DIKLAT GURU PENGEMBANG MATEMATIKA SMK JENJANG DASAR TAHUN 2009

Vektor

Oleh: Drs. Markaban, M.Si.

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENINGKATAN MUTU PENDIDIK DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
PUSAT PENGEMBANGAN DAN PEMBERDAYAAN PENDIDIK
DAN TENAGA KEPENDIDIKAN MATEMATIKA
2009

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas karunia-Nya, bahan ajar ini dapat diselesaikan dengan baik. Bahan ajar ini digunakan pada Diklat Guru Pengembang Matematika SMK Jenjang Dasar Tahun 2009, pola 120 jam yang diselenggarakan oleh PPPPTK Matematika Yogyakarta.

Bahan ajar ini diharapkan dapat menjadi salah satu rujukan dalam usaha peningkatan mutu pengelolaan pembelajaran matematika di sekolah serta dapat dipelajari secara mandiri oleh peserta diklat di dalam maupun di luar kegiatan diklat.

Diharapkan dengan mempelajari bahan ajar ini, peserta diklat dapat menambah wawasan dan pengetahuan sehingga dapat mengadakan refleksi sejauh mana pemahaman terhadap mata diklat yang sedang/telah diikuti.

Kami mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah berpartisipasi dalam proses penyusunan bahan ajar ini. Kepada para pemerhati dan pelaku pendidikan, kami berharap bahan ajar ini dapat dimanfaatkan dengan baik guna peningkatan mutu pembelajaran matematika di negeri ini.

Demi perbaikan bahan ajar ini, kami mengharapkan adanya saran untuk penyempurnaan bahan ajar ini di masa yang akan datang.
Saran dapat disampaikan kepada kami di PPPPTK Matematika dengan alamat: Jl. Kaliurang KM. 6, Sambisari, Condongcatur, Depok, Sleman, DIY, Kotak Pos 31 YK-BS Yogyakarta 55281. Telepon (0274) 881717, 885725, Fax. (0274) 885752. email: p4tkmatematika@yahoo.com

Sleman, 11 Mei 2009
Kepala,

Kasman Sulyono
NIP. 130352806

DAFTAR ISI

PETA KOMPETENSI DAN BAHAN AJAR

No	Kompetensi / Sub kompetensi	Indikator	Materi Pembelajaran
1.	***<u>Kompetensi :</u>*** **Mampu memfasilitasi siswa dalam memecahkan masalah berkaitan dengan konsep vektor** ***<u>Subkompetensi:</u>*** **Mengembangkan keterampilan siswa dalam:** • menerapkan konsep vektor pada bidang datar • menerapkan konsep vektor pada bangun ruang.	• Mampu mengembangkan dari kehidupan nyata sehari-hari, menjelaskan dan memberikan contoh mengenai konsep vektor pada bidang. • Mampu mengembangkan dari kehidupan nyata sehari-hari, menjelaskan dan memberikan contoh mengenai konsep vektor dalam ruang	• Beberapa pengertian yang terkait vektor (seperti: vektor, modulus, vektor satuan, vektor posisi) • Operasi vektor • Penerapan vektor pada program keahlian

SKENARIO PEMBELAJARAN

1. Pada awal pertemuan di lakukan kegiatan identifikasi permasalahan pembelajaran pada materi vektor yang dihadapi oleh guru selama di kelas.

2. Dari identifikasi permasalahan pembelajaran tersebut dijelaskan dengan ceramah, tanya jawab dan curah pendapat sehingga permasalahan vektor dapat dipecahkan

3. Peserta bekerja dalam kelompok program keahlian yang terdiri dari 5-6 orang dan mendiskusikan dan menganalisis materi dan latihan pada modul serta memberikan contoh penerapan sesuai program keahliannya.

Bab I
Pendahuluan

A. Latar Belakang

Di dalam kehidupan sehari-hari, kita sering mendengar kata-kata seperti suhu, gaya, panjang, percepatan, pergeseran dan sebagainya. Apabila diperhatikan besaran yang menyatakan besarnya kuantitas dari kata-kata tersebut ada perbedaanya yaitu ada yang hanya menunjukkan nilai saja, tetapi ada yang menunjukkan nilai dan arahnya. Besaran itu sering disebut skalar dan vektor. Setiap besaran skalar seperti panjang, suhu dan sebagainya selalu dikaitkan dengan suatu bilangan yang merupakan nilai dari besaran itu. Sedangkan untuk besaran vektor seperti gaya, percepatan, pergeseran dan sebagainya, disamping mempunyai nilai juga mempunyai arah. Jadi vektor adalah suatu besaran yang mempunyai nillai (besar/norm) dan arah. Vektor ini merupakan materi yang harus dikuasai oleh siswa SMK kelompok tehnik. Oleh karena itu guru matematika SMK perlu memahami pembelajaran vektor di sekolahnya.

B. Tujuan

Setelah mengikuti pendidikan dan pelatihan (diklat) peserta diharapkan mampu menjelaskan dan memberi contoh:

1. pengertian vektor berdasarkan ruang lingkupnya.
2. operasi vektor didalam ruang dimensi dua dan tiga.
3. menyelesaikan soal vektor yang berkaitan dalam bidang keahlian.

C. Ruang Lingkup

Bahan ajar vektor dimaksudkan untuk meningkatkan kompetensi guru matematika SMK dalam menjelaskan konsep-konsep dasar materi/pokok bahasan matematika yang akan diajarkan kepada siswa. Hal-hal yang akan dibahas meliputi: Pengertian Vektor, Ruang Lingkup Vektor, Operasi Vektor dan Aplikasi Vektor pada Bidang Keahlian.

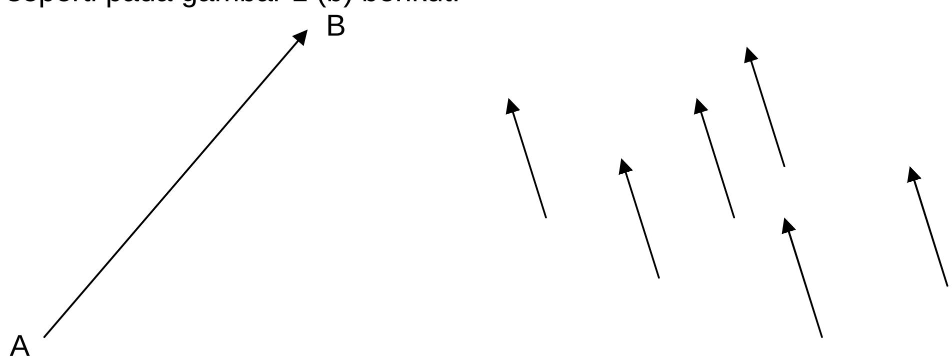
Bab II
VEKTOR

A. Pengertian Vektor

Dalam matematika vektor digambarkan sebagai ruas garis berarah. Arahnya dari titik pangkal menuju titik ujung, sedangkan jarak dari titik pangkal ke titik ujung disebut panjang vektor. Untuk menyatakan sebuah vektor biasanya digunakan notasi huruf kecil tebal atau bergaris atas atau bawah, misalnya : **u** atau $\bar{u}$ atau $\underline{u}$. Vektor dapat dipandang secara geometri dan secara aljabar.

Secara geometri sebuah vektor diwakili oleh sebuah ruas garis berarah dengan panjang ruas garis itu menunjukkan besar, sedangkan arahnya menunjukkan arah vektor itu. Jika ruas garis AB seperti pada gambar 1(a) adalah sebuah vektor **v** dengan titik A disebut titik pangkal (*initial point*) dan titik B disebut titik ujung (*terminal point*) maka kita dapat menuliskan **v** = $\overrightarrow{AB}$

Vektor-vektor yang mempunyai panjang yang sama dan arah yang sama dinamakan ekivalen, maka vektor yang ekivalen dianggap sama walaupun vektor-vektor tersebut mungkin diletakkan didalam kedudukan yang berbeda seperti pada gambar 1 (b) berikut:



(a) Vekor $\overrightarrow{AB}$ (b) Vektor-vektor yang ekivalen

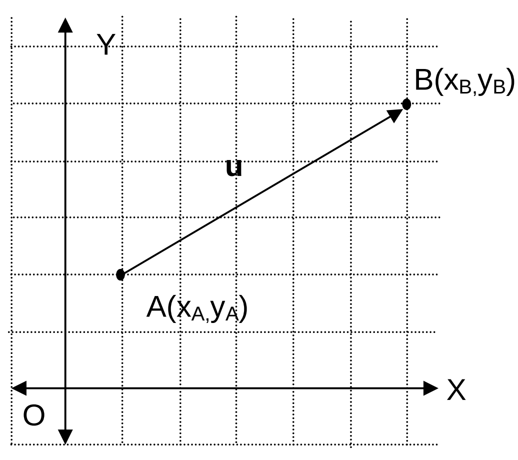
Gambar 1

Ukuran (panjang) atau norm suatu vektor **v** ditulis dengan notasi $|\mathbf{v}|$.

Vektor yang panjangnya sama dengan satu satuan panjang disebut vektor satuan. Sehingga vektor satuan dari suatu vektor **a** dirumuskan dengan $\frac{1}{|\mathbf{a}|}\,\mathbf{a}$

Secara aljabar, vektor dalam dimensi dua (R^2) adalah pasangan terurut dari bilangan real [x, y], dengan x dan y adalah komponen-komponen vektor tersebut dan dalam dimensi tiga (R^3) vektor adalah pasangan terurut dari bilangan real [x, y, z], dengan x, y dan z adalah komponen-komponen vektor tersebut. Sehingga didalam bidang kartesius suatu vektor dapat dinyatakan dengan pasangan bilangan berurutan, misalnya diberikan sebuah titik A(x_1,y_1) maka didapatkan ruas garis berarah dari titik pusat sumbu O(0,0) ke titik A yaitu $\overrightarrow{OA}$. Bentuk ruas garis berarah $\overrightarrow{OA}$ disebut sebagai vektor posisi dari titik A, sehingga didapatkan $\overrightarrow{OA}$ = (x_1,y_1) = $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$; dengan x_1 dan y_1 merupakan komponen vektor . Dengan demikian suatu vektor yang bertitik pangkal O dengan titik ujung suatu titik yang diketahui disebut vektor posisi. Koordinat titik yang diketahui itu merupakan komponen-komponen vektor posisinya.

Perhatikan gambar berikut :



Gambar 2

Vektor **u** dapat dituliskan :

u = $\overrightarrow{AB}$ = $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ dengan $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ dan $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ disebut komponen vektor

Sehingga vektor **u** pada gambar 2 diatas dapat dinyatakan:

u = $\overrightarrow{AB}$ = $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 6-1 \\ 5-2 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Sedangkan $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ disebut vektor posisi titik A dan

$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ disebut vektor posisi titik B.

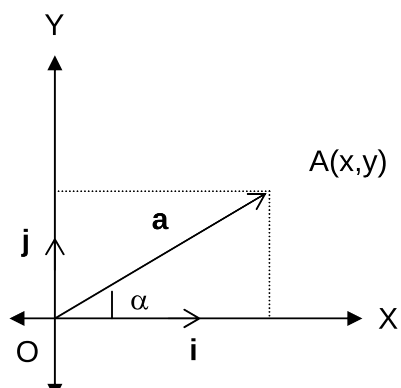
Panjang vektor **u** adalah $|\mathbf{u}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

B. Ruang Lingkup Vektor

Seperti dalam geometri yang diajarkan di SMK yaitu geometri datar dan geometri ruang, maka vektor yang akan dibicarakan meliputi :

1. Vektor di dalam Ruang Dimensi Dua (R^2)

Untuk memudahkan menjelaskan vektor kepada siswa maka pada bidang dibuat sebuah sistem koordinat kartesius, sehingga setiap vektor yang sejajar bidang koordinat diwakili oleh vektor yang besar dan arahnya sama dan terletak pada bidang tersebut. Vektor-vektor yang sejajar dengan suatu bidang datar dinamakan vektor-vektor koplanar. Dan untuk menyatakan vektor yang lain pada bidang kartesius, digunakan vektor satuan, sehingga jika A(x,y) serta **i** dan **j** masing-masing vektor pada arah positif pada sumbu x dan y. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar 3 berikut:



Gambar 3.

Suatu vektor **a** dalam koordinat kartesius tersebut dapat dinyatakan :

a = $\overrightarrow{OA}$ = (x,y) = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ = x **i** + y **j**

Panjang vektor a adalah $\sqrt{x^2 + y^2}$ dan

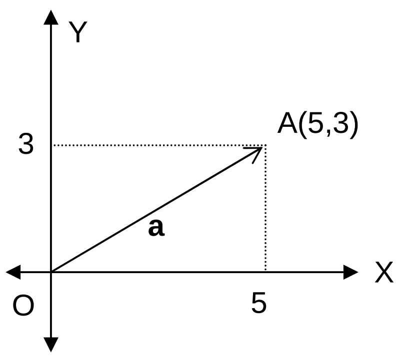
besarnya tg $\alpha = \frac{y}{x}$

Sedangkan **i** adalah vektor satuan pada sumbu X dan **j** merupakan vektor satuan pada sumbu Y, maka vektor ini dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dalam vektor **i** dan **j** atau bentuk komponennya yaitu :

i = $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ dan **j** = $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Contoh:

Vektor $\overrightarrow{OA}$ pada gambar berikut dapat dinyatakan



Vektor **a =** $\overrightarrow{OA}$ = 5 **I** + 3 **j**

(kombinasi linier dari **i** dan **j**)

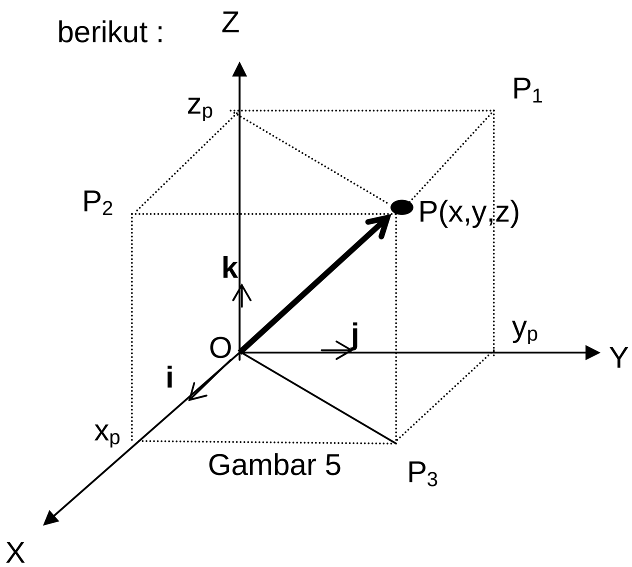
atau vektor **a =** $\overrightarrow{OA}$ = $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

(bentuk komponen)

Gambar 4

2. Vektor di dalam Ruang Dimensi Tiga (R^3)

Untuk menentukan kedudukan atau letak titik di dalam ruang dapat digunakan sistem koordinat dengan sumbu X, Y dan Z dengan masing-masing sumbu saling tegak lurus dan berpotongan di sebuah titik O, Sebuah titik P dalam ruang disajikan dalam pasangan berurutan (x,y,z) dengan salib sumbu kartesius digunakan aturan tangan kanan seperti pada gambar 5 berikut :



Gambar 5

Jarak P sampai bidang YOZ adalah x atau $PP_1 = x_p$

Jarak P sampai bidang XOZ adalah y atau $PP_2 = y_p$

Jarak P sampai bidang XOY adalah z atau $PP_3 = z_p$

Dengan demikian vektor posisi P adalah $\overrightarrow{OP}$ dinyatakan dengan bentuk sebagai berikut :

$\overrightarrow{OP}$ = x **i** + y **j** + z **k** jika **i**, **j** dan **k** merupakan vektor satuan dalam koordinat ruang. (**i**: vektor satuan pada sumbu X; **j**: vektor satuan pada sumbu Y dan **k**; vektor satuan pada sumbu Z)

atau $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Besar (panjang / norm) vektor $\overrightarrow{OP}$ tersebut adalah $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Sebagai contoh, misalkan sebuah titik A (3,2,4), maka vektor posisi titik A adalah $\overrightarrow{OA}$ atau **a** dapat dinyatakan dengan :

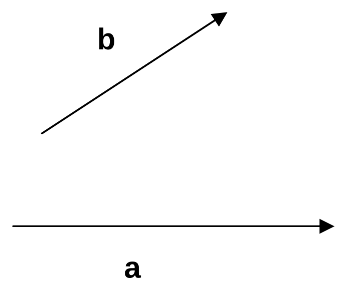
a = $\overrightarrow{OA}$ = 3 **i** + 2 **j** + 4 **k** atau **a** = $\overrightarrow{OA}$ = $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

C. Operasi Vektor

1. Penjumlahan Vektor

Dua buah vektor **a** dan **b** dapat dijumlahkan yang hasilnya **a** + **b** dengan cara sebagai berikut :

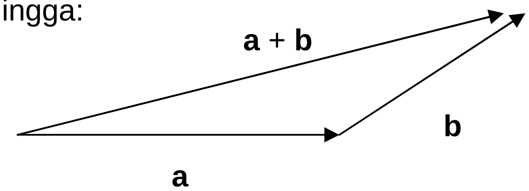
Perhatikan gambar 6 berikut :



Gambar 6

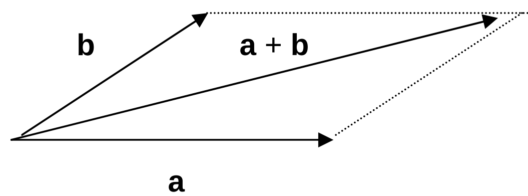
Dua vektor pada gambar 6 diatas dapat dijumlahkan dengan dua cara yaitu :

a). aturan segitiga vektor, yaitu pangkal **b** digeser ke ujung **a** sehingga:



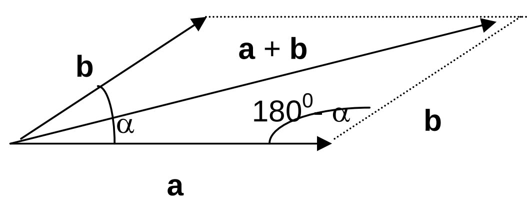
Gambar 7

b). aturan jajaran genjang, yaitu pangkal **b** digeser ke pangkal **a**, kemudian dilukis jajaran genjang, sehingga:



Gambar 8

Jika kedua vektor mengapit sudut tertentu maka besarnya jumlah dua vektor tersebut dapat dicari dengan menggunakan rumus aturan cosinus seperti pada trigonometri yaitu:



Gambar 9

Maka didapat :

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{ab}\,\mathrm{Cos}\,(180^0 - \alpha)$$

$$= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{ab}\,\mathrm{Cos}\;\alpha$$

Jadi **a** + **b** = $\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{ab}\,\mathrm{Cos}\;\alpha}$

Sehingga jika $\alpha = 90^0$ maka Cos α= 0 maka **a** + **b** = $\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$

Jika vektor disajikan dalam bentuk komponen (secara aljabar) maka hasil penjumlahan vektornya adalah sebuah vektor yang komponennya merupakan hasil penjumlahan komponen-komponen vektor penyusunnya.

Contoh:

Jika **p** = $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dan **q** = $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, maka **p** + **q** = $\begin{pmatrix} 2+4 \\ -3+2 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

Jika **p** = 2**i** + 4**j** dan **q** = –3**i** – 2**j**, maka **p** + **q** = (2 – 3)**i** +(4–2)**j** = –**i** + 2**j**

Sifat penjumlahan vektor:

Jika **a**, **b** dan **c** adalah suatu vektor maka:

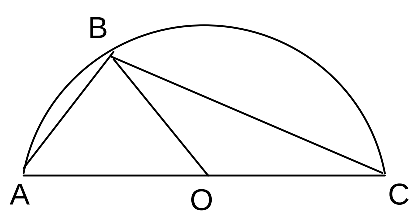
1) **a** + **b** = **b** + **a** sifat komulatif
2) (**a** + **b**) + **c** = **a** + (**b** + **c**) sifat asosiatif
3) Setiap vektor mempunyai elemen identitas, yaitu vektor nol sehingga
   a + **0** = **a** + **0**
4) Setiap vektor mempunyai invers (yaitu vektor negatif) sehingga
   a + (- **a**) = **0**

Dua vektor yang sama besar dan arahnya berlawanan dinamakan dua vektor yang berlawanan

Contoh:

1) Buktikan bahwa sudut yang menghadap busur setengah lingkaran adalah sudut siku-siku.

   Bukti: Perhatikan gambar berikut :



Gambar 10

Kita tunjukkan bahwa vektor $\overrightarrow{AB}$ tegak lurus pada vektor $\overrightarrow{BC}$ dengan memisalkan O sebagai pusat dari setengah lingkaran maka:

$$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC})$$

$$= (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}).(-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$= \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OB}$$

$$= \left|\overrightarrow{OC}\right|^2 - \left|\overrightarrow{OB}\right|^2$$ = O (terbukti)

karena $\overrightarrow{OC}$ dan $\overrightarrow{OB}$ mempunyai panjang yang sama.

2) Diketahui vektor :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \;;\; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tentukan **x** jika : a) **x** = **a** + **b**

b) **x** + **a** = **c**

Penyelesaian :

a). **x** = **a** + **b**

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b). **x** + **a** = **c** $\Rightarrow$ **x** = **c** - **a**

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) Ditentukan titik-titik P(2,7,8) dan Q(-1,1,-1). Tentukanlah dalam bentuk komponen vektor yang diwakili oleh $\overrightarrow{PR}$ apabila R adalah titik pada $\overrightarrow{PQ}$ sehingga $\overrightarrow{PR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ dan berapa koordinat R.

Penyelesaian :

$\overrightarrow{PQ}$ = **q – p**

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Karena $\overrightarrow{PR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ sehingga komponen vector yang diwakili oleh $\overrightarrow{PR} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Misal koordinat titik R adalh (x,y,z) maka:

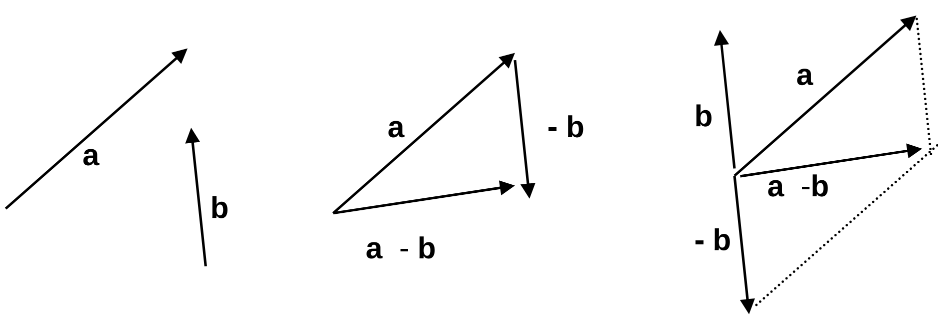
$\overrightarrow{PR}$ = **r – p** $\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi koordinat R (1,5,5)

2. Selisih Dua Vektor

Selisih dua vektor **a** dan **b**, dinyatakan sebagai **a -** b dapat dipandang sebagai penjumlahan vektor **a** dengan invers vektor **b** atau -**b** ditulis **a – b** = **a** + (- **b**) digambarkan sebagai berikut:



Gambar 11

Contoh:

Diketahui dua titik P(-1,4,3) dan titik Q(2,1,-3)

Tentukan vektor $\overrightarrow{PQ}$

Penyelesaian :

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

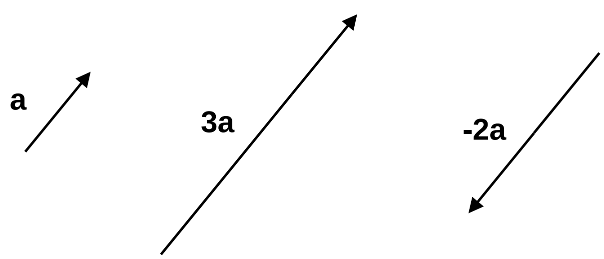
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

3. Perkalian Vektor dengan Skalar

Jika **a** suatu vektor dan k adalah skalar (bilangan nyata) maka perkalian vektor **a** dengan skalar k ditulis k**a** atau **a**k merupakan vektor yang panjangnya k$|\mathbf{a}|$ dan mempunyai arah yang sama dengan **a**, sedangkan - k**a** adalah vektor yang panjangnya k$|\mathbf{a}|$ tetapi berlawanan arah dengan **a**. Dengan kata lain didefinisikan :

$$k\underline{a} = \underbrace{\underline{a} + \underline{a} + \underline{a} + \ldots + \underline{a}}_{\text{sebanyak k suku}}$$

Sebagai contoh dapat digambarkan :



Gambar 12

Berdasarkan pengertian diatas, maka dapat disimpulkan bahwa:

a). Jika ada 2 vektor yang sejajar, maka yang satu dapat dinyatakan sebagai hasil perbanyakan vektor yang lain dengan skalar.

b). Untuk membuktikan dua vektor sejajar cukup membuktikan salah satu vektor merupakan kelipatan vektor yang lain dalam bentuk komponen.

Contoh: Misalkan **p** = $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, maka | **p** | = $\sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$,

sehingga:

$$3\mathbf{p} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ dan } |\,3\mathbf{p}\,| = \sqrt{12^2 + (-6)^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

$$-\tfrac{1}{2}\mathbf{p} = -\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dan } |\,-\tfrac{1}{2}\mathbf{p}\,| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Misalkan $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, maka $|\,\mathbf{r}\,| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$, sehingga

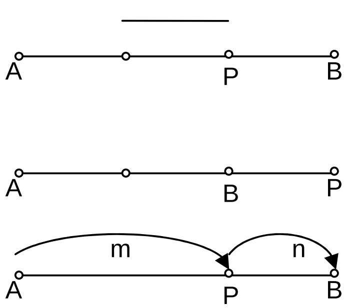
$$-4\mathbf{r} = 4\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ dan } |\,4\mathbf{r}\,| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 + (-4)^2} = \sqrt{144} = 12$$

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \tfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ dan } |\,\tfrac{1}{2}\mathbf{r}\,| = \sqrt{1 + (-1)^2 + (\tfrac{1}{2})^2} = \sqrt{2\tfrac{1}{4}} = 1\tfrac{1}{2}$$

4. Rumus Pembagian pada Vektor

Pembagian Ruas Garis dalam Perbandingan m : n

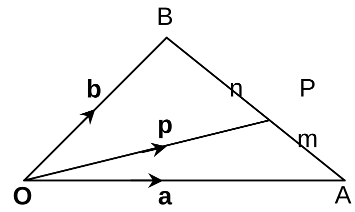
Sebuah titik P membagi ruas garis $\overline{AB}$ dalam perbandingan m : n bila AP : PB = m : n. P dikatakan membagi di dalam jika $\overrightarrow{AP}$ dan $\overrightarrow{PB}$ mempunyai arah sama serta m dan n mempunyai tanda yang sama. Titik P dikatakan membagi di luar jika $\overrightarrow{AP}$ dan $\overrightarrow{PB}$ mempunyai arah berlawanan serta m dan n mempunyai tanda yang berlawanan.



→ AP : PB = 2 : 1
→ AP : AB = 2 : 3
→ AP : PB = 3 : –1
→ AP : AB = 3 : 2
→ **AP : PB = m : n**

Rumus Pembagian:

a). Dalam Bentuk Vektor



$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{b} + n\mathbf{a}}{m+n}$$

Jika *P* adalah titik tengah $\overline{AB}$ maka nilai perbandingan m : n adalah 1 : 1, sehingga diperoleh: $\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

b). Dalam Bentuk Koordinat

$$x_p = \frac{mx_B + nx_A}{m+n} \qquad y_p = \frac{my_B + ny_A}{m+n} \qquad z_p = \frac{mz_B + nz_A}{m+n}$$

5. Perkalian Titik (*Dot Produc*t)/Perkalian Skalar Dua Vektor

Hasil kali titik atau dot product antara dua buah vektor akan menghasilkan suatu skalar atau bilangan real. Perkalian titik sering disebut juga perkalian skalar dua vektor. Hasil kali skalar dua vektor **a** dan **b** didefinisikan : $\mathbf{a.b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \text{ Cos } \theta$

dimana θ adalah sudut yang diapit oleh kedua vektor **a** dan **b**.

Dari definisi diatas, dapat kita tentukan sifat-sifat hasil kali skalar sebagai berikut :

1). Jika **a** dan **b** merupakan dua vektor yang arahnya sama maka $\mathbf{a.b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$

2). Jika **a** dan **b** merupakan dua vektor yang berlawanan arah maka $\mathbf{a.b} = -\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$

3). Jika **a** dan **b** merupakan dua vektor yang tegak lurus maka **a.b=**0

4). Jika **a** dan **b** merupakan dua vektor dan **a.b** $>$ 0 maka sudut antara dua vektor tersebut adalah sudut lancip

5). Jika **a** dan **b** merupakan dua vektor dan **a.b** $<$ 0 maka sudut antara dua vektor tersebut adalah sudut tumpul

6). Sifat komutatif yaitu **a.b** = **b.a**

7). Sifat distributif yaitu **a.**(**b** + **c**) = **a.b** + **a.c**

Apabila vektor **a** dan **b** yang dinyatakan dalam bentuk komponen, misalnya : **a** = a_1 **i** + a_2 **j** + a_3 **k** dan **b** = b_1 **i** + b_2 **j** + b_3 **k** maka :

a.b = (a_1 **i** + a_2 **j** + a_3 **k**)**.** (b_1 **i** + b_2 **j** + b_3 **k**). Dengan menggunakan sifat distributif dan hasil kali skalar dua vektor yang saling tegak lurus dan searah maka :

i . i = **i**^{2} = 1 ; **j . j** = **j**^{2} = 1 dan **k . k** = **k**^{2} = 1

i . j = 0 ; **j . k** = 0 dan **k . i** = 0

Dengan demikian, kita peroleh rumus hasil kali skalar dua vektor yaitu : untuk vektor **a** = a_1 **i** + a_2 **j** + a_3 **k** dan **b** = b_1 **i** + b_2 **j** + b_3 **k** maka : **a.b** = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 (bukti diserahkan kepada peserta diklat)

Contoh:

1). Hitunglah perkalian skalar antara:

$\underline{a} = 2i + 3j + 5k$ dan $\underline{b} = i + j + k$

Penyelesaian:

$\underline{a} \,.\, \underline{b}$ = 2.1 + 3.1 + 5.1

= 2 + 3 + 5 = 10

2). Diketahui vektor-vektor sebagai berikut:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tentukan hasil kali skalar dua vektor tersebut

Penyelesaian:

$\underline{a} \,.\, \underline{b}$ = 1.5 + 2.4 + 4.0

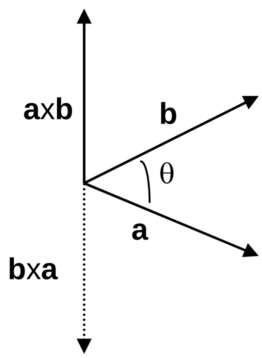
= 5 + 8 =13

Dari rumus perkalian dua vektor **a.b =** $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$ Cos θ maka besar sudut antara vektor a dan vektor b dapat ditentukan, yaitu:

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{a}.b}{|a|.|b|} = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}.\sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2}}$$

6. Perkalian Silang (Cross *Produc*t)

Perkalian silang sering disebut juga perkalian vektor antara dua vektor. Perkalian vektor antara vektor **a** dan **b** didefinisikan sebagai vektor yang mempunyai besar $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$ Sin θ , dengan θ adalah sudut yang diapit oleh kedua vektor. Arah vektor hasil kalinya adalah tegak lurus vektor **a** dan **b** serta vektor **a** , **b** dan **a**x **b** dalam urutan membentuk system tangan kanan, sehingga dapat digambarkan :



Perhatikan bahwa :

$|\mathbf{a}x\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$ Sin θ

bx**a = -(a**x **b)**

Jika $\theta = 0^0$ maka $|\mathbf{a}x\mathbf{b}| = 0$

Jika $\theta = 90^0$ maka $|\mathbf{a}x\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$

Secara geometri, norm perkalian antara dua vektor merupakan luas bangun segi empat yang dibentuk oleh kedua vektor tersebut. Sifat ini dapat diturunkan dari persamaan Lagrange. $|\mathbf{a}x\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}.\mathbf{b})^2$

Apabila vektor dinyatakan dalam bentuk vektor satuan **i**, **j** dan k

Misalnya : $\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}$ dan $\mathbf{b} = b_1\,\mathbf{i} + b_2\,\mathbf{j} + b_3\,\mathbf{k}$

Karena **i** x **i =** 1.1 Sin 0^0 = 0 analog sehingga : **i**x**i** = **j**x**j** = **k**x**k** = 0

Juga **i** x **j =** 1.1 Sin 90^0 = 1 dalam arah OZ yaitu **i** x **j = k** sehingga **i** x **j = k** ; **j** x **k = i** dan **k** x **i = j**

Maka : $\mathbf{a}x\mathbf{b} = (a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k})x(b_1\,\mathbf{i} + b_2\,\mathbf{j} + b_3\,\mathbf{k})$.

Dengan sifat diatas dan hukum distributive dapat dijabarkan menjadi : $\mathbf{a}x\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\,\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{k}$. Dan apabila ditulis dalam bentuk determinan matriks, maka kita dapatkan rumus sebagai berikut : $\mathbf{a}x\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

Contoh :

Diketahui vektor **p** = 2**i** + 4**j** + 3**k** dan **q** = **i** + 5**j** - 2**k.** Tentukan **p**x**q**

Penyelesaian :

$$\mathbf{p}\times\mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

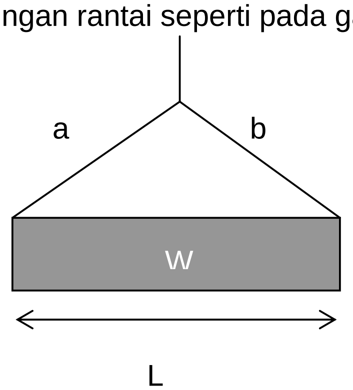
= (-8-15) **i** - (-4-3) **j** + (10-4) **k**

= -22 **i** + 7 **j** + 6 **k**

D. Contoh Aplikasi Vektor

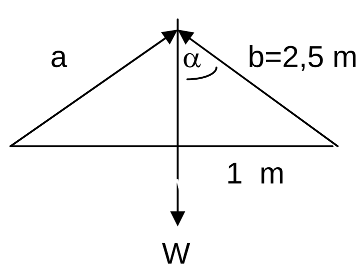
Perhatikan contoh soal berikut ini :

Andaikan sebuah benda yang beratnya (W) adalah 304 N diangkat dengan rantai seperti pada gambar.



Jika panjang a = b = 2,5 m. dan panjang benda L = 2 m. Tentukan gaya yang terjadi pada rantai a atau b !

Penyelesaian :



Sin $\alpha = \frac{1}{2,5}$ = 0,4 $\Rightarrow$ $\alpha = 26^0\,12^I$

Maka : $W^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\alpha$

$304^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos 52^0\,24^I$

$= a^2 + a^2 + 2aa \cos 52^0\,24^I$

$= 2a^2 + 2a^2 + \cos 52^0\,24^I$

$= a^2 (2 + 2.\ 0,68)$

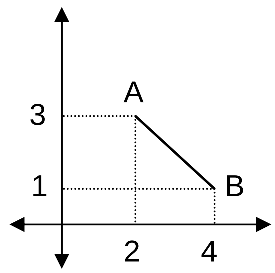
Sehingga $a^2 = \frac{304^2}{3,36}$ = 27504,762 . Jadi a adalah 165,85 N

E. Latihan

1). Sebutkan empat buah besaran skalar !

2). Sebutkan empat buah besaran vektor !

3). Nyatakan vektor $\overrightarrow{AB}$ pada gambar dalam bentuk komponen (matriks)



4). Buktikan bahwa jika a, b dan c adalah panjang sisi-sisi sebuah segitiga dan α adalah sudut yang berhadapan dengan sisi dengan panjang a, maka $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

5). Tentukan komponen vektor $\overrightarrow{AB}$ jika titik A(2,4,3) dan B(1,-5,2), kemudian tulislah vektor $\overrightarrow{AB}$ dalam satuan **i**, **j** dan **k**.

6). Tunjukkan bahwa vektor yang melalui titik-titik (2,2,3) dan (4,3,2) sejajar dengan vektor-vektor yang melalui titik (5,3,-2) dan (9,5,-4).

7). Diketahui titik A (2,3,4) dan titik B (9,-11,18). Tentukan koordinat titik P, jika titik P membagi AB didalam dengan perbandingan 5:2.

8). Diketahui dua buah vector yang dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut : $a = 3i + j + 2k$ dan $b = i - 2j - 4k$

Tentukan:

a). Panjang vektor $\underline{a}$ atau $|a|$

b). Vektor satuan **b**

c). Panjang proyeksi **a** pada **b**

d). Vektor proyeksi **b** pada **a**

e). Perkalian titik antara dua vektor **a** dan **b** (**a . b**)

f). Perkalian silang antara dua vektor **a** dan **b** (**a** x **b**)

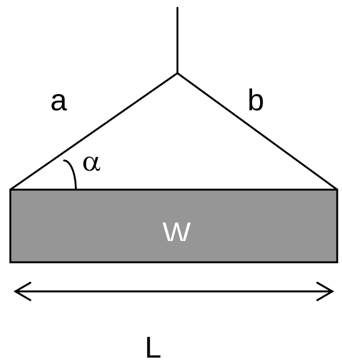
9). Diketahui titik A (-1,1,2) dan B (-2,-1,1)

a). Hitunglah $|a|$ dan $|b|$

b). Hitung besar sudut AOB

c). Tunjukkan bahwa ΔAOB sama sisi

10). Sebatang baja W diangkat oleh rantai seperti pada gambar.



Jika diketahui W = 2000 N, L = 1,5 m dan gaya yang terjadi pada rantai a dan b adalah 1500 N. Hitunglah panjang rantai a

Bab III
Penutup

Bahan ajar ini membahas konsep vektor secara umum. Konsep vektor diberikan pada siswa Sekolah Menengah Kejuruan (SMK) kelompok tehnik dan belum memberikan contoh-contoh dari semua program keahlian yang ada di kelompok tehnik tersebut tetapi hanya sebagian. Pada akhir pembahasan diberikan soal latihan dan apabila ada kesulitan dalam menjawab soal latihan dapat didiskusikan dengan peserta lain.

Agar peserta diklat dapat lebih memahami konsep vektor dalam masalah ketehnikan yang sesuai dengan program keahlian yang diajarkan di sekolah, disarankan peserta mendiskusikan dengan peserta lain untuk mengembangkan dan memberikan contoh-contohnya.

Daftar Pustaka

E.T. Ruseffendi, 1989, *Dasar – dasar Matematika Modern dan Komputer untuk Guru*, Bandung, Tarsito

Markaban dkk, 2007, *Matematika SMK/MAK Kelas XI*, Klaten, Saka Mitra Kompetensi P.T Macanan Jaya Cemerlang

PAUL CALTER, 1979, *Theory and Problems of Technical Mathematics*, Schaum's outline, Mc-GRAW.HILL BOOK COMPANY

ST. NEGORO – B. HARAHAP, 1985, *Ensiklopedia Matematika*, Jakarta, Ghalia Indonesia.

WIYOTO, WAGIRIN, 1996, *Matematika Tehnik Jilid 2a*, Bandung : Angkasa

NOORMANDIRI B.K, ENDAR SUCIPTA, 2000, *Matematika SMU untuk Klas 3 Program IPA*, Jakarta : Erlangga