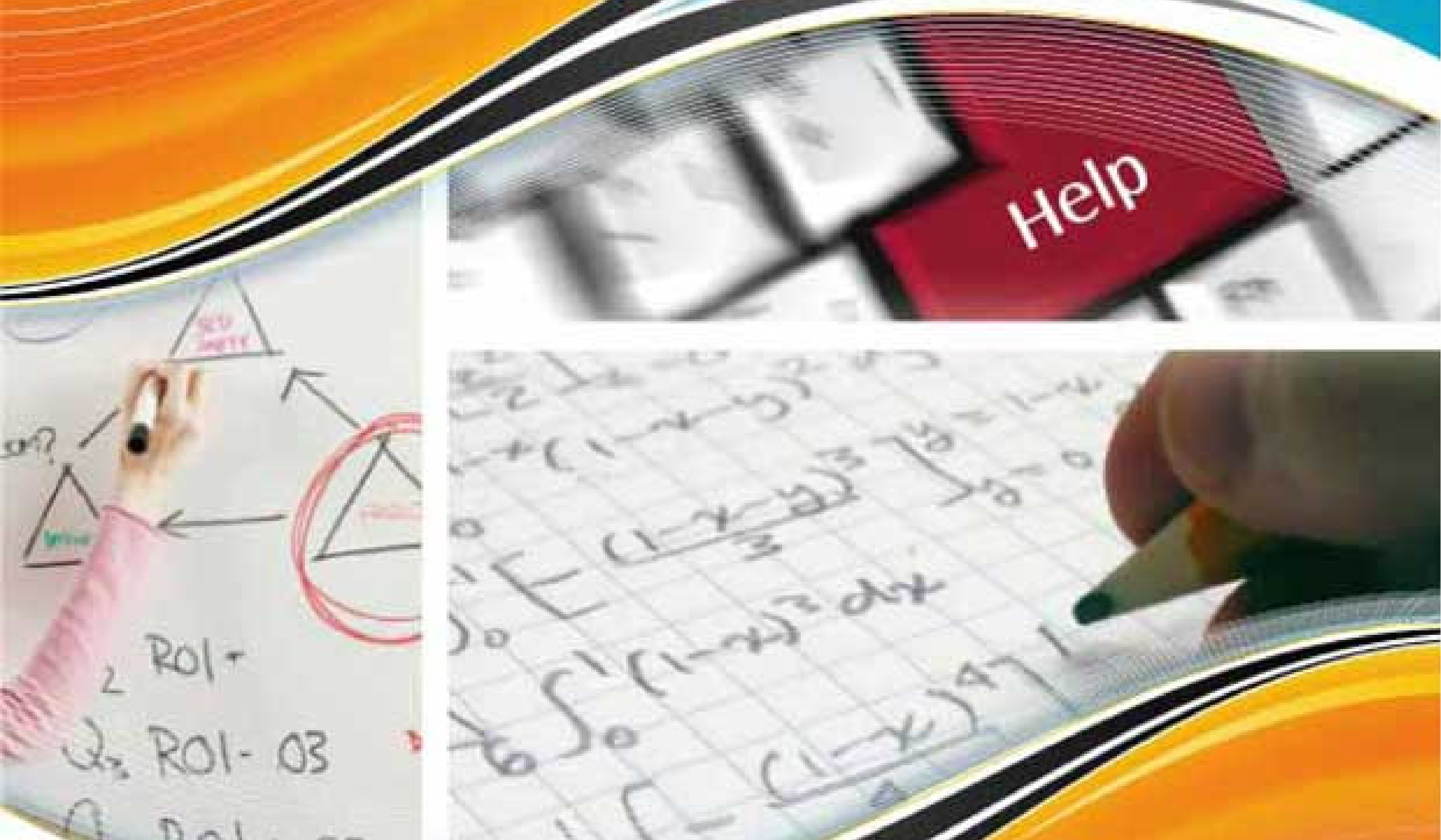
PEMBAHASAN SOAL UN

MATEMATIKA SMA IPA PAKET 12
TAHUN PELAJARAN 2010/2011

Tim Pembahas:
Sigit Tri Guntoro
Marfuah

Reviewer:
Jakim Wiyoto
Rohmitawati



PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
KEMENTERIAN PENDIDIKAN NASIONAL

2011

PEMBAHASAN

SOAL UN 2011

MATEMATIKA IPA (PAKET 12)

Pembahas:

Sigit Tri Guntoro

Marfuah

Reviewer:

Jakim Wiyoto

Rohmitawati

1. Bentuk sederhana dari $\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-3\sqrt{3}} =$….

   A. $\frac{20+5\sqrt{15}}{22}$

   B. $\frac{23-5\sqrt{15}}{22}$

   C. $\frac{20-5\sqrt{15}}{-22}$

   D. $\frac{20+5\sqrt{15}}{-22}$

   E. $\frac{23+5\sqrt{15}}{-22}$

   Alternatif penyelesaian:

   Dengan merasionalkan penyebut diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-3\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+3\sqrt{3}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{5}+2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+3\sqrt{3}\right)}{5-27} \\ &= \frac{5+3\sqrt{15}+2\sqrt{15}+18}{-22} \\ &= \frac{23+5\sqrt{15}}{-22}\end{aligned}$$

Jawaban: E

2. Grafik $y = px^2 + (p+2)x - p + 4$ memotong sumbu X di dua titik. Batas-batas nilai p yang memenuhi adalah….

   A. $p < -2$ atau $p > -\frac{2}{5}$

   B. $p < \frac{2}{5}$ atau $p > 2$

   C. $p < 2$ atau $p > 10$

   D. $\frac{2}{5} < p < 2$

   E. $2 < p < 10$

   Alternatif penyelesaian:

   Untuk menghasilkan perpotongan dua titik pada sumbu X maka diskriminan *D* dari *y* memenuhi *D*>0.

   $D > 0$

   $\Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0$

$\Leftrightarrow (p+2)^2 - 4p(-p+4) > 0$

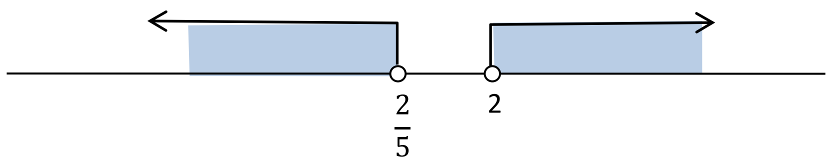
$\Leftrightarrow (p^2 + 4p + 4 + 4p^2 - 16p > 0$

$\Leftrightarrow 5p^2 - 12p + 4 > 0$

$\Leftrightarrow (5p-2)(p-2) > 0$

$\Leftrightarrow p < \frac{2}{5}$ atau $p > 2$

Secara ilustrasi:



Jadi batas-batas nilai p yang memenuhi adalah $p < \frac{2}{5}$ atau $p > 2$

Jawaban: B

3. Diketahui titik A(5, 1, 3), B(2, -1, -1), C(4, 2, -4). Besar sudut ABC adalah….

A. π

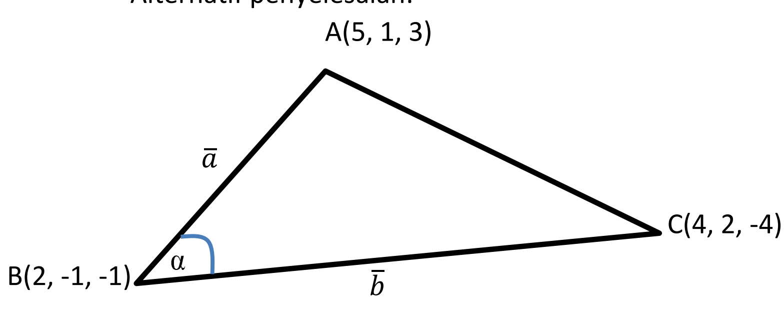
B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{6}$

E. 0

Alternatif penyelesaian:



$\bar{a} = (3, 2, 4)$

$\bar{b} = (2, 3, -3)$

Dengan mengingat *dot product* $\bar{a}.\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\alpha$ maka diperoleh

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\,.\,\bar{b}}{|\bar{a}\,||\bar{b}\,|}$$

$$= \frac{3.2 + 2.3 + 4.(-3)}{\sqrt{9+4+16}\,\sqrt{4+9+9}}$$

$$= 0$$

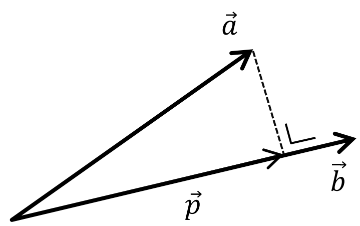
Jadi $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Jawaban: B

4. Diketahui vektor $\vec{a} = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ dan vektor $\vec{b} = 2\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 4\vec{k}$. Proyeksi vektor orthogonal vektor a pada vektor b adalah….
   A. $\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$
   B. $\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$
   C. $\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}$
   D. $2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$
   E. $6\vec{\imath} - 8\vec{\jmath} + 6\vec{k}$

   Alternatif penyelesaian:

   Misalkan proyeksi vektor orthogonal (tegak lurus) vektor $\vec{a}$ pada vektor $\vec{b}$ adalah vektor vektor $\vec{p}$



   maka

$$\vec{p} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

   Sesuai dengan soal diperoleh

$$\vec{p} = \frac{8+12+8}{4+36+16}\left(2\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 4\vec{k}\right)$$

$$= \frac{28}{56}\left(2\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 4\vec{k}\right)$$

$$= \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

Jawaban: B

5. Diketahui $f(x) = 2x + 5$ dan $g(x) = \frac{x-1}{x+4}, x \neq -4$, maka $(f \circ g)(x) =$....

   A. $\frac{7x+2}{x+4}, x \neq -4$

   B. $\frac{2x+3}{x+4}, x \neq -4$

   C. $\frac{2x+2}{x+4}, x \neq -4$

   D. $\frac{7x+18}{x+4}, x \neq -4$

   E. $\frac{7x+22}{x+4}, x \neq -4$

   Alternatif penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f\left(\frac{x-1}{x+4}\right) \\
&= 2\left(\frac{x-1}{x+4}\right) + 5 \\
&= \frac{2x - 2 + 5x + 20}{x+4} \\
&= \frac{7x+18}{x+4} \text{ , untuk } x \neq -4
\end{aligned}
$$

Jawaban: D

6. Akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 + mx + 16 = 0$ adalah α dan β. Jika α =2β dan α, β positif, maka nilai *m* adalah....

   A. -12

   B. -6

   C. 6

   D. 8

   E. 12

   Alternatif penyelesaian:

   Perhatikan bahwa:

   $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ dan $= \frac{c}{a}$.

   Sesuai dengan persamaan kuadratnya maka

   $\alpha + \beta = -\frac{m}{2}$ dan $\alpha\beta = \frac{16}{2} = 8$. Karena $\alpha \ = 2\beta$ maka diperoleh

$-\frac{m}{2} = \alpha + \beta = 2\beta + \beta = 3\beta$ atau ditulis $m = -6\beta$. Selain itu diperoleh $8 = \alpha\beta = (2\beta)\beta = 2\beta^2$. Penyelesaian dari $8 = 2\beta^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 4$ adalah $\beta = 2$ atau $\beta = -2$. Karena β positif maka dipilih $\beta = 2$. Dari sini diperoleh $m = -6(\beta) = -6(2) = 12$

Jawaban: E

7. Diketahui persamaan matriks

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nilai $x - y =$….

A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{15}{2}$

C. $\frac{19}{2}$

D. $\frac{22}{2}$

E. $\frac{23}{2}$

Alternatif penyelesaian:

Perhatikan hasil perkalian matriks

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10-2x & -5-2x-2y \\ 18-4x & -9-4x-4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dari sini didapatkan

$$10 - 2x = 1$$

$$x = \frac{9}{2}$$

$$-5 - 2x - 2y = 0$$

$$-2\left(\frac{9}{2}\right) - 2y = 5$$

$$2y = -7$$

$$y = -\frac{14}{2}$$

Jadi $x - y = \frac{9}{2} - \left(-\frac{14}{2}\right) = \frac{9}{2} + \frac{14}{2} = \frac{23}{2}$

Jawaban: E

8. Pada suatu hari Pak Ahmad, Pak Badrun, dan Pak Yadi panen jeruk. Hasil kebun Pak Yadi lebih sedikit 15 kg dari hasil kebun Pak Ahmad dan lebih banyak 15 kg dari hasil kebun Pak Badrun. Jika jumlah hasil panen ketiga kebun itu 225 kg, maka hasil panen Pak Ahmad adalah….
    A. 90 kg
    B. 80 kg
    C. 75 kg
    D. 70 kg
    E. 60 kg

    Alternatif penyelesaian:

    Misalkan

    jumlah hasil panen Pak Ahmad = x kg,

    jumlah hasil kebun Pak Badrun = y kg

    jumlah hasil kebun Pak Yadi = z kg

    Dari data diperoleh

    $y = x - 15$

    $z = y + 15$

    $x + y + z = x + x - 15 + (x - 15) - 15 = 225$

    $\Leftrightarrow 3x = 270$

    $x = 90$

    Jadi hasil panen Pak Ahmad 90 kg

Jawaban: A

9. Seorang anak diharuskan minum dua jenis tablet setiap hari. Tablet jenis I mengandung 5 unit vitamin A dan 3 unit vitamin B. Tablet jenis II mengandung 10 unit vitamin A dan 1 unit vitamin B. Dalam 1 hari anak tersebut memerlukan 25 unit vitamin A dan 5 unit vitamin B. Jika harga tablet 1 Rp. 4000,00 per biji dan tablet II Rp. 8.000,00 per biji, pengeluaran minuman untuk pembelian tablet per hari adalah….
    A. Rp12.000,00
    B. Rp14.000,00
    C. Rp16.000,00
    D. Rp18.000,00

E. Rp20.000,00

Alternatif penyelesaian:

Misal

Banyaknya tablet Jenis I yang diperlukan tiap hari : x tablet

Banyaknya tablet Jenis I yang diperlukan tiap hari : x tablet

	Satu Tablet Jenis I	Satu Tablet Jenis II	Keperluan tiap hari
Kandungan Vitamin A Kandungan Vitamin B	5 3	10 1	25 5
Harga	4000	8000	

Dari sini didapatkan model matematik:

$5x + 10y \geq 25$

$3x + y \geq 5$

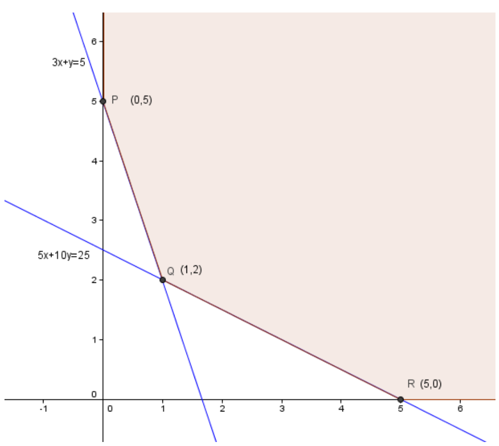
$x \geq 0$

$y \geq 0$

Dengan meminimumkan

$F(x, y) = 4000x + 8000y$

Daerah penyelesaian dari masalah di atas terlihat pada daerah yang diarsir



Dengan menguji titik-titik sudut daerah penyelesaian diperoleh

Titik	F(x,y)=4000x + 8000y
A(5,0)	20000

B(1,2)	20000
C(0,5)	40000

Jadi ada 2 titik yang menyebabkan nilai minimum pada F yaitu A(5,0) dan B(1,2) yang menghasilkan nilai minimum 20000

Jawaban: E

10. Nilai $\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)}{\sqrt{x}-2} =$....
    A. 0
    B. 4
    C. 8
    D. 12
    E. 16

    Alternatif penyelesaian:

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x-4)}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)}{\sqrt{x}-2} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)}$$
$$= \lim_{x\to 4} \left(\sqrt{x}+2\right)$$
$$= 4$$

Jawaban: B

11. Nilai $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{2x \sin 2x} =$....
    A. $\frac{1}{8}$
    B. $\frac{1}{6}$
    C. $\frac{1}{4}$
    D. $\frac{1}{2}$
    E. 1

Alternatif penyelesaian:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x\sin 2x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{2x\sin 2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-1+2\sin^2 x}{2x\sin 2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{2x\sin 2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\sin x}{2x\sin 2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{\sin x}{\sin 2x}\\ &= 1\,.\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Jawaban: D

12. Akar-akar persamaan $3x^2 - 12x + 2 = 0$ adalah α dan β. Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $(\alpha + 2)$ dan $(\beta + 2)$ adalah….
    A. $3x^2 - 24x + 38 = 0$
    B. $3x^2 + 24x + 38 = 0$
    C. $3x^2 - 24x - 38 = 0$
    D. $3x^2 - 24x + 24 = 0$
    E. $3x^2 - 24x - 24 = 0$

    Alternatif penyelesaian:

    Ingat kembali bahwa jika α dan β akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka berlaku $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ dan $\alpha\beta = \frac{c}{a}$. Dari persamaan kuadrat $3x^2 - 12x + 2 = 0$ diperoleh

Persamaan Kuadrat Lama

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= -\frac{b}{a}\\ &= \frac{12}{3}\\ &= 4\\ \alpha\beta &= \frac{c}{a}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Persamaan Kuadrat Baru

$$\begin{aligned}(\alpha + 2) + (\beta + 2) &= \alpha + \beta + 4\ = 8\\ (\alpha + 2).(\beta + 2) &= \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4\\ &= \tfrac{2}{3} + 2(4) + 4\\ &= \tfrac{2+24+12}{3}\\ &= \tfrac{38}{3}\end{aligned}$$

Persamaan dapat dibentuk dengan cara :

$x^2 - (jumlah\ akar)x + hasil\ kali\ akar = 0.$

Sesuai hasil sebelumnya didapatkan

$$x^2 - (8)x + \frac{38}{3} = 0$$

$$3x^2 - 24x + 38 = 0$$

Jawaban: A

13. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ di titik $(7,1)$ adalah….
    A. $3x - 4y - 41 = 0$
    B. $4x + 3y - 55 = 0$
    C. $4x - 5y - 53 = 0$
    D. $4x + 3y - 31 = 0$
    E. $4x - 3y - 40 = 0$

Alternatif penyelesaian:

Ingat kembali bahwa persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ di titik (x_1, y_1) adalah $xx_1 + yy_1 + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0.$ Dengan demikian persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ di titik $(7,1)$ adalah:

$$7x + y + \frac{1}{2}(-6)(x + 7) + \frac{1}{2}4(y + 1) - 12 = 0$$

$$7x + y - 3x - 21 + 2y + 2 - 12 = 0$$

$$4x + 3y - 31 = 0$$

Jawaban: D

14. Diketahui premis-premis

(1) Jika hari hujan, maka ibu memakai payung

(2) Ibu tidak memakai payung

Penarikan kesimpulan yang sah dari premis-premis tersebut adalah….

A. Hari tidak hujan

B. Hari hujan

C. Ibu memakai payung

D. Hari hujan dan Ibu memakai payung

E. Hari tidak hujan dan Ibu memakai payung

Alternatif penyelesaian:

Misalkan,

p : hari hujan

q : Ibu memakai payung

Sesuai dengan premisnya diperoleh

$p \Rightarrow q$

$\underline{\quad\ \sim q}$

$\therefore\ \sim p$ (hari tidak hujan)

Jawaban: A

15. Diketahui suku banyak $P(x) = 2x^4 + ax^3 - 3x^2 + 5x + b$. Jika $P(x)$ dibagi $(x-1)$ sisa 11, dibagi $(x+1)$ sisa -1, maka nilai $(2a+b) =$….
    A. 13
    B. 10
    C. 8
    D. 7
    E. 6

Alternatif penyelesaian:

$P(x)$ dibagi $(x-1)$ sisa 11. Berarti $P(x) = (x-1).H(x) + 11$, yang menghasilkan $P(1) = 11$

$P(x)$ dibagi $(x+1)$ sisa -1. Berarti $P(x) = (x+1).J(x) + (-1)$, yang menghasilkan $P(-1) = -1$

Dari sini diperoleh

$$2 + a - 3 + 5 + b = 11 \qquad 2 - a - 3 - 5 + b = -1$$
$$a + b = 7 \qquad -a + b = 5$$

$$\begin{array}{r} a + b = 7 \\ \underline{-a + b = 5} + \\ 2b = 12 \\ b = 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b = 7 \\ a = 1 \end{array}$$

Jadi $2a + b = 2 + 6 = 8$

Jawaban: C

16. Diketahui $(x - 2)$ dan $(x - 1)$ adalah faktor-faktor suku banyak $P(x) = x^3 + ax^2 - 13x + b$. Jika akar-akar persamaan suku bannyak tersebut adalah x_1, x_2 , dan x_3, untuk $x_1 > x_2 > x_3$ maka nilai $x_1 - x_2 - x_3 =$....
    A. 8
    B. 6
    C. 3
    D. 2
    E. -4

    Alternatif penyelesaian:

    $P(x) = x^3 + ax^2 - 13x + b$

    Untuk $(x - 2)$ berlaku:

    $$8 + 4a - 26 + b = 0$$
    $$4a + b = 18$$

    Untuk $(x - 1)$ berlaku:

    $$1 + a - 13 + b = 0$$
    $$a + b = 12$$

    $$\begin{array}{r} 4a + b = 18 \\ \underline{a + b = 12} - \\ a = 2 \end{array}$$

    $$a + b = 12$$
    $$b = 12 - 2$$
    $$b = 10$$

    Untuk menentukan faktor yang lain dari $P(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ digunakan cara:

    $$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2 & -13 & 10 \\ & & 1 & 3 & -10 \\ \hline 2 & 1 & 3 & -10 & \\ & & 2 & 10 & \\ \hline & 1 & 5 & & \end{array}$$

    Faktor yang lain adalah $x + 5$, sehingga nilai dari

    $$x_1 - x_2 - x_3 = 2 - 1 + 5$$
    $$= 6$$

Jawaban: B

17. Nilai x yang memenuhi persamaan ${}^{\frac{1}{2}}\log(x^2-3) - {}^{\frac{1}{2}}\log x = -1$ adalah….

    A. $x = -1$ atau $x = 3$

    B. $x = 1$ atau $x = -3$

    C. $x = 1$ atau $x = 3$

    D. $x = 1$ saja

    E. $x = 3$ saja

    Alternatif penyelesaian:

    Prasyarat yang harus dipenuhi adalah:

    (1) $x^2 - 3 > 0$. Sementara itu $x^2 - 3 > 0 \iff (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) > 0$. Sehingga didapatkan prasyarat $x < -\sqrt{3}$ atau $x > \sqrt{3}$

    (2) $x > 0$

    Kombinasi (1) dan (2) diperoleh prasyarat $x > \sqrt{3}$ (*)

    Dengan memperhatikan prasyarat di atas selanjutnya diselesaikan

${}^{\frac{1}{2}}\log(x^2-3) - {}^{\frac{1}{2}}\log x = -1$

$\iff {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{x^2-3}{x}\right) = {}^{\frac{1}{2}}\log 2$

$\iff \frac{x^2-3}{x} = 2 \iff x^2 - 3 = 2x \iff x^2 - 2x - 3 = 0.$

Dari sini diperoleh penyelesaian

$x = 3$ atau $x = -1.$

Mengingat (*) maka didapat penyelesaian $x = 3$

Jawaban: E

18. Persamaan bayangan garis $y = 2x - 3$ karena refleksi terhadap garis $y = -x$, dilanjutkan refleksi terhadap $y = x$ adalah….

    A. $y + 2x - 3 = 0$

    B. $y - 2x - 3 = 0$

    C. $2y + x - 3 = 0$

    D. $2y - x - 3 = 0$

    E. $2y + x + 3 = 0$

    Alternatif penyelesaian:

    Matriks transformasi untuk refleksi adalah sebagai berikut:

$$T_{y=-x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 2x-3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 2x-3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -2x+3 \end{pmatrix}$$

Dari sini diperoleh:

$x = -x'$

$y' = -2x + 3 \rightarrow \ y' = 2x' + 3$

$y' - 2x' - 3 = 0$

Jadi hasil transformasinya adalah $y - 2x - 3 = 0$

Jawaban: B

19. Bentuk sederhana dari $\frac{7x^3y^{-4}z^{-6}}{84x^{-7}y^{-1}z^{-4}} =$....

A. $\frac{x^{10}z^{10}}{12y^3}$

B. $\frac{z^2}{12x^4y^3}$

C. $\frac{x^{10}y^5}{12z^2}$

D. $\frac{y^3z^2}{12x^4}$

E. $\frac{x^{10}}{12y^3z^2}$

Alternatif penyelesaian:

Perhatikan bahwa

$$\frac{7x^3y^{-4}z^{-6}}{84x^{-7}y^{-1}z^{-4}} = \frac{7}{84}.\frac{x^3}{x^{-7}}.\frac{y^{-4}}{y^{-1}}.\frac{z^{-6}}{z^{-4}}$$

$$= \frac{1}{12}.x^{10}.y^{-3}.z^{-2}$$

$$= \frac{x^{10}}{12y^3z^2}$$

Jawaban: E

20. Hasil dari $\int \cos^4 2x \sin 2x \, dx =$....

A. $-\frac{1}{10}\sin^5 2x + C$

B. $-\frac{1}{10}\cos^5 2x + C$

C. $-\frac{1}{5}\cos^5 2x + C$

D. $\frac{1}{5}\cos^5 2x + C$

E. $\frac{1}{10}\sin^5 2x + C$

Alternatif penyelesaian:

Misalkan:

$u = \cos 2x$, maka

$du = -2 \sin 2x \, dx$

$\sin 2x \, dx = -\dfrac{1}{2} du$

Sehingga

$$\int \cos^4 2x \sin 2x \, dx = \int u^4 . -\frac{1}{2} du$$

$$= -\frac{1}{2} . \frac{1}{5} u^5 + c$$

$$= -\frac{1}{10} \cos^5 2x + c$$

Jawaban B

21. Hasil $\int \dfrac{2x+3}{\sqrt{3x^2+9x-1}} dx = \ldots$

A. $2\sqrt{3x^2+9x-1}+C$

B. $\dfrac{1}{3}\sqrt{3x^2+9x-1}+C$

C. $\dfrac{2}{3}\sqrt{3x^2+9x-1}+C$

D. $\dfrac{1}{2}\sqrt{3x^2+9x-1}+C$

E. $\dfrac{3}{2}\sqrt{3x^2+9x-1}+C$

Alternatif penyelesaian:

Misalkan $3x^2+9x-1=t$, maka berlaku:

$$(6x+9)dx=dt \Leftrightarrow 3\left(2x+3\right)dx=dt$$

$$\Leftrightarrow \left(2x+3\right)dx=\frac{1}{3}dt$$

Apabila nilai *t* disubstitusikan pada soal, diperoleh:

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt{3x^2+9x-1}}dx=\int \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{3}\int t^{-1/2}dt=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot t^{1/2}+C=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3x^2+9x-1}+C$$

Jawab: C

22. Nilai $\dfrac{\cos 140^\circ-\cos 100^\circ}{\sin 140^\circ-\sin 100^\circ}=\ldots$

Alternatif penyelesaian:

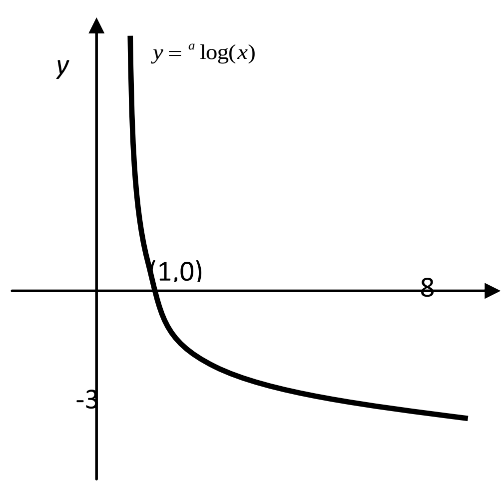
Menggunakan rumus trigonometri diperoleh:

$$\frac{\cos 140^\circ-\cos 100^\circ}{\sin 140^\circ-\sin 100^\circ}=\frac{-2.\sin\left(\dfrac{140^\circ+100^\circ}{2}\right).\sin\left(\dfrac{140^\circ-100^\circ}{2}\right)}{2.\cos\left(\dfrac{140^\circ+100^\circ}{2}\right).\sin\left(\dfrac{140^\circ-100^\circ}{2}\right)}$$

$$=\frac{-\cancel{2}.\sin 120^\circ.\cancel{\sin 20^\circ}}{\cancel{2}.\cos 120^\circ.\cancel{\sin 20^\circ}}$$

$= -\tan 120^\circ = \sqrt{3}$

Jawaban: E



23. Perhatikan gambar!

Persamaan grafik fungsi inversnya adalah ...

A. $y = 3^x$

B. $y = \frac{1}{3}^{x}$

C. $y = 3^{\frac{1}{x}}$

D. $y = \frac{1}{2}^{x}$

E. $y = 2^x$

Alternatif penyelesaian:

Dari grafik dapat dilihat bahwa:

${}^{a}\log 1 = 0$ dan ${}^{a}\log 8 = -3$

dipenuhi untuk~~Berlaku~~ *a* = $\frac{1}{2}$

Sehingga, apabila *f*(*x*)= ${}^{a}\log x$, maka fungsi invers f^{-1} dapat diperoleh dengan cara:

$$y = {}^{a}\log x \Leftrightarrow x = a^{y} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{y}$$

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$$

Jawaban: D

24. Modus data pada tabel berikut adalah ...

Ukuran	***f***
1 – 5	3
6 – 10	17
11 – 15	18
16 – 20	22
21 – 25	25
26 – 30	21

31 – 25	4

A. $20,5+\frac{3}{4}.5$

B. $20,5+\frac{3}{25}.5$

C. $20,5+\frac{3}{7}.5$

D. $20,5-\frac{3}{4}.5$

E. $20,5-\frac{3}{7}.5$

Pembahasan:

Modus = $Tb+\frac{f_a}{f_a+f_b}.I$ dengan:

Tb = tepi bawah kelas dengan frekuensi terbesar (*f*=25) , yakni 20,5

f_a = frekuensi kelas modus dikurangi frekuensi kelas sebelumnya, yakni 25–22 = 3

f_b = frekuensi kelas modus dikurangi frekuensi kelas sesudahnya, yakni 25 – 21 = 4

I = interval kelas = 5

Jadi:

Modus = $20,5+\frac{3}{7}.5$

Jawaban: C

25. Seorang siswa diwajibkan mengerjakan 8 dari 10 soal, tetapi nomor 1 sampai dengan 4 wajib dikerjakan. Banyaknya pilihan yang harus diambil siswa tersebut ada ...

A. 10

B. 15

C. 20

D. 25

E. 30

Alternatif penyelesaian:

Karena soal nomor 1 sampai dengan 4 wajib dikerjakan, maka tersisa 6 soal lain untuk dipilih sebanyak 4 soal.

Kejadian ini merupakan kejadian kombinasi, karena urutan tidak diperhatikan. Apabila soal yang dipilih adalah {soal 5, soal 6, soal 7, soal 8} maka dianggap sama dengan memilih { soal 6,soal 5, soal 7, soal 8}.

n adalah banyak soal = 6

r adalah banyak soal yang harus dipilih = 4

$$_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$_6C_4 = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

Jawaban: B

26. Dari dalam kantong yang berisi 8 kelereng merah dan 10 kelereng putih akan diambil 2 kelereng sekaligus secara acak. Peluang yang terambil 2 kelereng putih adalah…

A. $\frac{20}{153}$

B. $\frac{28}{153}$

C. $\frac{45}{153}$

D. $\frac{56}{153}$

E. $\frac{90}{153}$

Alternatif penyelesaian:

Misal:

A= kejadian terambil 2 kelereng putih

S=ruang sampel, yaitu kejadian terambilnya 2 kelereng dari 18 kelereng

Maka peluang terambil 2 kelereng putih adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

dengan *n*(*A*) kombinasi terambilnya 2 kelereng putih dari 10 kelereng putih

Jadi:

$$P(A)=\frac{{}_{10}C_2}{{}_{18}C_2}=\frac{\frac{10!}{8!2!}}{\frac{18!}{16!2!}}=\frac{45}{153}$$

Jawaban: C

27. Diketahui $\left(A+B\right)=\frac{\pi}{3}$ dan $\sin A.\sin B=\frac{1}{4}$. Nilai $\cos(A-B)=...$

A. -1

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{4}$

E. 1

Alternatif penyelesaian:

Dengan menggunakan rumus trigonometri untuk jumlahan dan selisih sudut, berlaku:

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}=\cos A\cos B-\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}=\cos A\cos B-\frac{1}{4}$$

Diperoleh: $\cos A\cos B=\frac{3}{4}$

Dari sini maka,

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$$

Jawaban: E

28. Diketahui matriks $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ dan $B=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -17 & 0\end{pmatrix}$

Jika A^T = transpose matriks A dan AX=B+A^T, maka determinan matriks X =

A. −5

B. −1

C. 1

D. 5

E. 8

Alternatif penyelesaian:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ maka $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ dan $A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$B + A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -15 & 5 \end{pmatrix}$

Ditentukan matriks X yang memenuhi persamaan: $AX=B+A^T$

Maka :

$A^{-1} A X = A^{-1}(B+A^T) \Leftrightarrow X = A^{-1}(B+A^T)$

$$X = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -15 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 30 & -15 \\ -45 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Diperoleh det(X) = 2.1 − (-3)(-1) = -1

Jawaban: B

29. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 8 cm. M adalah titik tengah EH. Jarak titik M ke AG adalah ...

A. $4\sqrt{6}$ cm

B. $4\sqrt{5}$ cm

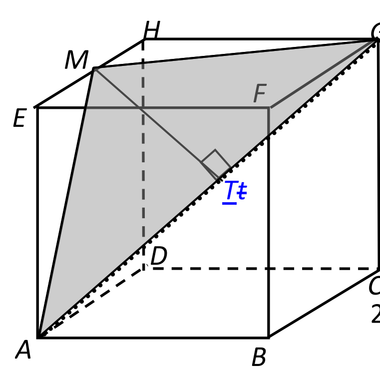
C. $4\sqrt{3}$ cm

D. $4\sqrt{2}$ cm

E. 4 cm

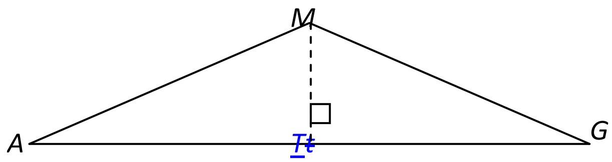
Alternatif penyelesaian:

Jarak titik M ke AG merupakan panjang garis yang melalui titik M dan tegak lurus garis AG, misal garis MT~~t~~.



Perhatikan bidang AMG.

AMG merupakan segitiga sama kaki.



Panjang AM = MG = $\sqrt{EM^2 + EA^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$

Panjang AG = panjang diagonal ruang = $8\sqrt{3}$

Diperoleh:

MT = $\sqrt{AM^2 - \frac{1}{2}AG^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - (4\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{2}$ cm

Jawaban : D

30. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 10 cm. Kosinus sudut antara garis GC dan bidang BDG adalah:

A. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$

B. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

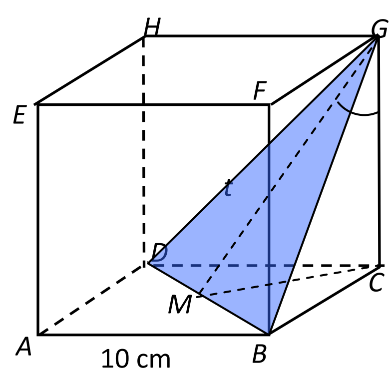
D. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

E. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$

Alternatif penyelesaian:

Kosinus sudut antara garis GC dan bidang BDG adalah nilai kosinus sudut MGC.

$$\cos MGC = \frac{GC}{MG}$$



$$= \frac{GC}{\sqrt{GC^2 + MC^2}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{10^2 + \left(\frac{1}{2}10\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{10}{5\sqrt{6}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

Jawaban: A

31. Suatu perusahaan menghasilkan *x* produk dengan biaya sebesar $(9000 + 1000x + 10x^2)$ rupiah. Jika semua ahasil produk perusahaan tersebut habis dijual dengan harga Rp 5000,00 untuk satu produknya, maka laba maksimum yang dapat diperoleh perusahaan tersebut adalah ...

   A. Rp 149.000,00

   B. Rp 249.000,00

   C. Rp 391.000,00

   D. Rp 609.000,00

   E. Rp 757.000,00

Alternatif penyelesaian:

Diketahui biaya produksi = $(9000 + 1000x + 10x^2)$ rupiah dan harga per produk = Rp 5000,00

Karena laba = pendapatan − biaya produksi, maka:

Laba = *F*(*x*) = $5000x - (9000 + 1000x + 10x^2) = -10x^2 + 4000x - 9000$

Laba maksimum diperoleh pada nilai *x* untuk *F'*(*x*) = 0.

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -20x + 4000 = 0 \Leftrightarrow x = 200$

Untuk *x* = 200, diperoleh :

Laba = *F*(*x*) = $= -10.(200)^2 + 4000(200) - 9000$ = Rp 391.000,00

Jawaban: C

32. Luas daerah yang dibatasi kurva $y = 4 - x^2$, $y = -x + 2$, dan $0 \le x \le 2$ adalah ...

A. $\frac{8}{3}$ satuan luas

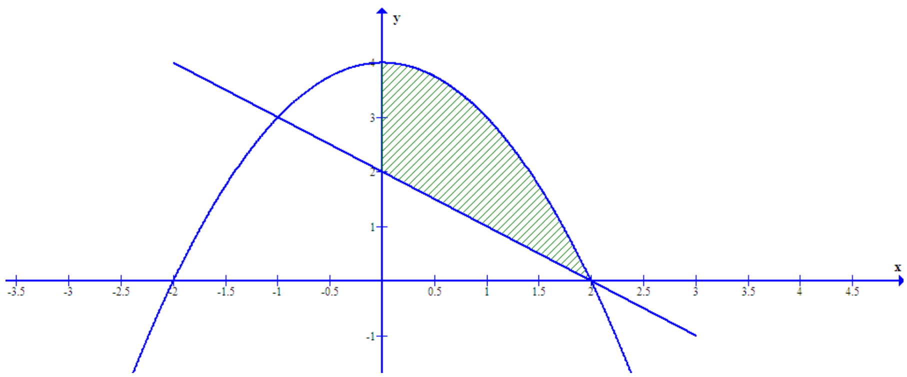
B. $\frac{10}{3}$ satuan luas

C. $\dfrac{14}{3}$ satuan luas

D. $\dfrac{16}{3}$ satuan luas

E. $\dfrac{26}{3}$ satuan luas

Alternatif penyelesaian:



$$L = \int_0^2 \left(f_1(x) - f_2(x) \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left((4 - x^2) - (-x + 2) \right) dx = \int_0^2 \left(-x^2 + x + 2 \right) dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \Big]_0^2$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) - 0 = \frac{10}{3}$$

Jawaban: B

33. Suku ke-4 dan ke-9 suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 110 dan 150. Suku ke-30 barisan aritmetika tersebut adalah ...

A. 308

B. 318

C. 326

D. 344

E. 354

Alternatif penyelesaian:

U_n adalah suku ke-*n* suatu barisan aritmetika, *a* adalah suku pertama dan *b* adalah beda.

$U_9 = 150 \Leftrightarrow a + 8b = 150$ ...... 1)

$U_4 = 110 \Leftrightarrow a + 3b = 110$ .... 2)

Dengan menggunakan metode eliminasi antara persamaan 1) dan 2) diperoleh:

a = 86 dan *b* = 8.

Sehingga:

$$U_{30} = a + 29b = 86 + (29)(8) = 318$$

Jawaban: B

34. Seorang penjual daging pada bulan Januari dapat menjual 120 kg, bulan Februari 130 kg, Maret dan seterusnya selama 10 bulan selalu bertambah 10 kg dari bulan sebelumnya. Jumlah daging yang terjual selama 10 bulan ada ....
    - A. 1.050 kg
    - B. 1.200 kg
    - C. 1.350 kg
    - D. 1.650 kg
    - E. 1.750 kg

Alternatif penyelesaian:

S_n adalah jumlahan suku ke-*n* suatu barisan aritmetika, *a* adalah suku pertama dan *b* adalah beda.

Dari soal: *a*=120 dan *b*=10. Berlaku:

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)b\right)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}\left(2.120 + 9.10\right) = 1650 \text{ kg}$$

Jawaban: D

35. Hasil $\int_2^4 (-x^2 + 6x - 8)dx = ...$

A. $\frac{38}{3}$

B. $\frac{26}{3}$

C. $\dfrac{20}{3}$

D. $\dfrac{16}{3}$

E. $\dfrac{4}{3}$

Alternatif penyelesaian:

$$\int_2^4 (-x^2+6x-8)dx = -\frac{1}{3}x^3+3x^2-8x\Big]_2^4$$

$$= -\frac{1}{3}(4)^3+3.4^2-8.4-(-\frac{1}{3}(2)^3+3.2^2-8.2) = \frac{4}{3}$$

Jawaban: E

36. $\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin 3x+\cos x)dx = ...$

A. $\dfrac{10}{3}$

B. $\dfrac{8}{3}$

C. $\dfrac{4}{3}$

D. $\dfrac{2}{3}$

E. $-\dfrac{4}{3}$

Penyelesaian

$$\int_0^{\pi} (\sin 3x+\cos x)dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos 3x+\sin x\Big]_0^{\pi} = \left(-\frac{1}{3}\cos 3\pi+\sin\pi\right)-\left(-\frac{1}{3}\cos 0+\sin 0\right) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Jawaban: D

37. Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, garis $y = 2x$ di kuadran I diputar 360° terhadap sumbu *x* adalah ...

A. $\dfrac{20}{15}\pi$ satuan volume

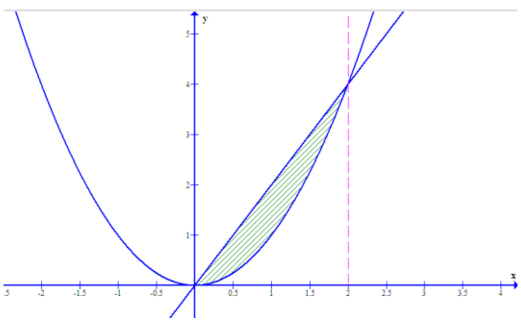
B. $\dfrac{30}{15}\pi$ satuan volume

C. $\dfrac{54}{15}\pi$ satuan volume

D. $\dfrac{64}{15}\pi$ satuan volume

E. $\dfrac{144}{15}\pi$ satuan volume

Alternatif penyelesaian:



Untuk menentukan volume benda putar antara dua kurva, ditentukan terlebih dahulu titik potong dua kurva.

Titik potong antara $y_1 = x^2$ dan $y_2 = 2x$ diperoleh untuk:

$y_1 = y_2 \Leftrightarrow x^2 = 2x \Leftrightarrow x(x-2) = 0$ ⇔ *x* = 0 dan *x*=2

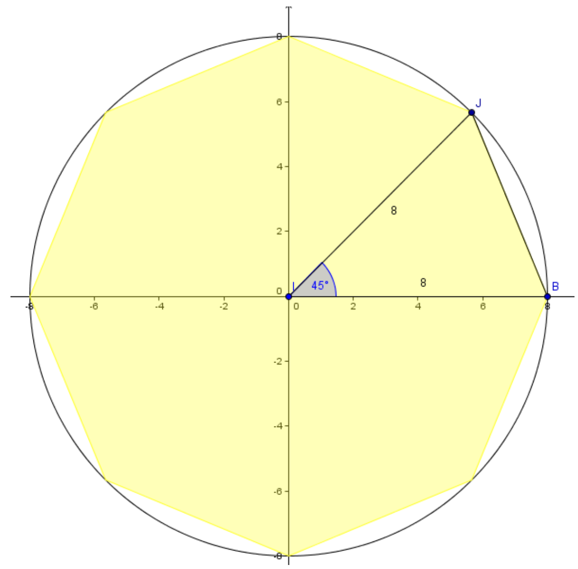
Sehingga:

$$V = \pi\left(\int_0^2 (y_1)^2 - (y_2)^2\right)dx = \pi\left(\int_0^2 4x^2 - x^4\right)dx$$

$$= \pi\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)_0^2 = \pi\left(\frac{4}{3}(8) - \frac{1}{5}(32) - 0\right) = \frac{64}{15}\pi \text{ satuan volume}$$

Jawaban: D

38. Dalam suatu lingkaran yang berjari-jari 8 cm dibuat segi-8 beraturan. Panjang sisi segi-8 tersebut adalah ...



A. $\sqrt{128-64\sqrt{3}}$ cm

B. $\sqrt{128-64\sqrt{2}}$ cm

C. $\sqrt{128-16\sqrt{2}}$ cm

D. $\sqrt{128+16\sqrt{2}}$ cm

E. $\sqrt{128+16\sqrt{3}}$ cm

Alternatif penyelesaian:

Perhatikan segitiga BIJ pada gambar di samping.

$$BJ^2 = BI^2 + IJ^2 - 2.BI.IJ.\cos 45^\circ$$

$$= 8^2 + 8^2 - 2.8.8.\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$BJ = \sqrt{128-64\sqrt{2}} \text{ cm}$$

Jawaban: B

39. Diketahui prisma segitiga tegak ABC.DEF . Panjang AB = 4 cm, BC = 6 cm, AC = $2\sqrt{7}$ cm, dan CF = 8 cm. Volume prisma tersebut adalah ...

A. $96\sqrt{3}$ cm^3

B. $96\sqrt{2}$ cm^3

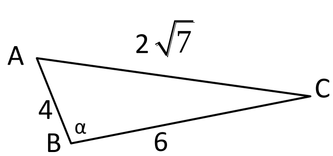
C. 96 cm^3

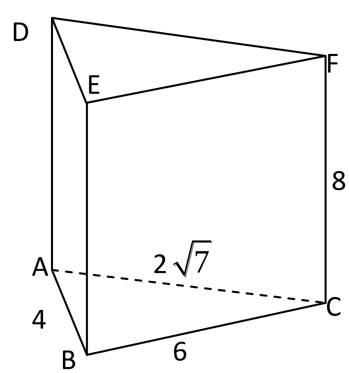
D. $48\sqrt{3}$ cm^3

E. $48\sqrt{2}$ cm^3

Alternatif penyelesaian:
Volume Prisma= Luas alas × tinggi

Luas alas prisma = luas segitiga ABC





Menggunakan rumus cosinus sudut pada segitiga, berlaku:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\alpha$

$(2\sqrt{7})^2 = 6^2 + 4^2 - 2.6.4.\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ$

Sehingga diperoleh:

Luas segitiga ABC = $\frac{1}{2}.a.c.\sin\alpha$ = $\frac{1}{2}.6.4.\sin 60^\circ = \frac{1}{2}.6.4.\frac{1}{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

Jadi: Volume Prisma= $6\sqrt{3}$ × 8 = $48\sqrt{3}$ cm^3

Jawaban : D

40. Himpunan penyelesaian persamaan $\cos 2x + \cos x = 0, 0 \le x \le 180^\circ$ adalah …

A. {45º,120º}

B. {45º,120º}

C. {60º,135º}

D. {60º,120º}

E. {60º,180º}

Alternatif penyelesaian:

$\cos 2x + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\cos x - \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos x + 1) - 1(\cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1) = 0$ atau $(\cos x + 1) = 0$, $0 \le x \le 180^\circ$

$\Leftrightarrow x = 60^\circ$ atau $x = 180^\circ$

Jawaban: E