, $k \in$ B

   c. Jika $\tan x = \tan\alpha$ maka $x = \alpha + k.\,180°$ $k \in$ B

5. Rumus-rumus trigonometri

   a. Jumlah dan selisih dua sudut

      1) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

      2) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

      3) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

      4) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

      5) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

      6) $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

   b. Rumus trigonometri untuk sudut rangkap

1) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2 \alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

3) $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

c. Mengubah Rumus Perkalian ke Penjumlahan/Pengurangan

1) $\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

2) $\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$

3) $\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

4) $\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$

B. Saran

Pemahaman terhadap rumus–rumus dasar trigonometri harus betul–betul menjadi penekanan dalam proses pembelajaran sehingga siswa mampu mengaitkan dan menggunakan rumus–rumus yang sesuai untuk menyelesaikan persoalan trigonometri.

Semoga bahan ajar ini menjadi salah satu sumber bacaan bagi para guru dalam pembelajaran matematika di SMK. Penulis menyadari adanya keterbatasan dan kekurangan dalam penyusunan bahan ajar ini, sehingga kritik dan saran sangat diharapkan.

Daftar Pustaka

Bernadeta Etty W, Suparno & Hutomo. (1996). *Bahan Ajar STM*. Yogyakarta: PPPG Matematika.

Hyatt, H.R. & Small,L. (1982). *Trigonometry a Calculator Approach.* Canada: John Wiley and Sons, Inc.

Kenneth S. Miller & John B. Walsh. (1962). *Elementary and Advanced Trigonometry*. New York: Harper & Brothers Publisher.

Richard G. Brown. (1994). *Advanced Mathematics* . California: Houghton Mifflin Company.

Tumisah P. Jono & Mukimin.(2002). *Trigonometri Bahan Ajar Matematika SMK*. Yogyakarta: PPPG Matematika.

Winarno& Al. Krismanto. (2001). *Bahan Standarisasi SMU Trigonometri*. Yogyakarta: PPPG Matematika.